

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»

Факультет информационной безопасности

Кафедра инфокоммуникационных технологий

**В. В. Муравьев, С. А. Корневский, Т. М. Фильченкова**

## **ФОРМИРОВАНИЕ И ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ**

*Рекомендовано УМО по образованию в области информатики  
и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия  
для специальностей 1-45 01 01 «Инфокоммуникационные технологии  
(по направлениям)»*

Минск БГУИР 2023

УДК 621.391:654.1(076)  
ББК 32.811.3я73  
М91

**Р е ц е н з е н т ы:**

кафедра связи учреждения образования  
«Военная академия Республики Беларусь»  
(протокол № 15 от 09.04.2021);

заместитель директора по науке  
научно-производственного республиканского унитарного предприятия  
«Научно-исследовательский институт технической защиты информации»  
кандидат технических наук, доцент С. Н. Касанин

**Муравьев, В. В.**

М91      **Муравьев, В. В.**      Формирование и цифровая обработка телекоммуникационных сигналов: учеб.-метод. пособие / В. В. Муравьев, С. А. Корневский, Т. М. Фильченкова. – Минск : БГУИР, 2023. – 99 с. : ил.  
ISBN 978-985-543-665-3.

Рассмотрены методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов. Приведены основные преобразования сигналов (Фурье, Гильберта и Z-преобразование). Рассмотрены схемы генерации сложных сигналов на основе аппарата свертки, корреляции и произведения сигналов.

**УДК 621.391:654.1(076)**  
**ББК 32.811.3я73**

**ISBN 978-985-543-665-3**

© Муравьев В. В., Корневский С. А.,  
Фильченкова Т. М., 2023  
© УО «Белорусский государственный  
университет информатики  
и радиоэлектроники», 2023

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>1 МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ</b> .....	4
1.1 Содержание, основные направления и алгоритмы цифровой обработки сигналов .....	4
1.2 Сигналы с ограниченной энергией .....	6
1.3 Определение длительности и полосы частот сигналов .....	11
1.4 Дискретные сигналы .....	19
<b>2 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ</b> .....	31
2.1 Обобщённый ряд Фурье .....	31
2.2 Интегральное преобразование Фурье .....	33
2.3 Применение преобразования Фурье к теории цепей .....	41
2.4 Основные свойства преобразования Фурье .....	43
2.4.1 Линейные преобразования оси времени .....	43
2.4.2 Дифференцирование и интегрирование .....	45
2.4.3 Свёртка, корреляция и произведение сигналов .....	57
2.5 Примеры применения свёрток и корреляций .....	60
<b>3 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА</b> .....	69
<b>4 Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ</b> .....	78
4.1 Z-преобразование и его свойства .....	78
4.1.1 Общая информация о Z-преобразовании .....	78
4.1.2 Основные свойства Z-преобразования .....	81
4.2 Обратное Z-преобразование .....	85
<b>КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ</b> .....	93
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ</b> .....	98

# 1 МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

## 1.1 Содержание, основные направления и алгоритмы цифровой обработки сигналов

Задачи цифровой обработки сигналов (ЦОС) связаны с преобразованием дискретных по времени и квантованных по уровню сигналов на входе в строго соответствующие алгоритму сигналы на выходе системы. Это означает, что исходный аналоговый (непрерывный по времени) сигнал должен быть преобразован в исходную последовательность чисел, которая преобразуется в выходную последовательность устройством (системой) ЦОС по заданному алгоритму  $F_{ц}$ . На рисунке 1.1 представлены этапы ЦОС.

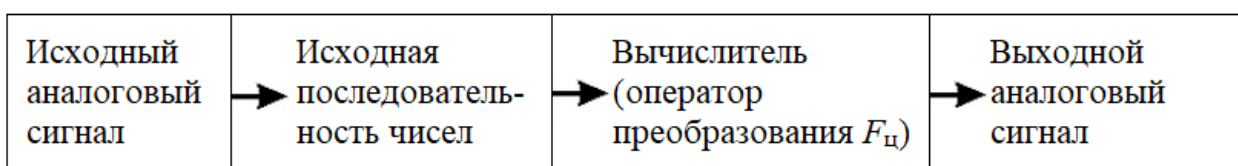


Рисунок 1.1 – Основные этапы цифровой обработки сигналов

Обобщенная схема обработки аналоговых сигналов состоит из датчика, аналогового преобразователя, АЦП (аналого-цифровой преобразователь), цифрового процессора, ЦАП (цифроаналоговый преобразователь) и выходного фильтра (рисунок 1.2).

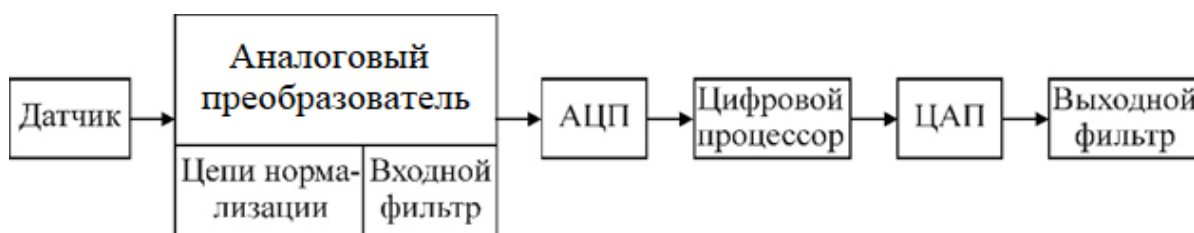


Рисунок 1.2 – Обобщенная схема цифровой обработки сигналов

Как видно из рисунка 1.2, цифровой процессор является главным элементом системы ЦОС. Он выполняет сложные задачи (сжатие данных в реальном времени, фильтрация, задачи анализа на основе алгоритмов быстрого преобразования Фурье) эффективно и с высокой скоростью.

В таблице 1.1 приведены требования к быстродействию средств цифровой техники в различных областях их практического применения [1–5].

Таблица 1.1 – Требования к быстродействию средств цифровой обработки сигналов

Области применения ЦОС	Требуемое быстродействие (операций в секунду)
Цифровое управление	$< 10^5$
Системы наведения	$x(1) = \frac{[a_1 - x(0)b_1]}{b_0} = [2 - 1 \cdot (-1)] = 3$
Синтез речи	$10^6$
Кодирование речи	$10^7$
Спутниковые модемы	$10^8$
Распознавание речи	$\leq 10^9$
Обработка изображений	$10^9 - 10^{10}$
Радио- и гидролокация	$10^{10} - 10^{11}$

Существующие алгоритмы ЦОС в основном обладают следующими свойствами: регулярность, рекурсивность, локальность. Они способствуют повышению эффективности работы устройств, которые реализуют эти алгоритмы.

В таблице 1.2 приведены наиболее распространённые области приложения методов ЦОС.

Таблица 1.2 – Области приложения основных методов цифровой обработки сигналов

Направление ЦОС	Примеры решения задач
Линейная фильтрация	Селекция сигналов в частотной области; синтез фильтров, согласованных с сигналами; частотное разделение каналов; цифровые преобразователи Гильберта и дифференциаторы; корректоры характеристик каналов
Спектральный анализ	Обработка речевых, звуковых, сейсмических, гидроакустических сигналов; распознавание образов
Частотно-временной анализ	Компрессия изображений; гидро- и радиолокация; задачи обнаружения
Адаптивная фильтрация	Обработка речи, изображений; распознавание образов; подавление шумов; адаптивные антенные решетки
Нелинейная обработка	Вычисление корреляции, медианная фильтрация; синтез амплитудных, фазовых и частотных детекторов; обработка речи, векторное кодирование
Многоскоростная обработка	Интерполяция (увеличение) и децимация (уменьшение) частоты дискретизации в многоскоростных системах телекоммуникации и аудиосистемах

## 1.2 Сигналы с ограниченной энергией

Чтобы расширить представление о преобразовании Фурье, рассмотрим некоторые задачи по оптимизации формы и параметров сигналов. Наиболее полно такие задачи решаются для сигналов с конечной энергией:

$$E_s = \|S\|^2 = \|\dot{U}\|^2 < \infty. \quad (1.1)$$

Фиксируя энергию и меняя форму сигнала, можно различным образом распределять эту энергию на осях времени и частоты и тем самым решать оптимизационные задачи. Прежде всего отметим, что условию (1.1) могут удовлетворять только три группы сигналов: ограниченные (так называемые финитные) по времени, ограниченные по частоте и неограниченные как по времени, так и по частоте. Причём, если сигнал ограничен по одной из переменных, то по другой – не ограничен. Рассмотрим характерные примеры:

$$S_1(t) = \frac{A}{2} \cdot \left[ 1 - \text{sign}\left(|t| - \frac{T}{2}\right) \right],$$
$$S_1(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{T}{2}, \end{cases} \quad \dot{U}_1(f) = A \cdot \frac{\sin \pi \cdot f \cdot T}{\pi \cdot f},$$
$$S_2(t) = \frac{A}{F} \cdot \frac{\sin \pi \cdot Ft}{\pi \cdot t}, \quad \dot{U}_2(f) = \begin{cases} \frac{A}{F}, & |f| \leq \frac{F}{2}, \\ 0, & |f| > \frac{F}{2}, \end{cases}$$
$$S_3(t) = A \cdot e^{-\lambda \cdot t^2}, \quad U_3(f) = A \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \cdot e^{-\pi^2 \cdot f^2}. \quad (1.2)$$

Энергии этих сигналов соответственно равны

$$E_1 = A^2 \cdot T,$$

$$E_2 = \frac{A^2}{F},$$

$$E_3 = A^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot \lambda}},$$

где  $S_1(t)$  – первый сигнал, финитный по времени, не имеющий граничной частоты,  $S_2(t)$  – второй сигнал, финитный по частоте, не ограниченный во времени,  $S_3(t)$  – третий сигнал, не имеющий границ как на оси времени, так и частоты.

На основе этих примеров можно построить ряд других и убедиться, что не существует сигналов, финитных сразу по двум переменным.

Пусть  $S(t) \leftrightarrow \dot{U}(f)$  – произвольный, не ограниченный во времени сигнал. Введём вспомогательные функции времени:

$$W_0(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{T}{2}, \end{cases}$$

$$V_0(t) = \frac{\sin \pi \cdot F \cdot t}{\pi \cdot t}, \quad t \in (-\infty; \infty). \quad (1.3)$$

С их помощью образуем два новых сигнала:

$$S_T(t) = S(t) \cdot W_0(t) = \begin{cases} S(t), & |t| \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{T}{2}, \end{cases}$$

$$S_F(t) = S(t) * V_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) \cdot \frac{\sin \pi \cdot F \cdot (t - \tau)}{\pi \cdot (t - \tau)} d\tau. \quad (1.4)$$

Спектры этих сигналов можно найти по теоремам о произведении и свёртках (спектры вспомогательных функций даны в (1.2)). В результате имеем

$$\dot{U}_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(x) \cdot \frac{\sin \pi \cdot (f - x) \cdot T}{\pi \cdot (f - x)} dx,$$

$$\dot{U}(f) = \begin{cases} \dot{U}(f), & |f| \leq \frac{F}{2}, \\ 0, & |f| > \frac{F}{2}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Сигнал  $S_T(t)$  является финитным по времени, однако его спектральная плотность  $\dot{U}_T(f)$  существует на всей оси частот  $f \in (-\infty; \infty)$ . Это следует из того, что по протяжённости результат свёртки в (1.5) превышает любую из свёртываемых функций. Сигнал  $S_F(t)$  является финитным по частоте, но во времени он не ограничен (см. интеграл свёртки (1.4)). Пусть  $S(t) = S_3(t)$  (см. выражение (1.2)). Тогда получим

$$S_T(t) = \begin{cases} A \cdot e^{-\lambda \cdot t^2}, & |t| \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{T}{2}, \end{cases}$$

$$S_F(t) = A \cdot e^{-\lambda \cdot t^2} \cdot \operatorname{Re}\Phi\left(\frac{\pi \cdot F}{\sqrt{2 \cdot \lambda}} + j\sqrt{2 \cdot \lambda} \cdot t\right),$$

$$\Phi(z) = \frac{2}{2 \cdot \pi} \cdot \int_z^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (1.6)$$

Вместо  $2\pi$  может быть  $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ . Здесь  $\Phi(z)$  – интеграл вероятности.

Энергии новых сигналов равны

$$E_T = A^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot \lambda}} \cdot \Phi(T \cdot \sqrt{\lambda}),$$

$$E_F = A^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot \lambda}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi \cdot F}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Схема формирования финитных сигналов представлена на рисунке 1.3.



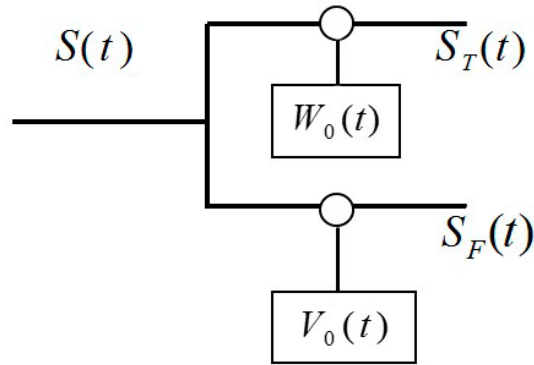


Рисунок 1.3 – Структурная схема формирования финитных сигналов

Функцию  $S_T(t)$  можно получить усечением во времени сигнала  $S(t)$  с помощью строб-импульса  $W_0(t)$ . Функцию  $S_F(t)$  как продукт свёртки можно получить, пропуская исходный сигнал  $S(t)$  через цепь с импульсной характеристикой  $g(t) = V_0(t)$ . Это будет эквивалентно усечению (или стробированию) спектра сигнала  $S(t)$  по частоте в пределах  $|f| \leq \frac{F}{2}$ .

Ясно, что сигналы  $S_T(t)$  и  $S_F(t)$  различаются не только протяжённостью во времени, но и своей формой. И не существует таких  $S(t)$ ,  $T$  и  $F$ , которые обеспечили бы равенство  $S_T(t) = S_F(t)$  на всей оси  $t \in (-\infty; \infty)$ .

*Примечание* – В рассмотренных примерах явно проявляется ещё одна особенность – взаимная заменяемость переменных  $t$  и  $f$  в преобразовании Фурье (так называемое свойство *дуальности* преобразования Фурье). Суть состоит в следующем: в случае симметричных функций  $S(t) = S(-t)$  преобразования Фурье принимают вид косинус-преобразований:

$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \cdot dt,$$

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(f) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \cdot dt. \quad (1.7)$$

При этом вещественный и симметричный сигнал имеет вещественную и симметричную спектральную плотность. В частности, из (1.7) видно, что формальной перестановкой местами переменных  $t$  и  $f$  можно получить две пары отображений:  $S(t) \leftrightarrow U(f)$  и  $S(f) \leftrightarrow U(t)$ .

Рассматриваемые здесь особенности сигналов с ограниченной энергией имеют место и для радиосигналов (радиоимпульсов). Только в этом случае финитность по частоте понимается как ограничение по полосе частот сигнала. Применительно к схеме на рисунке 1.3 преобразование можно выполнить с помощью функции

$$V_0(t) = 2 \cdot \frac{\sin \pi \cdot F \cdot t}{\pi \cdot F \cdot t} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t),$$

$$\dot{U}_V(f) = \begin{cases} 1, & |f \pm f_0| \leq \frac{F}{2}, \\ 0, & |f \pm f_0| > \frac{F}{2}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Как видно, участки спектра сигнала  $S(t)$  стробируются в окрестностях центральных частот  $\pm f_0$  с полосой  $F$ .

Следует заметить, что строго финитные по частоте сигналы с ограниченной энергией существуют только как теоретические модели. Дело в том, что предполагаемые по схеме на рисунке 1.3 цепи с импульсными характеристиками  $g(t) = V_0(t)$  вида (1.3) или (1.8) физически нереализуемы, ибо нарушается принцип причинности:  $g(t) \neq 0$  для  $t < 0$ .

Стоит сказать несколько слов о применении сигналов с ограниченной энергией и возникающих противоречиях. Данные сигналы используются в импульсных системах связи и радиолокации. Обычно под импульсом понимают финитный по времени сигнал. Независимо от формы он имеет неограниченный спектр, и это порождает ряд технических проблем. Так, для неискажённой передачи и приёма таких сигналов требуется теоретически неограниченная полоса частот. По той же причине импульсные системы связи, работающие на различных частотах, могут создавать взаимные помехи (так называемые межканальные искажения – МКИ). Попытки усечения спектра (с применением частотных фильтров) неминуемо приводят к искажению формы импульсов, их затягиванию и взаимному наложению. Последнее тоже можно рассматривать как помеху (возникают так называемые межсимвольные искажения – МСИ). Здесь видна полная аналогия со схемой на рисунке 1.3: верхняя часть является источником МКИ, нижняя часть – источником МСИ.

Указанные проблемы и противоречия принципиально неустранимы. Однако их можно существенно ослабить, если пренебречь «хвостами» протяжённых сигналов или спектров. При условии (1.3) в практических расчётах достаточно, например, использовать конечные длительность и полосу частот, в пределах которых сосредоточена основная доля энергии сигнала. Это позволит задавать реальные характеристики сигналов, проводить измерения и оценки искажений, оптимизировать сигналы по параметрам и т. д.

### 1.3 Определение длительности и полосы частот сигналов

Существуют различные подходы к определению длительности  $\Delta T$  и полосы частот  $\Delta F$  сигналов с конечной энергией. Ограничиваясь вещественными и симметричными сигналами (для краткости записей), рассмотрим следующие подходы.

1 **По уровню мощности.** На осях времени и частоты выделяют такие отрезки  $t \in \left[-\frac{\Delta T}{2}, \frac{\Delta T}{2}\right]$ ,  $f \in \left[-\frac{\Delta F}{2}, \frac{\Delta F}{2}\right]$ , в пределах которых нормированные мгновенные мощность и спектральная плотность энергии сигнала ещё превышают заданные уровни  $\beta_T$  и  $\beta_F < 1$ . Границы определяются равенствами

$$S^2\left(\frac{\Delta T}{2}\right) = \beta_T \cdot S^2(0),$$

$$U^2\left(\frac{\Delta F}{2}\right) = \beta_F \cdot U^2(0). \quad (1.9)$$

На рисунке 1.4 показан пример определения граничной частоты. Уровни  $\beta_T$  и  $\beta_F$  обычно выбираются одинаковыми, со значениями 0,5 или 0,1.

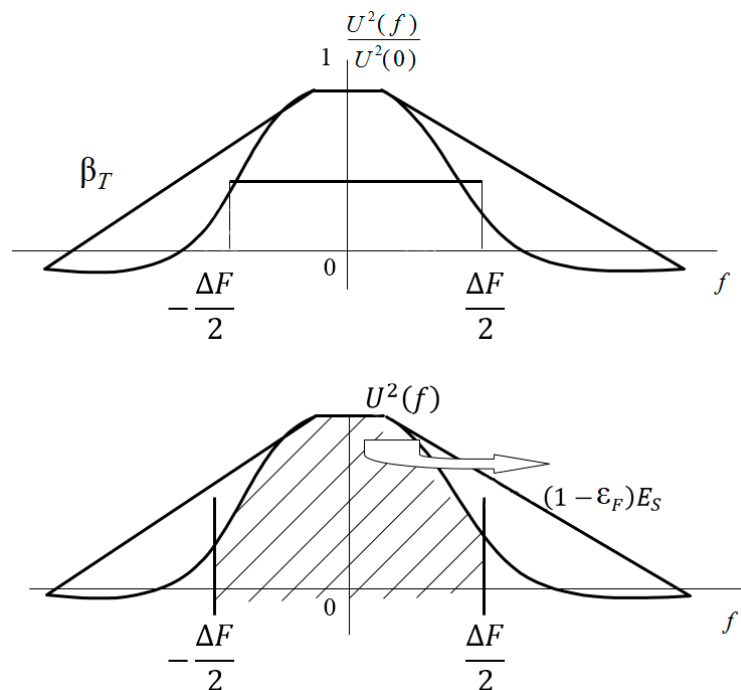


Рисунок 1.4 – Пример определения граничной частоты сигнала

Данный способ сравнительно прост в расчётах и используется только в случае одномодальных сигналов и спектров.

**2 По уровню энергии.** Длительность и полосу рассчитывают из условий сохранения основной доли энергии сигнала:

$$\int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{\frac{\Delta T}{2}} S^2(t) dt = (1 - \varepsilon_T) \cdot E_S,$$

$$\int_{-\frac{\Delta F}{2}}^{\frac{\Delta F}{2}} U^2(f) df = (1 - \varepsilon_F) \cdot E_S. \quad (1.10)$$

Значения параметров  $E_T$  и  $E_F$  чаще всего задают одинаковыми, не больше 0,1 (сохраняя тем самым более 90 % энергии сигнала). Данный способ также предполагает решение сложных уравнений, однако даёт и более объективные оценки длительности и полосы.

**3 По среднеквадратическому отклонению.** Длительность и полосу рассчитывают по формулам

$$\Delta T_{\text{эф}}^2 = \frac{1}{E_S} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot S^2(t) dt,$$

$$\Delta F_{\text{эф}}^2 = \frac{1}{E_S} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f^2 \cdot U^2(f) df. \quad (1.11)$$

Данные оценки принято называть, соответственно, эффективной длительностью и полосой частот сигнала. Здесь наблюдается полная аналогия с вычислением дисперсии в теории вероятности (функции  $S^2(t)$  и  $U^2(f)$  симметричны относительно  $t = 0$  и  $f = 0$ ). Этот подход имеет некоторые преимущества, так как не связан с решением уравнений. Кроме того, при расчёте полосы необязательно находить спектр из теоремы о производной

$$S'(t) \leftrightarrow j2 \cdot \pi \cdot f \cdot \dot{U}(f)$$

и соответствующего равенства Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} [S'(t)]^2 dt = (2 \cdot \pi)^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f^2 \cdot |\dot{U}(f)|^2 df,$$

а можно получить другую расчётную формулу:

$$\Delta F_{\text{эф}}^2 = \frac{1}{(2 \cdot \pi)^2 \cdot E_S} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [S'(t)]^2 dt .$$

Ограничения применения данного подхода связаны только с существованием интегралов. Ясно, например, что у сигнала прямоугольной формы расходятся оба интеграла для  $\Delta F_{\text{эф}}$ . Точно так же у сигнала с прямоугольным спектром (1.2) расходится интеграл для  $\Delta T_{\text{эф}}$ .

Рассмотренные варианты оценок длительности  $\Delta T$  и полосы  $\Delta F$  (или граничной частоты  $F_{\text{гр}} = \frac{\Delta F}{2}$ ) применимы только к низкочастотным сигналам. В случае радиосигналов, спектр которых концентрируется в окрестностях некоторой частоты  $f_0$ , для определения полосы  $\Delta F$  (любым из вариантов) предварительно необходимо выделить НЧ-эквивалент сигнала.

Опуская сравнительный анализ эффективности указанных оценок, отметим главное: они не противоречат теореме о масштабах и их можно использовать в качестве основных параметров сигналов с ограниченной энергией.

Рассмотрим примеры. Определим длительность и полосу частот импульса  $S_3(t)$  колокольной формы с помощью выражения (1.2).

В варианте (1.9) необходимо решить уравнения

$$\beta_T = \exp \left\{ -2 \cdot \lambda \cdot \left( \frac{\Delta T}{2} \right)^2 \right\},$$

$$\beta_F = \exp \left\{ -2 \cdot \frac{\pi^2}{\lambda} \cdot \left( \frac{\Delta F}{2} \right)^2 \right\}.$$

Полагая  $\beta_T = \beta_F = \beta$ , получим

$$\Delta T = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \cdot \ln \frac{1}{\beta}},$$

$$\Delta F = \frac{1}{F} \cdot \sqrt{2 \cdot \lambda \cdot \ln \frac{1}{\beta}},$$

$$\Delta T \cdot \Delta F = \frac{2}{\pi} \cdot \ln \frac{1}{\beta}. \quad (1.12)$$

В варианте оценки (1.10) заменой переменных выразим эти интегралы через интегралы вероятностей (1.6). Получим два уравнения:

$$\Phi(\Delta T_\varepsilon \cdot \sqrt{\lambda}) = 1 - \varepsilon_T,$$

$$\Phi\left(\pi \cdot \frac{\Delta F_\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}\right) = 1 - \varepsilon_F.$$

Их можно решить только численным способом. Так, определив значения  $\varepsilon_T = \varepsilon_F = 0,1$ , для интеграла вероятности при условии  $\Phi(x) = 0,9$  найдём  $x \approx 1,65$ .

Таким образом, временной и частотный интервалы, включающие 90 % энергии сигнала  $S_3(t)$ , соответственно равны

$$\Delta T_\varepsilon = \frac{1,65}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\Delta F_\varepsilon = 1,65 \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi},$$

$$\Delta T_\varepsilon \cdot \Delta F_\varepsilon \approx \frac{2,7}{\pi}. \quad (1.13)$$

Наконец, прямые вычисления по (1.11) дают оценки

$$\Delta T_{\text{эф}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\lambda}},$$

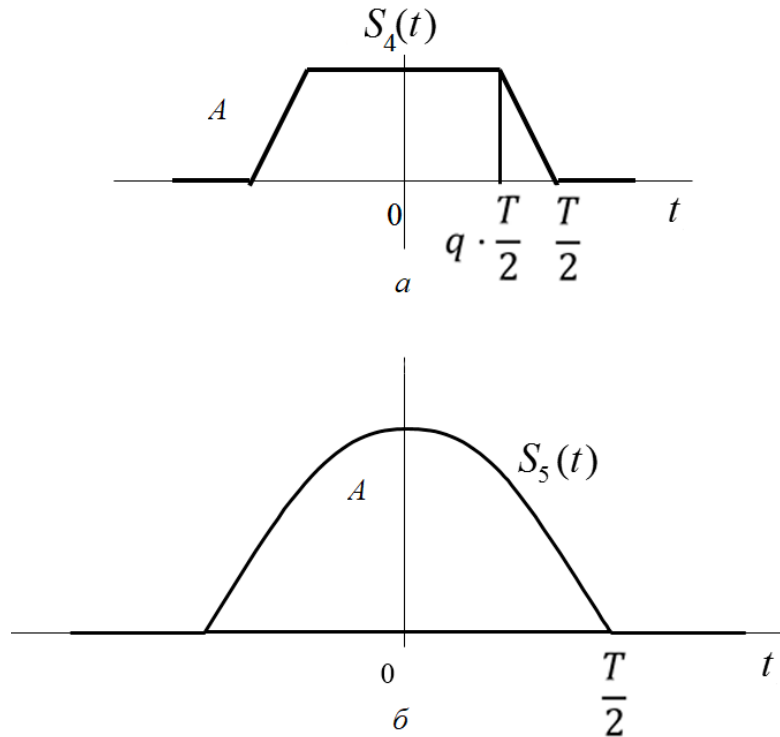
$$\Delta F_{\text{эф}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2 \cdot \pi},$$

$$\Delta T_{\text{эф}} \cdot \Delta F_{\text{эф}} = \frac{1}{4 \cdot \pi}. \quad (1.14)$$

Как видно, оценки длительности и полосы различными способами вполне сопоставимы, а произведение  $\Delta T \cdot \Delta F$ , как и следовало ожидать, не зависит от масштабных параметров ( $A$  и  $\lambda$ ) сигнала.

Рассмотрим теперь влияние формы сигнала на это произведение. Ограничимся только вычислениями эффективной длительности и полосы частот по формулам (1.1)–(1.11).

В информационных системах часто применяются импульсы в виде трапеции  $S_4(t)$  (рисунок 1.3, *a*).



$a$  – в виде трапеции;  $b$  – косинусоиды  
Рисунок 1.5 – Графики импульсов

Для этого семейства импульсов после несложных выкладок получим

$$S_4(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq q \cdot \frac{T}{2}, \\ \frac{A}{1-q} \cdot \left[ 1 - \frac{2 \cdot |t|}{T} \right], & |t| \in \left( q \cdot \frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right), \\ 0, & |t| > \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (1.15)$$

Зафиксируем амплитуду  $A$  и длительность  $T_0$ . Параметром  $q \in [0, 1]$  можно задавать различную форму импульса (от треугольной при  $q=0$  до прямоугольной при  $q=1$ ):

$$E_4 = \frac{A^2 \cdot T}{3} \cdot (1 + 2 \cdot q),$$

$$\frac{\Delta T_{\text{эф}}}{T} = \varphi_1(q) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1 + 2 \cdot q + 3 \cdot q^2 + 4 \cdot q^3}{10 \cdot (1 + 2 \cdot q)}},$$

$$\Delta F_{\text{эф}} \cdot T = \varphi_2(q) = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{3}{(1 - q) \cdot (1 + 2 \cdot q)}},$$

$$\Delta T_{\text{эф}} \cdot \Delta F_{\text{эф}} = \varphi_3(q) = \varphi_1(q) \cdot \varphi_2(q). \quad (1.16)$$

Примерный вид указанных трёх функций представлена на рисунке 1.6. Функции  $\varphi_2(q)$  и  $\varphi_3(q)$  имеют слабо выраженные минимумы: округлённо  $\varphi_2(q) \geq 0,52$  со знаком равенства при  $q = 0,25$ , аналогично  $\varphi_3(q) \geq 8,51 \cdot 10^{-2}$  со знаком равенства при  $q = 0,102$ .

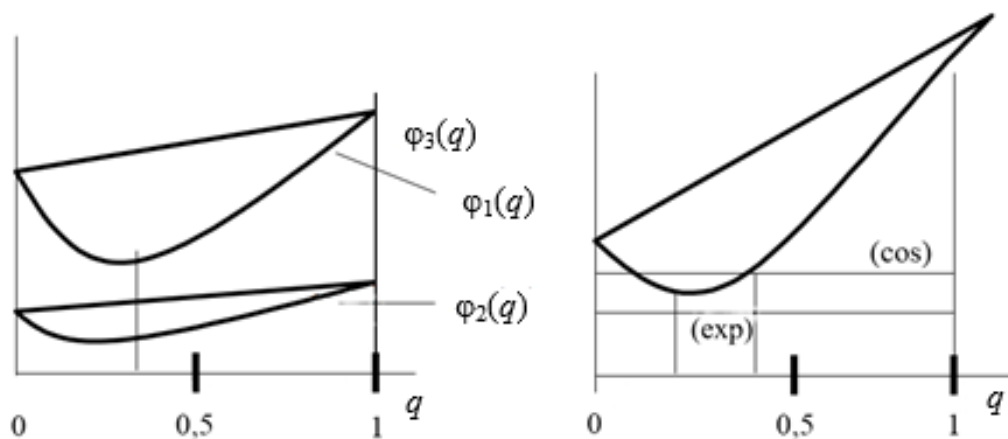


Рисунок 1.6 – Примерный вид  $\varphi_1(q)$ ,  $\varphi_2(q)$  и  $\varphi_3(q)$  экспоненциальной (exp) и косинусоидальной (cos) функций

Таким образом, меняя наклон фронтов трапециидального импульса, можно минимизировать произведение – длительность умножить на полосу, либо эффективную полосу частот при фиксированной теоретической длительности  $T$ .



*Примечание* – Импульс трапецеидальной формы получается путём свёртки двух прямоугольных импульсов с параметрами  $A_1, T_1$  и  $A_2, T_2$ ,  $T_2 \geq T_1$  так, что  $A = A_1 \cdot A_2 \cdot T_1$ ,  $T = T_2 + T_1$  и  $q \cdot T = T_2 - T_1$ . Спектр импульса  $S_4(t)$ , как результат свёртки, равен

$$\begin{aligned} \dot{U}_4(f) &= A_1 \cdot A_2 \cdot \frac{\sin \pi \cdot f \cdot T_1}{\pi \cdot f} \cdot \frac{\sin \pi \cdot f \cdot T_2}{\pi \cdot f} = \\ &= \frac{A \cdot T \cdot (1+q)}{2} \cdot \frac{\sin \pi \cdot f \cdot (1-q) \cdot \frac{T}{2}}{\pi \cdot f \cdot (1-q) \cdot \frac{T}{2}} \cdot \frac{\sin \pi \cdot f \cdot (1+q) \cdot \frac{T}{2}}{\pi \cdot f \cdot (1+q) \cdot \frac{T}{2}}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Интересно сопоставить характеристики импульсов – трапецеидального и косинусного (см. рисунок 1.6. б):

$$S_5(t) = \begin{cases} A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t), & |t| \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{T}{2}, \quad T = \frac{1}{2 \cdot f_0}. \end{cases} \quad (1.18)$$

Для этого импульса получим

$$E_5 = \frac{A^2 \cdot T}{2},$$

$$\Delta T_{\text{эф}} = \frac{T}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\pi^2 - 6}{3}},$$

$$\Delta F_{\text{эф}} = \frac{1}{2T},$$

$$\Delta T_{\text{эф}} \cdot \Delta F_{\text{эф}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \sqrt{\frac{\pi^2 - 6}{3}}. \quad (1.19)$$

Сравнивая численные значения указанных характеристик импульсов  $S_4(t)$  и  $S_5(t)$  (с одинаковыми амплитудами  $A$  и длительностями  $T$ ), можно заметить, что трапецеидальный импульс:

– более широкополосен, однако при  $q \leq 0,28$  имеет меньшее произведение длительность на полосу;

– выравняется по энергии с косинусным только при  $q = 0,25$  (в момент достижения минимальной полосы);

– при равных произведениях длительности на полосу ( $q = 0,28$ ) превышает энергию косинусного всего лишь на 4 %.

В том что трапециидальный импульс более широкополосен, можно убедиться по оболочке спектра в виде  $\frac{|\dot{U}(f)|}{\dot{U}(0)}$ . Так из (1.17) следует:

$$\frac{|\dot{U}_4(f)|}{U_4(0)} \leq \frac{4}{\pi^2 \cdot (1 - q^2) \cdot (f \cdot T)^2},$$

$$U_4(0) = \frac{A \cdot T \cdot (1 + q)}{2}.$$

Здесь учтено, что  $|\sin x| \leq 1$ . У косинусоидального же импульса (1.18) спектр

$$\begin{aligned} \dot{U}_5(f) &= \frac{A \cdot T}{2} \left[ \frac{\sin(\pi \cdot (f + f_0) \cdot T)}{\pi \cdot (f + f_0) \cdot T} + \frac{\sin(\pi \cdot (f - f_0) \cdot T)}{\pi \cdot (f - f_0) \cdot T} \right] = \\ &= \frac{2 \cdot A \cdot T \cdot \cos(\pi \cdot f \cdot T)}{\pi \cdot (1 - 4 \cdot f^2 \cdot T^2)}, \end{aligned}$$

$$U_5(0) = \frac{2 \cdot A \cdot T}{\pi} \tag{1.20}$$

имеет иную оболочку

$$\frac{|\dot{U}_5(f)|}{U_5(0)} \leq \frac{1}{|1 - 4 \cdot (f \cdot T)^2|}.$$

Так что спектр импульса  $S_4(t)$  при любом  $q \in [0, 1]$  более протяжён. Но в диапазоне  $q=0-0,28$  его эффективная длительность меньше, чем у  $S_5(t)$ . Это и даёт меньшее значение произведения  $\Delta t_{\text{эф}} \cdot \Delta F_{\text{эф}}$ .

Результаты расчётов для трёх сигналов – трапецеидального (трапеция), косинусного (cos) и колокольного (exp) сигналов – сведены в таблицу 1.3. Все значения округлены.

Таблица 1.3 – Результаты расчёта характеристик сигналов

Форма	Условия	$\Delta T_{\text{эф}}$	$\Delta F_{\text{эф}}$	$\Delta T_{\text{эф}} \cdot \Delta F_{\text{эф}}$
Прямоугольник	$q=1$	$0,289 \cdot T$	–	–
Трапеция	$q=0,5$	$0,2 \cdot T$	$\frac{0,55}{T}$	$11,11 \cdot 10^{-2}$
	$q=0,28$	$0,174 \cdot T$	$\frac{0,52}{T}$	$9,04 \cdot 10^{-2}$
	$q=0,25$	$0,171 \cdot T$	$\frac{0,519}{T}$	$8,88 \cdot 10^{-2}$
	$q=0,102$	$0,16 \cdot T$	$\frac{0,53}{T}$	$8,51 \cdot 10^{-2}$
Cos	–	$0,181 \cdot T$	$0,5 \cdot T$	$9,04 \cdot 10^{-2}$
Треугольник	$q=0$	$0,158 \cdot T$	$\frac{0,55}{T}$	$8,72 \cdot 10^{-2}$
Exp	–	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{\lambda}}$	$\frac{\sqrt{\lambda}}{2 \cdot \pi}$	$7,96 \cdot 10^{-2}$

Подобные расчёты на основе оценок (1.10) приведены в (1.16). В частности показано, что для прямоугольного, треугольного и гауссова импульсов произведение  $\Delta T_{\varepsilon} \cdot \Delta F_{\varepsilon}$  с  $\varepsilon = 0,05$  соответственно равны 1,8; 0,94; 0,48.

#### 1.4 Дискретные сигналы

Дискретные сигналы и системы – объект изучения задач цифровой обработки сигналов (ЦОС). Природа дискретных по времени сигналов может быть различна, но чаще всего она связана с дискретизацией аналоговых (непрерывных по времени) сигналов (рисунок 1.7).

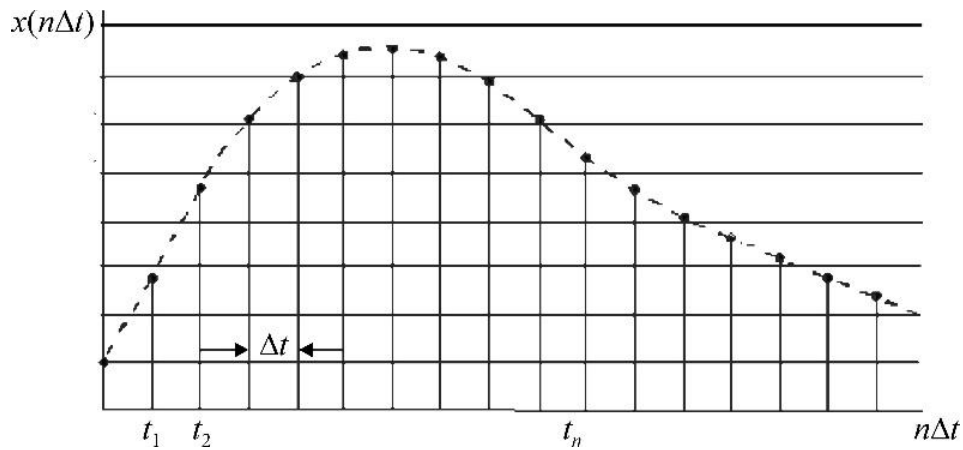


Рисунок 1.7 – Квантование и дискретизация сигналов ( $t_1 = \Delta t$ ,  $t_2 = 2 \cdot \Delta t$ , ...,  $t_n = n \cdot \Delta t$ )

Чаще всего дискретные сигналы описываются решетчатыми функциями  $x(n \cdot \Delta t)$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , а  $\Delta t$  – интервал (шаг) дискретизации. Частота дискретизации – это величина, обратная интервалу  $\Delta t$ :

$$f_s = \frac{1}{\Delta t}. \quad (1.20)$$

Интервал дискретизации, как правило, выбирается постоянным (равномерная дискретизация), т. е.  $\Delta t = \text{const}$ .

Выборки или отсчёты – это значения сигнала в момент времени  $t_n = n \cdot \Delta t$ . Дискретный сигнал может быть вещественным или комплексным.

Для удобства анализа дискретных сигналов пользуются нормированным временем:

$$t_H = \frac{t_n}{\Delta t} = \frac{n \cdot \Delta t}{\Delta t} = n, \quad (1.21)$$

поэтому номер  $n$  отсчёта дискретного сигнала можно интерпретировать как нормированное время.

Благодаря этому переходу можно рассматривать дискретный сигнал как функцию целочисленной переменной  $n$ , т. е. представлять его в виде последовательности чисел  $\{x(n)\}$ , где  $x(n)$  – это  $n$ -й член последовательности, а индекс  $n$  может изменяться в конечных или бесконечных пределах. Чтобы упростить запись, дальше будем обозначать дискретные последовательности через  $x(n)$ , в случае необходимости указывая диапазон изменения индекса  $n$ .

При обработке сигналов при помощи цифровых устройств отсчёты представляются в виде двоичных чисел с ограниченным числом разрядов. Такое

преобразование отсчетов сигнала в числа называется квантованием по уровню с последующим кодированием.

Дискретный по времени и квантованный по уровню сигнал – это и есть цифровой сигнал.

Дискретизация по времени и квантование по уровню с последующим кодированием выполняются при помощи аналого-цифровых преобразователей (АЦП). Подробнее об этом будет рассказано в разделе 3.

Отдельно отметим, что учёт в цифровых приборах и системах квантованности сигналов и коэффициентов математических операций сильно усложняет теоретические исследования. Поэтому, как правило, сигналы принимают дискретными, но не квантованными (с бесконечно малым шагом квантования). Дальше, при определении погрешностей, возникающих вследствие этой процедуры, учитывается квантованность сигналов и коэффициентов.

Рассмотрим некоторые дискретные последовательности, часто применяющиеся в теории цифровой обработки сигналов.

1 Дискретная дельта-функция (единичный импульс) (рисунок 1.8):

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0, \\ 0, & \text{если } n \neq 0, \end{cases} \quad (1.22)$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

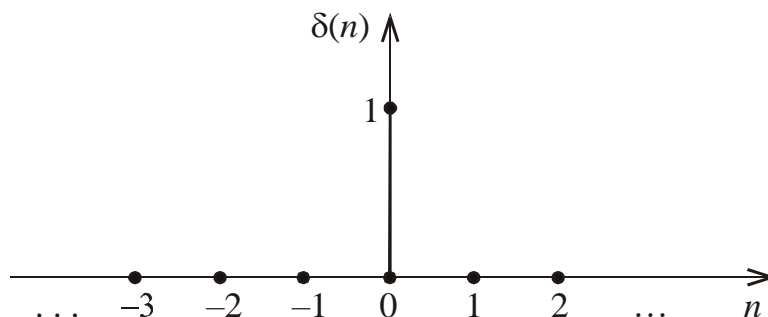


Рисунок 1.8 – Единичный импульс

Единичный импульс играет в практике исследования дискретных систем такую же роль, как  $\delta$ -функция в аналоговых системах.

2 Единичная последовательность (единичный скачок) (рисунок 1.9):

$$u(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \geq 0, \\ 0, & \text{если } n < 0, \end{cases} \quad (1.23)$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

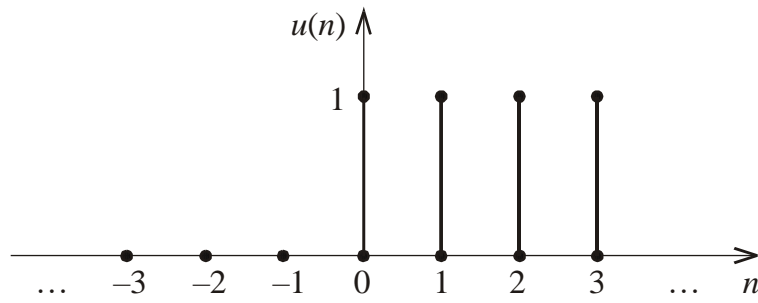


Рисунок 1.9 – Единичная последовательность

3 *Периодическая последовательность*. Если последовательность  $x(n)$  удовлетворяет условию

$$x(n) = x(n + r \cdot N), \quad (1.24)$$

где  $r$  и  $N$  – это целые числа, то такая последовательность является периодической, а число  $N$  – периодом данной последовательности.

На практике периодическую последовательность достаточно задавать на интервале одного периода, например,  $0 \leq n \leq N - 1$ .

Периодическая последовательность  $x(n) = \{1, 1, 0, 0\}$  с периодом  $N = 4$  представлена на рисунке 1.10.

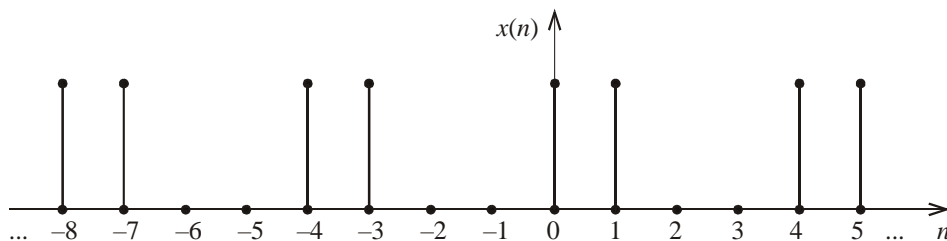


Рисунок 1.10 – Периодическая последовательность

Зная период дискретной последовательности, можно определить основную частоту периодической последовательности  $\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{N}$ .

4 *Синусоидальная (косинусоидальная) последовательность*, играющая значимую роль в цифровой обработке сигналов, имеет следующий вид (рисунок 1.11):

$$x(n) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot n + \varphi_0) = A \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot n + \varphi_0\right), \quad (1.25)$$

где  $A$  – амплитуда,  $\omega_0$  – частота,  $N$  – период,  $\varphi_0$  – начальная фаза,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

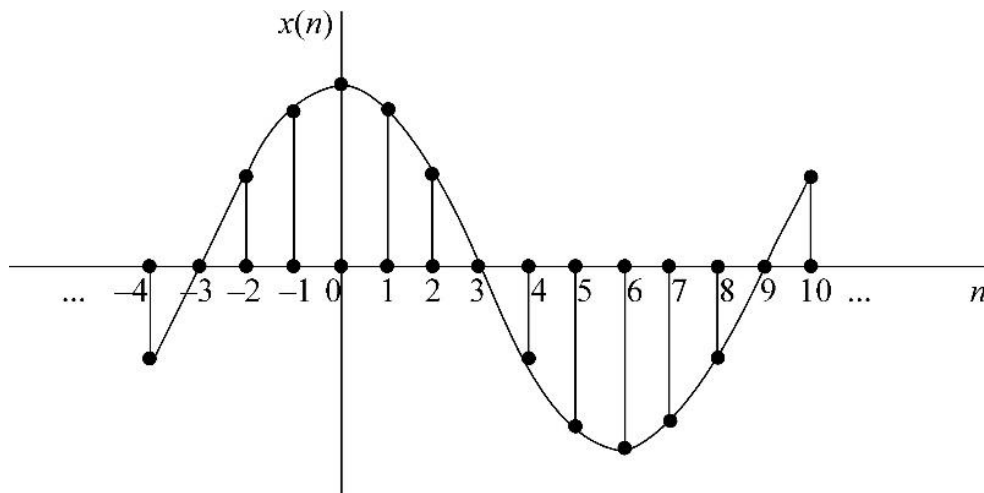


Рисунок 1.11 – Дискретная косинусоидальная последовательность

5 Экспоненциальная последовательность при представлении и анализе линейных стационарных дискретных систем является наиболее важной. Чаще всего она записывается в виде системы

$$x(n) = \begin{cases} A \cdot \alpha^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad (1.26)$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ .

Последовательность называется вещественной степенной, если  $A$  и  $\alpha$  – вещественные числа. Если  $\alpha$  принадлежит интервалу от нуля до единицы, а  $A$  больше нуля, значения последовательности будут положительными и убывающими при возрастании  $n$ , как показано на рисунке 1.12.

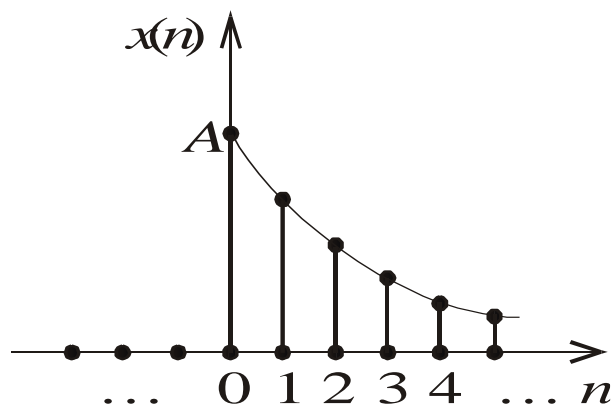


Рисунок 1.12 – Дискретная убывающая экспоненциальная последовательность

Когда  $\alpha$  принадлежит интервалу от  $-1$  до  $0$ , последовательность принимает знакопеременный вид, а её абсолютные значения убывают. При  $|\alpha| > 0$  последовательность будет возрастать по абсолютной величине с ростом  $n$ .

Экспоненциальная последовательность  $A \cdot \alpha^n$  с комплексным  $\alpha$  имеет вещественную и мнимую части, являющиеся взвешенными синусоидами. В таком случае, при  $\alpha = |\alpha| \cdot e^{j\omega_0}$  и  $A = |A| \cdot e^{j\varphi}$ , исходную последовательность  $A \cdot \alpha^n$  можно выразить одним из двух способов:

$$x(n) = A \cdot \alpha^n = |A| \cdot e^{j\varphi} \cdot |\alpha|^n \cdot e^{j\omega_0 n} = |A| \cdot |\alpha|^n \cdot e^{j(\omega_0 n + \varphi)} \quad (1.27)$$

или

$$x(n) = |A| \cdot |\alpha|^n \cdot \cos(\omega_0 \cdot n + \varphi) + j|A| \cdot |\alpha|^n \cdot \sin(\omega_0 \cdot n + \varphi). \quad (1.28)$$

При  $|\alpha| > 1$  эта последовательность осциллирует с экспоненциально растущей огибающей. Если же  $|\alpha| < 1$ , то с экспоненциально убывающей огибающей.

Последовательность называется комплексной экспоненциальной, если  $|\alpha| = 1$ :

$$x(n) = |A| \cdot e^{j(\omega_0 n + \varphi)} = |A| \cdot \cos(\omega_0 \cdot n + \varphi) + j|A| \cdot \sin(\omega_0 \cdot n + \varphi). \quad (1.29)$$

В этом случае вещественная и мнимая части последовательности синусоидально меняются в зависимости от  $n$ . Величина  $\omega_0$  называется частотой (круговой) комплексной синусоиды или комплексной экспоненты по аналогии с непрерывным временем  $\varphi$  – её фазой. Поскольку  $n$  – безразмерное целое число,  $\omega_0$  должна измеряться в радианах. Для проведения тесной аналогии с непрерывным временем определим единицу частоты как «радиан на отсчёт», а  $n$  будем измерять в отсчётах.

Так как в формуле (1.29) переменная  $n$  всегда принимает только целые значения, возникают существенные отличия в свойствах дискретных и непрерывных комплексных экспоненциальных и синусоидальных последовательностей. Различия сильнее всего заметны на частоте  $(\omega_0 + 2\pi)$ . В этом случае



$$x(n) = A \cdot e^{j[(\omega_0 + 2\pi) \cdot n + \varphi]} = A \cdot e^{j(\omega_0 n + \varphi)} \cdot e^{j2\pi n} = A \cdot e^{j(\omega_0 n + \varphi)}. \quad (1.30)$$

Куда значимее то, что дискретные комплексные экспоненциальные последовательности с частотами  $(\omega_0 + 2 \cdot \pi \cdot m)$ , где  $m$  – любое целое число, неотличимы друг от друга. Такое же утверждение верно и для синусоидальных последовательностей:

$$x(n) = A \cdot \cos[(\omega_0 + 2 \cdot \pi \cdot m) \cdot n + \varphi] = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot n + \varphi). \quad (1.31)$$

Из всего этого можно сделать вывод, что при рассмотрении комплексных экспоненциальных последовательностей типа  $x(n) = A \cdot e^{j\omega_0 n}$  или вещественных синусоидальных последовательностей вида  $x(n) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot n + \varphi)$  нужно ограничиваться частотами, лежащими в интервале, равном  $2\pi$  (например от  $-\pi$  до  $+\pi$  или от 0 до  $2\pi$ ).

Еще одна значимая особенность дискретных комплексных экспонент и синусоид, в сравнении с непрерывными, относится к их периодичности. Непрерывные синусоидальные и комплексные экспоненциальные сигналы представляют собой периодические функции с периодом  $2\pi$ . У дискретных периодических последовательностей соответственно период  $N$  – обязательно целое число. Проверив это условие для дискретных синусоид, получим

$$A \cdot \cos(\omega_0 \cdot n + \varphi) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot n + \omega_0 \cdot N + \varphi). \quad (1.32)$$

Следовательно:

$$\omega_0 \cdot N = 2 \cdot \pi \cdot k, \quad (1.33)$$

где  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Аналогично последовательность  $A \cdot e^{j\omega_0 n}$  – периодическая с периодом  $N$  только в том случае, если

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}. \quad (1.34)$$

Это равенство справедливо тогда и только тогда, когда  $\omega_0 \cdot N = 2 \cdot \pi \cdot k$ , как и в соотношении (1.34). Поэтому дискретная комплексная экспоненциальная и

синусоидальной последовательности не обязательно изменяются периодически в зависимости от  $n$  с периодом  $\frac{2 \cdot \pi}{\omega_0}$ , – их периодичность зависит от частоты  $\omega_0$ .

Еще раз подчеркнём, что период дискретной синусоидальной или комплексной экспоненциальной последовательности  $N = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0}$  должен быть только целым значением. Если  $\frac{2 \cdot \pi}{\omega_0}$  не целое, но рациональное число, то соответствующая синусоидальная последовательность будет периодической, однако с периодом, бóльшим  $\frac{2 \cdot \pi}{\omega_0}$ . Если  $\frac{2 \cdot \pi}{\omega_0}$  не рационально, то синусоидальная и комплексная экспоненциальная последовательности не будут периодическими.

Рассмотрим сигнал  $x_1(n) = \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right)$  с периодом  $N$ , равном 8.

Периодичность сигнала доказывается равенством

$$x(n+8) = \cos\left[\pi \cdot \frac{n+8}{4}\right] = \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{4} + 2 \cdot \pi\right) = x_1(n).$$

Равенство верно для всех целых  $n$ , что и требуется для определения периодичности дискретного сигнала.

Но в отличие от непрерывных сигналов, увеличение частоты дискретной синусоиды не приводит к уменьшению её периода. Для подтверждения рассмотрим последовательность  $x_2(n) = \cos\left(\frac{3 \cdot \pi \cdot n}{8}\right)$ , имеющую бóльшую частоту, чем последовательность  $x_1(n)$ . Легко доказать, что период  $x_2(n)$  не равен 8:

$$x_2(n+8) = \cos\left[\frac{3 \cdot \pi \cdot (n+8)}{8}\right] = \cos\left(\frac{3 \cdot \pi \cdot n}{8} + 3 \cdot \pi\right) = -x_2(n).$$

Также очевидно, что период данного сигнала равен 16. Следовательно, увеличение частоты от  $\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{8}$  до  $\omega_0 = \frac{3 \cdot \pi}{8}$  влечёт увеличение периода сигнала. Это происходит потому, что дискретный сигнал определён только при целых значениях  $n$ . Как уже было отмечено, это приводит к тому, что некоторые дискретные синусоидальные сигналы могут вовсе не иметь периода. Например,

при любом целом числе  $N \neq 0$  равенство  $\cos(n + N) = \cos n$  будет нарушаться при некоторых целых значениях переменной  $n$ .

Из равенства (1.34) и схожести частот  $\omega_0$  и  $(\omega_0 + 2 \cdot \pi \cdot m)$  следует, что есть только  $N$  различных значений частоты, при которых комплексная экспоненциальная последовательность имеет период  $N$ , а именно  $\omega_k = \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ . Данное свойство дискретных комплексных экспоненциальных и синусоидальных последовательностей – основополагающее, как для теории, так и для разработки численных алгоритмов в дискретном преобразовании Фурье.

Отметим, что проявление верхних и нижних частот в непрерывных и дискретных сигналах также различно. При увеличении частоты  $\Omega_0$  скорость осциллирования непрерывного сигнала  $x(t) = A \cdot \cos(\Omega_0 \cdot t + \varphi)$  увеличивается. Дискретный синусоидальный сигнал  $x(n) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot n + \varphi)$  также осциллирует всё быстрее при возрастании  $\omega_0$  от 0 до  $\pi$ . Однако при изменении частоты  $\omega_0$  от  $\pi$  до  $2\pi$  его скорость колебаний уменьшается, что видно на рисунке 1.13.

Вследствие периодичности синусоидального и комплексного экспоненциального сигналов относительно  $\omega_0$ , частоты  $\omega_0 = 0$  и  $\omega_0 = 2\pi$  одинаковы. Поэтому частоты, близкие к нулю, не отличаются от частот, близких к  $2\pi$ . Для дискретных синусоидальных и комплексных экспоненциальных сигналов значения частоты  $\omega_0$  в окрестности  $2 \cdot \pi \cdot k$  при любом значении  $k$  называют *нижними (медленно осциллирующими)*, а значения в окрестности  $(\pi + 2 \cdot \pi \cdot k)$  – *верхними (или быстро осциллирующими)*.

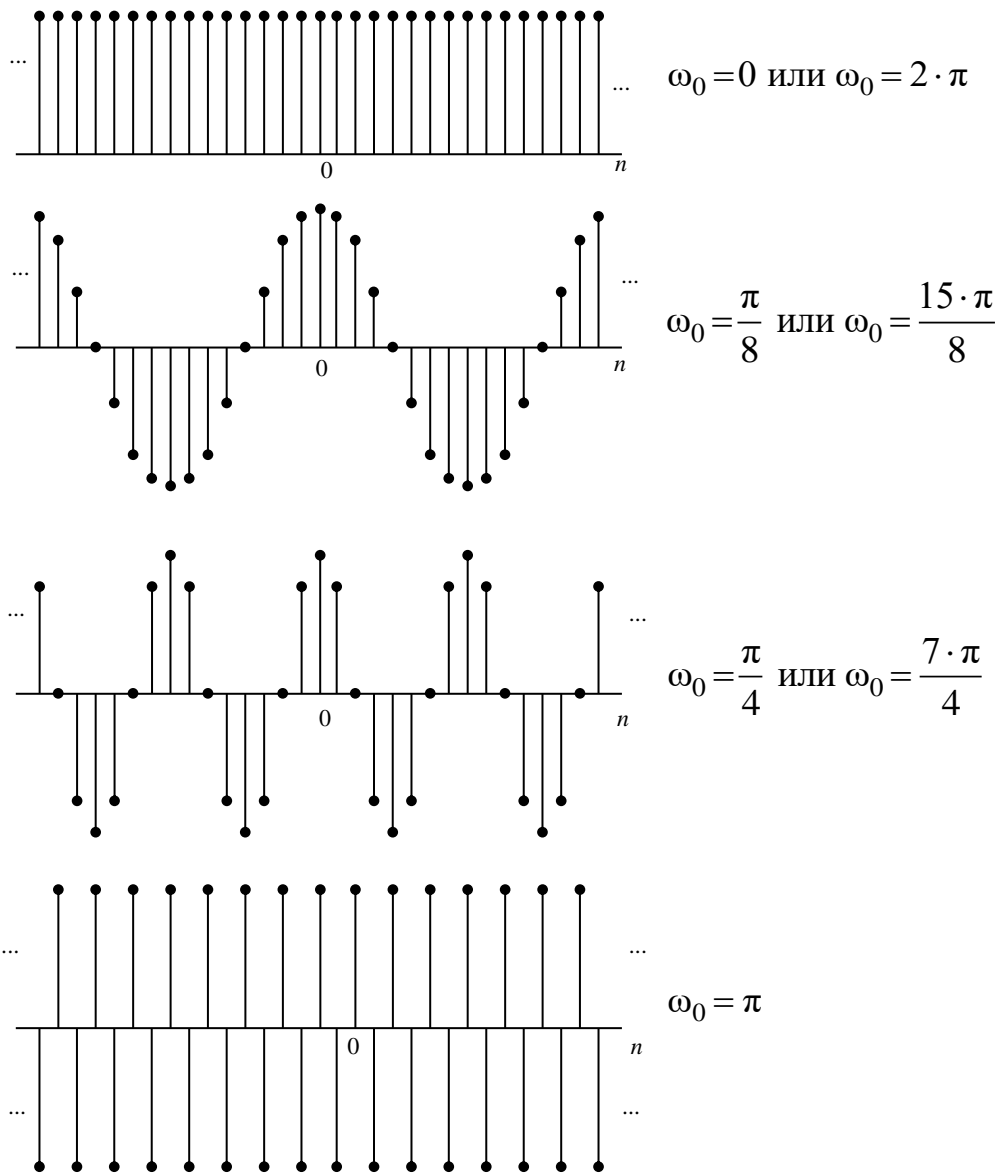


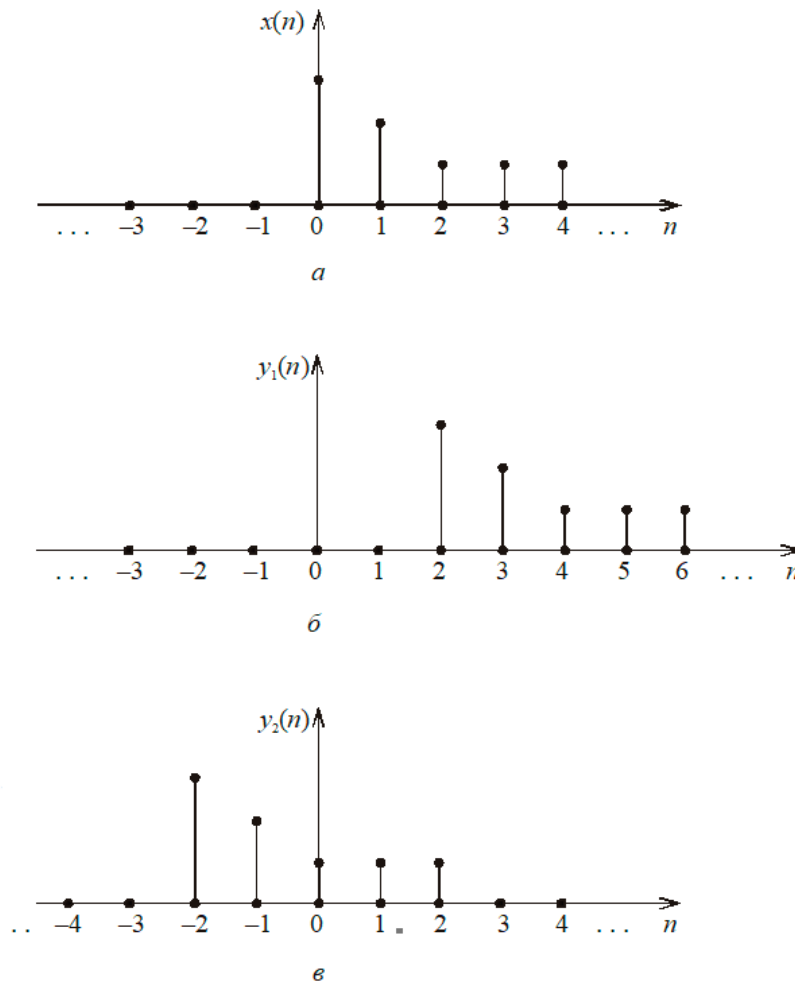
Рисунок 1.13 – Последовательность  $\cos \omega_0 \cdot n$  для некоторых значений частоты  $\omega_0$

6 *Последовательность, сдвинутая по оси  $n$ .* Последовательность  $y(n) = x(n - n_0)$  появляется при сдвиге исходной последовательности  $x(n)$  на  $n_0$  отсчетов вправо при  $n_0 > 0$  или влево при  $n_0 < 0$ .

Например, если последовательность

$$x(n) = \{3, 2, 1, 1, 1\},$$

т. е.  $x(0) = 3, x(1) = 2, x(2) = 1, x(3) = 1, x(4) = 1$ , то последовательности  $y_1(n) = x(n - 2)$  и  $y_2(n) = x(n + 2)$  будут выглядеть следующим образом (рисунок 1.14).



*а* – последовательность  $x(n)$ ;

*б* – последовательность  $x(n)$ , сдвинутая вправо;

*в* – последовательность  $x(n)$ , сдвинутая влево

Рисунок 1.14 – Визуальное представление последовательности  $x(n)$

Произвольную последовательность можно выразить в виде суммы (линейной комбинации) сдвинутых единичных импульсов, взятых с соответствующими весами:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n - k). \quad (1.35)$$

Например, последовательность, которую мы рассмотрели выше, можно представить в виде  $x(n) = 3 \cdot \delta(n) + 2 \cdot \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + \delta(n-4)$ .

Для наглядности и получения новых последовательностей стандартные последовательности зачастую комбинируют (складывают, умножают и т. п.). Например, экспоненциальную последовательность, члены которой равны нулю при  $n < 0$ , можно определить выражением (1.7), однако проще задать её как выражение  $x(n) = A \cdot \alpha^n \cdot u(n)$ .

## 2 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

### 2.1 Обобщённый ряд Фурье

Общий анализ сигналов предполагает выявление их характерных признаков или параметров. Задача становится более конкретной, если можно использовать некоторые предпосылки о модели или структуре сигнала. Так, импульсный сигнал

$$S(t) = \begin{cases} A_0, & |t| \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (2.1)$$

определяется амплитудой  $A_0$  и длительностью  $T$ . Для гармонического сигнала

$$S(t) = A_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \varphi_0), \quad t \in (-\infty; \infty) \quad (2.2)$$

характерными являются три параметра амплитуда  $A_0$ , частота  $f_0$  и начальная фаза  $\varphi_0$ .

В некоторых случаях модель можно составить из набора элементарных сигналов. В классически завершённом виде такое представление сигналов базируется на обобщённых рядах Фурье [1, 2]:

$$S(t) \approx S_N(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot \varphi_i(t), \quad t \in [a, b],$$

$$\alpha_i = (S, \varphi_i) = \int_a^b S(t) \cdot \varphi_i(t) dt,$$

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (2.3)$$

Здесь  $\varphi_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, N$  – система ортонормированных функций, играющих роль элементарных сигналов,  $\alpha_i$  – коэффициенты ряда, определяющие долю компонентов  $\varphi_i(t)$  в сигнале  $S(t)$ .

Кратко отметим, что представление (2.3) справедливо для всех  $x(t) \in L_2(a, b)$ . Здесь  $L_2(a, b)$  – линейное нормированное пространство (пространство Гильберта), в котором заданы скалярное произведение, норма и метрика:

$$(x, y) = \int_a^b x(t) \cdot y(t) dt,$$

$$\|x\|^2 = (x, x) < \infty,$$

$$d^2(x, y) = \|x - y\|^2.$$

В представлении (2.3) сигнал  $S(t)$  определяется совокупностью однотипных параметров  $\alpha_i, i=1, \dots, N$  в системе базисных функций  $\varphi_i(t)$ . Иными словами, непрерывная функция отображается набором чисел

$$\{S(t), t \in [a, b]\} \leftrightarrow \{\alpha_i, i=1, \dots, N\}. \quad (2.4)$$

Такой подход к анализу и синтезу сигналов сравнительно прост в реализации. Достаточно выбрать подходящую систему базисных функций (генераторы)  $\varphi_i(t)$  и использовать  $N$  параллельных вычислителей скалярных произведений  $(S, \varphi_i)$ . При синтезе сигналов выходных генераторов суммируются с заданными весами  $\alpha_i$ .

Вместе с тем можно отметить ряд недостатков представления (2.3). Прежде всего «взаимная однозначность» отображения (2.4) носит условный характер. Среднеквадратическая ошибка представления некоторого сигнала  $S(t)$  в виде (2.3) равна нулю только в случае, если указанная сумма включает всю (полную!) систему ортогональных базисных функций. Практически это не выполнимо, так как требуется бесконечно большое значение  $N$ . В реальности число слагаемых в (2.3) ограничено, что даёт погрешность:

$$\xi_N^2 = \|S - S_N\|^2 = \|S\|^2 - \|S_N\|^2 \geq 0.$$

Иными словами, представление (2.3) с ограниченным  $N$  приводит к потере энергии сигнала:

$$E_S = \|S\|^2 = \int_a^b S^2(t) dt \geq \|S_N\|^2 = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2. \quad (2.5)$$

Это соотношение называют неравенством Бесселя.

Далее часто оказывается проблематичным выбор конкретной системы базисных функций для задач классификации и анализа разнообразных сигналов. При этом пересчёт параметров  $\alpha_i$  в естественные и разнотипные параметры



(амплитуда, частота, эффективная длительность и т. д.) будет сложным и приближительным. Наконец, самым существенным является то, что представление (2.3) не всегда адекватно описанию цепей и систем, что затрудняет анализ свойств и закономерностей при передаче сигналов.

## 2.2 Интегральное преобразование Фурье

Во многом проблемы анализа сигналов снимаются с переходом от дискретного (по параметрам) представления (2.3) к непрерывному интегральному преобразованию [1]:

$$U(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot I(\theta, t) dt,$$

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\theta) \cdot J(t, \theta) d\theta. \quad (2.6)$$

Здесь  $U(\theta)$  – отображение исходного сигнала,  $I(\theta, t)$  и  $J(t, \theta)$  – базисные ядра интегральных прямого и обратного преобразований. Взаимная однозначность оригинала и изображения  $S(t) \leftrightarrow U(\theta)$  обеспечивается условиями сопряжения ядер

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(t, \theta) \cdot I(t, \tau) dt = \delta(t - \tau),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\theta, t) \cdot I(t, Q) dt = \delta(\theta - Q), \quad (2.7)$$

где  $\delta(x)$  – обобщенная функция, называемая  $\delta$ -функцией Дирака. Если дополнительно ядра выбраны самосопряжёнными, т. е.

$$J(t, \theta) = I^*(\theta, t)^1, \quad (2.8)$$

то (2.6) сохраняют скалярные произведения и норму (следовательно, и метрику). В символической записи для  $S_i(t) \leftrightarrow U_i(\theta)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  это означает

$$(S_1, S_2) = (U_1, U_2^*),$$

---

<sup>1</sup> Здесь и далее звездочкой (\*) помечена комплексно-сопряжённая функция.

$$\|S_i\|^2 = \|U_i\|^2, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$\|S_1 - S_2\|^2 = \|U_1 - U_2\|^2. \quad (2.9)$$

Первые два соотношения здесь называются равенствами Парсеваля.

Формально интегральные преобразования (2.6) можно рассматривать как предельную форму для (2.3), если дискретные номера базисных функций и параметров заменить непрерывными переменными [1]:

$$\varphi_i(t) \rightarrow \varphi(\theta, t) \rightarrow I(\theta, t),$$

$$\alpha_i \rightarrow \alpha(\theta_i) \rightarrow U(\theta).$$

Таким образом, неограниченная последовательность параметров (признаков) вырождается в новую непрерывную функцию  $U(\theta)$  (с новой переменной  $\theta$ ). При этом сохраняется эквивалентность (одинаковая информативность!) двух функций  $S(t)$  и  $U(\theta)$ . Такой подход существенно расширяет возможности анализа сигналов, в том числе и их преобразований в линейных системах.

В теории сигналов и линейных систем широкое применение получили интегральные преобразования Фурье и Гильберта. Рассмотрим эти преобразования.

Интегральное преобразование Фурье задаётся самосопряжёнными ядрами

$$I(\theta, t) = e^{j2\pi\theta t},$$

$$J(t, \theta) = e^{-j2\pi\theta t},$$

$$t, \theta \in (-\infty; \infty). \quad (2.10)$$

Условия (2.7) устанавливаются непосредственно, если использовать одно из представлений для  $\delta$ -функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j2\pi xy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2 \cdot \pi \cdot x \cdot y dx = 2 \cdot \int_0^{\infty} \cos 2 \cdot \pi \cdot x \cdot y dx = \delta(y). \quad (2.11)$$

Переменные  $t$  и  $\theta$  входят в ядра (2.10) в виде произведения, следовательно, имеют обратные размерности. Так, если  $S(t)$  – функция времени, то  $U(\theta)$  – функция частоты.

В общепринятой форме интегральные преобразования Фурье (прямые и обратные) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{U}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt, \\ S(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(f) \cdot e^{j2\pi ft} df. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Функцию  $\dot{U}(f)$  называют спектральной плотностью (или просто спектром) сигнала  $S(t)$ . Название обусловлено размерностью: если сигнал  $S$  имеет размерность  $B$ , время  $t$  – с, то  $U$  – размерность  $B \cdot c = B/\Gamma\text{ц}$ . Обратное преобразование в (2.12) показывает, что сигнал  $S(t)$  представляется бесконечным набором (суммой) комплексных гармонических колебаний  $e^{j2\pi ft}$  на частотах  $f \in (-\infty; \infty)$  с амплитудой  $\dot{U}(f) \cdot df$ .

В общем случае  $\dot{U}(f)$  – комплексная функция<sup>1</sup> вещественной переменной  $f$ . Как и любую комплексную величину, её можно записать следующим образом:

$$\dot{U}(f) = \alpha(f) - j\beta(f) = A(f) \cdot e^{j\varphi(f)},$$

$$\alpha(f) = \text{Re}\dot{U}(f), \quad \beta(f) = \text{Im}\dot{U}(f),$$

$$A(f) = \sqrt{\alpha^2(f) + \beta^2(f)}, \quad \varphi(f) = -\text{Arctg} \frac{\beta(f)}{\alpha(f)}, \quad (2.13)$$

и на графиках (при расчётах и измерениях) изображать в декартовой ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) или полярной ( $A$ ,  $\varphi$ ) системе координат.

Модуль  $A(f)$  и аргумент  $\varphi(f)$  спектральной плотности имеют определённый физический смысл. Функцию  $A(f)$  называют амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), или амплитудным спектром сигнала, функцию  $\varphi(f)$  – фазочастотной характеристикой (ФЧХ), или фазовым спектром сигнала. Именно эти характеристики считаются основными в расчётах и измерениях.

В некоторых случаях спектральную плотность удобно представлять в логарифмической форме:

<sup>1</sup> Здесь и далее точкой ( $\dot{\phantom{x}}$ ) помечена комплексная функция.

<sup>2</sup> Здесь и далее большими буквами ( $\text{Arg}$ ,  $\text{Arctg}$ ,  $\text{Ln}$ ) помечены многозначные функции.

$$\text{Ln}\dot{U}(f) = \ln A(f) + j\varphi(f).$$

Это даёт ещё один вариант определения АЧХ и ФЧХ:

$$\ln A(f) = \text{Re}\text{Ln}\dot{U}(f),$$

$$\varphi(f) = \text{Im}\text{Ln}\dot{U}(f). \quad (2.14)$$

Здесь АЧХ (в логарифмическом масштабе) и ФЧХ находятся непосредственно по спектральной плотности, минуя предварительные вычисления функций  $\alpha(f)$  и  $\beta(f)$ .

Следует отметить особенность фазовой характеристики: её определения дают неоднозначные многозначные функции – Arg, Arctg и Ln. Однако неоднозначность можно устранить, если использовать только главные значения аргумента спектральной плотности. Действительно, в силу периодического характера логарифма и аргумента комплексной величины, указанное выше определение можно переписать как

$$\varphi(f) = \text{Im}\ln\dot{U}(f) + 2 \cdot k \cdot \pi,$$

$$\tilde{\varphi}(f) = \arg\dot{U}(f) = \text{Im}\ln\dot{U}(f), \quad \tilde{\varphi} \in [-\pi; \pi].$$

Здесь  $\varphi$  – полная фаза, которая может принимать значение из области  $\pm\infty$ . Главное значение фазы  $\tilde{\varphi}$  получается отбрасыванием целого числа  $2\pi$  из полной фазы с приведением остатка к шкале  $\pm\pi$ . Это и будет соответствовать главным значениям логарифма ln и аргумента arg комплексной величины.

*Примечание* – Здесь удобно использовать модульную арифметику.

Пусть  $a = k \cdot b + s$ , где  $b$  – делитель (модуль) числа  $a$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots$  – целое число,  $s$  – остаток. Этот остаток называют «вычетом числа  $a$  по модулю  $b$ » и записывают как  $\langle a \rangle_b = s$  или  $a = s \cdot \text{mod} b$ , если выполняются два условия:

$$1) s = a - (k \cdot b);$$

$$2) s \in [0, b].$$

Пусть, например,  $a = 3,5\pi$ . Вычет этого числа по модулю  $2\pi$  равен  $s = \langle 3,5\pi \rangle_{2\pi} = 1,5\pi$ . Аналогично для  $a = -1,5\pi$  получим  $s = \langle -1,5\pi \rangle_{2\pi} = 0,5\pi$ . Выше главное значение фазы задавалось в шкале  $[-\pi; \pi]$ . В связи с этим определение вычета можно видоизменить. Полагаем

$$\tilde{\varphi}(f) = \langle \varphi(f) \rangle_{\pm\pi},$$

если выполняются два условия:

$$\tilde{\varphi} = \varphi - 2 \cdot k \cdot \pi,$$

$$\tilde{\varphi} \in [-\pi, \pi].$$

Например, в рассматриваемых случаях имеем:  $\langle 3, 5\pi \rangle_{\pm\pi} = \langle 1, 5\pi \rangle_{\pm\pi} = -0,5\pi$ .  
Для вычетов по одному и тому же модулю справедливы следующие неравенства:

$$\langle x \pm y \rangle = \langle \langle x \rangle \pm \langle y \rangle \rangle,$$

$$\langle x \cdot y \rangle = \langle \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle \rangle.$$

Итак, наряду с (2.14) фазовый спектр можно определить в форме вычета

$$\tilde{\varphi}(f) = \langle \text{Im} \ln \dot{U}(f) \rangle_{\pm\pi} = \langle -\text{Arctg} \frac{\beta(f)}{\alpha(f)} \rangle_{\pm\pi}. \quad (2.15)$$

Такой подход исключает многозначность ФЧХ. Функцию  $\tilde{\varphi}(f)$  будем называть приведённой фазовой характеристикой.

Из определения (2.12) следует, что спектральная плотность для вещественных сигналов имеет комплексно-сопряжённую симметрию:

$$\dot{U}(-f) = \dot{U}^*(f). \quad (2.16)$$

В частности, это даёт

$$\alpha(f) = \alpha(-f), \quad \beta(-f) = -\beta(f),$$

$$A(f) = A(-f), \quad \varphi(-f) = -\varphi(f),$$

$$\tilde{\varphi}(-f) = -\tilde{\varphi}(f).$$

Таким образом, для вещественных сигналов АЧХ и  $\text{Re} \dot{U}(f)$  являются чётными функциями частоты. Эти свойства позволяют контролировать ход вычислений.

Необходимо отметить, что  $\dot{U}(f)$ , заданная на всей оси частот  $f \in [-\infty; \infty]$ , не имеет физической интерпретации. Эту функцию иногда называют математическим спектром. Но именно свойства (2.15) и (2.16) этого спектра приводят к вещественным сигналам  $S(t)$ .

Соотношения (2.9) в случае преобразования Фурье принимают вид

$$\begin{aligned}
E_{12} &= \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) \cdot S_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_1(f) \cdot \dot{U}_2^*(f) df, \\
E_S &= \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{U}(f)|^2 df, \\
d^2(S_1, S_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} [S_1(t) - S_2(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{U}_1(f) - \dot{U}_2(f)|^2 df \quad (2.17)
\end{aligned}$$

и указывают на эквивалентность соответствующих операций во временной и частотной областях. В частности, второе равенство показывает, что энергию  $E_S$  сигнала  $S(t)$  (выделяемую на сопротивлении в 1 Ом) можно определить по спектральной плотности и что  $|\dot{U}(f)|^2$  имеет смысл спектральной плотности энергии сигнала (это удельная энергия, приходящаяся на 1 Гц полосы частот).

Энергия сигнала как физический параметр используется в тех случаях, когда сигнал задан на конечном отрезке времени. Если же сигнал не ограничен во времени, то основным его энергетическим параметром считают среднюю мощность. Её также можно определить в двух вариантах исходя из равенства Парсеваля:

$$\begin{aligned}
P_{\text{cp}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{U}_m(f)|^2 df, \\
\dot{U}_T(f) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt.
\end{aligned}$$

Здесь  $\dot{U}_T(f)$  – спектральная плотность усеченного сигнала. Величину  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot |\dot{U}_T(f)|$  называют спектральной плотностью мощности сигнала  $S(t)$  (так же, как и мощность, приходящуюся на 1 Гц полосы частот).

Преобразования Фурье (2.12) для некоторых сигналов могут не существовать в классическом смысле. Примерами являются сигналы с неограниченной энергией вида (2.2) или  $S(t) = \text{const}$ ,  $t \in (-\infty; \infty)$  и другие. Формально речь идёт о сигналах, не принадлежащих пространству Гильберта –  $S(t) \notin L2(-\infty; \infty)$ . Однако трудности можно обойти, если существование интегралов понимать в обобщенном смысле, используя  $\delta$ -функцию (например, как в выражении (2.11)) [2].

Кратко опишем основные свойства  $\delta$ -функции Дирака. Она не имеет определённого математического выражения и представляется симметричной игольчатой функцией с единичной площадью. Формально это означает:

$$\delta(y) = \begin{cases} \infty, & y = 0, \\ 0, & y \neq 0, \end{cases}$$

$$\delta(y) = \delta(-y),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) dy = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot \delta(y - y_0) dy = f(y_0).$$

Последний интеграл с произвольной непрерывной в точке  $Y_0$  и функцией  $f(y)$  часто используют как определение  $\delta$ -функции. В технической литературе [2, 3] этот интеграл рассматривают как фильтрующее свойство  $\delta$ -функции.

Представление о  $\delta$ -функции дают пределы следующих функций:

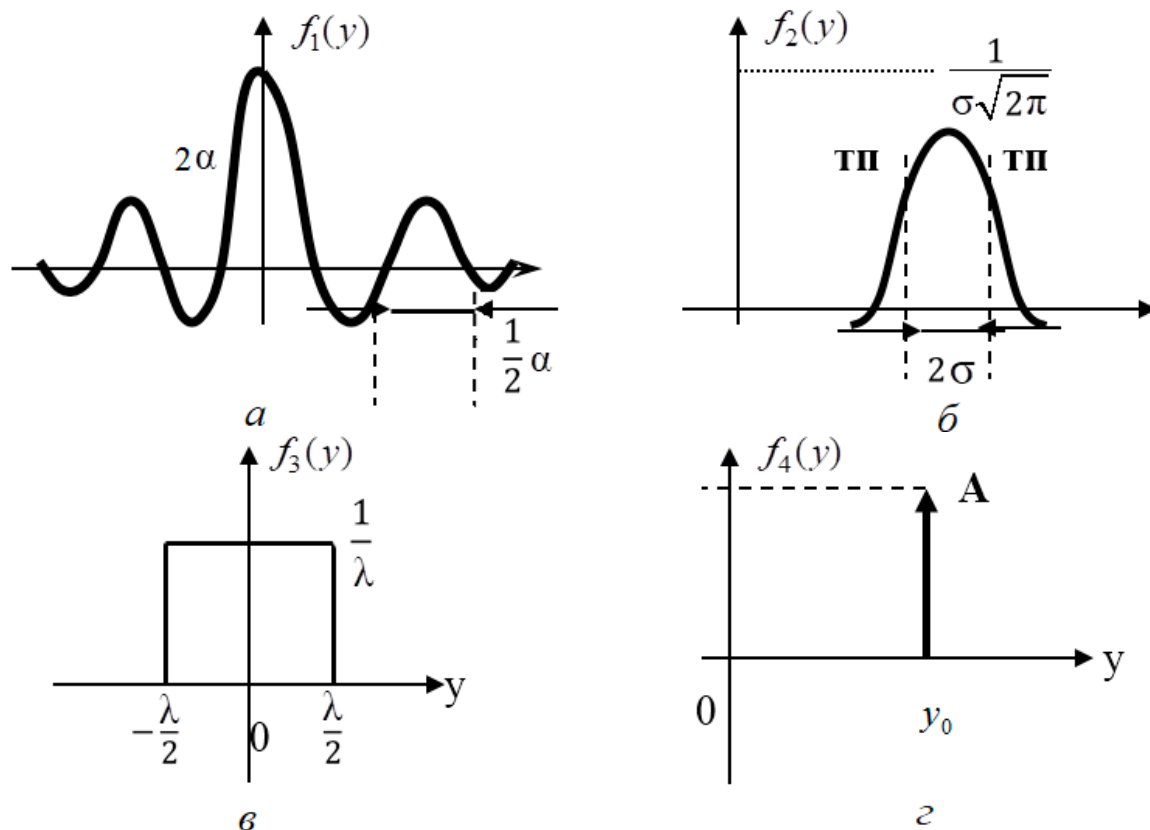
$$f_1(y) = \frac{\sin 2 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot y}{\pi \cdot y}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} f_1(y) = \delta(y),$$

$$f_2(y) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} f_2(y) = \delta(y - m),$$

$$f_3(y) = \Pi(y; \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & |y| \leq \frac{\alpha}{2}, \\ 0, & |y| > \frac{\alpha}{2}, \end{cases} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} f_3(y) = \delta(y). \quad (2.18)$$

Эти функции показаны на рисунке 2.1. Сквозность импульса  $f_1(y)$  вида «синус  $x$  делить на  $x$ » равна  $\frac{1}{2} \alpha$  (рисунок 2.1, а). Интервал  $2\sigma$  (рисунок 2.1, б) задан между точками перегиба (ТП). Сигнал  $f_3(y)$  представляет собой прямоугольный одиночный импульс с амплитудой  $\frac{1}{\lambda}$  и шириной  $\lambda$

(рисунок 2.1, в). Стрелкой высотой  $A$  принято изображать  $\delta$ -функцию  $f_4 = A \cdot \delta(y - y_0)$  (рисунок 2.1, з).



$a$  – импульс вида «синус  $x$  делить на  $x$ »;  $б$  – сигнал вида «колокол»;  
 $в$  – прямоугольный одиночный импульс;  $з$  –  $\delta$ -функция  
 Рисунок 2.1 – Графики  $\delta$ -функции, её производных и интегралов

На графиках видно, что  $\delta$ -функцию можно получить из разнообразных симметричных импульсов единичной площади, предельно сокращая их длительность.

В качестве примера действия с  $\delta$ -функциями рассмотрим равенство Парсеваля (2.17) для скалярных произведений двух сигналов  $S_i(t) = \delta(t - t_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Предварительно находим их спектральные плотности:

$$\dot{U}_i(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_i) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi ft_i}, \quad i = 1, 2.$$

Теперь для скалярных произведений во временной и частотной областях соответственно имеем



$$E_{12} = (S_1, S_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_1) \cdot \delta(t - t_2) dt = \delta(t_1 - t_2),$$

$$E_{12} = (\dot{U}_1, \dot{U}_2^*) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f \cdot (t_1 - t_2)} df = \delta(t_1 - t_2).$$

В частности, при  $t_1 = t_2$  получим энергию сигналов  $E_S = \delta(0)$ .

### 2.3 Применение преобразования Фурье к теории цепей

Интегральное преобразование Фурье как математический аппарат широко используется также в теории линейных инвариантных во времени цепей и систем. Исходными понятиями здесь являются импульсная характеристика  $g(t)$  (временная характеристика) и комплексный коэффициент передачи (характеристика в частотной области) цепи. Эти характеристики связаны между собой преобразованием Фурье:

$$\dot{k}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt,$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{k}(f) \cdot e^{j2\pi ft} df. \quad (2.19)$$

Импульсная характеристика  $g(t)$  – это реакция цепи на воздействие  $\delta$ -функции:  $S_{\text{вх}}(t) = \delta(t)$ ,  $S_{\text{вых}}(t) = g(t)$  [2]. Суть определения состоит в том, что  $\delta$ -функция является идеальным испытательным импульсом для анализа цепей, так как она имеет равномерный и неограниченный по частоте спектр:

$$\dot{U}_{\text{вх}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = 1(f), \quad (2.20)$$

где  $1(f)$  – функция, тождественно равная 1 на всей оси частот  $f \in (-\infty; \infty)$ .

Это эквивалентно воздействию на цепь бесчисленного множества гармонических функций с одинаковой интенсивностью. И реакция на такое воздействие отражает частотные свойства цепи в виде коэффициента  $\dot{k}(f)$ :

$$\dot{U}_{\text{вых}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \dot{k}(f). \quad (2.21)$$

В частности, если реакция – также  $\delta$ -функция, т. е.  $\dot{k}(f) = 1(f)$ , то такую цепь называют идеальной всепропускающей.

С другой стороны, по определению, комплексный коэффициент передачи цепи  $\dot{k}(f)$  есть отношение комплексных амплитуд сигналов на выходе и входе при гармоническом воздействии:

$$\dot{k}(f) = \frac{S_{\text{ВХ}}}{S_{\text{ВЫХ}}} \Bigg|_{S_{\text{ВХ}}(t) = e^{j2\pi ft}} = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}(f) \cdot df}{\dot{U}_{\text{ВХ}}(f) \cdot df}.$$

Из этого следует, что  $\dot{k}(f)$  – это коэффициент пропорциональности между спектральными плотностями сигналов на выходе и входе

$$\dot{U}_{\text{ВЫХ}}(f) = \dot{k}(f) \cdot \dot{U}_{\text{ВХ}}(f), \quad (2.22)$$

показывающий как преобразуется спектр произвольного сигнала в линейных цепях. Наряду с коэффициентом передачи используются также понятия АЧХ и ФЧХ цепи (по аналогии с характеристиками сигнала (2.13)):

$$\dot{k}(f) = k(f) \cdot e^{j\psi(f)},$$

$$k(f) = \text{mod } \dot{k}(f), \quad \psi(f) = \text{Arg } \dot{k}(f). \quad (2.23)$$

С учётом новых обозначений соотношение (1.21) можно переписать как

$$A_{\text{ВЫХ}}(f) = \text{mod } \dot{U}_{\text{ВЫХ}}(f) = k(f) \cdot A_{\text{ВХ}}(f),$$

$$\varphi_{\text{ВЫХ}}(f) = \text{Arg } \dot{U}_{\text{ВЫХ}}(f) = \psi(f) + \varphi_{\text{ВХ}}(f).$$

С физической точки зрения  $k(f)$  показывает отношение амплитуд, а  $\psi(f)$  – разницу фаз гармонических колебаний заданной частоты  $f$  на выходе и входе линейной цепи.

Для цепей с вещественной импульсной характеристикой  $g(t)$  коэффициент передачи  $\dot{k}(f)$  обладает комплексно-сопряжённой симметрией (см. выражение (2.16)).

## 2.4 Основные свойства преобразования Фурье

### 2.4.1 Линейные преобразования оси времени

Интегральное преобразование Фурье имеет ряд свойств и закономерностей, их можно установить непосредственно из определения (2.12). Эти свойства позволяют сформулировать несколько основных правил (теорем), пользуясь которыми можно существенно упростить спектральный анализ разнообразных сигналов.

Рассмотрим, например, различия в спектрах сигналов  $S(t)$  и  $S(t) = S_0(\lambda \cdot t - t_0)$ . Замена переменной в преобразовании Фурье даёт

$$\dot{U}_S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\lambda \cdot t - t_0) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-j2\pi \frac{f}{\lambda} t_0} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(x) \cdot e^{-j2\pi \frac{f}{\lambda} x} dx.$$

или

$$S_0(\lambda \cdot t - t_0) \xleftrightarrow{\Phi} \frac{1}{\lambda} \cdot \dot{U}_0 \cdot \left( \frac{f}{\lambda} \right) \cdot e^{-j2\pi \frac{f}{\lambda} t_0}. \quad (2.24)$$

Формально из (2.24) следует

$$\begin{aligned} \text{mod } \dot{U}_S(f) &= \frac{1}{|\lambda|} \cdot \text{mod } \dot{U}_0 \left( \frac{f}{\lambda} \right), \\ \arg \dot{U}_S(f) &= \arg \dot{U}_0 \cdot \left( \frac{f}{\lambda} \right) - 2 \cdot \pi \cdot \frac{f}{\lambda} \cdot t_0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Здесь видно, как проявляется масштабный множитель ( $\lambda$ ) и задержка ( $t_0$ ) сигнала: сжатие сигнала на оси времени приводит к расширению спектра и, наоборот, сдвиг или задержка сигнала приводит только к изменению ФЧХ сигнала. Эти свойства, в частности, позволяют сравнительно просто находить спектры сигналов, предварительно «удобно» расположив их на оси времени.

В теории сигналов теорема о масштабах используется для определения спектра сигналов, расположенных на подвижном носителе. Типичный пример – запись и воспроизведение сигнала на разных скоростях.

Теорема о сдвигах имеет свой аналог в частотной области. Сравните

$$S(t - \tau) \xleftrightarrow{\Phi} \dot{U}(f) \cdot e^{-j2\pi ft} \quad (2.26)$$

и

$$\dot{U}(t - \nu) \xleftrightarrow{\Phi} S(f) \cdot e^{j2\pi \nu t}. \quad (2.27)$$

Выражение (2.27) показывает, что сдвиг спектра достигается умножением сигнала на гармоническую функцию (в комплексной форме). Это свойство используется в различных схемах переноса спектров (в модуляторах, гетеродинах и т. д.).

Применительно к теории цепей теорема о задержках позволяет ввести понятие идеальной линии задержки. Из определений (2.20), (2.22) и соотношений (2.27) следует, что такая цепь должна иметь следующие характеристики:

$$g_{\text{ЛЗ}}(t) = \delta(t - t_0),$$

$$\dot{K}_{\text{ЛЗ}}(f) = e^{-j2\pi f t_0}, \quad f \in (-\infty; \infty). \quad (2.28)$$

Отметим, что для гармонических сигналов вида  $S(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$  временная задержка фактически приводит к фазовому сдвигу. Действительно, положим, что время задержки равно  $t_0$ , с. Этот отрезок может включать целое число периодов  $T_0 = \frac{1}{f_0}$  и остаток  $\Delta t_0$ :  $t_0 = n \cdot T_0 + \Delta t_0$ , где  $n = [f_0 \cdot t_0]$  – целая

часть произведения.

Теперь имеем

$$S(t) = S_0(t - t_0) = A \cdot \cos 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot (t - t_0) = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \varphi_0),$$

$$\varphi_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t_0 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta t_0}{T_0} + 2 \cdot \pi \cdot n. \quad (2.29)$$

Спектральная плотность такого сигнала в соответствии с (2.27) равна

$$\dot{U}_S(f) = \frac{A}{2} \cdot \left[ \delta(f - f_0) \cdot e^{-j\varphi_0} + \delta(f + f_0) \cdot e^{j\varphi_0} \right]. \quad (2.30)$$

В данном случае ФЧХ сигнала равна

$$\arg \dot{U}_S(f) = \begin{cases} -\varphi_0, & f = f_0, \\ \varphi_0, & f = -f_0 \end{cases} \quad (2.31)$$

и отражает указанную фазовую задержку.

С задержкой сигнала для сравнения можно сопоставить особый случай – обращение сигнала во времени.

Если некоторый сигнал  $S_0(t)$  задан на конечном отрезке времени  $t \in [0, T]$ , то его обращение  $S(t) = S_0(T - t)$  даёт

$$\dot{U}_S(f) = \dot{U}_0^*(f) \cdot e^{-j2\pi fT}. \quad (2.32)$$

Это свойство используется в так называемых согласованных фильтрах.

### 2.4.2 Дифференцирование и интегрирование

Рассмотрим другие закономерности, связанные уже с линейными преобразованиями сигналов. Пусть задана пара  $S_0(t) \leftrightarrow \dot{U}_0(f)$ . В простейшем случае при изменении масштаба сигнала по уровню получим очевидный результат:

$$S(t) = a \cdot S_0(t) + b,$$

$$\dot{U}_S(f) = a \cdot \dot{U}_0(f) + b \cdot \delta(f).$$

Среди разнообразных линейных преобразований основными являются дифференцирование и интегрирование сигнала.

Для определения производной сигнала  $S_0(t)$  имеем

$$S(t) = \frac{dS_0(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_0(f) \cdot e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_0(j2 \cdot \pi \cdot f) \cdot \dot{U}_0(f) \cdot e^{j2\pi ft} df.$$

Таким образом, при дифференцировании спектр сигнала равен

$$\dot{U}_S(f) = (j2 \cdot \pi \cdot f) \cdot \dot{U}_0(f),$$

$$\dot{A}_S(f) = 2 \cdot \pi \cdot |f| \cdot A_0(f),$$

$$\varphi_S(f) = \varphi_0(f) + \frac{\pi}{2} \cdot \text{Sign}f. \quad (2.33)$$

Так, например, для спектра производной сигнала  $S_0(t) = \cos(2\pi f_0 t)$  получим

$$\dot{U}_S(f) = (j2 \cdot \pi \cdot f) \cdot \frac{1}{2} \cdot [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)].$$

Проверка обращением спектра  $\dot{U}_S(f)$  даёт

$$S(t) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df = j\pi \cdot f_0 \cdot [e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}] = -(2 \cdot \pi \cdot f_0) \cdot \sin 2\pi \cdot f_0 \cdot t,$$

что соответствует производной исходного сигнала. Неопределенный интеграл от сигнала даёт

$$S(t) = \int S_0(t) dt = \int \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_0(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \right\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j2 \cdot \pi \cdot f} \cdot \dot{U}_S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df.$$

Следовательно, при интегрировании получим спектр

$$\dot{U}_S(f) = \frac{1}{j2 \cdot \pi \cdot f} \cdot \dot{U}_0(f),$$

$$\dot{A}_S(f) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot |f|} \cdot A_0(f),$$

$$\varphi_S(f) = \varphi_0(f) - \frac{\pi}{2} \cdot \text{Sign}f. \quad (2.34)$$

В практических расчетах интегрирование сигналов встречается в различных вариантах. Рассмотрим, например, как преобразуется при текущем интегрировании  $S(t) = \int_{-\infty}^t S_0(\tau) d\tau$ .

Выразим  $S_0(\tau)$  через его спектр  $\dot{U}_S(f)$  и изменим порядок интегрирования. Для внутреннего интеграла получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t e^{j2\pi ft} &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{j2 \cdot \pi \cdot f} \cdot [e^{j2\pi ft} - e^{-j2\pi ft}] = \\ &= \frac{1}{j2 \cdot \pi \cdot f} e^{j2\pi ft} - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\cos 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t}{j2 \cdot \pi \cdot f} + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sin 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t}{j2 \cdot \pi \cdot f}. \end{aligned}$$

Последние два предела выше уже рассматривались (см. выражения (1.33) и (1.34)). Так что для  $S(t)$  имеем

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j2 \cdot \pi \cdot f} \cdot \dot{U}_0(f) \cdot e^{j2\pi ft} df + \frac{1}{2} \cdot \dot{U}_0(f).$$

Отсюда следует

$$\dot{U}_S(f) = \frac{1}{j2 \cdot \pi \cdot f} \cdot \dot{U}_0(f) + \frac{1}{2} \cdot \dot{U}_0(0) \cdot \delta(t). \quad (2.35)$$

Здесь дополнительно к спектру производной (2.34) учитывается спектр постоянной интегрирования [8]. Различие между (2.34) и (2.35) будет отсутствовать только при условии

$$\dot{U}_0(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(t) dt = 0. \quad (2.36)$$

Указанные свойства часто используют в тех случаях, когда прямые вычисления можно заменить на косвенные, оперируя более элементарными сигналами. Покажем это на примерах вычисления спектров прямоугольного и треугольного импульсов.

Элементарный сигнал в виде двух  $\delta$ -функций

$$S_0(t) = A \cdot \left[ \delta\left(t + \frac{T}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{T}{2}\right) \right],$$

$$\dot{U}_0(f) = j2 \cdot A \cdot \sin \pi \cdot f \cdot T, \quad \dot{U}_0(0) = 0 \quad (2.37)$$

путём интегрирования даёт импульс прямоугольной формы

$$S_1(t) = \int_{-\infty}^t S_0(\tau) d\tau = \begin{cases} A, & |t| \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (2.38)$$

Условие (2.36) здесь выполнено и спектральная плотность такого сигнала в соответствии с (2.35) равна

$$\dot{U}_1(f) = \frac{1}{j2 \cdot \pi \cdot f} \cdot \dot{U}_0(f) = \frac{A}{\pi \cdot f} \cdot \sin \pi \cdot f \cdot T = A \cdot T \cdot \frac{\sin \pi \cdot f \cdot T}{\pi \cdot f \cdot T},$$

$$\dot{U}_1(0) = A \cdot T. \quad (2.39)$$

Рассмотрим теперь элементарный сигнал с тремя  $\delta$ -функциями:

$$S_2(t) = A^2 \cdot [\delta(t+T) - 2 \cdot \delta(t) + \delta(t-T)],$$

$$\dot{U}_2(f) = -4 \cdot A^2 \cdot \sin^2 \pi \cdot f \cdot T, \quad \dot{U}_2(0) = 0. \quad (2.40)$$

Путём его интегрирования получаем двухполярный импульс:

$$S_3(t) = \int_{-\infty}^t S_2(\tau) d\tau = \begin{cases} -A^2, & |t| \leq T, \\ 0, & |t| > T. \end{cases}$$

$$\dot{U}_3(f) = \frac{\dot{U}_2(f)}{j2 \cdot \pi \cdot f} = j2 \cdot A^2 \cdot T \cdot \frac{\sin^2 \pi \cdot f \cdot T}{\pi \cdot f \cdot T}, \quad \dot{U}_3(0) = 0. \quad (2.41)$$

А при повторном интегрировании – импульс треугольной формы:

$$S_4(t) = \int_{-\infty}^t S_3(\tau) d\tau = \begin{cases} A^2 \cdot T \cdot \left(1 - \frac{|t|}{T}\right), & |t| \leq T, \\ 0, & |t| > T, \end{cases}$$

$$\dot{U}_4(f) = \frac{\dot{U}_3(f)}{j2 \cdot \pi \cdot f} = A^2 \cdot T \cdot \left(\frac{\sin \pi \cdot f \cdot T}{\pi \cdot f \cdot T}\right)^2. \quad (2.42)$$



Временные и спектральные диаграммы этих сигналов представлены на рисунке 2.2.

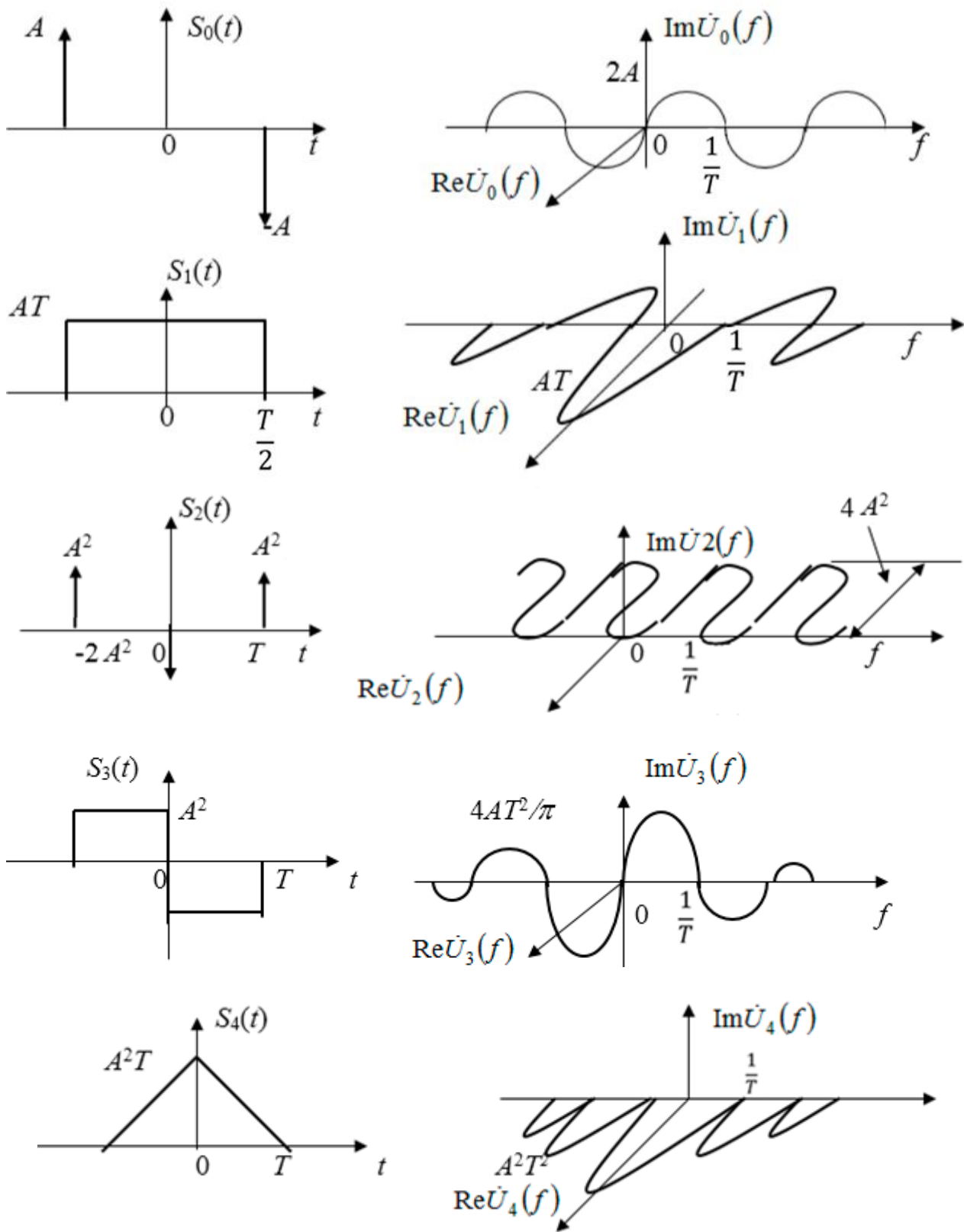


Рисунок 2.2 – Графики сигналов и их спектров

Данная форма изображения спектра является промежуточной и используется только на этапе предварительных вычислений. Как отмечалось выше, в завершённом виде (удобном и с физической точки зрения) спектр представляется в полярной системе координат ( $A, \varphi$ ) с отдельными графиками для АЧХ и ФЧХ. Однако при расчете ФЧХ и приведении её к шкале  $\pm\pi$  возникают некоторые трудности. Рассмотрим детально построение приведённой ФЧХ.

В соответствии с первым определением (2.39) ограничим многозначную функцию  $\text{Arctg}$  двумя ее периодами в пределах  $\pm\pi$  (рисунок 2.3).

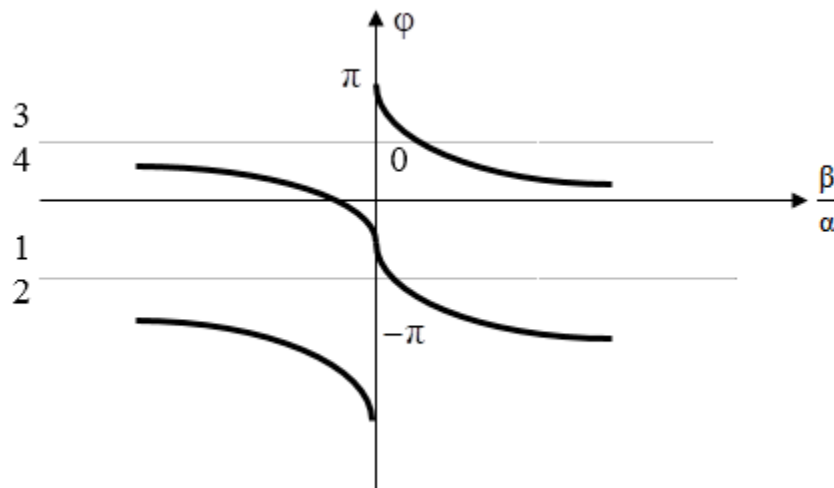


Рисунок 2.3 – График ФЧХ

Здесь можно выделить четыре участка монотонности (по числу диапазонов для углов в шкале  $\pm\pi$ ). Каждому из участков соответствует определенная четверть на окружности, которая задаётся сочетанием знаков  $\alpha$  и  $\beta$ . В пределах одного участка график фазы  $\tilde{\varphi}$  можно выразить функцией  $\arctg \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|$  с необходимыми поправками и смещением в зависимости от знаков  $\alpha$  и  $\beta$ . В полной сборке по всем участкам это даёт

$$\tilde{\varphi}(f) = \left\{ \left[ \frac{\pi}{2} - \arctg \left| \frac{\beta(f)}{\alpha(f)} \right| \right] \cdot \text{sign} \alpha(f) - \frac{\pi}{2} \right\} \text{sign} \beta(f). \quad (2.43)$$

Формула корректна для первой и второй четвертей ( $\alpha > 0$ ):

$$\tilde{\varphi}(f) = -\arctg \left| \frac{\beta(f)}{\alpha(f)} \right| \cdot \text{sign} \beta(f),$$

в том числе и на границе:  $\tilde{\varphi} = 0$  для  $\beta = 0$ . В пределах второй и третьей четвертей ( $\alpha < 0$ ) она также корректна:

$$\tilde{\varphi}(f) = \begin{cases} -\pi + \operatorname{arctg} \left| \frac{\beta(f)}{\alpha(f)} \right|, & \beta > 0, \\ \pi - \operatorname{arctg} \left| \frac{\beta(f)}{\alpha(f)} \right|, & \beta < 0, \end{cases}$$

за исключением границы ( $\beta = 0$ ) между этими четвертями, вместо  $\tilde{\varphi} = \pm\pi$  она даёт значение  $\tilde{\varphi} = 0$ . Напомним, здесь  $-1 = e^{\pm j\pi} = \cos(\pm\pi)$ .

Противоречие, связанное с применением формулы (2.43) в случае  $\alpha < 0$ ,  $\beta = 0$ , можно снять только специальной оговоркой. В этих условиях необходимо лишь приписывать фазе  $\tilde{\varphi}$  противоположные по знаку значения  $\pi$  в положительной и отрицательной областях частот (с тем, чтобы не нарушить асимметрию ФЧХ).

По второму варианту определения ФЧХ (2.15) предварительно следует выделить мнимую часть логарифма (здесь иногда удобно использовать её подходящую показательную форму). Далее, применяя правила вычетов, нужно привести ФЧХ к шкале  $\pm\pi$ .

Вернёмся теперь к построению АЧХ и ФЧХ сигналов (2.24)–(2.42). Спектральная плотность исходного сигнала  $S_0(t)$  равна

$$\dot{U}_0(f) = \alpha_0(f) - j\beta_0(f) = j2A \cdot \sin \pi \cdot f \cdot \tau,$$

$$\alpha_0(f) = 0, \quad \beta_0(f) = -2A \cdot \sin \pi \cdot f \cdot \tau.$$

В соответствии с (2.19) для приведенной ФЧХ этого сигнала получим

$$\tilde{\varphi}_0(f) = -\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign} \beta_0(f) = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign}(\sin \pi \cdot f \cdot \tau). \quad (2.44)$$

Для определения ФЧХ по второму варианту предварительно представим спектральную плотность в показательной форме:

$$\begin{aligned} \dot{U}_0(f) &= j2 \cdot A \cdot \sin \pi \cdot f \cdot \tau = j2 \cdot A \cdot |\sin \pi \cdot f \cdot \tau| \cdot \operatorname{sign}(\sin \pi \cdot f \cdot \tau) = \\ &= 2 \cdot A \cdot |\sin \pi \cdot f \cdot \tau| \cdot \exp \left\{ j \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign}(\sin \pi \cdot f \cdot \tau) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь использованы два равенства:

$$x = |x| \cdot \text{sign } x, \quad \pm j = \exp\left\{\pm j \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Как видно, аргумент этой функции совпадает с (2.20).  
Итак, для АЧХ и приведенной ФЧХ сигнала  $S_0(t)$  имеем

$$A_0(f) = 2 \cdot A \cdot |\sin \pi \cdot f \cdot \tau|,$$

$$\tilde{\varphi}_0(f) = \frac{\pi}{2} \cdot \text{sign}(\sin \pi \cdot f \cdot \tau). \quad (2.45)$$

*Примечание* – Анализ и результаты можно видоизменить, если воспользоваться выражением

$$\text{sign}(\sin \pi \cdot f \cdot \tau) = (-1)^{n(f)} \cdot \text{sign } f,$$

$$f \neq \frac{k}{T}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.46)$$

Здесь  $n(f) = [f \cdot T]$  – целая часть произведения  $f \cdot T$ . Формула корректна во всей области частот за исключением указанных точек. Она позволяет переписать  $\dot{U}_0(f)$  в форме, удобной для логарифмирования:

$$\dot{U}_0(f) = 2A \cdot |\sin \pi \cdot f \cdot \tau| \cdot (-1)^{n(f)} \cdot (j \text{sign } f).$$

Выделяя мнимую часть логарифма, получим две версии для полной фазы:

$$\varphi_0(f) = \frac{\pi}{2} \cdot \text{sign } f \pm \pi \cdot n(f). \quad (2.47)$$

Приведём эту ФЧХ к шкале  $\pm \pi$ . Здесь и далее находятся вычеты по одному и тому же модулю, поэтому его не указываем. Так как

$$\left\langle \frac{\pi}{2} \cdot \text{sign } f \right\rangle = \frac{\pi}{2} \cdot \text{sign } f,$$

$$\langle \pi \cdot n(f) \rangle = \frac{\pi}{2} \cdot [1 - (-1)^{n(f)}] \cdot \text{sign } f,$$

то для первого выражения в (2.24) получим

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_0(f) &= \langle \tilde{\varphi}_0(f) \rangle = \left\langle \left\langle \frac{\pi}{2} \cdot \text{sign} f \right\rangle + \langle \pi \cdot n(f) \rangle \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\pi}{2} \cdot \left[ 2 - (-1)^{n(f)} \right] \cdot \text{sign} f \right\rangle = \frac{\pi}{2} (-1)^{n(f)} \cdot j \text{sign} f.\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что этот же результат справедлив и для второй части (2.24). Таким образом, ФЧХ в (2.22) можно заменить выражением

$$\tilde{\varphi}_0(f) = \frac{\pi}{2} \cdot (-1)^{n(f)} \cdot j \text{sign} f. \quad (2.48)$$

Рассмотрим частотные характеристики сигнала  $S_1(t)$ . В данном случае имеем (см. выражение (2.13)):

$$\dot{U}_1(f) = \alpha_1(f) = A \cdot T \cdot \frac{\sin \pi \cdot f \cdot \tau}{\pi \cdot f \cdot \tau}, \quad \beta(f) = 0.$$

Из (2.18) с учетом оговорок получим две версии для ФЧХ:

$$\tilde{\varphi}_1(f) = \begin{cases} 0, & \alpha_1(f) \geq 0, \\ \pm \pi, & \alpha_1(f) < 0. \end{cases}$$

С другой стороны, в силу свойства (2.34) имеем

$$\tilde{\varphi}_1(f) = \tilde{\varphi}_0(f) - \frac{\pi}{2} \cdot \text{sign} f = \frac{\pi}{2} \left[ \text{sign}(\sin \pi \cdot f \cdot \tau) - \text{sign} f \right].$$

Ещё один вариант даёт представление спектральной плотности в показательной форме. Для этого достаточно учесть (2.23):

$$\dot{U}_1(f) = A \cdot T \cdot \left| \frac{\sin \pi \cdot f \cdot \tau}{\pi \cdot f \cdot \tau} \right| \cdot \frac{\text{sign}(\sin \pi \cdot f \cdot \tau)}{\text{sign}(\pi \cdot f \cdot \tau)} = A \cdot T \cdot \left| \frac{\sin \pi \cdot f \cdot \tau}{\pi \cdot f \cdot \tau} \right| \cdot (-1)^{n(f)}. \quad (2.49)$$

Аргумент этой плотности равен

$$\varphi_1(f) = \pm \pi \cdot n(f).$$

Как видно, полная фаза имеет две формы записи. После приведения к шкале  $\pm\pi$  получим также две формы записи:

$$\tilde{\varphi}_1(f) = \langle \tilde{\varphi}_1(f) \rangle = \pm \frac{\pi}{2} \cdot \left[ 1 - (-1)^{n(f)} \right] \cdot \text{sign}f.$$

Здесь все методы дают непротиворечивые результаты. Таким образом, для АЧХ и ФЧХ сигнала  $S_1(t)$  запишем

$$A_1(f) = A \cdot T \cdot \left| \frac{\sin \pi \cdot t \cdot \tau}{\pi \cdot f \cdot \tau} \right|,$$

$$\tilde{\varphi}_1(f) = \frac{\pi}{2} \cdot \left[ \text{sign}(\sin \pi \cdot f \cdot \tau) - \text{sign}f \right]. \quad (2.50)$$

Заметим, что для сигнала вида  $S_1(t)$  в литературе чаще используется версия ФЧХ в форме (2.29) со знаком « $\leftrightarrow$ » [3].

Спектральную плотность сигнала  $S_2(t)$  (см. (2.16)) формально можно представить в трёх вариантах:

а)  $\dot{U}_2(f) = \alpha_2(f) = -4 \cdot A^2 \cdot \sin^2(\pi \cdot f \cdot T), \quad \beta(f) = 0;$

б)  $\dot{U}_2(f) = 4 \cdot A^2 \cdot \sin^2(\pi \cdot f \cdot T) \cdot e^{\pm j\pi};$

в)  $\dot{U}_2(f) = (\dot{U}_2(f))^2.$

Варианты а) и б) в соответствии с исходными определениями дают две формы записи для ФЧХ:

$$\tilde{\varphi}_2(f) = \begin{cases} +\pi(-\pi), & f > 0, \\ -\pi(+\pi), & f < 0. \end{cases}$$

Ниже покажем, что сигнал  $S_2(t)$  является результатом автосвёртки сигнала  $S_0(t)$ . В частотной области это и обеспечивает равенство в). В частности, оно даёт

$$\tilde{\varphi}_2(f) = 2 \cdot \tilde{\varphi}_0(f) = \pi \cdot \text{sign}f.$$

Итак, окончательно для АЧХ и ФЧХ сигнала  $S_2(t)$  имеем

$$A_2(f) = 4 \cdot A^2 \cdot \sin^2(\pi \cdot f \cdot T),$$

$$\tilde{\varphi}_2(f) = \pi \cdot \text{sign} f. \quad (2.51)$$

Далее, последовательно применяя свойство (2.34) для сигналов  $S_3(t)$  и  $S_4(t)$ , получим

$$A_3(f) = \frac{2A^2}{\pi f} \cdot \sin^2(\pi \cdot f \cdot T), \quad \tilde{\varphi}_3(f) = \frac{\pi}{2} \cdot \text{sign} f,$$

$$A_4(f) = (AT)^2 \cdot \left( \frac{\sin \pi \cdot f \cdot T}{\pi \cdot f \cdot T} \right)^2, \quad \tilde{\varphi}_3(f) = 0. \quad (2.52)$$

Как видно, сигнал  $S_4(t)$  выделяется тем, что все его спектральные составляющие имеют одинаковую нулевую фазу. Равновесие можно нарушить, сдвинув сигнал по оси времени. Так, для сигнала  $S_4(t - t_0)$  по теореме о сдвигах (2.26 и 2.27) получим

$$\tilde{\varphi}_4(f; t_0) = -2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0.$$

Приведение этой ФЧХ к шкале  $\pm\pi$  по (2.19) дает периодическую (с периодом  $\frac{1}{t_0}$ ) пилообразную функцию

$$\tilde{\varphi}_4(f; t_0) = -2 \cdot \text{arctg}(\text{tg} \pi \cdot f \cdot t_0). \quad (2.53)$$

Рассмотренные свойства и особенности преобразования Фурье при дифференцировании и интегрировании сигналов широко используются в различных приложениях. Отметим характерные примеры применения этих операций: это фазовращатели на  $\frac{\pi}{2}$  для гармонических сигналов, схемы выделения и селекции импульсов по передним и задним фронтам, схемы формирования сложных импульсов, схемы усреднения и др.

Из определения (1.21) и соотношений (2.33), (2.34) следует, что коэффициенты передач идеализированных дифференцирующих  $\dot{K}_{\text{диф}}(f)$  и интегрирующей  $\dot{K}_{\text{интегр}}(f)$  цепей соответственно равны

$$\dot{K}_{\text{диф}}(f) = j2 \cdot \pi \cdot f, \quad \dot{K}_{\text{интегр}}(f) = \frac{1}{j2 \cdot \pi \cdot f}. \quad (2.54)$$

Коэффициенты передач указывают на частотные свойства этих цепей. Так, интегрирующая цепь, как усредняющая или сглаживающая, подавляет более высокочастотные компоненты сигнала. Это можно заметить, сопоставляя АЧХ сигнала  $S_0(t)$  с  $S_1(t)$  или  $S_2(t)$  с  $S_3(t)$  и  $S_4(t)$ .

*Примечание* – В более широком плане дифференцирующая цепь является одним из основных элементов в структуре произвольной линейной системы. Модель произвольной линейной системы с одним входом  $x(t)$  и выходом  $y(t)$  в общем виде задаётся дифференциальным уравнением

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x^{(k)}(t). \quad (2.55)$$

Если переписать его относительно  $y(t)$  (полагаем  $a_0 = 1$ ), то получим алгоритм функционирования системы:

$$Y(t) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^N a_k \cdot y^{(k)}(t). \quad (2.56)$$

Как видно, система включает «усилители» (с коэффициентами  $a_k$  и  $b_k$ ) дифференцирующей цепи и сумматор. Выполнив преобразование Фурье обеих частей

$$\dot{U}_y(f) \cdot \sum_{k=0}^N a_k (j2 \cdot \pi \cdot f)^k = \dot{U}_x(f) \cdot \sum_{k=0}^M b_k (j2 \cdot \pi \cdot f)^k,$$

найдем коэффициент передачи этой системы:

$$\dot{K}(f) = \frac{\dot{U}_y(f)}{\dot{U}_x(f)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j2 \cdot \pi \cdot f)^k}{1 + \sum_{k=0}^N a_k (j2 \cdot \pi \cdot f)^k}. \quad (2.57)$$

В частности, для интегрирующей цепи с коэффициентом передачи, близким к (2.51), имеем



$$Y(t) = b_0 \cdot x(t) - a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt},$$

$$\dot{K}(f) = \frac{b_0}{1 + j2 \cdot \pi \cdot f \cdot a_1}. \quad (2.58)$$

Схема такой цепи должна содержать усилители (с коэффициентами  $b_0$  и  $a_1$ ), дифференцирующую цепь (оператор  $D$ ) и сумматор. Выбором параметров  $b_0$  и  $a_1$  можно добиться интегрирования (в некоторой области частот), близкого к идеальному.

### 2.4.3 Свёртка, корреляция и произведение сигналов

Рассмотрим свойства преобразования Фурье для композиции двух и более сигналов. Основные результаты здесь можно получить на основе равенства Парсеваля (1.17) для скалярных произведений

$$E_{xy} = (x, y) = (\dot{U}_x, \dot{U}_y^*)$$

и теоремы о сдвигах в частотной и временной областях (2.26), (2.27). Полагаем, что исходные вещественные сигналы и их спектры заданы:

$$S_i(t) \leftrightarrow \dot{U}_i(f), \quad i = 1, 2, \dots$$

а) *Корреляция сигналов.* Положим

$$x(\tau) = S_1(\tau) \leftrightarrow \dot{U}_1(f),$$

$$y(\tau) = S_2(\tau - t) \leftrightarrow \dot{U}_2(f) \cdot e^{-j2\pi ft}.$$

В этом случае равенство Парсеваля принимает вид

$$E_{xy} = E_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\tau) \cdot S_2(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_1(f) \cdot \dot{U}_2^*(f) \cdot e^{j2\pi ft} df. \quad (2.59)$$

Интеграл в левой части называется корреляционным. Он используется в так называемом корреляционном анализе сигналов. В данном случае функцию  $E_{12}(t)$  называют взаимной корреляционной функцией двух сигналов. Из (2.57)

следует, что спектр этой функции равен произведению спектра одного из сигналов и комплексно-сопряжённого спектра другого сигнала:

$$E_{12}(t) \leftrightarrow \dot{U}_1(f) \cdot \dot{U}_2^*(f). \quad (2.60)$$

В случае  $S_1(t) = S_2(t) = S(t)$  функцию  $E_{12}(t) = E(t)$  называют автокорреляционной. Из (2.57) выведем

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) \cdot S(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{U}(f)|^2 \cdot e^{j2\pi ft} df,$$

$$E(0) = E_S, \quad E(-t) = E(t). \quad (2.61)$$

Как видно, спектр автокорреляционной функции сигнала  $S(t)$  равен спектральной плотности его энергии:

$$E(t) \leftrightarrow |\dot{U}(f)|^2. \quad (2.62)$$

Эти свойства называют теоремой о корреляции.

б) *Свёртка сигналов.* Теперь положим

$$x(\tau) = S_1(\tau) \leftrightarrow \dot{U}_1(f),$$

$$y(\tau) = S_2(t - \tau) \leftrightarrow \dot{U}_2(f) \cdot e^{-j2\pi ft}.$$

Здесь использовано свойство преобразования Фурье при обращении сигнала во времени (см. выражение (2.6)). Равенство Парсеваля принимает новое выражение:

$$E_{xy} = S_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\tau) \cdot S_2(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_1(f) \cdot \dot{U}_2(f) e^{j2\pi ft} df. \quad (2.63)$$

Функцию вида  $S_{12}(t)$  называют интегральной свёрткой двух сигналов. В символической форме эту операцию обозначают «звёздочкой»:

$$S_{12}(t) = S_1(t) * S_2(t) \leftrightarrow \dot{U}_1(f) \cdot \dot{U}_2(f). \quad (2.64)$$

В частности, для автосвертки  $S_1(t) = S_2(t) = S(t)$  из выражения (2.63) получим

$$S_*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) \cdot S(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}^2(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \quad (2.65)$$

или, в символической форме,

$$S_*(t) = S(t) * S(t) \leftrightarrow \dot{U}^2(f). \quad (2.66)$$

Данное свойство можно обобщить на произвольное число сигналов:

$$S_1(t) * S_2(t) * \dots * S_m(t) \leftrightarrow \dot{U}_1(f) \cdot \dot{U}_2(f) \cdot \dots \cdot \dot{U}_m(f).$$

Как видно, спектр свёртки сигналов равен произведению их спектров. Это свойство преобразования Фурье называют теоремой о свёртках сигналов.

в) *Произведение сигналов.* Пусть теперь

$$x(\tau) = S_1(\tau) \leftrightarrow \dot{U}_1(f),$$

$$y(\tau) = S_2(\tau) \cdot e^{-j2\pi\gamma\tau} \leftrightarrow \dot{U}_2(f - \gamma).$$

Здесь используется теорема о сдвигах в частотной области (2.27). В данном случае сигнал  $y(\tau)$  – комплекснозначный, это необходимо учитывать при записи скалярных произведений:

$$\begin{aligned} E_{xy} = (x, y^*) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\tau) \cdot S_2(\tau) e^{-j2\pi\gamma\tau} d\tau = (\dot{U}_x, \dot{U}_y^*) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_1(f) \cdot \dot{U}_2(\gamma - f) df. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Таким образом спектр произведения сигналов равен свёртке их спектров. В символической форме

$$S_1(t) \cdot S_2(t) \leftrightarrow \dot{U}_1(f) * \dot{U}_2(f). \quad (2.68)$$

Это свойство называют теоремой о произведении сигналов. Его можно обобщить на произвольное число сигналов:

$$S_1(t) \cdot S_2(t) \cdot \dots \cdot S_m(t) \leftrightarrow \dot{U}_1(f) * \dot{U}_2(f) * \dots * \dot{U}_m(f).$$

Указанные операции широко используются в различных задачах по формированию, преобразованию или измерению параметров сигналов. Преобразование Фурье в этих случаях позволяет видоизменить или упростить задачу, переводя её из временной области в частотную или наоборот. Далее приводятся характерные примеры, связанные с применением этих операций.

## 2.5 Примеры применения свёрток и корреляций

Прежде всего сопоставим операции свёртки и корреляции для двух сигналов и определим возможные способы их реализации.

Как следует из (2.57) и (2.61), обе операции дают один и тот же результат  $E_{12}(t) = S_{12}(t)$ , если только один из сигналов является чётной функцией на оси времени. Чтобы убедиться в этом, достаточно в указанных выражениях сделать подстановку  $S_2(t - \tau) = S_2(\tau - t)$ . В частности, у симметричных сигналов  $S(t) = S(-t)$  функции автокорреляции и автосвёртки совпадают. Идентичными при этом оказываются и спектральные плотности указанных функций. Дело в том, что сигналы с чётной симметрией  $S(t) = S(-t)$  имеют вещественную спектральную плотность ( $\text{Im} \dot{U}_S(f) = 0$ ) (см. определение (1.12)), что даёт

$$\dot{U}_S(f) = \dot{U}_S(-f), \quad \dot{U}_S^2(f) = |\dot{U}_S(f)|^2.$$

Так, для рассмотренных выше сигналов  $S_0(t) - S_4(t)$  (см. (2.56)–(2.65)) можно установить следующие равенства:

$$S_3(t) = S_0(t) * S_1(t) = E_{01}(t),$$

$$S_4(t) = S_1(t) * S_1(t) = E_1(t),$$

$$S_{12}(t) = S_1(t) * S_2(t) = E_{12}(t), \tag{2.69}$$

но

$$S_2(t) = S_0(t) * S_0(t) = -E_0(t).$$

Соответствующим образом, по формулам (2.58) и (2.62) определяются и спектры указанных функций:

$$\dot{U}_3(f) = \dot{U}_0(f) \cdot \dot{U}_1(f) \leftrightarrow E_{01}(t),$$

$$\dot{U}_4(f) = \dot{U}_1^2(f) \leftrightarrow E_1(t),$$

$$\dot{U}_{12}(f) = \dot{U}_1(f) \cdot \dot{U}_2(f) \leftrightarrow E_{12}(t), \quad (2.70)$$

но

$$\dot{U}_2(f) = \dot{U}_0^2(f) = -|\dot{U}_0(f)|^2 \leftrightarrow -E_0(t).$$

Разница между автосвёрткой и корреляционной функцией (и их спектрами) для сигнала  $S_0(t)$  обусловлена его асимметрией.

Примеры в выражении (2.67) носят теоретический характер. В реальных задачах отсчёт ведётся с момента появления сигнала, что исключает случай симметрии. Здесь и проявляются различия операций свёртки и корреляции как в реализации, так и в результатах.

Операция свёртки непосредственно реализуется в линейных цепях. Действительно, из определений (1.16), (1.18) и теоремы о свёртке следует, что сигнал на выходе цепи является свёрткой входного сигнала и импульсной характеристики:

$$S_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau, \quad (2.71)$$

в теории цепей это выражение называют интегралом Дюамеля.

Если допустить существование цепи с импульсной характеристикой  $g(t) = \frac{1}{\pi t}$ , то реакция этой цепи на сигнал  $\hat{S}(t)$  является преобразованием Гильберта  $S(t)$ .

Правила свёртки позволяют, по крайней мере формально, составлять различные схемы формирования или преобразования сигналов. Положим, заданы цепи с импульсными характеристиками  $g_0(t) = S(t)$ ,  $g_i(t) = S_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ . Последовательное соединение цепей и «запуск» их  $\delta$ -импульсами порождает сигналы автосвёртки

$$S_*(t) = S(t) * S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\tau) \cdot g_0(t - \tau) d\tau$$

или свёртки

$$S_{12}(t) = S_1(t) * S_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) \cdot g_2(t - \tau) d\tau.$$

Коэффициенты передачи указанных схем по теореме о свёртке соответственно равны

$$\dot{K}(f) = K_0^2(f) = \dot{U}_S^2(f),$$

$$\dot{K}(f) = \dot{K}_1(f) \cdot \dot{K}_2(f) = \dot{U}_1(f) \cdot \dot{U}_2(f).$$

Таким образом, в приложении к цепям теорема о свёртке даёт общее правило записи коэффициента передачи системы, состоящей из последовательно соединённых  $m$ -звеньев:

$$\dot{K}(f) = \prod_{i=1}^m \dot{K}_i(f). \quad (2.72)$$

В задачах по обработке сигналов встречается так называемый согласованный фильтр, процессы в котором можно представить как в форме свертки, так и в форме вычисления корреляции.

Линейная цепь называется согласованным фильтром для сигнала конечной длительности  $S(t) \neq 0, t \in [0, T]$ , если её характеристики удовлетворяют условиям

$$g_{\text{ВХ}}(t) = S(T - t), \quad (2.73)$$

$$\dot{K}_{\text{ВХ}}(f) = \dot{U}_S^*(f) \cdot e^{-j2\pi ft}.$$

Здесь учтено свойство (2.6) преобразования Фурье при обращении сигнала во времени. Реакцию фильтра на сигнал  $S(t)$  можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{\text{ВХ}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) \cdot g_{\text{ВХ}}(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) \cdot S(\tau + T - t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{U}(f)|^2 \cdot e^{j2\pi f(t-T)} df. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Как видно, по форме эта реакция совпадает с автокорреляционной функцией входного сигнала, только лишь сдвинутой на  $T$ , и своего максимума достигает в момент окончания сигнала:

$$S_{\text{вх}}(t) = E(t - T) \leq E_S,$$

$$S_{\text{вх}}(T) = E_S. \quad (2.75)$$

Эффект «фокусировки» энергии  $E_S$  входного сигнала можно заметить и по последнему в (2.73) интегралу: при  $t = T$  все спектральные составляющие на выходе согласованного фильтра суммируются в одной (нулевой) фазе, что и даёт указанный результат. Это важное свойство согласованных фильтров используется в задачах приёма сигналов на фоне шума [2].

Пример с согласованным фильтром показывает, что, в принципе, обратив сигнал во времени, можно было бы находить и корреляционную функцию по правилам свёртки. Допуская такую возможность, проведём сравнительный анализ всех трёх операций.

Рассмотрим схему на рисунке 2.4. Исходный сигнал  $S(t)$ ,  $t \in [0, T]$  (на примере импульса треугольной формы) задаётся цепью с импульсной характеристикой

$$g_0(t) = S(t) \leftrightarrow \dot{U}(f) = \dot{K}_0(f).$$

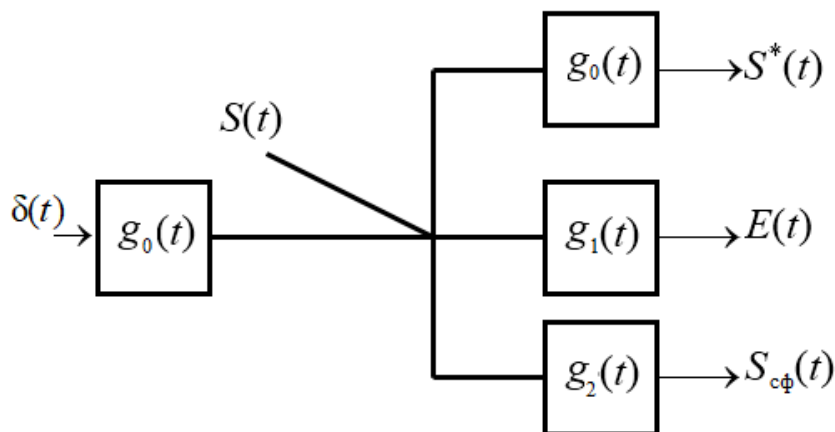
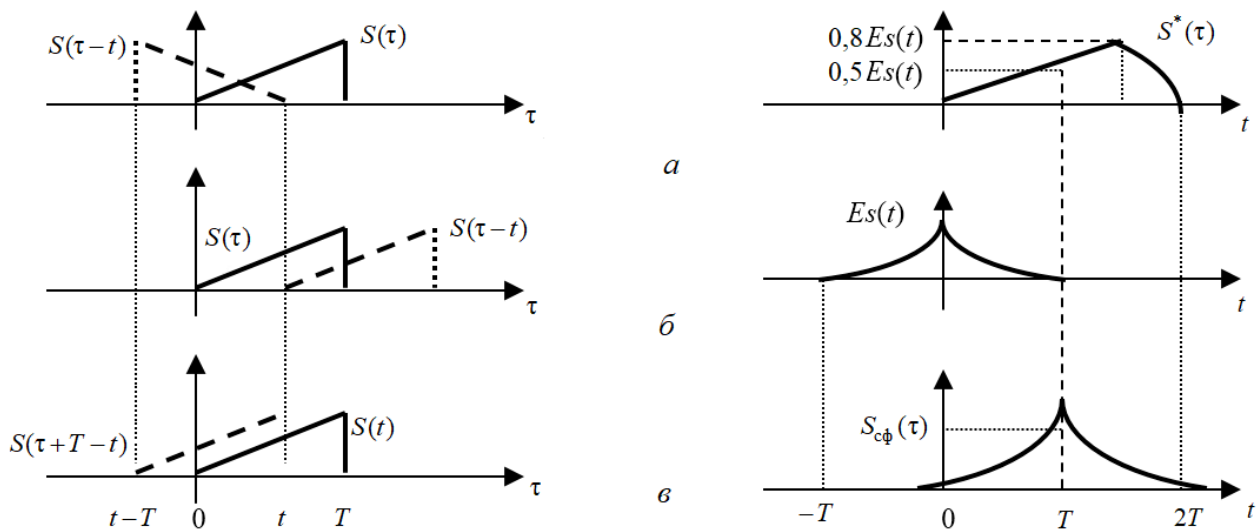


Рисунок 2.4 – Схема с согласованным фильтром

Если последовательно соединить цепи с импульсными характеристиками  $g_0(t)$ ,  $g_1(t) = g_0(-t)$  или  $g_2(t) = g_0(T - t)$ , то получим, соответственно, сигнал автосвёртки  $S^*(t)$ , автокорреляционную функцию  $E(t)$  или сигнал на выходе согласованного фильтра  $S_{\text{сф}}(t)$ .

Различия в процедурах вычисления соответствующих интегралов свёрток показаны на рисунке 2.5.



*a* – процедуры автосвёртки; *б* – процедуры автокорреляции;  
*в* – процедуры формирования сигнала на выходе согласованного фильтра  
 Рисунок 2.5 – Графические интерпретации процедуры свёртки и корреляции

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что указанные цепи имеют требуемые частотные характеристики:

$$S_*(t) \leftrightarrow \dot{U}^2(f) = \dot{K}_0^2(f),$$

$$E(t) \leftrightarrow |\dot{U}(f)|^2 = \dot{K}_0(f) \cdot \dot{K}_0^*(f), \quad (2.76)$$

$$S_{\text{вх}}(t) \leftrightarrow |\dot{U}(f)|^2 \cdot e^{-j2\pi fT} = \dot{K}_0(f) \cdot \dot{K}_0^*(f) \cdot e^{-j2\pi fT}.$$

Здесь формально использовано свойство цепей с обращённой во времени импульсной характеристикой:

$$g_1(t) = g_0(-t) \leftrightarrow \dot{K}_0^*(f),$$

только в этом случае автокорреляционную функцию можно получить на всей оси времени.

Однако цепь с обращённой во времени импульсной характеристикой физически может не существовать. Напомним, по определению  $g(t)$  есть реакция цепи на воздействие в виде функции  $\delta(t)$ . Следовательно, для реализуемости цепи должно выполняться условие  $g(t) = 0$  для  $t < 0$ . В этом



случае говорят, что цепь удовлетворяет принципу причинности («без воздействия нет реакции»). Таким образом, схема на рисунке 2.5 для получения автокорреляционной функции физически не осуществима. В случае же согласованного фильтра принцип причинности не нарушен:

$$g_2(t) = g_0(T - t) = S(T - t) = 0, \quad t > T.$$

Практически в корреляционных измерениях цепи используется схема прямого вычисления скалярного произведения (рисунок 2.6).

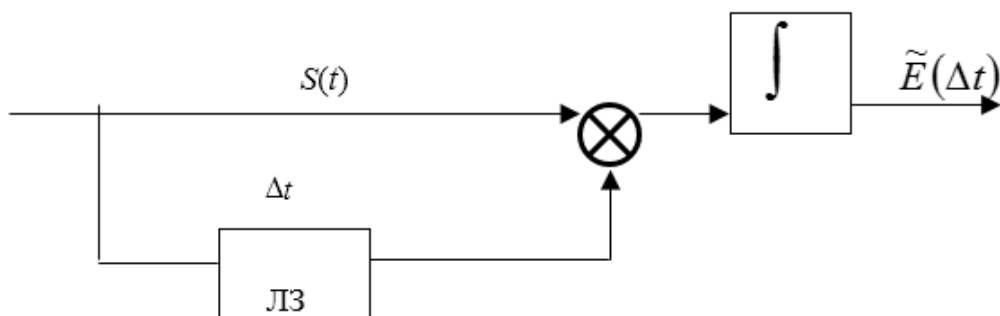


Рисунок 2.6 – Схема прямого вычисления скалярного произведения

Данная схема включает линию задержки, перемножитель и интегратор. По ней находятся значения  $E(\Delta t)$  только для  $\Delta t > 0$ . Однако в силу чётности функции  $E(t)$  этого достаточно. Но существуют и другие, более современные методы вычисления свертки и скалярные произведения на базе аппарата дискретного преобразования Фурье (рисунок 2.7).

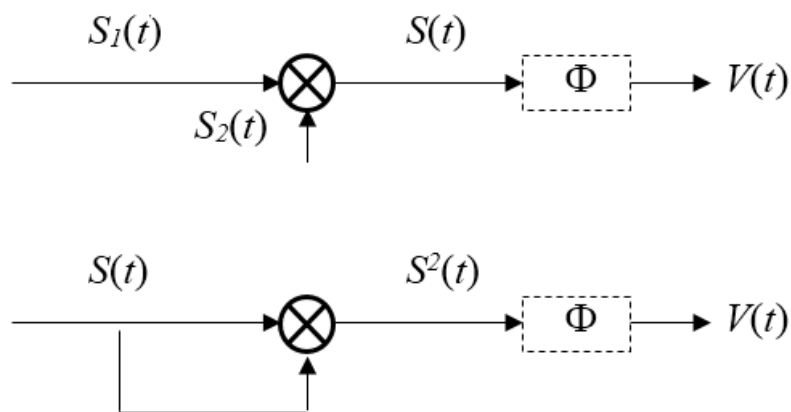


Рисунок 2.7 – Схемы вычисления свёрток и скалярных произведений

Стоит также отметить примеры применения теоремы о произведении сигналов. Схемы умножения (см. рисунок 2.7) используются в устройствах стробирования (из полезного сигнала  $S_1(t)$  с помощью строб-импульса  $S_2(t)$ )

выделяется требуемый участок), в параметрических усилителях (в схемах с переменными параметрами), в умножителях частоты и квадраторах, в модуляторах и демодуляторах и др. Часто схемы дополняются фильтрами (отмечены пунктиром на рисунке 2.7), с тем чтобы выделить полезные компоненты.

Спектральный анализ в этих случаях позволяет находить условия, при которых можно исключить паразитные компоненты или ослабить их влияние. Покажем это на примерах модуляции и демодуляции по схеме на рисунке 2.7.

Пусть

$$S_1(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{T}{2}, \end{cases}$$

$$S_2(t) \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t), \quad t \in (-\infty, \infty),$$

$$S(t) = S_1(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t). \quad (2.77)$$

Здесь  $S(t)$  – радиоимпульс длительностью  $T_c$  на несущей частоте  $f_0$ . Он получается в результате умножения двух функций времени. Такой сигнал называют модулированным – его амплитуда меняется по закону сигнала  $S_1(t)$ . В данном случае для спектральных плотностей имеем

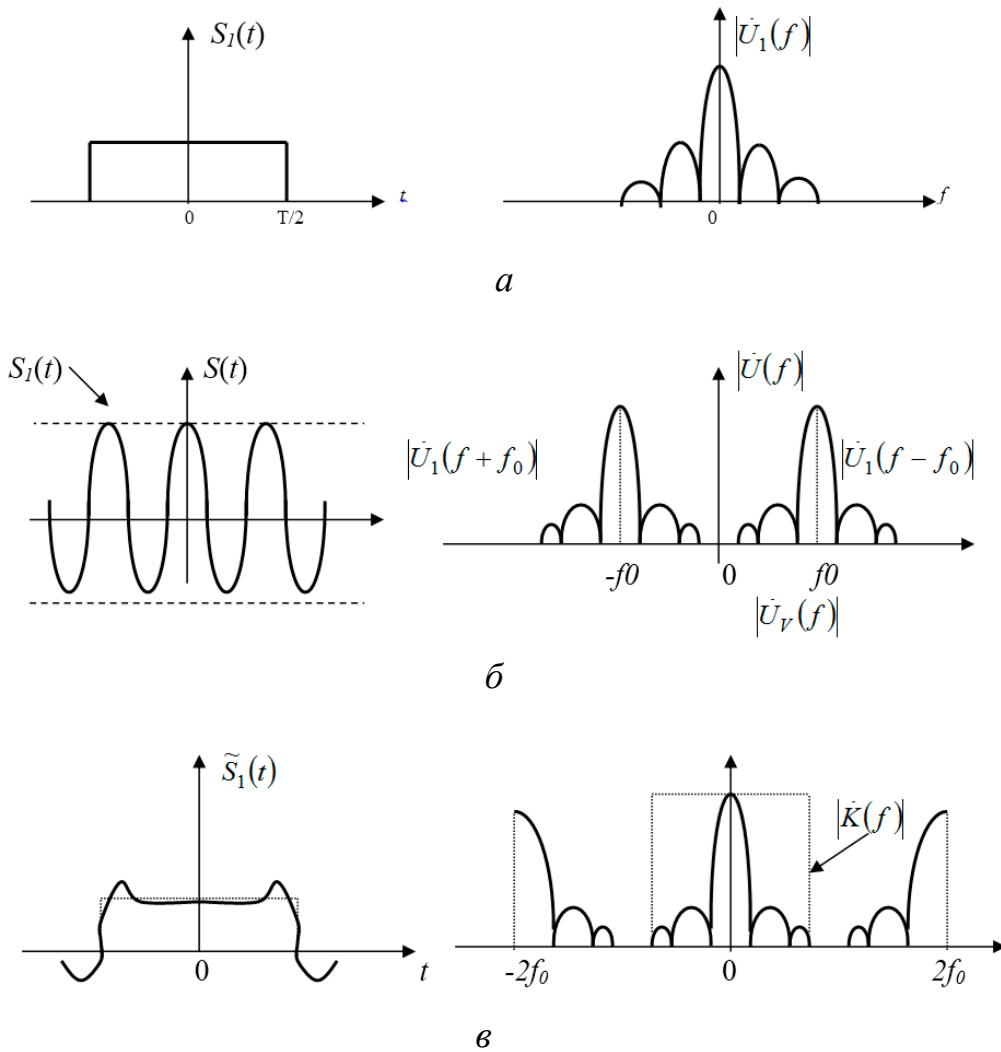
$$\dot{U}_1(f) = A \cdot T \cdot \frac{\sin \pi \cdot f \cdot t}{\pi \cdot f \cdot t},$$

$$\dot{U}_2(f) = \frac{1}{2} \cdot [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)],$$

$$\dot{U}(f) = \dot{U}_1(f) * \dot{U}_2(f) = \frac{1}{2} \cdot [\dot{U}_1(f + f_0) + \dot{U}_1(f - f_0)]. \quad (2.78)$$

Как видно, в процессе модуляции (умножения) спектр импульса  $S_1(t)$  (рисунок 2.8, а) линейно смещается на частоты  $f_0$  и  $-f_0$ . При этом, чтобы исключить искажение спектра, необходимо соблюдать условие  $2 \cdot f_0 \gg \frac{1}{T}$ .

Здесь  $\frac{1}{T}$  – характерный частотный интервал в спектре импульса  $S_1(t)$ . Данное условие гарантирует отсутствие наложения компонент  $U_1(f + f_0)$  и  $U_1(f - f_0)$  друг на друга (рисунок 2.8, б).



*a* – сигнал и его спектр на входе модулятора; *б* – сигнал и его спектр на выходе перемножителя; *в* – сигнал и его спектр на выходе модулятора  
 Рисунок 2.8 – Графическое пояснение прохождения сигнала через модулятор

Для решения обратной задачи – восстановления сигнала  $S_1(t)$  из радиоимпульса  $S(t)$  (или, как говорят, выделения огибающей) – необходимо воспользоваться одним из процессов демодуляции. В частности, здесь можно использовать также схему умножения (теперь уже для смещения спектра в обратную сторону):

$$\begin{aligned}
 V(t) &= S(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot S_1(t) \cdot [1 - \cos(2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot f_0 \cdot t)], \\
 \dot{U}_0(f) &= \dot{U}(f) * \frac{1}{2} \cdot [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)] = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot [\dot{U}_1(f + 2 \cdot f_0) + 2 \cdot \dot{U}_1(f) + \dot{U}_1(f - 2 \cdot f_0)].
 \end{aligned}
 \tag{2.79}$$

Как видно, в спектре нового сигнала  $V(t)$  содержатся полезный продукт  $U(f)$  и паразитные компоненты  $U_1(f \pm 2 \cdot f_0)$  (рисунок 2.8, в). Если выполнено условие  $2 \cdot f_0 \gg \frac{1}{T}$ , то наложение этих компонент на полезную часть будет ничтожным.

Применение фильтра низких частот (на рисунке 2.8, в пунктиром показана АЧХ этого фильтра) позволяет определить низкочастотную часть сигнала  $V(t)$  и, следовательно, восстановить огибающую  $S_1(t)$ . Естественно, выделенный импульс  $S_1(t)$  будет отличаться по форме от исходного  $S_1(t)$  (см. рисунок 2.8, в). Искажения обусловлены только двумя факторами: несоблюдением условия  $2 \cdot f_0 \gg \frac{1}{T}$  и качеством фильтрации.

### 3 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА

Интегральное преобразование Гильберта задаётся в (1.5) самосопряжёнными ядрами [1]

$$I(\theta, t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\theta - t}, \quad J(t, \theta) = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{t - \theta},$$

которые зависят от разности аргументов. Поэтому переменные  $t, \theta$  должны иметь одинаковую размерность. Если исходный сигнал  $S(t)$  является функцией времени, то его отображение  $U(\theta)$  – также функция времени. В последующем преобразованный по Гильберту сигнал будем обозначать  $\hat{S}(t)$  вместо  $U(\theta)$ .

Преобразование Гильберта (прямое и обратное) задаётся интегралами

$$\hat{S}(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad S(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{S}(\tilde{t})}{\tau - t} d\tau, \quad (3.1)$$

косой чертой обозначены главные значения интегралов (они расходятся в точке  $\tau = t$ ).

Итак, преобразование Гильберта в отличие от преобразования Фурье создаёт отображение из временной области во временную же область. Рассмотрим особенности этого преобразования.

Для сигналов  $S(t)$  и их отображений  $\hat{S}(t)$  справедливы все свойства (1.8). В частности, равенства Парсеваля принимают вид

$$E_s = \|S\|^2 = \|\hat{S}\|^2 = E_{\hat{S}},$$

$$E_{12} = (S_1, S_2) = (\hat{S}_1, \hat{S}_2). \quad (3.2)$$

Можно показать, что спектр  $\dot{U}_{\hat{S}}(f)$  сигнала  $\hat{S}(t)$  связан со спектром  $\dot{U}_S(f)$  исходного сигнала  $S(t)$  следующим образом:

$$\dot{U}_{\hat{S}}(f) = (-j \text{Sign} f) \cdot \dot{U}_S(f), \quad (3.3)$$

где  $\text{Sign} f = \frac{f}{|f|}$  – знаковая функция.

Таким образом, интегральная связь во временной области приводит к алгебраической связи в частотной области. Соотношение (3.3), в частности,

позволяет косвенно выполнить преобразование Гильберта ( $\Gamma$ ), используя лишь преобразования Фурье ( $\Phi$ ), в следующей последовательности:

$$\begin{aligned} S(t) &\stackrel{\Gamma}{\leftrightarrow} \hat{S}(t) \\ \Phi \downarrow &\quad \uparrow \Phi^{-1} \\ \dot{U}_S(f) &\rightarrow \dot{U}_{\hat{S}}(f). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Отличительной чертой преобразования Гильберта в сравнении с преобразованием Фурье является то, что при восстановлении оно даёт сигнал с обратным знаком (рисунок 3.1).

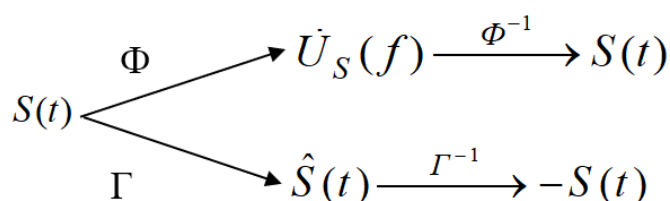


Рисунок 3.1 – Графическое представление отличительной особенности преобразования Гильберта в сравнении с преобразованием Фурье

Сигналы  $S(t)$  и  $\hat{S}(t)$  различаются по форме и спектральному составу (см. выражение (2.28)). Однако можно показать, что они ортогональны.

Действительно, положим в равенствах Парсеваля (2.17), (2.26) и (2.27)

$$S_1(t) = S(t),$$

$$S_2(t) = \hat{S}(t),$$

тогда с учетом (2.28) и (2.29) соответственно получим

$$(S, \hat{S}) = (\dot{U}_S^*, \dot{U}_{\hat{S}}) = 0,$$

$$(S, \hat{S}) = (\hat{S}, -S) = 0. \quad (3.5)$$

Основные свойства преобразования Гильберта представлены в таблице 3.1. В строке 6 указаны производные  $n$ -го порядка. Все результаты непосредственно следуют из определения.

Таблица 3.1 – Сигнал и его преобразование по Гильберту

№ п/п	$S(t)$	$\hat{S}(t)$
1	$\sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(t)$	$\sum_{i=1}^N \alpha_i \hat{\varphi}_i(t)$
2	$\hat{S}(t)$	$-\hat{S}(t)$
3	$S(t) = S(-t)$	$\hat{S}(-t) = -\hat{S}(t)$
4	$S(t - t_0)$	$\hat{S}(t - t_0)$
5	$S(\alpha \cdot t)$	$\hat{S}(\alpha \cdot t)$
6	$S^{(n)}(t)$	$\hat{S}^{(n)}(t) = \hat{S}^{(n)}(t)$
7	$A_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \varphi_0)$	$A_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \varphi_0)$
8	$S(t) = \begin{cases} 1, &  t  \leq \frac{T}{2} \\ 0, &  t  > \frac{T}{2} \end{cases}$	$\hat{S}(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \ln \left  \frac{2 \cdot t + T}{2 \cdot t - T} \right $
9	$S(t) = \delta(t)$	$\hat{S}(t) = \frac{1}{\pi \cdot t}, t \neq 0$
10	$S(t) = \text{const}$	$\hat{S}(t) = 0$

В теории сигналов на основе преобразования Гильберта вводится понятие «аналитический сигнал (АС)». Аналитический сигнал – это комплексная функция времени, реальная часть которой совпадает с исходным сигналом  $S(t)$ , а мнимая часть – с его произведением по Гильберту:

$$\dot{Z}_S(t) = S(t) + j\hat{S}(t). \quad (3.6)$$

Данное расширение понятия «сигнал» не связано с каким-либо изменением в информативности сигналов и вместе с тем даёт удобную форму

для анализа и расчётов. Прежде всего переход к АС позволяет использовать как декартову, так полярную систему координат в представлении сигналов.

Можно показать (см. выражение (2.28)), что спектральная плотность АС является односторонней (см. выражения (2.33) и (2.34)):

$$\dot{Z}_S(f) = (1 + \text{sign } f) \cdot \dot{U}_S(f). \quad (3.7)$$

Таким образом, переход к АС позволяет работать с физической шкалой частот  $f \in [0, \infty)$ . В частности, из (3.7) следует

$$S(t) = \text{Re } \dot{Z}_S(t) = 2 \cdot \text{Re} \int_0^{\infty} \dot{U}_S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df,$$

$$\hat{S}(t) = \text{Im } \dot{Z}_S(t) = 2 \cdot \text{Im} \int_0^{\infty} \dot{U}_S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df. \quad (3.8)$$

Наконец, введение АС не связано с потерей энергии сигнала:

$$E_S = \|\hat{Z}_S\|^2 = \|S\|^2 + \|\hat{S}\|^2 = 2 \cdot E_S. \quad (3.9)$$

Здесь учитываются энергия (2.48) и ортогональность (2.49) компонентов  $S(t)$  и  $\hat{S}(t)$ .

Заметим, свойства (2.49) и (2.51) являются определяющими в АС. В принципе, для каждого конкретного сигнала  $S(t)$  можно найти целый ряд  $S_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  сигналов, ортогональных к исходному. Следовательно, существует большое число вариантов представления сигналов в комплексной форме (типа (2.50)) с ортогональными компонентами. Но среди многообразия сигналов  $S_i(t)$  есть только один вариант, спектральная плотность которого удовлетворяет соотношению (2.49):

$$\dot{U}_{I_0}(f) = (-j \text{sign } f) \cdot \dot{U}(f) = \dot{U}_{\hat{S}}(f).$$

Именно этот вариант и используется в конструкции АС, что обеспечивает взаимно-однозначную связь с исходным сигналом и одностороннюю спектральную плотность.

АС можно формировать по схеме, показанной на рисунке 3.2.



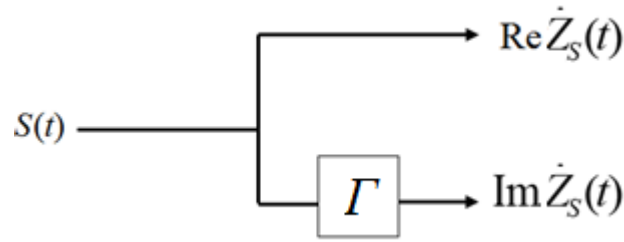


Рисунок 3.2 – Схема формирования аналитического сигнала

Согласно схеме  $\Gamma$  – линейная цепь, выполняющая преобразования Гильберта. Коэффициент передачи такой цепи можно определить непосредственно из сравнения выражений (1.18) и (1.22):

$$\dot{K}_{\Gamma}(f) = -j \operatorname{sign} f = \begin{cases} -j, & f \geq 0, \\ j, & f < 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Перепишем это выражение, представив мнимую единицу по Эйлеру:

$$\dot{K}_{\Gamma}(f) = \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & f \geq 0, \\ e^{j\frac{\pi}{2}}, & f < 0. \end{cases}$$

Теперь для АЧХ и ФЧХ цепи соответственно получим

$$\dot{K}_{\Gamma}(f) = 1(f), \quad \psi_{\Gamma}(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & f \geq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & f < 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

В отличие от идеальной «всепропускающей» цепи данный преобразователь должен обеспечить (как видно из (2.37)) сдвиг фаз всех спектральных компонент входного сигнала в положительной области частот на  $-90^\circ$ , а в отрицательной области частот – на  $+90^\circ$ . Цепь с такими свойствами называют идеальным (широкополосным) фазовращателем.

Формально, в соответствии с определениями (2.20) и (2.23) для импульсной характеристики цепи, выполняющей преобразование Гильберта, имеем

$$g_{\Gamma}(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\tau)}{t - \tau} d\tau = \frac{1}{\pi \cdot t}, \quad t \neq 0. \quad (3.12)$$

Условием  $t \neq 0$  учитывается главное значение интеграла. Рассмотрим этот пример более подробно. Импульсную характеристику  $g_{\Gamma}(t)$  можно получить другим способом. Из (2.20) с учётом (2.36) получаем

$$\begin{aligned} g_{\Gamma}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}_{\Gamma}(f) \cdot e^{j2\pi ft} df = (-j) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\text{Sign}f) \cdot e^{j2\pi ft} df = 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) df = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2 \cdot \int_0^{\lambda} \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) df = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[ -\frac{2}{2 \cdot \pi \cdot t} \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \Big|_0^{\lambda} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi \cdot t} - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\cos 2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot t}{\pi \cdot t}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Предварительно для сравнения рассмотрим две функции:

$$I_1(t; \lambda) = \frac{\sin 2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot t}{\pi \cdot t}, \quad (3.14)$$

$$I_2(t; \lambda) = \frac{\cos 2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot t}{\pi \cdot t}. \quad (3.15)$$

Функция (3.14) в асимптотике ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) используется как модель  $\delta$ -функции. Функция (3.15) – также в асимптотике – даёт поправку к (2.57). Эти функции показаны на рисунке 3.3.

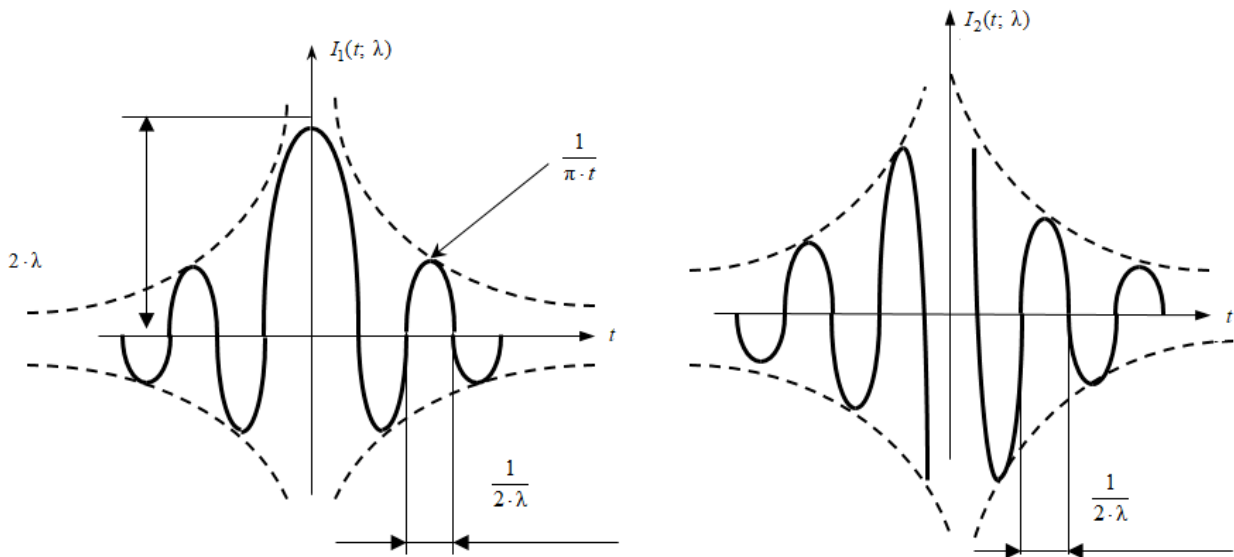


Рисунок 3.3 – Графики функций  $I_1(t, \lambda)$  и  $I_2(t, \lambda)$

Можно заметить, что они обладают следующими особенностями:

- 1)  $I_1(t; \lambda) = I_1(-t; \lambda)$ ,  $I_2(-t; \lambda) = I_2(t; \lambda)$ ;
- 2)  $\lim_{t \rightarrow 0} I_1(t; \lambda) = 2 \cdot \lambda$ ,  $\lim_{t \pm 0} I_2(t; \lambda) = \pm \infty$ ;
- 3)  $\int_{-\infty}^{\infty} I_1(t; \lambda) dt = 1$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} I_2(t; \lambda) dt = 0$ .

Нули этих функций следуют через интервал  $\frac{1}{2\lambda}$ . С ростом  $\lambda \rightarrow \infty$  функции  $I_1(t, \lambda)$  и  $I_2(t, \lambda)$  сжимаются в точке  $t = 0$ . В результате для произвольной непрерывной в точке  $t = 0$  функции  $S(t)$  можно записать как

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot I_1(t; \lambda) dt = S(0),$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot I_2(t; \lambda) dt = 0. \quad (3.16)$$

Видно, что функция  $I_1(t; \lambda)$  в асимптотике обладает всеми свойствами (а–г)  $\delta$ -функции – это даёт результат (3.13). По свойствам же функции  $I_2(t; \lambda)$  видно, что поправкой в (3.14) и (3.15) можно пренебречь, если использовать импульсную характеристику только перед знаком интеграла (а именно в таком варианте (в интегралах свёртки) она встречается чаще всего).

В практических расчётах иногда полезно использовать непосредственную связь компонент АС с компонентами спектральной плотности (3.13). Так, можно записать

$$S(t) = 2 \cdot \int_0^{\infty} [\alpha(f) \cos 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \beta(f) \sin 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t] df,$$

$$\hat{S}(t) = 2 \cdot \int_0^{\infty} [\alpha(f) \sin 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \beta(f) \cos 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t] df. \quad (3.17)$$

В частности, для симметричных сигналов  $S(t) = S(-t)$  имеем

$$\dot{U}_S(f) = \alpha(f),$$

это даёт

$$S(t) = 2 \cdot \int_0^{\infty} \alpha(f) \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) df,$$

$$\hat{S}(t) = 2 \cdot \int_0^{\infty} \alpha(f) \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) df.$$

Рассмотрим два характерных примера.

1) Сигнал с предельной концентрацией во временной области  $S(t) = \delta(t)$ :

$$\dot{U}_S(f) = \alpha(f) = 1(f),$$

$$\hat{S}(t) = 2 \cdot \int_0^{\infty} \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) df = \frac{1}{\pi \cdot t},$$

$$\dot{U}_{\hat{S}}(f) = (-j \operatorname{sign} f) = \begin{cases} -j, & f \geq 0, \\ j, & f < 0, \end{cases}$$

$$Z_S(t) = \delta(t) + j \frac{1}{\pi \cdot t},$$

$$\dot{U}_Z(f) = \begin{cases} 2, & f \geq 0, \\ 0, & f < 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

2) Сигнал с предельной концентрацией в частотной области  $S(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ :

$$\dot{U}_S(f) = \alpha(f) = \frac{A}{2} \cdot [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)],$$

$$\hat{S}(t) = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t),$$

$$\dot{U}_{\hat{S}}(f) = \frac{A}{2} \cdot \left[ \delta(f - f_0) \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} + \delta(f + f_0) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \right],$$

$$Z_S(t) = A \cdot e^{-j2\pi f_0 t},$$

$$\dot{U}_Z(f) = A \cdot \delta(f - f_0). \quad (3.19)$$

Здесь промежуточные результаты взяты из таблицы 3.1. Как видно, переход к АС даёт более компактное и физическое описание сигнала в частотной области.

Вывод: преобразование Гильберта на практике используется для нахождения фазовой характеристики линейной системы по известной амплитудной характеристике. Особенностью решения данной задачи является связь с асимптотическими свойствами АЧХ.

## 4 Z-преобразование

### 4.1 Z-преобразование и его свойства

#### 4.1.1 Общая информация о Z-преобразовании

В общем случае Z-преобразование  $X(z)$  последовательности  $x(n)$  определяется следующим образом:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}, \quad (4.1)$$

где  $z$  – комплексная переменная.

Функция  $X(z)$  определяется для значений  $z$  или  $z^{-1}$ , для которых ряд, находящийся в правой части выражения, сходится. Следовательно, Z-преобразование сходится не для всех последовательностей и не для всех значений  $z$ .

Если представить  $z$  в экспоненциальной форме

$$z = r \cdot e^{j\omega} \quad (4.2)$$

и подставить в исходное выражение, то получим

$$X(z) = X(r \cdot e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot r^{-n} \cdot e^{-j\omega n}. \quad (4.3)$$

Из теории функции комплексной переменной известно, что функция  $X(z)$  определяется для значений  $z$  в  $z$ -плоскости для которых выполняется неравенство

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) \cdot r^{-n}| < \infty, \quad (4.4)$$

т. е. исходная последовательность  $x(n)$  должна быть абсолютно суммируема. Если для значений  $z$  выполняется данное условие, то они образуют область сходимости Z-преобразования, и в этой области значения  $X(z)$  конечны. Область сходимости Z-преобразования последовательности  $x(n)$ , для которой выполняется условие  $x(n) = 0$  при  $n < 0$ , расположена вне определённого круга радиусом  $R$  в Z-плоскости. Значение  $R$  зависит от расположения полюсов нулей функции  $X(z)$ , расположенных в точке  $z$ , где  $X(z_1) = \infty \{X(z_1) = 0\}$ .

Область сходимости можно также определить и в  $z^{-1}$ -плоскости. В этом случае для физически реализуемой последовательности область сходимости Z-преобразования расположена внутри определенного круга с радиусом  $\tilde{R}$ .

*Задача 1.* Найти Z-преобразование и область сходимости знакопостоянной экспоненциальной последовательности

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n < \infty, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

*Решение.* Так как по определению известно, что

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot z^{-1})^n,$$

то полученное выражение является суммой членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, которую можно определить по формуле

$$S = \frac{a_1}{1 - q},$$

где  $a_1 = 1$ , а  $q = a \cdot z^{-1}$ .

Получим

$$X(z) = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z - a}.$$

Определим область сходимости:

$$\begin{aligned} X(z) &= X(r \cdot e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot r^{-n} \cdot e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot r^{-n} \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot r^{-1})^n \cdot e^{-j\omega n}. \end{aligned}$$

Из полученного выражения следует, что области сходимости принадлежат те значения  $z$ , для которых выполняется неравенство

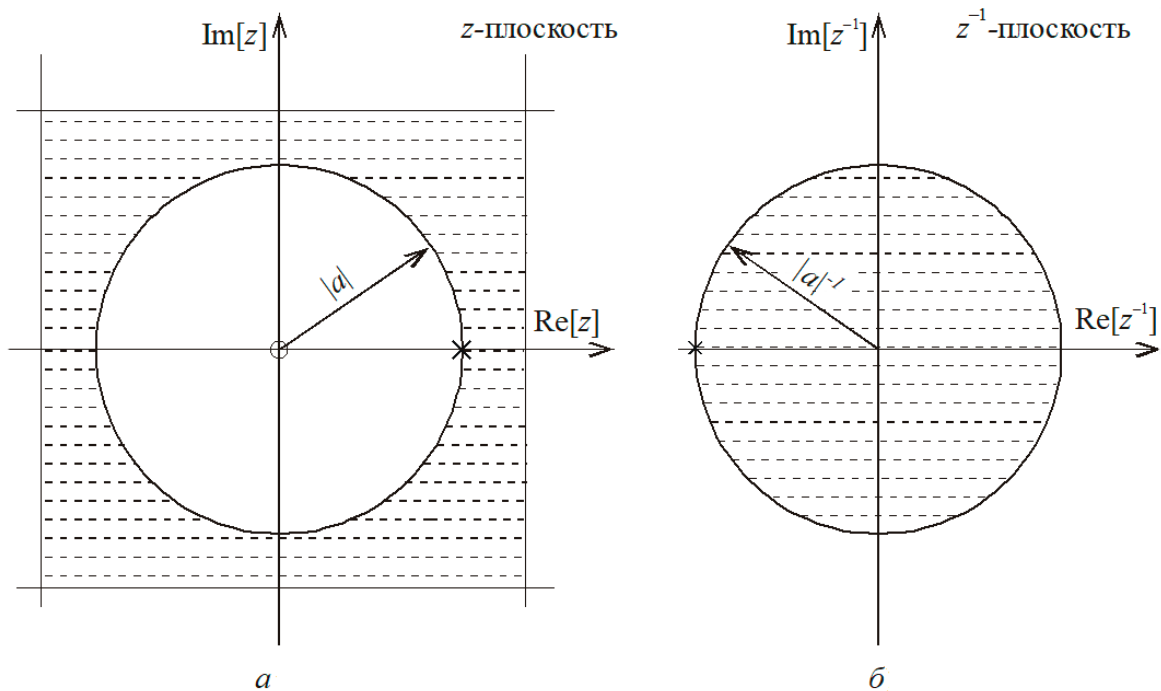
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{a}{r} \right|^n < \infty.$$

Данное условие выполняется только тогда, когда

$$\left| \frac{a}{r} \right| < 1.$$

Значит, область сходимости данной последовательности  $x(n)$  представляет собой часть  $z$ -плоскости вне круга радиусом  $R = |a|$ , как показано на рисунке 4.1, *а*.

Из выражения для  $X(z)$  следует, что полюс  $X(z)$  расположен в точке  $z = a$ , которая является границей области сходимости. Из последнего выражения видим, что область сходимости  $X(z)$  в  $z^{-1}$ -плоскости лежит внутри круга с радиусом  $|a|^{-1}$  (рисунок 4.1, *б*).



*а* – сходимость в  $z$ -плоскости; *б* – сходимость в  $z^{-1}$ -плоскости

Рисунок 4.1 – Область сходимости экспоненциальной последовательности



#### 4.1.2 Основные свойства Z-преобразования

1 *Линейность*. Если функции  $X_1(z)$  и  $X_2(z)$  – это Z-преобразование последовательностей  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  соответственно, то для последовательности

$$x(n) = a \cdot x_1(n) + b \cdot x_2(n),$$

где  $a$  и  $b$  – произвольные постоянные, Z-преобразование определяется следующим образом:

$$X(z) = a \cdot X_1(z) + b \cdot X_2(z). \quad (4.5)$$

2 *Умножение на константу*. Если  $X(z)$  – это Z-преобразование  $x(n)$ , то Z-преобразование последовательности

$$x_1(n) = a \cdot x(n),$$

где  $a$  – произвольная постоянная, будет равно

$$X_1(z) = a \cdot X(z). \quad (4.6)$$

3 *Умножение на экспоненциальную последовательность*. Если  $x(n)$  имеет Z-преобразование  $X(z)$ , то Z-преобразование последовательности  $x_1(n) = a^n \cdot x(n)$  будет определено как

$$X_1(z) = X(a^{-1} \cdot z). \quad (4.7)$$

4 *Дифференцирование*. Если  $x(n)$  имеет Z-преобразование  $X(z)$ , то последовательность  $x_1(n) = n \cdot x(n)$  будет иметь следующее Z-преобразование:

$$X_1(z) = -z \cdot \frac{dX(z)}{dz}. \quad (4.8)$$

Данное свойство чаще всего используется для вычисления обратного Z-преобразования, если  $X(z)$  содержит полюсы высокого порядка.

5 *Задержка*. Если последовательность  $x_1(n)$  имеет Z-преобразование  $X_1(z)$ , то для последовательности  $x(n) = x_1(n - m)$  Z-преобразование записывается в виде

$$X(z) = z^{-m} \cdot X_1(z), \quad (4.9)$$

где множитель  $z^{-m}$  – это оператор задержки дискретной последовательности  $x(n)$  на  $m$  отсчётов для любого  $m$ .

6 *Свёртка*. Если  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  – это Z-преобразование для последовательностей  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  соответственно, то для последовательности  $x(n)$ , являющейся их свёрткой, т. е.

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \cdot x_2(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(n-k) \cdot x_2(k),$$

Z-преобразование записывается в виде произведения Z-преобразований  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$ :

$$X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z). \quad (4.10)$$

7 *Задержка физически реализуемых последовательностей. Одностороннее Z-преобразование. Свойства опережающего сдвига*. При решении некоторых практических задач имеют дело с физически реализуемыми последовательностями, для которых вводится «одностороннее» Z-преобразование:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}. \quad (4.11)$$

При этом полагается, что поведение последовательности  $x(n)$  до значения  $n=0$  неизвестно и им можно пренебречь. Для большинства таких последовательностей свойства одностороннего Z-преобразования подобны свойствам обычного Z-преобразования. Исключением является свойство задержки. Рассмотрим последовательность  $x_1(n)$  с односторонним Z-преобразованием  $X_1(z)$  и задержанную последовательность  $x_2(n) = x_1(n-1)$ .

Одностороннее Z-преобразование  $x_2(n)$  будет равно

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_2(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n-1) \cdot z^{-n}.$$

Пусть  $m = (n-1)$ , тогда

$$X_2(z) = \sum_{m=-1}^{\infty} x_1(m) \cdot z^{-m-1}.$$

Последнее выражение можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 X_2(z) &= \sum_{m=-1}^{\infty} x_1(m) \cdot z^{-m} \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot \left[ \sum_{m=-1}^{\infty} x_1(m) \cdot z^{-m} \right] = \\
 &= z^{-1} \cdot \left[ x_1(-1) \cdot z^1 + \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m) \cdot z^{-m} \right] = x_1(-1) + z^{-1} \cdot \left[ \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m) \cdot z^{-m} \right] = (4.12) \\
 &= z^{-1} \cdot X_1(z) + x_1(-1).
 \end{aligned}$$

Можно заметить, что задержка на один отсчёт приводит к умножению одностороннего  $Z$ -преобразования на  $z^{-1}$ , но при этом необходимо учитывать значения последовательности  $x_1(n)$  при  $n < 0$ .

Аналогично можно выяснить, что  $Z$ -преобразование последовательности  $x_3(n) = x_1(n-2)$  будет определяться выражением

$$X_3(z) = z^{-2} \cdot X_1(z) + x_1(-2) + x_1(-1) \cdot z^{-1}. \quad (4.13)$$

Для случая задержки последовательности на произвольное число  $n_0$  отсчётов ( $n_0 > 0$ ) можно вывести формулу

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= z^{-n_0} \cdot X_1(z) \cdot z^0 + x_1(-n_0) + x_1(-n_0+1) \cdot z^{-1} + x_1(-n_0+2) \cdot z^{-2} + \\
 &+ x_1(-n_0+3) \cdot z^{-3} + x_1(-n_0+4) \cdot z^{-4} + \dots + x_1(-1) \cdot z^{-(n_0-1)}, \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

где  $y(n) = x_1(n - n_0)$ .

**8 Свойство сопряжения.** Если  $X(z)$  – это  $Z$ -преобразование комплексной последовательности  $x(n) = x_{\text{Re}}(n) + jx_{\text{Im}}(n)$ , то  $Z$ -преобразование последовательностей  $x^*(n)$ ,  $x_{\text{Re}}(n)$  и  $x_{\text{Im}}(n)$  будут соответственно равны

$$\begin{aligned}
 x^*(n) &= X^*(z^*), \\
 x_{\text{Re}}(n) &= \frac{1}{2} \cdot [X(z) + X^*(z^*)], \\
 x_{\text{Im}}(n) &= \frac{1}{2j} \cdot [X(z) - X^*(z^*)]. \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

9 *Обращение времени.* Если  $X(z)$  – это  $Z$ -преобразование последовательности  $x(n)$ , то  $Z$ -преобразование последовательности  $x_1(n) = x(-n)$  будет записан следующим образом:

$$X_1(z) = X\left(\frac{1}{z}\right). \quad (4.16)$$

Для последовательности  $x_2(n) = x^*(-n)$   $Z$ -преобразование можем вычислить по формуле

$$X_2(z) = X^*\left(\frac{1}{z^*}\right). \quad (4.17)$$

10 *Теорема о начальном значении.* Если последовательность для всех  $n < 0$  является физически реализуемой, а её  $Z$ -преобразование это  $X(z)$ , то

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z). \quad (4.18)$$

В таблице 4.1 приведены  $Z$ -преобразования часто используемых физически реализуемых последовательностей и их области сходимости.

Таблица 4.1 – Примеры некоторых последовательностей и их  $Z$ -преобразование

Последовательность	$Z$ -преобразование	Радиус сходимости
$\delta(n)$	1	$R = 0$
$\delta(n-m)$	$z^{-m}$	$R = 0$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$R = 1$
$a^n \cdot u(n)$	$\frac{1}{1-a \cdot z^{-1}}$	$R =  a $
$n \cdot u(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$R = 1$
$n \cdot a^n$	$\frac{a \cdot z^{-1}}{(1-a \cdot z^{-1})^2}$	$R =  a $
$e^{jn\omega}$	$\frac{1}{1-e^{j\omega} \cdot z^{-1}}$	$R = e^{j\omega}$
$\sin n \cdot \omega$	$\frac{\sin \omega \cdot z^{-1}}{1-2 \cos \omega \cdot z^{-1} + z^{-2}}$	$R = 1$
$\cos n \cdot \omega$	$\frac{1 - \cos \omega \cdot z^{-1}}{1-2 \cos \omega \cdot z^{-1} + z^{-2}}$	$R = 1$

Используя свойства  $Z$ -преобразования, можно найти, например,  $Z$ -преобразование последовательностей  $a^n \cdot \sin n \cdot \theta$ ,  $a^n \cdot \cos n \cdot \theta$  и др.

Можно заметить, что  $Z$ -преобразование представляет собой рациональную функцию от  $z$  или от  $z^{-1}$ .

Также отметим, что  $Z$ -преобразование – это очень важное средство описания, анализа и проектирования дискретных систем.

## 4.2 Обратное $Z$ -преобразование

Обратное  $Z$ -преобразование даёт возможность вычислить значения дискретного сигнала в соответствии с видом функции  $X(z)$ . Оно может быть

определено из выражения  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$  при помощи интегральной теоремы Коши и формально определяется соотношением

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_C X(z) \cdot z^{n-1} dz, \quad (4.19)$$

где  $C$  – контур интегрирования с направлением обхода против часовой стрелки, расположенный в области сходимости  $X(z)$  и охватывающий начало координат на  $z$ -плоскости.

К примеру, контуром интегрирования может являться окружность радиусом  $C > R$ , где  $R$  – радиус сходимости  $Z$ -преобразования (подразумевается, что последовательность  $x(n)$  физически реализуема).

Обратное  $Z$ -преобразование определяют в основном с помощью следующих методов:

- 1) с использованием теоремы о вычетах;
- 2) разложением  $X(z)$  на простые дроби;
- 3) разложением  $X(z)$  в степенной ряд.

У любого из перечисленных методов существуют свои достоинства и недостатки. С точки зрения математической строгости метод вычетов, пожалуй, самый изящный. Зато метод степенных рядов гораздо лучше подойдёт для компьютерных расчётов.

Первый способ базируется на известной теореме из теории функций комплексной переменной, утверждающей, что контурный интеграл, который определяет обратное  $Z$ -преобразование, может вычисляться с помощью вычетов, т. е.

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_C X(z) \cdot z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_C F_n(z) dz = \sum [\text{Res } F_n(z)], \quad (4.20)$$

где  $F_n(z) = X(z) \cdot z^{n-1}$ ,  $n = \dots -1, 0, 1, \dots$

При этом вычеты комплексной функции  $F_n(z)$  с полюсом в точке  $z = p_0$  и кратностью  $n$  рассчитываются по формуле

$$\operatorname{Res}[F_n(z), p_0] = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \cdot \left[ (z - p_0)^n \cdot F_n(z) \right] \Bigg|_{z=p_0}. \quad (4.21)$$

Для простого (отдельного) полюса выражение (4.21) сводится к следующему:

$$\operatorname{Res}[F_n(z), p_0] = (z - p_0) \cdot F_n(z) \Big|_{z=p_0} = (z - p_0) \cdot X(z) \cdot z^{n-1} \Big|_{z=p_0}. \quad (4.22)$$

*Задача 2.* С помощью метода вычетов найти дискретную последовательность, соответствующую следующему Z-преобразованию:

$$X(z) = \frac{z}{(z - 0,75) \cdot (z + 0,5)},$$

допуская, что контур интегрирования  $C$  – окружность радиусом  $|z| = 1$ .

*Решение.* Чтобы найти обратное Z-преобразование, отыщем вычеты функции  $F_n(z)$ , которая в данном случае равна

$$F_n(z) = X(z) \cdot z^{n-1} = \frac{z \cdot z^{n-1}}{(z - 0,75) \cdot (z + 0,5)} = \frac{z^n}{(z - 0,75) \cdot (z + 0,5)}.$$

Функция  $F_n(z)$  имеет полюсы  $p_1$  и  $p_2$  в точках  $z = 0,75$  и  $z = -0,5$  соответственно. Оба полюса находятся внутри контура интегрирования. Тогда обратное z-преобразование записывается в виде

$$x(n) = \operatorname{Res}[F_n(z), p_1] + \operatorname{Res}[F_n(z), p_2].$$

Так как оба полюса простые, т. е. первого порядка, то получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[F_n(z), p_1] &= (z - 0,75) \cdot F_n(z) \Big|_{z=0,75} = \frac{(z - 0,75) \cdot z^n}{(z - 0,75) \cdot (z + 0,5)} \Bigg|_{z=0,75} = \\ &= \frac{z^n}{(z + 0,5)} \Bigg|_{z=0,75} = \frac{(0,75)^n}{0,75 + 0,5} = \frac{4}{5} (0,75)^n. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} [F_n(z), p_2] &= (z + 0,5) \cdot F_n(z) \Big|_{z = -0,5} = \frac{(z + 0,5) \cdot z^n}{(z - 0,75) \cdot (z + 0,5)} \Big|_{z = -0,5} = \\ &= \frac{z^n}{(z - 0,75)} \Big|_{z = -0,5} = -\frac{4}{5} (-0,5)^n. \end{aligned}$$

Тогда

$$x(n) = \frac{4}{5} \left[ (0,75)^n - (-0,5)^n \right], \quad n \geq 0.$$

При использовании второго способа функцию  $X(z)$  представляют в виде разложения на элементарные дроби:

$$X(z) = \frac{\xi_1}{1 - p_1 \cdot z^{-1}} + \frac{\xi_2}{1 - p_2 \cdot z^{-1}} + \dots + \frac{\xi_k}{1 - p_k \cdot z^{-1}}, \quad (4.23)$$

где  $\xi_i$  является вычетом функции  $X(z)$  в полюсе, расположенном в точке  $z = p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . При этом подразумевается, что полюсы различные, т. е.  $p_i \neq p_j$ , если  $i \neq j$ .

Поскольку  $Z$ -преобразование – линейная операция, то и обратное  $Z$ -преобразование также является линейной операцией. Это значит, что последовательность  $x(n)$  можно найти с помощью суммирования обратных  $Z$ -преобразований каждого отдельного слагаемого последнего выражения.

Вычет  $\xi_i$ , связанный с полюсом  $p_i$ , можно определить при умножении правой и левой частей уравнения для  $X(z)$  на  $(1 - p_i \cdot z^{-1})$  и выполнив замену  $z = p_i$ , т. е.

$$\xi_i = (1 - p_i \cdot z^{-1}) \cdot X(z) \Big|_{z = p_i}, \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, k. \quad (4.24)$$

Тогда

$$x(n) = (\xi_1 \cdot p_1^n + \xi_2 \cdot p_2^n + \dots + \xi_k \cdot p_k^n) = \sum_{i=1}^k \xi_i \cdot p_i^n, \quad n \geq 0. \quad (4.25)$$

Задача 3. Найти обратное Z-преобразование функции

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 0,25z^{-1} - 0,375z^{-2}}.$$

*Решение.* Для упрощения дальнейших вычислений сначала выразим Z-преобразование через положительные показатели степени  $z$ , умножив числитель и знаменатель на  $z^2$ :

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 0,25z - 0,375} = \frac{z}{(z - 0,75) \cdot (z + 0,5)}.$$

Как видно, функция  $X(z)$  имеет полюса первого порядка в точках  $z = 0,75$  и  $z = -0,5$ . Поскольку порядок числителя меньше, чем порядок знаменателя, разложение на элементарные дроби выглядит следующим образом:

$$X(z) = \frac{z}{(z - 0,75) \cdot (z + 0,5)} = \frac{\xi_1 \cdot z}{(z - 0,75)} + \frac{\xi_2 \cdot z}{(z + 0,5)}. \quad (4.26)$$

Для того чтобы упростить поиск значений  $\xi_i$ , разделим правую и левую части последнего уравнения на  $z$ :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z - 0,75) \cdot (z + 0,5)} = \frac{\xi_1}{(z - 0,75)} + \frac{\xi_2}{(z + 0,5)}.$$

Для нахождения  $\xi_1$  и  $\xi_2$  применим формулу (4.13). В этом случае получим

$$\xi_1 = \frac{(z - 0,75) \cdot X(z)}{z} \Big|_{z=0,75} = \frac{1}{(z + 0,5)} \Big|_{z=0,75} = \frac{1}{0,75 + 0,5} = \frac{4}{5}.$$

Аналогичным образом рассчитывается и второй вычет  $\xi_2$ :

$$\xi_2 = \frac{(z + 0,5) \cdot X(z)}{z} \Big|_{z=-0,5} = \frac{1}{(z - 0,75)} \Big|_{z=-0,5} = \frac{1}{-0,5 - 0,75} = -\frac{4}{5}.$$

В этом случае искомое обратное Z-преобразование будет вычисляться с помощью следующего выражения:



$$x(n) = \xi_1 \cdot p_1^n + \xi_2 \cdot p_2^n = \frac{4}{5}[(0,75)^n - (-0,5)^n], \quad n \geq 0. \quad (4.27)$$

Затем рассмотрим метод степенных рядов, который используется для того, чтобы найти обратное Z-преобразования. Если дано Z-преобразование  $X(z)$ , то его можно вычислить через отношение двух многочленов от  $z^{-1}$  или, что эквивалентно, от  $z$ :

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \dots + a_M \cdot z^{-M}}{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \dots + b_N \cdot z^{-N}}. \quad (4.28)$$

Данное выражение можно разложить в бесконечный ряд относительно  $z^{-1}$  путём деления в столбик (в некоторых случаях его называют синтетическим делением):

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \dots + a_M \cdot z^{-M}}{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \dots + b_N \cdot z^{-N}} = \\ &= x(0) + x(1) \cdot z^{-1} + x(2) \cdot z^{-2} + x(3) \cdot z^{-3} + \dots \end{aligned} \quad (4.29)$$

В данном методе числитель и знаменатель функции  $X(z)$  сначала выражаются либо через уменьшающийся показатель степени  $z$ , либо через увеличивающийся показатель степени  $z^{-1}$ , после чего путём деления в столбик вычисляется частное.

*Задача 4.* Пусть Z-преобразование задано следующим выражением:

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0,3561z^{-2}}.$$

Необходимо найти его обратное Z-преобразование, разложив в степенной ряд путём деления в столбик.

*Решение.* Сперва рассмотрим функцию  $X(z)$  с числителем и знаменателем в виде многочленов с увеличивающейся степенью  $z^{-1}$  и путём обычного деления в столбик разложим её в степенной ряд:

$$\begin{array}{r}
1 + 2z^{-1} + z^{-2} \quad \left| \frac{1 - z^{-1} + 0,3561z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 3,6439z^{-2} + 2,5756z^{-3} + \dots} \right. \\
\hline
1 - z^{-1} + 0,3561z^{-2} \\
3z^{-1} + 0,6439z^{-2} \\
\hline
3z^{-1} - 3z^{-2} + 1,0683z^{-3} \\
3,6439z^{-2} - 1,0683z^{-3} \\
\hline
3,6439z^{-2} - 3,6439z^{-3} + 1,2975927z^{-4} \\
2,5756z^{-3} - 1,2975927z^{-4} \\
\hline
2,5756z^{-3} - 2,5756z^{-4} + 0,9171711z^{-5} \\
1,2780073z^{-4} - 0,9171711z^{-5} \\
\dots\dots\dots
\end{array}$$

Далее выразим числитель и знаменатель через положительный показатель степени  $z$  в порядке уменьшения и выполним деление в столбик:

Имеем

$$X(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - z + 0,3561},$$

$$\begin{array}{r}
z^2 + 2z + 1 \quad \left| \frac{z^2 - z + 0,3561}{z^2 - z + 0,3561} \right. \\
\hline
z^2 - z + 0,3561 \quad 1 + 3z^{-1} + 3,6439z^{-2} + 2,5756z^{-3} + \dots \\
3z + 0,6439 \\
\hline
3z - 3 + 1,0683z^{-1} \\
3,6439 - 1,0683z^{-1} \\
\hline
3,6439 - 3,6439z^{-1} + 1,2975927z^{-2} \\
2,5756z^{-1} - 1,2975927z^{-2} \\
\dots\dots\dots
\end{array}$$

В обоих случаях  $Z$ -преобразование раскладывается в один и тот же степенной ряд, т. е.

$$X(z) = 1 + 3z^{-1} + 3,6439z^{-2} + 2,5756z^{-3} + \dots$$

Теперь можно непосредственно определить значения соответствующей последовательности  $x(n)$ :



$$x(1) = \frac{[a_1 - x(0) \cdot b_1]}{b_0} = [2 - 1 \cdot (-1)] = 3,$$

$$x(2) = \frac{[a_2 - x(1) \cdot b_1 - x(0) \cdot b_2]}{b_0} = [1 - 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 0,356] = 3,644,$$

$$x(3) = \frac{[a_3 - x(2) \cdot b_1 - x(1) \cdot b_2 - x(0) \cdot b_3]}{b_0} = [0 - 3,644 \cdot (-1) - 3 \cdot 0,356] = 2,576.$$

Следовательно, первые четыре значения обратного Z-преобразования будут выглядеть следующим образом:

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 3, \quad x(2) = 3,644, \quad x(3) = 2,576.$$

Видно, что оба способа деления (рекурсивный и прямой) дают идентичные результаты.

Сравним рассмотренные методы вычисления обратного Z-преобразования. Ограничение метода разложения в степенной ряд заключается в следующем: он не даёт решения в аналитическом виде (несмотря на то, что в простых случаях его можно получить), однако прост и пригоден для вычисления с помощью компьютера. Впрочем, из-за его рекурсивности следует тщательно следить за возможным нарастанием численных ошибок при большом количестве заданных значений обратного Z-преобразования.

Метод разложения на элементарные дроби и метод вычетов дают результаты в аналитическом варианте. Основным недостатком данных методов является необходимость разложения на множители многочлена знаменателя, т. е. необходимость определять полюсы функции  $X(z)$ : если порядок функции высокий, то поиск полюсов  $X(z)$  (если функция не представлена в разложенном виде) – задача достаточно сложная. Помимо этого, если функция  $X(z)$  имеет полюсы высокого порядка, то и тот, и другой метод могут потребовать выполнения операции дифференцирования высокого порядка. Тем не менее в случае, если следует найти решение в аналитическом виде, лучше использовать метод вычетов или разложения на элементарные дроби. Последний метод особенно полезен для генерирования коэффициентов параллельных структур для цифровых фильтров. Метод вычетов также нашёл широкое использование при анализе ошибок квантования в системах дискретного времени.

Необходимо отметить, что применение программного пакета *MATLAB* существенно упрощает операции вычисления как прямого, так и обратного Z-преобразования.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1 Пусть  $\psi_i(t)$ ,  $t \in [a, b]$ ,  $i = 1, 2, \dots$  – ортонормированная система функций, т. е.  $(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}$ , и пусть далее  $S_N(t) = \sum_{i=1}^N c_i \psi_i(t)$  – некоторая частная сумма.

Покажите, что  $S_N(t)$  является лучшим приближением в смысле метрики  $\xi_N^2 = \|S - S_N\|^2$  для произвольной функции  $S(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , если только коэффициенты  $C_i$  получены по правилу  $C_i = (S, \varphi_i)$ .

*Указание* – Необходимо знать, что пока только такие коэффициенты обеспечат  $\xi_N^2 \rightarrow \min$ . Для этого достаточно воспользоваться условиями на поиск минимума функции  $N$  переменных  $\xi_N^2 = f(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ :

$$\frac{d}{d\alpha_i} \xi_N^2 = 0, \quad \frac{d^2}{d\alpha_i^2} \xi_N^2 > 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Покажите, что достигаемый минимум равен  $\xi_{N \min}^2 = E_S - \sum_{i=1}^N c_i^2$ .

2 Исходя из представления (1.3) приведите возможные варианты схем анализа и синтеза сигналов.

3 Поясните понятие «полная ортонормированная система базисных функций». Приведите примеры полных и неполных систем.

4 Пусть  $S_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  – совокупность элементарных сигналов, образующих ортонормированную систему. Путём интегрального преобразования (1.5) получена новая система функций  $U_i(\theta)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Является ли эта система ортонормированной? При каких условиях?

5 Исходя из определения (2.12) и обозначений (2.13) запишите в явном виде компоненты спектра  $\alpha(f)$  и  $\beta(f)$  в случае комплексного сигнала  $S(t)$ . Проверьте, выполняется ли равенство (2.16) для таких сигналов?

6 Проверьте свойство  $\delta(y) = \delta(-y)$   $\delta$ -функции Дирака, используя в качестве модели предел функции  $f_3(y)$  (см. (2.18)).

7 Поясните результаты примеров в конце раздела 3 (см. (3.18) и (3.19)) с точки зрения размерностей.

8 В соответствии с выражением (2.22) определите взаимосвязи ФЧХ и АЧХ сигналов на выходе и входе произвольной линейной цепи и, в частности, для идеальной всепропускающей.

9 Запишите интеграл (2.19) для импульсной характеристики в развернутом виде. Какими свойствами должны обладать реальная  $\text{Re}$  и мнимая  $\text{Im}$  части коэффициента передачи, чтобы импульсная характеристика была вещественной?

10 Дайте подробный вывод соотношения (2.28).

*Указание* – Последовательно используйте преобразование Фурье левой и правой части (2.24), замену переменных и табличный интеграл

$$\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\sin a \cdot x}{x} dx = \text{Sign } a = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

11 Проверьте равенство (2.35), используя как временную, так и частотную область.

12 Найдите спектральные плотности двух сигналов

$$S_1(t) = a \cdot \cos 2\pi f_0 t,$$

$$S_2(t) = a \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

и изобразите их графиками. Как различаются эти сигналы по энергии?

13 Покажите, что для вещественных сигналов  $S(t)$  компоненты  $\alpha(f)$  и  $\beta(f)$  спектра (см. (2.13)) связаны преобразованием Гильберта  $\beta(f) = \hat{\alpha}(f)$ ,  $\hat{\beta}(f) = -\alpha(f)$ , а их скалярное произведение равно нулю:

$$(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(f) \cdot \beta(f) df = 0.$$

14 Определите спектральную плотность сигнала вида  $S(t) = A \cdot \delta(\lambda \cdot t - t_0)$ ,  $A, \lambda > 0$ .

15 Гармоническое колебание с частотой 100 Гц записано на плёнку и воспроизводится с повышенной (в 10 раз) скоростью. Какова будет частота звука?

16 Существующие приборы для снятия фазовых характеристик обеспечивают измерение фазы в пределах  $\pm 180^\circ$ . Определите, каковы будут показания прибора ( $\varphi_0 = ?$ ) для сигнала (2.3) с параметрами  $f_0 = 1$  кГц,  $t_0 = 1,25$  мин,  $t_0 = 1,75$  мин. Возможно ли таким прибором оценить время задержки  $t_0$ ?

17 Определите спектральную плотность для сигнала, состоящего из трёх прямоугольных импульсов

$$S(t) = \prod(y+T; \lambda) - 2 \cdot \prod(y; \lambda) + \prod(y-T; \lambda),$$

функция  $\prod(y; \lambda) = f_3(y)$  дана в (2.18).

Сравните эту плотность с (2.16). Как изменятся результаты в асимптотике при  $\lambda \rightarrow 0$ ?

18 Для сигнала  $S_3(t)$  (см. (1.2)) определите точку и значение экстремума (max) АЧХ.

19 Установите размерности сигналов (2.12)–(2.17), полагая размерность  $\delta(t)$  как [В/с].

20 Докажите справедливость всех соотношений в выражениях (2.69) и (2.70).

21 Исходный сигнал

$$S_0(t) = \sum_{n=1}^S A_n \cdot \cos 2\pi f_n t, \quad t \in (-\infty, \infty),$$
$$f_n = n \cdot f_0, \quad f_0 = 1 \text{ МГц}$$

задержан на  $t_0 = 10$  мкс:

$$S(t) = S_0(t - t_0) = \sum_{n=1}^S A_n \cdot \cos(2\pi f_n t - \varphi_n).$$

Определите спектральные плотности и фазовые сдвиги  $\dot{U}_0(f)$ ,  $\dot{U}_s(f)$ ,  $\varphi_n = ?$ ,  $n = 1, 2, \dots, 5$ .

22 Дайте теоретическое обоснование равенства

$$\tilde{\varphi}_3(f) = \tilde{\varphi}_0(f) + \tilde{\varphi}_1(f)$$

и приведённой ФЧХ сигналов (2.11), (2.12) и (2.14).

23 Докажите равенство

$$\langle \pm\pi(1 + \varepsilon) \rangle_{\pm\pi} = \pm\pi(1 - \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

24 На основе (2.19) дайте подробный вывод для приведенной ФЧХ (2.33) сигнала  $S_4(t - t_0)$ . Покажите графически все компоненты выражения (2.19) в этом случае.

25 Найдите свёртку, взаимную корреляцию и спектры сигналов  $S_2(t) = \frac{A}{F} \cdot \frac{\sin \pi \cdot Ft}{\pi \cdot t}$  и  $S_3(t) = A \cdot e^{-\lambda t^2}$ . Результаты приведите в графической форме.

26 Последовательно дважды интегрируя сигнал

$$S_0(t) = A \left[ \delta\left(t + \frac{T}{2}\right) - \delta\left(t + \frac{T}{4}\right) - \delta\left(t - \frac{T}{4}\right) + \delta\left(t - \frac{T}{2}\right) \right],$$

определите форму и спектральную плотность сигнала  $S_1(t)$ , первый интеграл сигналов  $S_0(t)$  и  $S_2(t)$ , результат двойного интегрирования сигнала  $S_0(t)$ . Постройте графики всех сигналов и их АЧХ.

27 На основе интеграла свёртки (1.4) определите реакции линейной цепи с импульсной характеристикой  $g(t)$  на воздействие  $S_{\text{ВХ}}(t)$

$$S_{\text{ВХ}}(t) = e^{j2\pi ft}.$$

Используя данный пример дайте определение коэффициента передачи цепи.



28 На вход интегрирующей цепи поступает сигнал

$$x(t) = \begin{cases} A \cdot \text{sign}(T-t), & |t-T| \leq T, \\ 0, & |t-T| > T. \end{cases}$$

Найдите условия ( $b_0 = ?$ ,  $a_1 = ?$ ) удовлетворительного по отношению к идеальному

$$S(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$$

интегрирования этого сигнала. Для оценки качества интегрирования используйте относительную погрешность

$$\Delta(t) = \frac{|S(t) - y(t)|}{S(T)}$$

в точках  $t = T$  и  $t = 2T$ , полагая  $\Delta(T), \Delta(2T) \leq 0,1$ . Постройте графики сигналов  $x(t)$ ,  $S(t)$  и  $y(t)$ . Укажите размерности  $y$ ,  $S$  и параметров  $b_0$ ,  $a_1$ , если  $x - [B]$ ,  $t - [c]$ .

*Указание* – Решением дифференциального уравнения (2.37) является выражение

$$y(t) = \frac{b_0}{a_1} \cdot e^{\frac{-t}{a_1}} \int_0^t x(\tau) \cdot e^{\frac{\tau}{a_1}} d\tau.$$

29 Найдите обратное Z-преобразование

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0,456z^{-2}},$$

разложив в степенной ряд путём деления в столбик.

30 Используя рекурсивный алгоритм, найдите первые четыре члена обратного Z-преобразования:

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0,456z^{-2}}.$$

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Айфичер, Э. Цифровая обработка сигналов: практический подход / Э. Айфичер, Б. Джервис. – М. : Вильямс, 2004. – 992 с.
- 2 Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов : учебник / А. Оппенгейм. – 4-е изд. – М. : Техносфера, 2018. – 1048 с.
- 3 Тяжев, А. И. Цифровая обработка сигналов и сигнальные процессоры : учеб. пособие / А. И. Тяжев. – 3-е изд. – Самара : ПГУТИ, 2021. – 252 с.
- 4 Рабинер, Л. Р. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Р. Рабинер, Б. Гоулд. – М. : Мир, 1978. – 848 с.
- 5 Солоница, А. И. Цифровая обработка сигналов в зеркале MATLAB : учеб. пособие / А. И. Солоница. – СПб. : БХВ-Петербург, 2018. – 560 с. : ил.
- 6 Сюзев, В. В. Основы теории цифровой обработки сигналов : учеб. пособие / В. В. Сюзев. – М. : РТСофт, 2014. – 752 с.
- 7 Годлевский, В. С. Вопросы точности при обработке сигналов : монография / В. С. Годлевский, В. В. Годлевский. – Киев : Альфа Реклама, 2020. – 408 с.
- 8 Лайонс, Р. Цифровая обработка сигналов / Р. Лайонс. – 2-е изд. – М. : Бинум-Пресс, 2006. – 656 с.
- 9 Куприянов, М. С. Цифровая обработка сигналов / М. С. Куприянов, Б. Д. Матюшкин. – СПб. : Политехника, 2002. – 592 с.
- 10 Стивен, С. Цифровая обработка сигналов : практическое руководство для инженеров и научных работников / С. Стивен. – М. : Додэка – XXI, 2008. – 720 с.
- 11 Федосов, В. П. Цифровая обработка сигналов в LabVIEW : учеб. пособие / В. П. Федосов, А. К. Нестеренко; под ред. В. П. Федосова. – М. : ДМК Пресс, 2017. – 456 с.
- 12 Смоленцев, Н. К. Введение в теорию вейвлетов / Н. К. Смоленцев. – Ижевск : РХД, 2010. – 292 с.
- 13 Малла, С. Вейвлеты в обработке сигналов / С. Малла. – М. : Мир, 2005. – 671 с.
- 14 Rafael, C. Digital Image Processing / C. Rafael, R. Gonzalez, E. Woods. – 4<sup>th</sup> ed. – New Jersey : Prentice-Hall, 2017. – 1168 p.
- 15 Гадзиковский, В. И. Цифровая обработка сигналов : практ. пособие / В. И. Гадзиковский – М. : СОЛОН-Пресс, 2014. – 766 с.
- 16 Ролдугин, С. В. Цифровая обработка сигналов : учеб. пособие / С. В. Ролдугин, А. В. Паринов, А. Н. Голубинский. – Воронеж : Научная книга, 2016. – 144 с.

*Учебное издание*

**Муравьев** Валентин Владимирович  
**Корневский** Святослав Александрович  
**Фильченкова** Татьяна Михайловна

## **ФОРМИРОВАНИЕ И ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ**

Редактор *С. Г. Девдера*  
Корректор *Е. Н. Батурчик*  
Компьютерная правка, оригинал-макет *В. М. Задоя*

Подписано в печать 10.07.2023. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».  
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 5,93. Уч.-изд. л. 5,0. Тираж 50 экз. Заказ 33.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования  
«Белорусский Государственный университет информатики и радиоэлектроники».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,  
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.  
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск