УДК 537.1:531.221.2:539.121.4

А.Н. ТАРАКАНОВ,
Минск, МГВРК

КЛАССИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ДЛЯ СПИНОВЫХ ЧАСТИЦ

Одной из старых загадок электродинамики уже свыше столетия остаётся электрон и его взаимодействие. Существует множество подходов к построению электронной теории, однако до сих пор остаются неясными многие вопросы, одним из которых является влияние спина частицы на её траекторию. С классической точки зрения спин (или собственный момент импульса) является характеристикой частицы, свидетельствующей о её внутренней структуре и протяжённости. В современной физике спиновые свойства частиц описываются преимущественно с квантовой точки зрения. Однако долгий период господства квантовых теорий не подавил интереса к классическому описанию квантовых систем. В последнее время появляется всё больше работ, посвящённых классической теории электрона (см., например, [1]). Учёт такого квантового свойства электрона, как спин могло бы сыграть значительную роль при построении классической теории электромагнитного поля, которая должна отличаться от теории Максвелла. Наличие спина означает наличие некоторого вращения электрона и, следовательно, поле электрона должно быть в его окрестности, по крайней мере, аксиально-симметричным, что в свою очередь должно привести к нарушению стандартной теоремы Гаусса, основанной на кулоновском характере поля точечного заряда. Поэтому электромагнитное поле на малых расстояниях должно отличаться от максвелловского.

Существует несколько альтернативных описаний классического спина, которые можно найти в [1], однако нет уверенности в том, что они являются адекватными, так как проверить их экспериментально в настоящее время не позволяет современная аппаратура. В данной статье представлена возможность альтернативного описания частиц с внутренними степенями свободы на основе второго закона Ньютона

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} \qquad (1)$$

(см. также [2]-[3]).

Материальная точки с внутренними степенями свободы оказывается неинерциальной системой, динамика которой должна отличаться от ньютоновой динамики. Зная динамику точки с внутренними степенями свободы можно построить динамику любого физического объекта, рассматриваемого как совокупность таких точек. В частности, элементарные частицы можно рассматривать как такие совокупности.

Ещё Гельмгольц в своей работе «О сохранении силы» ([4]; [5], Прибавление 3, с. 119) обратил внимание на то, что из закона (1) и определения элементарной работы $dA = (\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}) = (\mathbf{V}\cdot d\mathbf{P})$ следует выражение для силы, которое в наших обозначениях имеет вид

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} + [\mathbf{C}\times\mathbf{V}], \tag{2}$$

где U – потенциальная функция, $\mathbf{C}$ – некоторый псевдовектор, а дополнительное слагаемое $[\mathbf{C}\times\mathbf{V}]$ имеет смысл гироскопической силы.

Материальную точку с внутренними степенями свободы следует рассматривать как неинерциальную систему, взаимодействующую с внешними полями. Поэтому потенциальная функция U должна зависеть не только от относительного радиус-вектора $\mathbf{R}$, но и от относительной скорости $\mathbf{V}$ и ускорений $\mathbf{W}^{(k)} = d^{(k)}\mathbf{V}/dt^{(k)}$, $k = 0,1,2,...,N$, а также от времени, зависимость от которого задаётся динамикой внешних полей.[1] Таким образом, $U = U(t,\mathbf{R},\mathbf{V},\mathbf{W},\dot{\mathbf{W}},...,\mathbf{W}^{(N)})$. Это приводит к тому, что импульс в законе (1) имеет смысл динамического импульса и может быть записан в виде

$$\mathbf{P} = m\mathbf{V} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{V}} + [\mathbf{S}\times\mathbf{W}], \tag{3}$$

где $\mathbf{S}$ – некоторый псевдовектор.

Из уравнений (1)-(3) нетрудно получить обобщение полной механической энергии в виде

$$\begin{aligned} E &= \frac{m\mathbf{V}^2}{2} + (\mathbf{V}\cdot[\mathbf{S}\times\mathbf{W}]) - (\mathbf{V}\cdot\frac{\partial U}{\partial \mathbf{V}}) + U = \\ &= \frac{\mathbf{P}^2}{2m} - \frac{1}{2m}\left[\frac{\partial U}{\partial \mathbf{V}} - [\mathbf{S}\times\mathbf{W}]\right]^2 + U \ , \end{aligned} \tag{4}$$

удовлетворяющей уравнению баланса

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{k=0}^{N}\left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{W}^{(k)}}\cdot\mathbf{W}^{(k+1)}\right). \tag{5}$$

Очевидно, энергия E будет интегралом движения, если правая часть уравнения (5) обратится в нуль.

Уравнение движения (1) сводится к уравнению

[1] Заметим, что В.Вебер пытался объяснить электрические явления, как результат электрического взаимодействия элементарных частиц, так называемых *электрических атомов*, зависящего как от их относительного расположения **R**, так и от их скорости **V** и ускорения **W** ([6]-[9]).

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{V}+[\mathbf{S}\times\mathbf{W}])-[\mathbf{C}\times\mathbf{V}]=\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{V}}-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}}. \qquad (6)$$

Заметим здесь, что производные потенциальной функции по ускорениям $\mathbf{W}^{(k)}$ ($k\geq 1$) в уравнение движения не входят. Поэтому можно ограничиться зависимостью потенциальной функции только от ускорения $\mathbf{W}=\mathbf{W}^{(0)}$, $U=U(t,\mathbf{R},\mathbf{V},\mathbf{W})$. Тогда точка с уравнением движения (6) и условием $dE/dt=0$ представляет собой динамическую систему Биркгофа ([10]-[11]).

Не касаясь физического смысла псевдовекторов **S** и **C**, в общем случае следует предположить, что они связаны и с внутренней структурой материальной точки, и с её взаимодействием. Тогда их можно представить в виде сумм

$$\mathbf{S}=\mathbf{S}_0+\mathbf{S}^{\text{ext}},\ \mathbf{C}=\mathbf{C}_0+\mathbf{C}^{\text{ext}}, \qquad (7)$$

где $\mathbf{S}^{\text{ext}}$ и $\mathbf{C}^{\text{ext}}$ связаны исключительно с взаимодействием и могут зависеть от таких же переменных, как потенциальная функция, а $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{C}_0$ связаны исключительно с внутренней структурой точки и в процессе её движения в отсутствие взаимодействия могут меняться только по направлению, но не по модулю.

Уравнение (6) можно записать в другой форме, если положить

$$U=U_0-(\mathbf{R}\cdot[\mathbf{V}\times\mathbf{C}])=U_0-(\mathbf{R}\cdot[\mathbf{V}\times\mathbf{C}_0])-(\mathbf{R}\cdot[\mathbf{V}\times\mathbf{C}^{\text{ext}}]). \qquad (8)$$

Подставляя (7), (8) в (6), придём к уравнению движения в виде

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\ m\mathbf{V}+[\mathbf{S}_0\times\mathbf{W}]-[\mathbf{R}\times\mathbf{C}_0]\ &=-\frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{R}}+(\mathbf{R}\cdot[\mathbf{V}\times\frac{\partial \mathbf{C}^{\text{ext}}}{\partial \mathbf{R}}])+\\ &+\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{V}}-(\mathbf{R}\cdot[\mathbf{V}\times\frac{\partial \mathbf{C}^{\text{ext}}}{\partial \mathbf{V}}])-[\mathbf{S}^{\text{ext}}\times\mathbf{W}]+[\mathbf{R}\times\mathbf{C}^{\text{ext}}]\right\},\end{aligned} \qquad (9)$$

где

$$(\mathbf{R}\cdot[\mathbf{V}\times\frac{\partial \mathbf{C}^{\text{ext}}}{\partial \mathbf{R}}])_i=(\frac{\partial \mathbf{C}^{\text{ext}}}{\partial \mathbf{R}}\cdot[\mathbf{R}\times\mathbf{V}])_i=\varepsilon_{klm}R^kV^l\,\frac{\partial(\mathbf{C}^{\text{ext}})^m}{\partial R^i}, \qquad (10)$$

$$(\mathbf{R}\cdot[\mathbf{V}\times\frac{\partial \mathbf{C}^{\text{ext}}}{\partial \mathbf{V}}])_i=(\frac{\partial \mathbf{C}^{\text{ext}}}{\partial \mathbf{V}}\cdot[\mathbf{R}\times\mathbf{V}])_i=\varepsilon_{klm}R^kV^l\,\frac{\partial(\mathbf{C}^{\text{ext}})^m}{\partial V^i}. \qquad (11)$$

Уравнение моментов для точки с внутренними степенями свободы имеет вид

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{M}+\mathbf{T}, \qquad (12)$$

где

$$\mathbf{L}\doteq[\mathbf{R}\times\mathbf{P}]=m[\mathbf{R}\times\mathbf{V}]-[\mathbf{R}\times\frac{\partial U}{\partial \mathbf{V}}]+[\mathbf{R}\times[\mathbf{S}\times\mathbf{W}]] \qquad (13)$$

– момент динамического импульса (угловой момент, *angular momentum*),

$$\mathbf{M} \doteq [\mathbf{R}\times\mathbf{F}] = -[\mathbf{R}\times\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}}] + [\mathbf{R}\times[\mathbf{C}\times\mathbf{V}]] \tag{14}$$

– момент внешней силы, действующей на точку,

$$\mathbf{T} \doteq [\mathbf{V}\times\mathbf{P}] = -[\mathbf{V}\times\frac{\partial U}{\partial \mathbf{V}}] + [\mathbf{V}\times[\mathbf{S}\times\mathbf{W}]] \tag{15}$$

– дополнительный крутящий момент (*torque*).

Для одной точки уравнение (12) нет смысла рассматривать, так как оно является следствием уравнения движения (6). Для системы точек следует использовать оба уравнения (6) и (12), причём определив собственный момент импульса (спин) системы посредством обобщения выражения (13), можно связать псевдовекторы **S** и **C** со спином. Заметим здесь, что полный момент импульса системы может не сохраняться.

Для свободной точки М с внутренними степенями свободы следует положить $U_0 = 0$, $\mathbf{S}^{\text{ext}} = 0$, $\mathbf{C}^{\text{ext}} = 0$. Тогда из уравнения (9) следует сохранение вектора

$$\mathbf{P}_{\text{C}} = m\mathbf{V} + [\mathbf{S}_0\times\mathbf{W}] - [\mathbf{R}\times\mathbf{C}_0] = m\mathbf{V}_{\text{C}}\,, \tag{16}$$

который уместно назвать кинетическим импульсом, ассоциированным с точкой М, тогда как $m\mathbf{V}$ есть кинетический импульс самой точки М. Здесь $\mathbf{V}_{\text{C}}$ – скорость некоторой точки С, которая движется инерциально. Уравнение (16) показывает, что центр инерции С не совпадает с центром масс М, который движется вокруг направления скорости $\mathbf{V}_{\text{C}}$. В [12] показано, что в системе центра инерции в некоторых частных случаях имеет место движение точки М по окружности с центром в точке С, что можно интерпретировать как *Zitterbewegung*. Решение уравнения (16) в общем виде оказывается достаточно сложным, хотя его можно представить в квадратурах.

Сложное движение центра масс вокруг центра инерции можно связать с периодическим характером поля, создаваемого движущимся объектом, состоящим из совокупности точек с внутренними степенями свободы. Таким образом, периодичность этого поля проявляется в том, что мы наблюдаем как волновые свойства. С другой стороны, обобщение (4) понятия механической энергии, а также несохранение полного момента импульса (13) дают основание поставить вопрос о корректности применения законов сохранения в физических процессах. Нерелятивистская динамика спиновых частиц, основы которой представлены в данной статье, легко обобщается на релятивистский случай ([2]-[3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Rivas Martin. Kinematical Theory of Spinning Particles: Classical and Quantum Mechanical Formalism of Elementary Particles. – New York-

Boston-Dordrecht-London-Moscow: Kluwer Academic Publs, 2002. – xxi+332 pp.

[2] Tarakanov A.N. Generalized Dynamics of the Mass Point with Internal Degrees of Freedom. // http://www.arXiv.org/hep-th/1010.4645v1. – 9 pp.

[3] Tarakanov A.N. On the Dynamics of the Mass Point with Internal Degrees of Freedom. // Foundations & Advances in Nonlinear Science. Proceedings of the 15th International Conference-School, September 20-23, 2010, Minsk, Belarus. – Minsk: Publishing Center of BSU, 2010. – P. 123-132.

[4] Helmholtz H. Ueber die Erhaltung der Kraft. – Berlin: G.Reimer, 1847.

[5] Гельмгольц Г. О сохранении силы. 2-е изд. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1934. – 142 с.

[6] Weber W. Elektrodynamische Maassbestimmungen. Über ein allgemeines Grundgesetz der elektrischen Wirkung. // Abh. bei Begründung der Kön. Sächs. Ges. Wiss. – Leipzig: 1846, p. 211-378. – (Wilhelm Weber's Werke. Bd. 3. Th. 1. – Berlin: Verlag von J. Springer, 1893. – S. 25-214).

[7] Weber W. Elektrodynamische Maassbestimmungen. // Poggendorf's Ann., 1848, **LXXIII**, № 2, S. 193-240. – (Wilhelm Weber's Werke. Bd. 3. Th. 1. – Berlin: Verlag von J. Springer, 1893. – S. 215-254).

[8] Weber W. On the Measurement of Electro-dynamic forces. // Sci. Memoirs, 1852, **5**, Part XX, p. 489-529.

[9] Weber W. Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Prinzip der Erhaltung der Energie. // Abh. d. Math.-Phys. Cl. d. Kön. sächsischen Ges. Wiss., 1871, **B. 10**, № 1, S. 1-61. – (Wilhelm Weber's Werke. Bd. 4. Th. 2. – Berlin: Verlag von J. Springer, 1894. – S. 279).

[10] Birkhoff G.D. Dynamical Systems. – Providence: Amer. Math. Soc., 1927. – viii+295 pp.

[11] Биркгоф Д. Динамические системы. – Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999. – 408 с.

[12] Тараканов А.Н. Zitterbewegung как чисто классическое явление. // – Минск: ИФ НАНБ, 2011 (в печати).

Тараканов А.Н. Классическая динамика для спиновых частиц. // В сб. «Актуальные научные проблемы теоретической и экспериментальной физики, астрономии и космонавтики». Сборник материалов межвузовской научной конференции, посвящённой 50-летию первого полёта человека в космос, Брест, 11-12 апреля 2011 г. – Брест: БрГУ им. А.С.Пушкина, 2011. – С. 91-95.