

Классический аналог Zitterbewegung

А.Н.Тараканов

Найдены некоторые решения нерелятивистского уравнения движения свободной материальной точки с внутренними степенями свободы. Эти решения представляют траекторию в виде спирали, что можно интерпретировать как явление дрожательного движения (Zitterbewegung), которое возникает уже в нерелятивистском случае, если учитывать внутренние степени свободы.

Теория электрона, развивавшаяся после его открытия Дж.Томсоном в классическом направлении, стала развиваться преимущественно в квантовом направлении после создания квантовой механики, особенно после работ Паули и Дирака. В 1930 г. Шрёдингер предсказал явление дрожательного движения электрона Дирака (Zitterbewegung) на основании того, что собственные значения оператора любой компоненты скорости могут принимать значения $\pm c$. На поступательное макроскопическое движение электрона накладывается микроскопическое дрожательное движение с амплитудой порядка половины комптоновской длины волны. По выражению Шрёдингера «на редкость запутанные отношения, которые согласно уравнению Дирака имеются уже при свободном движении материальной точки, кажутся мне достойными изложения, хотя я не могу представить скольконибудь завершённого результата этого исследования» ([1]). В 1952 К.Хуанг показал, что Zitterbewegung дираковского электрона можно рассматривать как движение электрона по окружности вокруг направления спина, который в свою очередь интерпретируется как «орбитальный угловой момент» этого движения. Возникающий в результате этого электрический ток приводит к внутреннему магнитному моменту электрона ([2]).

Однако ещё в 1937 г. Матиссон записал общерелятивистские уравнения движения для систем, обладающих мультипольными моментами ([3]), и показал, что если применить их к частице со спином, которую можно рассматривать как диполь, получаются уравнения движения, описывающие Zitterbewegung ([4]). Матиссон рассмотрел движение свободной незаряженной частицы со спином и свободного электрона с учётом реакции излучения. При этом он предполагал, что спин является постоянным (псевдо)вектором, что является достаточно жёстким предположением, так как направление спина, вообще говоря, может меняться. Тем не менее, связав дрожательное движение электрона с волной де Бройля, он получил известное значение спина $s = \hbar / 2$.

После основополагающих статей Шрёдингера и Матиссона появилось множество работ, развивающих как квантовую, так и классическую теорию электрона и устанавливающих связь между ними. Достаточно полный, но далеко не исчерпывающий список литературы можно найти в книге [5]. Несмотря на большое количество исследований, посвящённых теории электрона, остаются неясными многие вопросы, связанные как с излучением электрона, так и с влиянием его спина на траекторию (см., напр., [6]). В последние годы особенно усилился интерес к классической теории электрона, и в данной статье приводятся некоторые соображения в пользу классического происхождения дрожательного движения.

В работе [7]-[8] показано, что применение второго закона Ньютона $d\mathbf{P} / dt = \mathbf{F}$ и определения элементарной работы силы $dA = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{R})$ к материальной точке с внутренними степенями свободы, которую можно считать неинерциальной системой, допускает следующие выражения для импульса и силы

$$\mathbf{P} = m\mathbf{V} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{V}} + [\mathbf{S} \times \mathbf{W}], \quad (1)$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} + [\mathbf{C} \times \mathbf{V}], \quad (2)$$

где потенциальная функция $U = U(t, \mathbf{R}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \dot{\mathbf{W}}, \dots, \mathbf{W}^{(N)})$ зависит в общем случае от времени t , относительных координат \mathbf{R} , скорости \mathbf{V} и ускорений $\mathbf{W}^{(k)} = d^{(k)}\mathbf{V} / dt^{(k)}$,

$k=0,1,2,\dots,N$, а псевдовекторы \mathbf{S} и \mathbf{C} связаны как с внутренней структурой точки, так и с взаимодействием.

Второй закон Ньютона сводится к следующему уравнению движения

$$\frac{d}{dt} m\mathbf{V} + [\mathbf{S} \times \mathbf{W}] - [\mathbf{C} \times \mathbf{V}] = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{V}} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}}, \quad (3)$$

из которого вытекает уравнение для энергии

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{k=0}^N \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{W}^{(k)}} \cdot \dot{\mathbf{W}}^{(k+1)} \right), \quad (4)$$

где

$$E = \frac{m\mathbf{V}^2}{2} + (\mathbf{V} \cdot [\mathbf{S} \times \mathbf{W}]) - (\mathbf{V} \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{V}}) + U(t, \mathbf{R}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \dot{\mathbf{W}}, \dots, \mathbf{W}^{(N)}). \quad (5)$$

Ограничиваясь зависимостью потенциальной функции только от ускорений первого порядка, т.е. $U = U(t, \mathbf{R}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$, получаем, что энергия (5) является интегралом движения, если выполняется условие

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{W}} \cdot \dot{\mathbf{W}} \right) = 0. \quad (6)$$

Так как в общем случае мы полагаем, что псевдовекторы \mathbf{S} и \mathbf{C} связаны и с внутренней структурой точки, и с взаимодействием, то их можно представить в виде сумм

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}^{ext}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}^{ext}, \quad (7)$$

где \mathbf{S}^{ext} и \mathbf{C}^{ext} связаны исключительно с взаимодействием и могут зависеть от таких же переменных, как потенциальная функция, а \mathbf{S}_0 и \mathbf{C}_0 связаны исключительно с внутренней структурой точки и в процессе её движения в отсутствие взаимодействия могут меняться только по направлению, но не по модулю.

Уравнение (3) можно записать в другой форме, если положить

$$U = U_0 - (\mathbf{R} \cdot [\mathbf{V} \times \mathbf{C}]) = U_0 - (\mathbf{R} \cdot [\mathbf{V} \times \mathbf{C}_0]) - (\mathbf{R} \cdot [\mathbf{V} \times \mathbf{C}^{ext}]). \quad (8)$$

Тогда выражения для импульса (1), силы (2) и энергии (5) принимают вид

$$\mathbf{P} = m\mathbf{V} - \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{V}} - [\mathbf{R} \times \mathbf{C}] + [\mathbf{S} \times \mathbf{W}], \quad (9)$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{R}}, \quad (10)$$

$$E = \frac{m\mathbf{V}^2}{2} + (\mathbf{V} \cdot [\mathbf{S} \times \mathbf{W}]) - (\mathbf{V} \cdot \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{V}}) + U_0(t, \mathbf{R}, \mathbf{V}, \mathbf{W}), \quad (11)$$

а уравнение движения (3) сводится к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m\mathbf{V} + [\mathbf{S}_0 \times \mathbf{W}] - [\mathbf{R} \times \mathbf{C}_0] &= -\frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{R}} + (\mathbf{R} \cdot [\mathbf{V} \times \frac{\partial \mathbf{C}^{ext}}{\partial \mathbf{R}}]) + \\ &+ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{V}} - (\mathbf{R} \cdot [\mathbf{V} \times \frac{\partial \mathbf{C}^{ext}}{\partial \mathbf{V}}]) - [\mathbf{S}^{ext} \times \mathbf{W}] + [\mathbf{R} \times \mathbf{C}^{ext}] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$(\mathbf{R} \cdot [\mathbf{V} \times \frac{\partial \mathbf{C}^{ext}}{\partial \mathbf{R}}])_i = \left(\frac{\partial \mathbf{C}^{ext}}{\partial \mathbf{R}} \cdot [\mathbf{R} \times \mathbf{V}] \right)_i = \varepsilon_{klm} R^k V^l \frac{\partial (\mathbf{C}^{ext})^m}{\partial R^i}, \quad (13)$$

$$(\mathbf{R} \cdot [\mathbf{V} \times \frac{\partial \mathbf{C}^{ext}}{\partial \mathbf{V}}])_i = \left(\frac{\partial \mathbf{C}^{ext}}{\partial \mathbf{V}} \cdot [\mathbf{R} \times \mathbf{V}] \right)_i = \varepsilon_{klm} R^k V^l \frac{\partial (\mathbf{C}^{ext})^m}{\partial V^i}. \quad (14)$$

В данной статье мы рассмотрим движение свободной материальной точки M с внутренними степенями свободы, и не будем касаться вопросов, связанных с взаимодействием и с физическим смыслом псевдовекторов \mathbf{S} и \mathbf{C} .

Материальную точку можно считать свободной, если $U_0 = 0$, $\mathbf{S}^{ext} = 0$, $\mathbf{C}^{ext} = 0$. Тогда из уравнения (12) следует сохранение вектора

$$\mathbf{P}_C = m\mathbf{V} + [\mathbf{S}_0 \times \mathbf{W}] - [\mathbf{R} \times \mathbf{C}_0] = m\mathbf{V}_C, \quad (15)$$

который уместно назвать кинетическим импульсом, ассоциированным с точкой М, тогда как $m\mathbf{V}$ есть кинетический импульс самой точки М, являющейся *центром масс*. Здесь $\mathbf{V}_C = d\mathbf{R}_C / dt$ – скорость некоторой точки С с радиус-вектором

$$\mathbf{R}_C(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_C t, \quad (16)$$

где \mathbf{R}_0 – радиус-вектор начального положения точки С. Как видно из (10), сохранение вектора (15) следует также, если U_0 не зависит явно от относительного радиус-вектора. Согласно (16) точка С движется инерциально со скоростью \mathbf{V}_C . Следовательно, она является *центром инерции*, который, вообще говоря, не совпадает с *центром масс* М, конец радиус-вектора которого описывает некоторую траекторию вокруг направления \mathbf{V}_C , параметры которой представлены на Рис. 1.

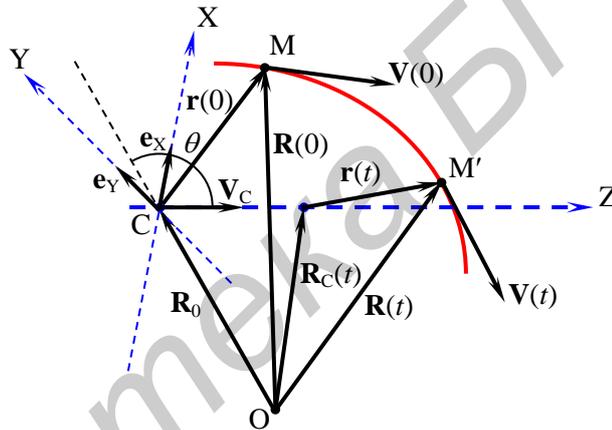


Рис. 1. Параметры траектории точки

Введём радиус-вектор, скорость и ускорение центра масс М относительно центра инерции С, полагая

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_C(t), \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{V}(t) - \mathbf{V}_C, \quad \mathbf{w}(t) = \mathbf{W}(t). \quad (17)$$

Уравнение (15) тогда запишется в виде

$$m\mathbf{v} + [\mathbf{S}_0 \times \mathbf{w}] - [\mathbf{R} \times \mathbf{C}_0] = \mathbf{0}, \quad (18)$$

а выражение для сохраняющейся энергии примет вид

$$E = K_C + K_{0C} + E_0, \quad (19)$$

где

$$K_C = \frac{m\mathbf{V}_C^2}{2} \quad (20)$$

– кинетическая энергия центра инерции, как если бы масса материальной точки находилась в точке С,

$$K_{0C} = m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}_C) + (\mathbf{V}_C \cdot [\mathbf{S}_0 \times \mathbf{w}]) \quad (21)$$

– дополнительная кинетическая энергия, обусловленная как движением центра инерции, так и движением точки относительно центра инерции,

$$E_0 = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + (\mathbf{v} \cdot [\mathbf{S}_0 \times \mathbf{w}]) \quad (22)$$

– кинетическая энергия точки М, обусловленная её движением относительно центра инерции С.

Умножая уравнение (18) векторно на \mathbf{v} , получим соотношение между псевдовекторами \mathbf{S}_0 и \mathbf{C}_0

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})\mathbf{C}_0 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_0)\mathbf{R} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{S}_0)\mathbf{w} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{S}_0. \quad (23)$$

Полагая $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}) \neq 0$, умножим (18) на $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})$ и, подставляя в результат уравнение (23), получим уравнение

$$m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})[\mathbf{S}_0 \times \mathbf{w}] - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{S}_0)[\mathbf{R} \times \mathbf{w}] + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})[\mathbf{R} \times \mathbf{S}_0] = \mathbf{0}, \quad (24)$$

не содержащее псевдовектора \mathbf{C}_0 . Аналогично, умножая (18) на $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ и, подставляя в результат уравнение (23), получим уравнение

$$m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})[\mathbf{C}_0 \times \mathbf{w}] + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_0)[\mathbf{R} \times \mathbf{w}] - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})[\mathbf{R} \times \mathbf{C}_0] = \mathbf{0}, \quad (25)$$

не содержащее псевдовектора \mathbf{S}_0 .

Затем, умножая уравнение (18) (или (24)) скалярно на \mathbf{R} или \mathbf{w} , получим

$$m(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{S}_0 \cdot [\mathbf{R} \times \mathbf{w}]) = 0. \quad (26)$$

Аналогичное уравнение, не содержащее \mathbf{S}_0 , имеет вид

$$m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) + (\mathbf{C}_0 \cdot [\mathbf{R} \times \mathbf{w}]) = 0. \quad (27)$$

Таким образом, векторное уравнение (18) сводится к системе трёх скалярных уравнений (23), (26) и (27). Согласно уравнениям (26)-(27) радиус-вектор $\mathbf{R}(t)$ должен определяться псевдовектором \mathbf{S}_0 или \mathbf{C}_0 , прецессирующими с одинаковой скоростью вокруг направления вектора \mathbf{V}_C . Поэтому \mathbf{S}_0 и \mathbf{C}_0 должны удовлетворять уравнениям движения

$$\dot{\mathbf{S}}_0 = \frac{d\mathbf{S}_0}{dt} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{S}_0], \quad \dot{\mathbf{C}}_0 = \frac{d\mathbf{C}_0}{dt} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{C}_0], \quad (28)$$

где

$$\boldsymbol{\Omega} = \sigma \mathbf{V}_C = \Omega \mathbf{e}_Z, \quad \sigma = \text{const}, \quad (29)$$

– угловая скорость прецессии, вдоль которой направлена ось Z. Единичные векторы \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , можно выбрать в виде

$$\mathbf{e}_x = K^{1/2}[\mathbf{r}_0 \times \boldsymbol{\Omega}], \quad \mathbf{e}_y = \Omega^{-1} K^{1/2}[\boldsymbol{\Omega} \times [\mathbf{r}_0 \times \boldsymbol{\Omega}]] = \Omega^{-1} K^{1/2}[\boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r}_0 - (\mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\Omega}], \quad (30)$$

где

$$K = [\mathbf{r}_0^2 \boldsymbol{\Omega}^2 - (\mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega})^2]^{-1} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_0]^{-2} = \frac{1}{\mathbf{r}_0^2 \boldsymbol{\Omega}^2 \sin^2 \theta}, \quad (31)$$

$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$ – радиус-вектор центра масс М относительно центра инерции С в начальный момент времени $t = 0$.

Уравнения (28) имеют решения

$$\mathbf{S}_0 = S_0(\sin \alpha_s \sin \Omega t \mathbf{e}_x + \sin \alpha_s \cos \Omega t \mathbf{e}_y + \cos \alpha_s \mathbf{e}_z), \quad (32)$$

$$\mathbf{C}_0 = C_0(\sin \alpha_c \sin \Omega t \mathbf{e}_x + \sin \alpha_c \cos \Omega t \mathbf{e}_y + \cos \alpha_c \mathbf{e}_z), \quad (33)$$

где $S_0 = |\mathbf{S}_0| = \text{const}$, $C_0 = |\mathbf{C}_0| = \text{const}$, α_s и α_c – постоянные углы между псевдовекторами \mathbf{S}_0 и \mathbf{C}_0 и угловой скоростью прецессии $\boldsymbol{\Omega}$, соответственно.

Уравнения (23), (26) и (27) удобно решать в системе центра инерции, в которой

$\mathbf{R}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_C = \mathbf{0}$, $\mathbf{V}_C = \mathbf{0}$, $E = E_0$. Введём безразмерную переменную $\xi = \Omega t$ и обозначения

$$\mu_s = 1 + 2\xi_s \cos \alpha_s, \lambda_s = 2\xi_s \sin \alpha_s, \xi_s = \Omega \tau_s, \tau_s = \frac{S_0}{m}; \quad (34)$$

$$\mu_c = 1 - 2\xi_c^{-1} \cos \alpha_c, \lambda_c = 2\xi_c^{-1} \sin \alpha_c, \xi_c = \Omega \tau_c, \tau_c = \frac{m}{C_0}; \quad (35)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{2E_0}{m\mathbf{r}^2\Omega^2}. \quad (36)$$

Тогда, представляя $\mathbf{r}(t)$ в виде

$$\mathbf{r}(\xi) = r_0 \left[B_0(\xi) \sin \xi \mathbf{e}_x + B_0(\xi) \cos \xi \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \right] Z_0(\xi), \quad (37)$$

где функции $B_0(\xi)$ и $Z_0(\xi)$ удовлетворяют начальному условию

$$B_0(0) = \operatorname{tg} \theta, Z_0(0) = \frac{(\mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega})}{r_0 \Omega} = \cos \theta, \quad (38)$$

систему уравнений (26), (27), (22) и (23) приведём к следующей системе

$$(\mu_s B_0 - \lambda_s) B_0' Z_0 + (\mu_s B_0^2 - \lambda_s B_0 + 1) Z_0' = 0, \quad (39)$$

$$\left[\lambda_s B_0'^2 + (\mu_s \lambda_c + \lambda_s \mu_c) B_0^2 + \lambda_c \right] Z_0^2 + 2\lambda_s B_0 B_0' Z_0 Z_0' + \lambda_s (B_0^2 + 1) Z_0'^2 = Q, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \left[-(\mu_s - 1) B_0 B_0'' + (2\mu_s - 1) B_0'^2 + \mu_s B_0^2 \right] Z_0^2 - \left[(\mu_s - 1) B_0 - \lambda_s \right] B_0 Z_0 Z_0'' + \\ & + \left[(2\mu_s - 1) B_0^2 - 2\lambda_s B_0 + 1 \right] Z_0'^2 + 2(\mu_s B_0 - \lambda_s) B_0' Z_0 Z_0' = \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\left[(\mu_s - 1) B_0'' + (\mu_s - \mu_c) B_0 - \lambda_c \right] Z_0 + 2(\mu_s - 1) B_0' Z_0' + \left[(\mu_s - 1) B_0 - \lambda_s \right] Z_0'' = 0, \quad (42)$$

для определения функций $B_0(\xi)$, $Z_0(\xi)$ и константы интегрирования Q .

Из уравнения (39) легко находим связь между $B_0(\xi)$ и $Z_0(\xi)$

$$Z_0(B_0) = \zeta_0 (\mu_s B_0^2 - \lambda_s B_0 + 1)^{-1/2} L_s(B_0), \quad (43)$$

где ζ_0 – константа интегрирования, которую можно определить из начальных условий (38),

$$L_s(B_0) = \exp \left[\frac{\lambda_s}{2} \int \frac{dB_0}{\mu_s B_0^2 - \lambda_s B_0 + 1} \right] = \left(\frac{2\mu_s B_0 - \lambda_s - \sqrt{\Delta}}{2\mu_s B_0 - \lambda_s + \sqrt{\Delta}} \right)^{\frac{\lambda_s}{2\sqrt{\Delta}}}, \quad (44)$$

если $\Delta = \lambda_s^2 - 4\mu_s = 4\xi_s^2 - 4(\xi_s \cos \alpha_s + 1)^2 > 0$, или $-\xi_s^{-1} - 1 < -1 < \cos \alpha_s < 1 - \xi_s^{-1}$;

$$L_s(B_0) = (1 - \lambda_s B_0)^{-1/2}, \quad (45)$$

если $\mu_s = 0$ ($\cos \alpha_s = -1/2\xi_s$);

$$L_s(B_0) = \exp \left[-\frac{2}{\lambda_s B_0 - 2} \right], \quad (46)$$

если $\Delta = 0$ ($\cos \alpha_s = 1 - \xi_s^{-1}$);

$$L_s(B_0) = \exp \left[\frac{\lambda_s}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{2\mu_s B_0 - \lambda_s}{\sqrt{-\Delta}} \right], \quad (47)$$

если $\Delta < 0$ ($1 - \xi_s^{-1} < \cos \alpha_s < 1$ или $-1 < \cos \alpha_s < -1 + \xi_s^{-1}$).

Подставляя решение (43) в уравнения (40)-(42) получим систему уравнений

$$B_0'^2 = \left[\frac{\lambda_s Q (\mu_s B_0^2 - \lambda_s B_0 + 1)}{\zeta_0^2 L_s^2(B_0)} - (\mu_s \lambda_c + \lambda_s \mu_c) B_0^2 - \lambda_c \right] \frac{(\mu_s B_0^2 - \lambda_s B_0 + 1)^2}{[(\mu_s B_0 - \lambda_s)^2 + 1] \lambda_s}, \quad (48)$$

$$- (\mu_s \lambda_s B_0 + \mu_s - \lambda_s^2 - 1) (\mu_s B_0^2 - \lambda_s B_0 + 1) B_0 B_0'' + \\ + \left[2(\mu_s B_0 - \lambda_s)^2 \lambda_s B_0 + (4\mu_s - 3)\mu_s B_0^2 - (3\mu_s - 2)\lambda_s B_0 + 2\mu_s - \lambda_s^2 - 1 \right] B_0'^2 + \quad (49)$$

$$+ \mu_s B_0^2 (\mu_s B_0^2 - \lambda_s B_0 + 1)^2 = \frac{\varepsilon_0 (\mu_s B_0^2 - \lambda_s B_0 + 1)^3}{\zeta_0^2 L_s^2(B_0)},$$

$$(\mu_s \lambda_s B_0 + \mu_s - \lambda_s^2 - 1) (\mu_s B_0^2 - \lambda_s B_0 + 1) B_0'' - \\ - \left[2(\mu_s B_0 - \lambda_s)^2 \lambda_s + 3(\mu_s - 1) (\mu_s B_0 - \lambda_s) - \lambda_s \right] B_0'^2 + \\ + [(\mu_s - \mu_c) B_0 - \lambda_c] (\mu_s B_0^2 - \lambda_s B_0 + 1)^2 = 0, \quad (50)$$

из которых уравнение (48) является дифференциальным уравнением первого порядка для определения функции $B_0(\xi)$, а (49) и (50) вместе с начальным условием (38) – уравнениями, определяющими соотношение между константами интегрирования Q и ζ_0 и постоянными λ_s , λ_c и ε_0 .

Полное решение задачи в общем виде и даже анализ системы (48)-(50) достаточно затруднителен. Поэтому рассмотрим несколько частных случаев.

1. Система уравнений (48)-(50) допускает решение соответствующее нулевой массе $m = 0$. В этом случае $\xi_s = \infty$, $\xi_c = 0$, $\mu_c = 1$, $\lambda_c = 0$, и из уравнений следует $\cos \alpha_s = 0$, т.е. $\alpha_s = \pm \pi/2$. В системе центра инерции уравнение траектории безмассовой материальной точки с внутренней степенью свободы, характеризуемой псевдовектором \mathbf{S}_0 , имеет вид

$$\mathbf{r}(\xi) = r_0 \left[\sin \xi \mathbf{e}_x + \cos \xi \mathbf{e}_y \right], \quad (51)$$

т.е. точка движется по окружности вокруг оси Z , причём псевдовектор \mathbf{S}_0 перпендикулярен оси Z и направлен от центра окружности, $\alpha_s = \pi/2$, а \mathbf{C}_0 является произвольным псевдовектором, лежащим в плоскости траектории ($\alpha_c = \pm \pi/2$). Это движение можно интерпретировать как Zitterbewegung точки, энергия которой равна нулю, $E_0 = 0$.

2. $\mathbf{C}_0 = \mathbf{0}$. В этом случае уравнение движения (12) обобщает нерелятивистское уравнение Френкеля-Матиссона-Вейсенхофа ([9], [4], [10]), описывающее движение точечной частицы с постоянным спином $\mathbf{s} = -c^2 \mathbf{S}_0$. Здесь $\mu_c = 1$, $\lambda_c = 0$, $\xi_c = \infty$. Рассмотрим следующие случаи.

2а) $\alpha_s = 0$, $\mu_s = 1 + 2\xi_s$, $\lambda_s = 0$. Этот случай не имеет места. Это означает, что состояние точки, когда псевдовектор \mathbf{S}_0 параллелен $\mathbf{\Omega}$, является неустойчивым.

2б) $\alpha_s = \pi/2$, $\mu_s = 1$, $\lambda_s = 2\xi_s$. Уравнение траектории имеет вид (51). Энергия точки равна $E_0 = m r_0^2 \Omega^2 / 2$.

2в) $\alpha_s = \pi$, $\lambda_s = 0$. Траектория задаётся уравнением

$$\mathbf{r}(\xi) = r_0 \left[\sin \xi \cos \xi \mathbf{e}_x + \cos^2 \xi \mathbf{e}_y \right], \quad (52)$$

причём должно выполняться условие $\mu_s = 1 - 2\xi_s = 0$, из которого следует

$$2\Omega S_0 = m. \quad (53)$$

Полагая в случае электрона $S_0 = s / c^2 = \hbar / 2c^2$, из (53) получаем $\hbar\Omega = mc^2$, т.е. $\Omega \approx 7,763 \cdot 10^{20}$ Гц есть частота, соответствующая энергии покоя электрона. Энергия точки в системе центра инерции отрицательна $E_0 = -m\mathbf{r}_0^2\Omega^2 / 2$.

3. $\mathbf{S}_0 = \mathbf{0}$. В этом случае $\xi_s = 0$, $\lambda_s = 0$, $\mu_s = 1$. Уравнение траектории имеет вид (51), причём должно выполняться условие $\mu_c = 1$ ($\alpha_c = \pm\pi / 2$), т.е. устойчивым является такое состояние, когда псевдовектор \mathbf{C}_0 перпендикулярен $\mathbf{\Omega}$. Энергия такого состояния равна нулю, $E_0 = 0$.

Резюмируя полученные результаты можно утверждать, что дрожательное движение объектов с внутренними степенями свободы имеет классическое происхождение. Это не противоречит достаточно многочисленным современным исследованиям, в которых развивается классическая теория спина (см., напр., [5]). Экспериментальная проверка дрожательного движения микрообъектов с внутренней структурой при нынешнем состоянии экспериментальной техники пока невозможна. Тем не менее, квантовые явления типа Zitterbewegung, которые пока не могут наблюдаться экспериментально, уже возможно моделировать, и первые результаты представлены в работе [11]. Однако полученные результаты говорят о том, что это явление в принципе должно иметь место и для таких классических объектов, как вращающийся волчок, спин (собственный момент импульса) которого не параллелен скорости поступательного движения.

Литература

- [1] **Schrödinger E.** Über die kräftefreie Bewegung in die relativistischen Quantenmechanik. // Sitz. Preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1930, 418-428; **Шрёдингер Э.** О свободном движении в релятивистской квантовой механике. // В кн.: **Шрёдингер Э.** Избранные труды по квантовой механике. – М.: Наука, 1976. – с. 218-228.
- [2] **Huang K.** On the Zitterbewegung of the Dirac Electron. // Amer. J. Phys., 1952, **20**, № 8, 479-484.
- [3] **Mathisson M.** Neue Mechanik materieller Systeme. // Acta Phys. Polon., 1937, **6**, № 3, 163-200.
- [4] **Mathisson M.** Das zitternde Elektron und seine Dynamik. // Acta Phys. Polon., 1937, **6**, № 3, 218-227.
- [5] **Rivas M.** Kinematical Theory of Spinning Particles: Classical and Quantum Mechanical Formalism of Elementary Particles (Fundamental Theories of Physics, Vol. 116). – New York-Boston-Dordrecht-London-Moscow: Kluwer Academic Publs, 2002. – 360 pp.
- [6] **Померанский А.А., Сеньков Р.А., Хрипович И.Б.** Релятивистские частицы с внутренним моментом во внешних полях. // УФН, 2000, **170**, № 10, 1129-1141.
- [7] **Tarakanov A.N.** Generalized Dynamics of the Mass Point with Internal Degrees of Freedom. // <http://www.arXiv.org/hep-th/1010.4645v1>. – 9 pp.
- [8] **Tarakanov A.N.** On the Dynamics of the Mass Point with Internal Degrees of Freedom. // Foundations & Advances in Nonlinear Science. Proceedings of the 15th International Conference-School, September 20-23, 2010, Minsk, Belarus. – Minsk: Publishing Center of BSU, 2010. – pp. 123-132.
- [9] **Frenkel J.** Die Elektrodynamik des rotierenden Elektrons. // Z. Phys., 1926, **37**, № 4-5, 243-262. – (Перевод в кн.: **Френкель Я.И.** Собрание избранных трудов. Т. II. Научные статьи. – М.-Л.: АН СССР, 1958. – с. 460-476).
- [10] **Weysenhoff J, Raabe A.** Relativistic dynamics of spin fluids and spin particles. // Acta Phys. Pol., 1947, **9**, 7-18.
- [11] **Gerritsma R., Kirchmair G., Zähringer F., Solano E., Blatt R., Roos C.F.** Quantum simulation of the Dirac equation. // Nature, 2010, **463**, (7 Jan.), 68-71.