Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Институт информационных технологий

М. А. Калугина, Н. В. Лапицкая

РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В MAPLE. ПРАКТИКУМ

Рекомендовано УМО по образованию в области информатики и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия для специальностей I ступени высшего образования, закрепленных за УМО

Минск БГУИР 2015

УДК 51:004.02(076)
ББК 22.1+32.973.26я73
К17

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра информатики и компьютерной графики
учреждения образования «Белорусский государственный
технологический университет»
(протокол № 8 от 25.03.2015);

доцент кафедры многопроцессорных систем и сетей
Белорусского государственного университета,
кандидат физико-математических наук, доцент Т. В. Соболева

Калугина, М. А.
К17 Решение математических задач в Maple. Практикум : учеб.-метод. пособие / М. А. Калугина, Н. В. Лапицкая. – Минск : БГУИР, 2015. – 132 с.
ISBN 978-985-543-152-8.

Предназначено для обучения студентов простейшим приемам работы в системе компьютерной алгебры Maple 18. Задачи, приведенные в качестве примеров, и упражнения для самостоятельного решения соответствуют основным разделам учебных программ «Математика» и «Дискретная математика».

УДК 51:004.02(076)
ББК 22.1+32.973.26я73

ISBN 978-985-543-152-8

Содержание

Предисловие

Учебно-методическое пособие предназначено для обучения студентов простейшим приемам решения типовых математических задач на персональном компьютере в программной среде системы компьютерной алгебры (СКА) Maple. За основу взята ее 18-я версия под управлением операционной системы Windows.

1. Первоначальное знакомство с Maple 18

Maple − одна из лидирующих систем для выполнения символьных преобразований математических выражений, численных расчётов и визуализации результатов. Большое количество задач может быть решено в ней быстро и качественно в аналитическом виде. При отсутствии такой возможности Maple предложит численные методы, позволяющие получить ответ с очень большой степенью точности. Если необходим анализ данных, то найдется комплекс пакетов с арсеналом команд для их обработки и графической визуализации. К настоящему времени программа, ежегодно обновляясь, превратилась в мощный вычислительный комплекс, предназначенный для выполнения сложных научно-технических проектов и моделирования. Интуитивно ясный и понятный алгоритмический язык Maple позволяет программировать решение задач при отсутствии в системе нужной встроенной команды и создавать пользовательские библиотеки. Наличие отличного редактора предоставляет возможность получения документа с высоким полиграфическим качеством. Графические встроенные объекты позволяют создавать полезные интерактивные приложения. Неоценима помощь Maple и в обучении. Анимационные возможности и мощная графика способствуют более глубокому пониманию важных научных понятий, формул и законов.

Функционально СКА состоит из ядра, выполняющего основные математические операции, библиотеки процедур-функций, специализированных пакетов и разных типов интерфейса.

1.1. Структура окна стандартного интерфейса

При запуске Maple 18 как Windows-приложения открывается окно со стандартным графическим интерфейсом программ, работающих под управлением операционных систем этого семейства, и открытой стартовой страницей (файл start.mw). Общий вид окна представлен на рис. 1.

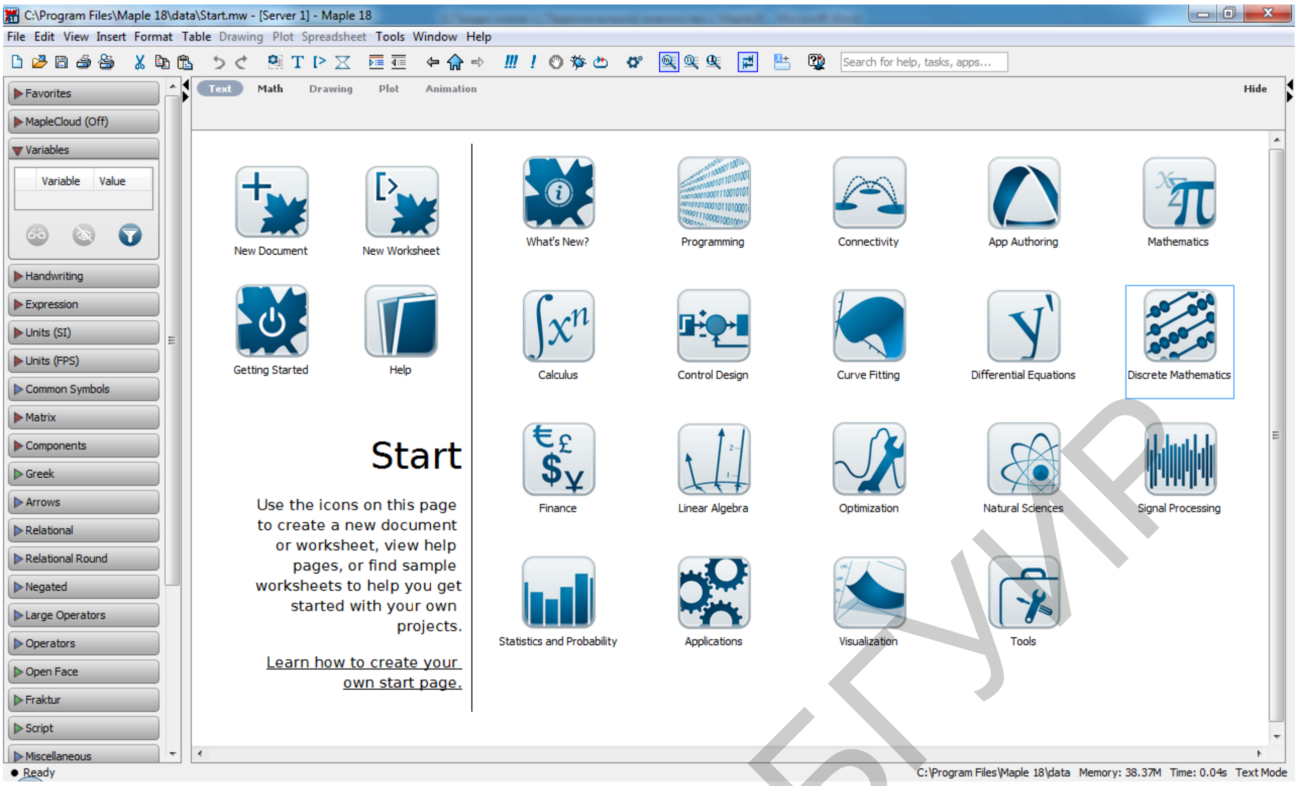


Рис. 1. Вид окна при первом открытии Maple 18

Стартовая страница содержит кнопки, которые позволяют пользователю выбрать шаблон для создания нового файла (**Document** или **Worksheet**), изучить справочные материалы (**Help**, **Getting Started**) по работе системы или найти образцы готовых примеров (**Calculus**, **Mathematics** и др.) для реализации своего проекта.

Для запуска Maple-сессии (так называется сеанс работы в Maple) нужно произвести одно из следующих действий:

1. На стартовой странице выбрать **New Document** (Новый Документ) или **New Worksheet** (Новый Рабочий Лист).

2. Из меню **File** выбрать **New**, а затем или **Document Mode**, или **Worksheet Mode**.

При открытии файла в режиме **Document** Maple выводит окно **Quick Help** (Быстрая Помощь) со списком некоторых важных «горячих» клавиш, которое автоматически сворачивается после начала работы. Для его последующего вызова можно использовать управляющую клавишу <F1> из любого режима. Возвращение на стартовую страницу возможно с помощью нажатия кнопки панели инструментов.

Таким образом, существует два основных режима работы стандартного интерфейса: **Document** и **Worksheet**. Их подробное описание можно найти во встроенном в систему **UserManual** (Руководство пользователя) через установку действий из главного меню: **Manuals, Resources, and more → Manuals → UserManual**.

Из каждого режима есть доступ к нужным для поставленных целей технологиям Maple. Главное же отличие связано с формой ввода и вывода информации, установленной по умолчанию. Шаблон **Document** использует **Document Blocks** (Блоки Документа), которые при вводе частично скрывают синтаксис команд языка Maple. Например, при использовании контекстного меню, которое вызывается нажатием правой кнопки мыши при наведении ее указателя на объект области ввода, появляется лишь стрелка с именем нужной команды, связывающая ввод и вывод. Сам текст кода, использующийся для решения вызванной задачи, скрыт. Области блоков выделяются двумя треугольниками в вертикальном указателе слева от рабочего поля документа. По умолчанию они отключены, а сама область ввода выделяется пунктирными линиями в форме прямоугольника. Для того чтобы треугольники увидеть, нужно в главном меню открыть вкладку **View** и выбрать **Markers**. Режим **Document** включается также при создании нового файла путем нажатия кнопки на панели инструментов.

Режим **Worksheet** использует по умолчанию символ приглашения [>. Угол (>) красного цвета расположен справа от квадратной скобки, которая увеличивается по мере ввода символов. При вызове контекстного меню текст выбранных команд в этом режиме автоматически прописывается на экране в области ввода.

Таким образом, главным основанием для выбора режима работы стандартного интерфейса является необходимость видеть полный текст команд или скрывать некоторые их части. Следует учитывать, что скрывать текст команд в режиме **Worksheet** тоже можно, добавив блок документа из меню **Format** главного меню: **Format → Create Document Block**, или, наоборот, можно показать команды в режиме **Document**, добавив приглашение командной строки из вкладки **Insert** в главном меню: **Insert → Execution Group → Before/After Cursor**. Эти переключения режимов можно осуществлять также с помощью кнопок  и  панели инструментов.

Изучим структуру окна стандартного интерфейса при создании нового файла. Так как существенно для разных режимов работы она не отличается, ограничимся режимом **Worksheet**. Это типичное окно ОС Windows, в котором можно выделить несколько основных частей (рис. 2). В верхней части под *Заголовком окна* находится строка *Главного меню*, содержащая список возможных действий в системе Maple. Некоторые его части не доступны, пока на рабочем поле не появится соответствующий объект.

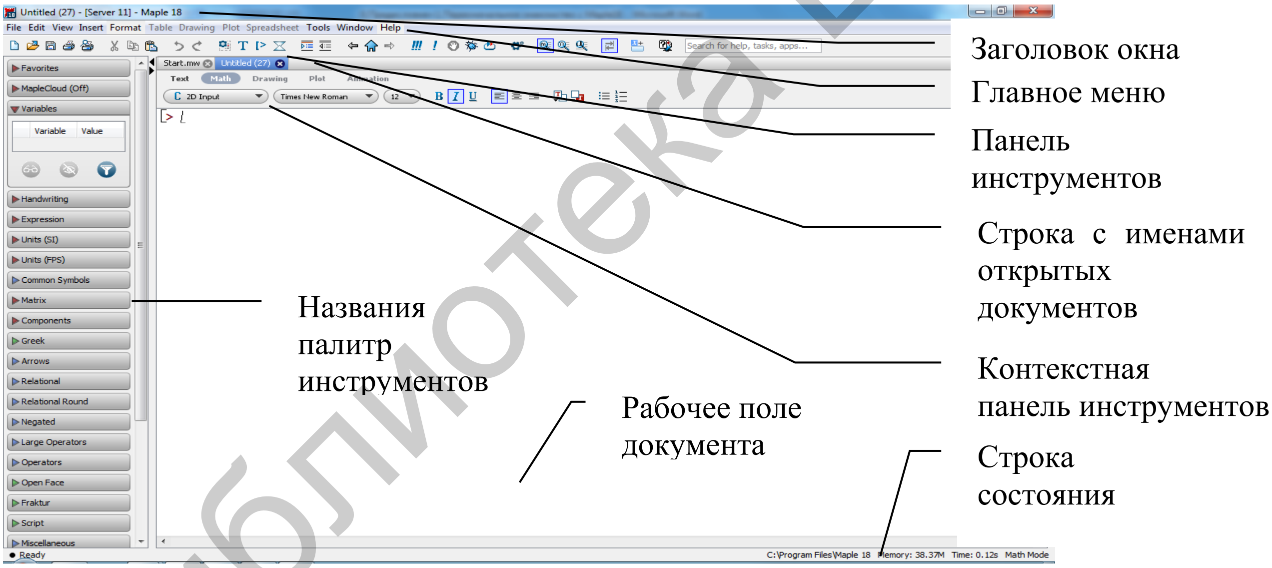


Рис. 2. Общий вид стандартного интерфейса Maple 18

Приведем краткое описание пунктов главного меню.

File (Файл) – содержит стандартный набор команд для работы с файлами (сохранить файл, открыть файл, создать новый файл и т. д.).

Edit (Редактирование) – содержит стандартный набор команд для редактирования текста (копирование, удаление выделенного фрагмента в буфер обмена, отмена команды и т. д.).

View (Вид) – содержит стандартный набор команд, управляющих структурой и содержимым видимой части окна интерфейса Maple (панели инструментов, секции, маркеры блоков документа и т. д.).

Insert (Вставка) – содержит стандартный набор команд для вставки полей разных типов (для ввода команд в разных режимах, графических двух- и трехмерных изображений, рисования, ввода программного кода и т. д.).

Format (Формат) – содержит стандартный набор команд для оформления документа (установка типа, размера и стиля шрифта).

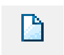
Tools (Инструменты) – содержит стандартный набор команд для вызова различных Maple-средств и установки (переустановки) параметров.

Windows (Окна) – содержит стандартный набор команд для перехода из одного рабочего листа в другой, а также для управления их расположением на экране.

Help (Справка) – содержит стандартный набор команд для вызова разных видов справочной информации о Maple и встроенных средствах, которые можно использовать для решения задач и наглядного обучения.

Ниже строки главного меню расположена *Панель инструментов* с кнопками, дублирующими часто используемые его команды.

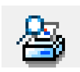
Опишем назначение некоторых наиболее востребованных кнопок и соответствующие им команды:

 – создать новый файл в режиме **Document** (**File → New → DocumentMode**);

 – открыть существующий файл (**File → Open…**);

 – сохранить текущий файл с уже заданным именем (**File → Save**);

 – распечатать текущий файл (**File → Print…**);

 – открыть предварительный просмотр текущего файла (**File → PrintPreview…**);

 – вырезать выделенную часть файла в буфер обмена (**Edit → Cut**);

 – скопировать выделенную часть файла в буфер обмена (**Edit → Copy**);

 – вставить информацию из буфера обмена в указанное курсором место текущего файла (**Edit → Paste**);

 – отменить последнее действие (**Edit → Undo Insert Text**);

 – вернуться к последнему действию (**Edit → Redo Insert Text**);

 – вставить область для ввода программного кода (**Insert → Code Edit Region**);

 – вставить область для ввода текстового комментария (**Insert → Text**);

 – вставить область для ввода командной строки в режиме 2D-Math с приглашающим символом после текущей группы вычислений (**Insert → Execution Group → After Cursor**);

 – вставить область для ввода командной строки в режиме 2D-Math без приглашающего символа после текущей группы вычислений (**Format → Create Document Block**) или выделенную часть преобразовать в блок типа **Document**;

 – открыть стартовую страницу (активировать кнопку **start.mw** в строке названий открытых файлов);

 – выполнить все команды текущего документа (**Edit → Execute → Worksheet**);

 – выполнить команды всех выделенных групп вычислений документа (**Edit → Execute → Selection**);

 – остановить выполнение текущей операции;

 – очистить внутреннюю память Maple (команда *restart*);

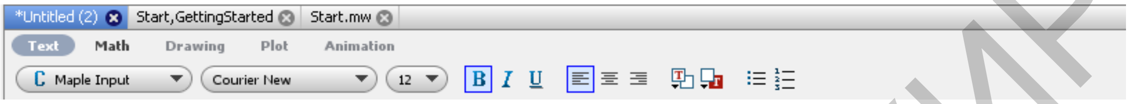
 – регулировать масштаб текста текущего документа (**View → Zoom Factor → …**);

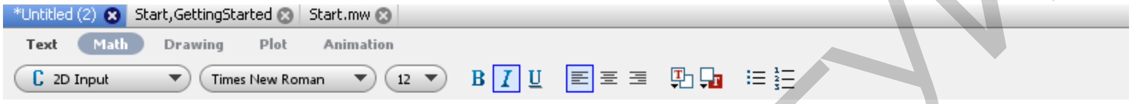
 – открыть справочную систему в новом окне (**Help → Maple Help**);

– строка для ввода поискового запроса справочной системе (**Help → Maple Help**).

Контекстная панель инструментов изменяется в зависимости от того, в какой области рабочего поля находится курсор и что в этой области отображается. Существует шесть видов контекстных панелей инструментов для следующих областей: ввода и вывода текущего документа в текстовом или математическом режимах; рисования; плоского, пространственного и анимационного графиков. Приведем их вид.

Инструменты для форматирования текстовой строки

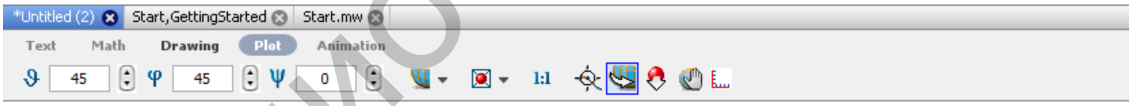




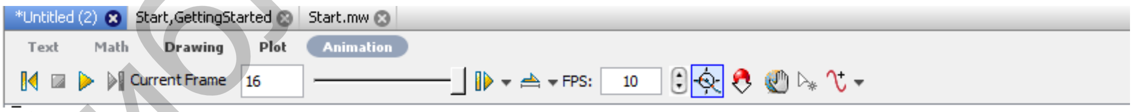
Инструменты для правки рисунка

Инструменты для работы с графикой на плоскости

Инструменты для работы с графикой в пространстве



Инструменты для работы с анимированной графикой



Большую часть окна занимает *Рабочее поле* документа, содержащее команды, результаты их выполнения, текст, графику и другие объекты. Вся эта информация может быть отформатирована нужным образом, структурирована и оформлена как электронный документ с открывающимися или закрывающимися элементами списка содержания. Во время работы для любого объекта документа, щелкнув правой кнопкой мыши в его зоне, можно отобразить *Контекстное меню*, команды которого динамически генерируются в зависимости от выбранной области. Для более детального ознакомления с этим инструментом можно обратиться к справочной системе.

Кроме непосредственного ввода команд с помощью клавиатуры, можно использовать *Палитры*, содержащие наборы шаблонов для ввода некоторых команд и объектов Maple. Более 20 их видов расположены в левой части экрана. Они могут быть в свернутом (рис. 3) или развернутом (рис. 4) виде.

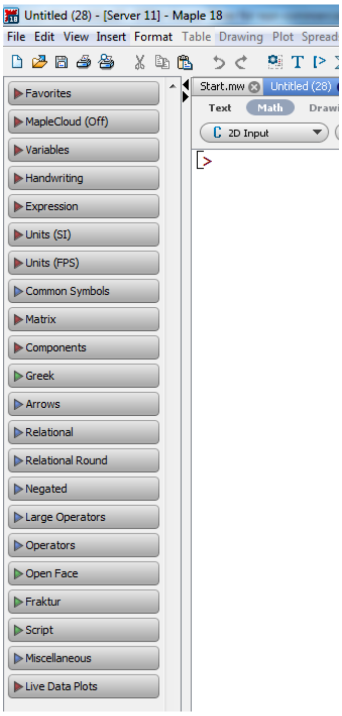


Рис. 3. Панель названий палитр

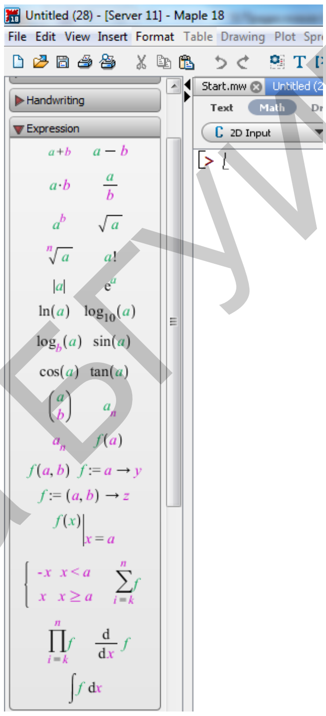


Рис. 4. Палитра для ввода выражений

Интерфейс Maple является многодокументным, позволяющим открывать и работать одновременно с несколькими файлами, в том числе и справочными, при необходимости связывая рабочие документы посредством гиперссылок.

По умолчанию в новом документе ввод команд Maple осуществляется в привычной математической записи формул 2D-Math (типографское изображение). Это отображается на контекстной панели подсветкой Math (рис. 5) и наклонным видом курсора в выделенной пунктиром прямоугольной области.

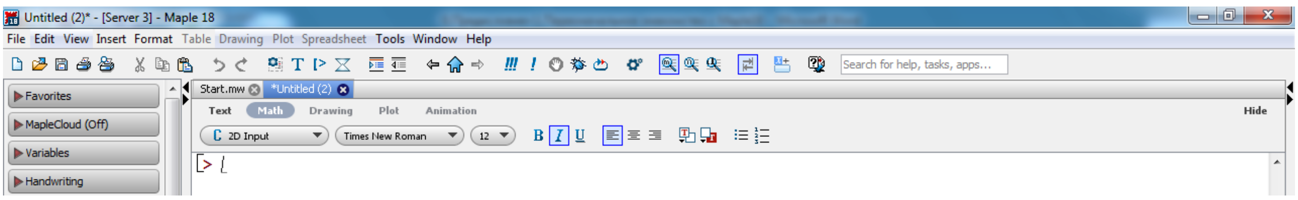


Рис. 5. Вид окна и курсора в режиме математического ввода интерфейса **Worksheet**

Переключение режима ввода команды в текстовый формат (*Maple Input*) в разных режимах стандартного интерфейса немного отличается. Например, в **Worksheet** для этого можно использовать или управляющую клавишу <F5>, или выбор *Text* (см. рис. 5), при этом на контекстной панели появится запись *Maple Input.* Активация кнопки T на основной панели инструментов переведет курсор на следующую строку после последней группы вычислений и переключит математический режим ввода команд в режим ввода текстовых комментариев, которые не обрабатываются интерпретатором Maple. При этом исчезнет прямоугольник, в котором отражалась вводимая информация, а курсор примет вертикальное положение (рис. 6).

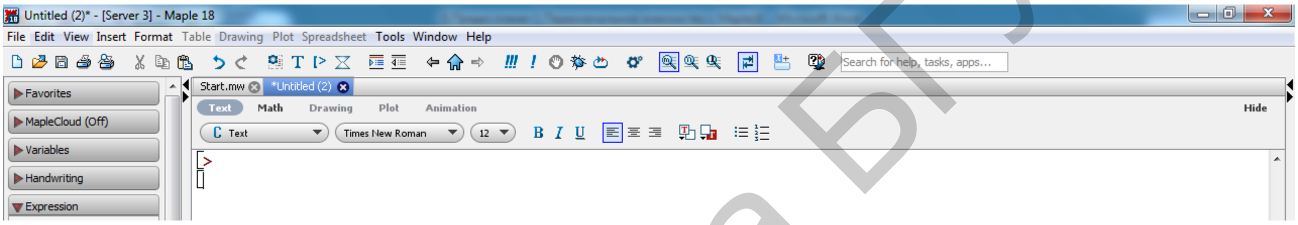


Рис. 6. Вид окна и курсора в режиме ввода текстовых комментариев интерфейса **Worksheet**

Текстовые комментарии можно вводить и в режиме командной строки, начиная их символом (#). Аналогичные переключения с незначительной разницей можно производить и в режиме **Document**.

Таким образом, режим **Document** позволяет создать качественный интерактивный документ, в котором системные вычисления и их текстовое сопровождение органично сочетаются, переплетаются между собой и могут быть отформатированы с высоким полиграфическим качеством. Команда и ее результат могут быть выведены в одной строке при завершении ввода одновременным нажатием клавиш <ctrl>+<=>. Режим **Worksheet** требует записи команд построчно в группах (группа может содержать и одну команду), а результат выполнения выводится в следующей за группой строке. При этом приглашающий символ отображается при распечатке файла. В обоих режимах сохранилась возможность ввода команды в виде, присущем ранним версиям Maple (Maple Input, или 1D-Math). В этом случае отображение символов на экране идет красным цветом (если не изменены системные настройки), и завершение каждой команды знаком (;) или (:) строго обязательно. Оператор (;) означает, что результат выполнения соответствующей команды появится в области вывода после ее обработки. Фиксатор (:) используется для подавления вывода на экран, то есть переводит команду в ее инертное выполнение. Таким образом, основные режимы работы можно выделить кратко в сводной схеме, представленной на рис. 7.

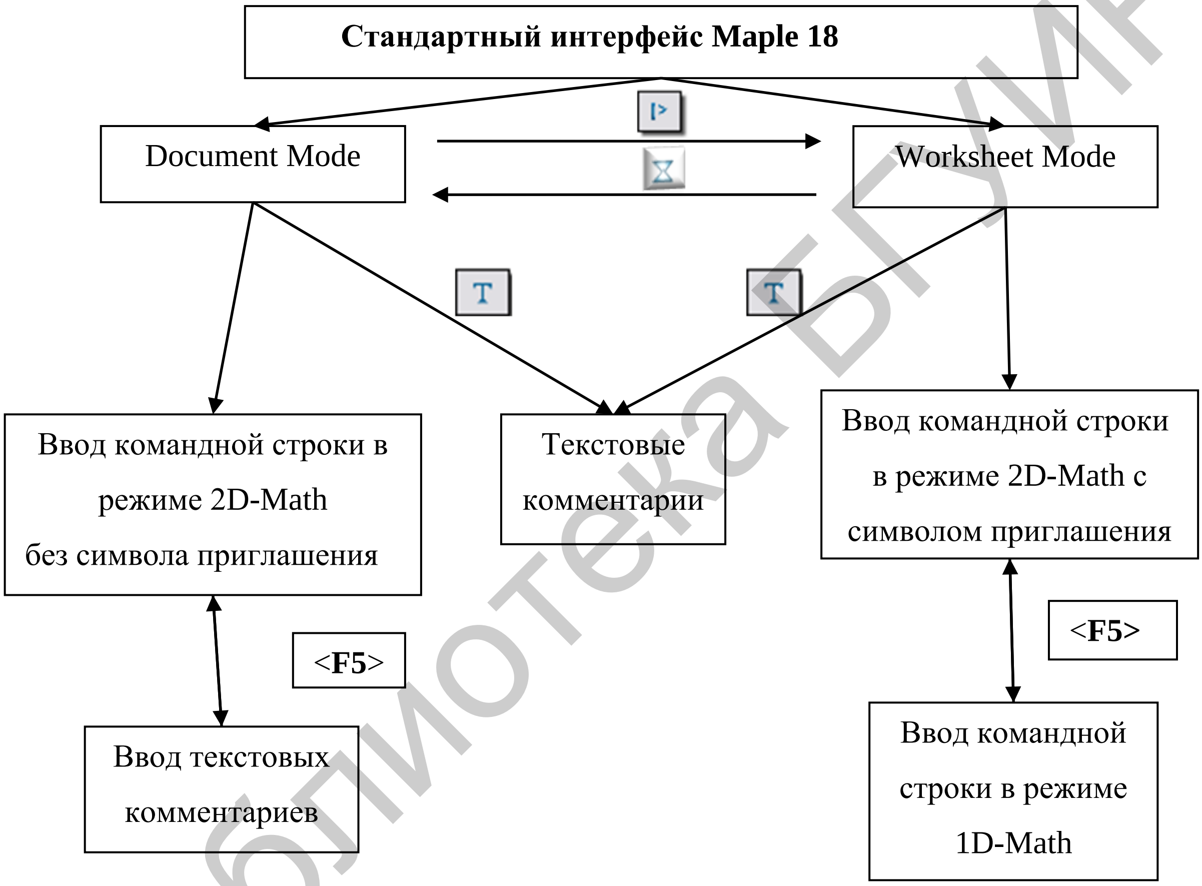


Рис. 7. Краткая схема переключения режимов работы

Следует отметить еще одну возможность для создания качественного электронного документа. Из вкладки **Insert** главного меню можно выбрать специальный объект **Section** (Секция) (или использовать две специальные кнопки основной панели инструментов), который представляет собой серый треугольник с вертикальной скобкой, ограничивающий группу вычислений и текстовых строк. При нажатии на треугольник информация сворачивается, а сам он приобретает направление вправо, подчеркивая тем самым наличие содержания. Повторное нажатие приводит к разворачиванию содержимого. Более подробно изучить возможности форматирования можно, воспользовавшись справочной системой.

Заметим, что в дальнейшем мы будем использовать системные настройки, но их можно изменить, выбрав из заголовка **Tools** главного меню вкладку настроек **Options**.

1.2. Первая Maple-сессия

Сеанс работы в Maple обычно называют *сессией*. Пользователь вводит предложения (выражения, команды, процедуры, текст и т. п.), которые обрабатывает система Maple. Рабочее поле при этом разделяется на две части:

1) область ввода, состоящая из командных строк и текстовых комментариев;

2) область вывода, содержащая результаты обработки введенных команд в виде аналитических выражений, графических объектов или сообщений об ошибках.

Область текстовых комментариев не воспринимается и не обрабатывается Maple.

Область ввода и соответствующая ей область вывода называются *группой вычислений*. На рабочем листе она отмечается квадратной скобкой слева. В группе вычислений может содержаться несколько команд и операторов: все они обрабатываются системой за одно обращение при нажатии клавиши <enter>.

Одна команда, введенная в <u>математическом</u> режиме, может подаваться сразу на выполнение клавишей <enter>. При этом, если она завершается фиксатором (;) конца записи, то результат выводится на экран. Если фиксатор отсутствует, то интерпретатор автоматически добавляет его. Для подавления вывода на экран результата работы команды ее следует завершить двоеточием (:). При последовательной записи команд одной группы вычислений перевод на следующую строку осуществляется клавишами <shift>+<enter>. При этом, если команды отделены друг от друга точкой с запятой, вывод будет осуществлен в порядке их следования со строки, следующей за последней командой группы. Если же фиксатор (;) пропущен, то вывод может быть неожиданным или соответствовать последней выведенной команде. Так как Maple имеет общую внутреннюю память, для корректности работы новую задачу на одном рабочем листе рекомендуется начинать командой *restart*, которая обнуляет все регистры и отключает все подключенные библиотеки. Аналогичное действие совершается при помощи соответствующей кнопки  панели инструментов.

При работе в <u>текстовом</u> режиме клавиша <enter> переводит запись на следующую строку, никакой результат при этом не выводится.

Большое количество математических расчетов в Maple 18 можно проводить без непосредственного прописывания инструкций (например, используя контекстное меню или специализированные браузеры), но все его возможности и преимущества сосредоточены в командах и средствах программирования.

В командную строку (напоминаем, что она начинается знаком приглашения (>) для ввода команды в режиме**Worksheet**, а в режиме **Document** этот символ скрыт) можно записать любое алгебраическое выражение. После нажатия клавиши <enter> или кнопки с одним восклицательным знаком на инструментальной панели она будет обработана системой, а результат выведен на экран (если завершить двоеточием, вывод на экран будет подавлен):

$\log[2]\,(16) + \cos(x - \mathrm{Pi})$

$$4 - \cos(x)$$

Если команда содержит синтаксические ошибки или ошибки выполнения, то система в области вывода напечатает сообщение об их характере. Для исправления ошибки следует вернуться к оператору, исправить его и снова подать на выполнение. В любой момент работы так можно обратиться к уже введенным командам, требующим корректировки.

Библиотека Maple 18 состоит из двух частей: главной библиотеки, содержащей наиболее востребованные функции и команды, и библиотеки специализированных пакетов, содержащей команды для решения задач из определенных разделов математики. Список всех функций и команд главной библиотеки можно получить по установке **Help → Manuals, Resources, and more → List of Commands**, а пакетов − **Help → Manuals, Resources, and more → List of Packages**.

Ввод стандартной команды Maple в режиме 2D-Math отображается черным шрифтом и имеет вид *Имя_команды*(*аргументы*, *параметры*), где *Имя_команды* – ключевое слово команды, *аргументы*, *параметры* – обязательные и дополнительные параметры соответственно. При наборе в режиме Maple Input (установка **Insert → Maple Input**) символы меняют цвет на красный, запись идет в одну линию, и каждая команда обязательно должна завершаться знаком (;) или (:).

Выполните приведенные ниже примеры решения нескольких задач в режиме 2D-Math интерфейса **Document**. Для этого:

1) откройте новый документ со стартовой страницы или из главного меню, режим 2D-Math будет задан по умолчанию;

2) текстовую информацию вводите в режиме Text, а команды − в режиме Math (переключение режимов осуществляйте клавишей <F5> или выбором в строке контекстного меню слов Text или Math соответственно);

3) завершайте ввод каждой команды нажатием клавиши<enter>.

Если все будет введено без ошибок, то в центре следующей за командой строки синим цветом будет выведен результат.

Примеры

Разложить квадратный трехчлен на множители:

$factor(x^2+4x+4)$

$$(x+2)^2$$

Продифференцировать заданную функцию:

$diff\left(\cos(x)\,x^2, x\right)$

$$-\sin(x)\,x^2+2\cos(x)\,x$$

Вычислить определенный интеграл:

$int(4\,x+\ln(x), x=0\,..2)$

$$6+2\ln(2)$$

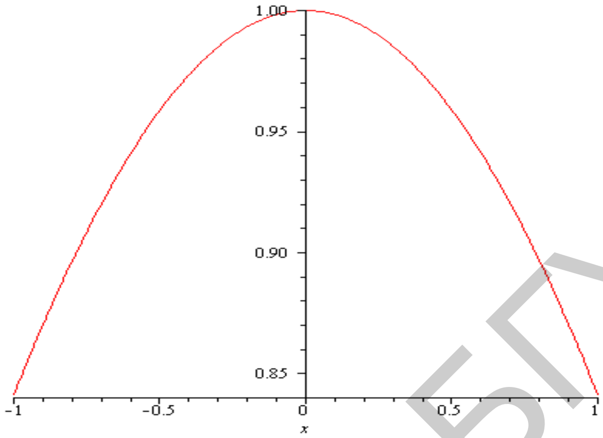
Найти приближенное значение (в записи использовать пять значащих цифр) выполненной на предыдущем шаге операции:

$evalf(\%, 5)$

$$7.3863$$

Построить график функции на заданном промежутке:

$plot\left(\dfrac{\sin(x)}{x}, x = -1\,..1\right)$



Для вызова команды из пакета существует два варианта: загрузить весь пакет с помощью команды *with*(*Имя_пакета*) и далее использовать обычный формат записи команды или вызвать команду без подключения всего пакета с помощью длинной формы ее записи *Имя_пакета*[*Имя_команды*](*аргументы,параметры*).

Удобно для первоначального ознакомления с командами пакета не завершать команду его подключения двоеточием. В этом случае их полный список выведется на экран. Далее можно, выделив нужную команду, скопировать ее в указанное курсором место рабочего листа или получить доступ к полной справке о ней с помощью нажатия управляющей клавиши <F2>.

1.3. Навигация по справочной системе и полезным утилитам

Остановимся подробнее на получении справочной информации в Maple, доступ к которой обеспечивает вкладка **Help** (Справка) главного меню. В основу справочной системы положено понятие гипертекста, состоящего из около 5000 связанных страниц, что позволяет быстро найти полную информацию по необходимому вопросу.

Для доступа к справочной системе можно использовать одно из следующих действий:

1) из главного меню выбрать вкладку **Help → Maple Help**;

2) нажать комбинацию клавиш <ctrl>+<F1>;

3) ввести в окошке основной панели инструментов слово для поиска;

4) нажать кнопку основной панели инструментов;

5) выделить на рабочем листе слово, по которому нужна справка, и нажать <F2>.

В любом из перечисленных вариантов откроется окно справочной системы, разделенное на две вертикальных части: левая часть состоит из окошка для ввода поискового запроса и раскрывающегося краткого содержания справочной системы, справа – вывод информации по введенному запросу или выбранному пункту интерактивного содержания.

Около названий пунктов содержания на левой панели можно заметить значки. Приведем их значение:

− означает наличие подпунктов соответствующего пункта;

− указывает на страницу справки, которая появится на правой панели;

− означает, что откроется страница с примерами;

− откроется страница с определением соответствующих понятий;

− примеры соответствующих задач;

− указывает на соответствующий учебник.

Примеры, приведенные в справочной системе, можно выполнить, открыв вкладку **View → Open Page as Worksheet** или скопировав нужную их часть в свой рабочий лист. Для переключения режима ввода в 2D-Math можно нажать кнопку . Заметим, что некоторые команды требуют ввода только в 1D-Math. В этом случае результат не изменится. Для более полного ознакомления со структурой справочной системы и работой с ней можно сделать запрос со словом **help navigator**.

В справочной системе, кроме информации по работе с самой системой, можно найти математические и инженерные словари, содержащие более 5000 понятий и около 300 рисунков и графиков. Выход в Интернет дает возможность связаться с имеющимися в сети источниками нужной информации, в частности, связаться с главным сайтом производителя http://www.maplesoft.com.

Упражнения

1. Откройте установленную на вашем компьютере СКА Maple 18. Создайте новый файл в режиме **Document**. Изучите открывшееся окно Quick Help с набором горячих клавиш. Потренируйтесь вызывать справочную систему разными способами на основании материала подразд. 1.3. Найдите различные учебники с использованием содержимого вкладки **Help** главного меню.

2. Создайте новый файл в режиме **Worksheet**. Используя материал подразд. 1.1, изучите команды основного меню и возможности палитр.

3. Выполните в обоих файлах задачи подразд. 1.2 и сохраните их.

4. Вернитесь на загрузочную страницу и ознакомьтесь с материалом, который выводится при нажатии кнопок **Mathematics** и **Discrete Mathematics**.

2. Работа с основными математическими объектами

2.1. Числа и действия над ними

Рассмотрим работу с действительными (*real*) числами. Их можно вводить и получать в разных форматах. Для целых чисел – тип *integer* – это обычный ввод цепочки цифр, начинающейся минусом для отрицательных чисел, десятичной системы счисления: 2, 42, 0, −372. Рациональные числа могут быть заданы несколькими способами. Прежде всего, это запись в виде отношения двух целых чисел: 2/5, 79/8, −142/2. Maple при выводе сразу упрощает результат до несократимой дроби или целого числа. При записи числа в виде конечной десятичной дроби – тип *float* – в качестве разделителя целой и дробной частей используется точка: 24.42, 0.64 или просто .64. Число выведется в показательной форме, если его записать как произведение десятичной дроби на степень с натуральным показателем по основанию 10, причем мантисса приведется к стандартному виду (число из диапазона от 1 до 10) формата *float* с округлением до значения, определяемого текущим значением системной переменной *Digits*. По умолчанию ее значение равно 10. Наконец, точные иррациональные числа, в том числе радикалы $m^{1/n}$ или $\sqrt[n]{m}$, алгебраические числа (корни алгебраических уравнений с целыми коэффициентами) и трансцендентные числа, не являющиеся алгебраическими (π, e и др.) представляются своей символьной записью.

Система Maple поддерживает точное представление чисел, хотя при десятичной нотации чисел имеется практически неограниченное число разрядов. Выяснить его значение можно с помощью команды *kernelopts* (*maxdigits*). В последних версиях системы оно достигает сотен миллионов, точнее, 268 435 448. Maple стремится оперировать именно с точными (символьными) представлениями. Вынудить ее перейти к приближенным значениям можно только специально, в частности, применяя функцию *evalf*. Таким образом, и при десятичной записи можно обеспечить большую точность вычислений, присваивая системной переменной *Digits* требуемое число разрядов в десятичном представлении чисел. Но следует помнить, что переход к приближенным значениям лучше выполнять уже для конечного результата.

Проиллюстрируем сказанное с помощью задачи по извлечению корня третей степени целого числа (без десятичной точки) с использованием двух операций: приближенного вычисления и упрощения, так как непосредственный ввод выражения не приводит к нужному результату (все примеры в дальнейшем будем выполнять в интерфейсе **Worksheet**):

> $\sqrt[3]{27}$

$$27^{1/3}$$

> $evalf(\%, 5)$

$$3.0000$$

> $simplify(\%\%)$

$$3$$

Дадим пояснения. Унарный оператор % обращается к результату предыдущей команды (возможны еще %% и %%%). Команда *evalf* может иметь следующий формат ввода: *evalf*(*expr*), *evalf*(*expr*, *n*) или $evalf_n$(*exrp*), где *expr* − выражение, для которого нужно найти приближенное значение; *n* − количество значащих цифр в записи результата (необязательный параметр, по умолчанию равный 10). Для записи символов в нижнем регистре можно использовать сочетание клавиш <shift>+<ctrl>+<->. Команда *simplify* проводит алгебраические преобразования с целью максимального упрощения и получения точного результата. Если применить плавающую арифметику, то результат будет несколько отличаться:

> $\sqrt[3]{27.0}$

$$3.000000000$$

> $evalf(\%, 5)$

$$3.0000$$

> $simplify(\%\%)$

$$3.000000000$$

Количество значащих цифр по умолчанию 10. Действие команды *evalf* распространяется только на текущую операцию.

Найдем с помощью Maple значение арифметического выражения. Ввод осуществляется естественным способом с учетом круглых скобок и приоритета операций. Знаки самих арифметических операций вводятся согласно табл. 1 и при наборе в режиме 2D-Math автоматически преобразуются в привычную формульную запись. При вводе в формате Maple Input (текстовый набор командной строки) вводимые символы не преобразуются.

Таблица 1

Арифметические операции

Операция	Клавиша знака операции	Ввод	Вид
Сложение	+	24+42	$24+42$
Вычитание	–	24–42	$24-42$
Умножение	*	24*42	$24 \cdot 42$
Деление	/	24/42	$\frac{24}{42}$
Возведение в степень	^	24^42	24^{42}

Замечание 1. Для ввода команд можно использовать шаблоны из палитры **Expressions** для ввода выражений (см. рис. 4). Для этого нужно щелкнуть по нужному шаблону, чтобы он появился в области ввода, а затем ввести в выделенные места значения переменных.

Замечание 2. При наборе необходимо использовать клавишу навигации → для выхода из зоны набора, например, знаменателя или показателя степени.

Замечание 3. Запись отношения двух целых чисел в виде обыкновенной дроби преобразуется автоматически в несократимую дробь.

Вычислим значение выражения

$$\frac{(7-6,35):6,5+9,9}{\left(1,2:36+1,2:0,25-1\frac{5}{16}\right):\frac{169}{24}}.$$

Введем следующий набор символов:

((7−6.35)/6.5→+9.9)/(1.2/36→+1.2/0.25→−1−5/16→)/169/24→→→<enter>.

Результат:

$$> \frac{\left(\frac{(7-6.35)}{6.5}+9.9\right)}{\frac{\left(\frac{1.2}{36}+\frac{1.2}{0.25}-1-\frac{5}{16}\right)}{\left(\frac{169}{24}\right)}};$$

$$20.00000000$$

Смешанное число вводится как сумма целой и дробной части или как неправильная дробь. Естественно, это же задание можно выполнить, разбив на необходимое число шагов по два операнда.

При вводе математических констант (табл. 2) можно использовать или их непосредственный набор по правилам Maple, или применять палитры.

Таблица 2

Математические константы

Константа	Набор клавиш
π	Pi
i (мнимая единица)	I
∞	Infinity
e (основание натуральных логарифмов)	exp(1)
γ (константа Эйлера)	Gamma
логические 1 и 0	true, false

Заметим, что при наборе с клавиатуры буквы *e* она будет восприниматься как обычная переменная. Поэтому используется ввод с помощью встроенной функции *exp*(*x*) или с помощью шаблона из палитры **Expression**. Для того чтобы значения трансцендентных функций от целых аргументов выводились в числовом формате (т. е. в виде приближенного числа), можно при их вводе использовать десятичную точку.

Сравните:

$> e$

$$e$$

$> evalf(\%)$

$$e$$

> exp(1)

$$e$$

> *evalf*(%)

$$2.718281828$$

> exp(1.0)

$$2.718281828$$

Для записи греческих букв в полиграфическом виде можно использовать специальную палитру **Greek** или команду, соответствующую нужной букве (табл. 3). При наведении указателя мыши на нужную букву в палитре всплывает подсказка с ее командой. Для ввода заглавной греческой буквы следует начинать ввод с прописной буквы (alpha – Alpha). В области ввода отобразится команда, а в области вывода − соответствующая буква:

> alpha

$$\alpha$$

> Alpha

$$A$$

Исключение составляют математические константы π и γ, для которых используются команды Pi и gamma соответственно:

> Pi

$$\pi$$

> pi

$$\pi$$

Но!

> *evalf*(Pi)

$$3.141592654$$

> *evalf*(pi)

$$\pi$$

> *evalf*(gamma)

$$0.5772156649$$

> *evalf*(Gamma)

$$\Gamma$$

Таблица 3

Греческие буквы (строчные)

α	alpha	η	eta	μ	mu	σ	sigma
β	beta	θ	theta	ν	nu	φ	varphi
δ	delta	ι	iota	ξ	xi	χ	chi
ε	epsilon	κ	kappa	π	pi	ψ	psi
ζ	zeta	λ	lambda	ρ	rho	ω	omega

Основные элементарные математические функции входят в стандартную библиотеку Maple и вводятся в привычном формате *function*(*argument*). Их перечень приведен в табл. 4. Слева приводится математическая запись, справа – запись в Maple.

Таблица 4

Встроенные математические функции

$\sqrt{x}$	sqrt(*x*)	$\log_a x$	log[a](*x*)	sec *x*	sec(*x*)	arcctg *x*	arcccot(*x*)
$\|x\|$	abs(*x*)	sin *x*	sin(*x*)	cosec *x*	csc(*x*)	sh *x*	sinh(*x*)
e^x	exp(*x*)	cos *x*	cos(*x*)	arcsin *x*	arcsin(*x*)	ch *x*	cosh(*x*)
ln *x*	ln(*x*)	tg *x*	tan(*x*)	arcos *x*	arcos(*x*)	th *x*	tanh(*x*)
lg *x*	log10(*x*)	ctg *x*	cot(*x*)	arctg *x*	arctan(*x*)	cth *x*	coth(*x*)

Упростим выражение $\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ с помощью разных способов выполнения и вывода результата.

Ввод с клавиатуры в синтаксисе Maple:

> sqrt(4 + 2 sqrt(3)) + sqrt(4-2 sqrt(3))

$$2\sqrt{3}$$

> $\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ *# Ввод с помощью палитры Expression*

$$2\sqrt{3}$$

>

$'\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}' = \sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

 # Вывод результата в виде тождества (исходное выражение взято в одинарные кавычки)

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

Иногда не удается преобразовать числовое выражение, содержащее трансцендентные функции целого аргумента, к нужной форме. В этом случае можно попробовать решить задачу с переменными величинами, а затем подставить вместо них нужные числа:

> sqrt(2 + sqrt(3))

$$\frac{1}{2}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

> *factor*(%)

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

> $factor\left(\frac{1}{x}\sqrt{y}\sqrt{x}+\frac{1}{x}\sqrt{x}\right)$

$$\frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{x}}$$

> $x := 2; y := 3; \frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{x}}$

$$x := 2$$

$$y := 3$$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{2}$$

Команда *factor* (разложить на множители) не привела к получению числового выражения в виде произведения, но после замены чисел на переменные и подстановки нужных значений результат получен. Более подробно о командах преобразований выражений будет сказано дальше.

Приведем примеры нахождения точных и приближенных значений некоторых математических функций:

> log[2](16)

$$4$$

> log[2](3)

$$\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$$

> *evalf*(%)

$$1.584962501$$

> $\cos\left(\frac{\mathrm{Pi}}{4}\right)$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

> $evalf(\%)$

$$0.7071067810$$

> $\tan\left(\frac{\mathrm{Pi}}{4}\right)$

$$1$$

> $\cot(7)$

$$\cot(7)$$

> $\cot(7.0)$

$$1.147515422$$

Для тригонометрических функций часто бывает необходимо представление аргумента в разных формах: радианной или градусной. Для перевода из одной меры в другую можно использовать универсальную команду преобразования *convert*. Для перевода в градусную меру требуется формат записи команды *convert*(number, *degrees*), где number – радианное значение, а для обратной задачи − *convert*(number *degrees, radians*), где number – градусное значение. Например:

> $convert\left(\frac{\mathrm{Pi}}{18}, degrees\right)$

$$10\, degrees$$

> $convert(36\, degrees, radians)$

$$\frac{1}{5}\pi$$

Комплексное (*complex*) число z записывается в алгебраической форме как $\bar{z} = x + iy$. В командной строке такая запись должна вводиться так: $\bar{z} := x + \mathrm{I} * y$. Мнимая единица обозначается как I. Функции Re(z) и Im(z) возвращают действительную и мнимую части комплексного числа, а функция abs(z) − вычисляет его модуль. Комплексно-сопряженное число $\bar{z} = x - iy$ можно найти с помощью команды *conjugate*(z).

Если комплексное выражение очень сложное или содержит параметры, то команды Re(z) и Im(z) могут не выдать требуемого результата. Получить вещественную и мнимую части комплексного выражения z в этом случае можно попробовать с помощью команды преобразования комплексных выражений *evalc*(z), которая возвращает упрощенное выражение в алгебраическую форму.

Модуль и аргумент (главное значение в диапазоне $(-\pi, \pi]$) комплексного выражения z можно найти сразу с помощью команды *polar*(z) или по отдельности: $|z|$, или abs(z), – для нахождения модуля, *argument*(z) – для нахождения аргумента.

Найдем значение z комплексного выражения $\dfrac{1+2i}{2-3i}+i^{10}$ в алгебраической форме. Для этого в командной строке наберем

z:=(1+2*I)/2-3*I<→>+I^10<enter>.

В результате должно получиться

$> z := \dfrac{(1+2\cdot I)}{2-3\cdot I}+I^{10}$

$$z := -\frac{17}{13}+\frac{7}{13}\,\mathrm{I}$$

Для выделения действительной и мнимой частей, нахождения сопряженного ему значения $\bar{z}$ и проверки, что $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}(z)$, $z-\bar{z}=2i\operatorname{Im}(z)$, введем нужные команды:

$>$ 'Re(z)'= Re(z);'Im(z)'= Im(z);

$$\Re(z) = -\frac{17}{13}$$

$$\Im(z) = \frac{7}{13}$$

$>$ *z1* := *conjugate*(*z*)# *сопряженное z число*

$$z1 := -\frac{17}{13}-\frac{7}{13}\,\mathrm{I}$$

$> z+z1 = 2\operatorname{Re}(z);\ z-z1 = 2\cdot I\cdot \operatorname{Im}(z);$

$$-\frac{34}{13} = -\frac{34}{13}$$

$$\frac{14}{13}\,\mathrm{I} = \frac{14}{13}\,\mathrm{I}$$

Для нахождения модуля и аргумента числа $z=\sqrt{3}-i$, а также значения z^{20} введем следующее:

$>$ *restart*;# *очистка регистров памяти*

$>$ *z* := sqrt(3) − *I*;# *ввод числа и прсвоение его значения переменной*

$$z := \sqrt{3} - \mathrm{I}$$

> polar(z);*# в выводе первый аргумент - модуль, второй - аргумент*

$$\mathrm{polar}\left(2, -\frac{1}{6}\pi\right)$$

> z^{20}*# результат не получен*

$$\left(\sqrt{3} - \mathrm{I}\right)^{20}$$

> *evalc*(%)*# применили команду evalc для упрощения*

$$-524288 + 524288\,\mathrm{I}\sqrt{3}$$

Рассмотрим более сложную задачу нахождения модуля и аргумента комплексного числа $z1 = -sin\frac{\pi}{8} - icos\frac{\pi}{8}$, в которой требуется процедура упрощения результата:

> $z1 := -\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{8}\right) - I\cdot\cos\left(\frac{\mathrm{Pi}}{8}\right)$

$$z1 := -\sin\left(\frac{1}{8}\pi\right) - \mathrm{I}\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)$$

> $s := \mathrm{polar}(z1)$

$$s := \mathrm{polar}\left(\sqrt{\sin\left(\frac{1}{8}\pi\right)^2 + \cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)^2}, \arctan\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)}{\sin\left(\frac{1}{8}\pi\right)}\right) - \pi\right)$$

> *simplify*(s)

$$\mathrm{polar}\left(1, -\frac{5}{8}\pi\right)$$

Найти все значения $\sqrt[6]{1}$ и изобразить соответствующие им точки на комплексной плоскости можно с помощью следующих действий:

> *restart*;

> $z := -1 : evalc\left(\sqrt[6]{z}\right)$*# находим главное значение корня*

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\mathrm{I}$$

> $w := k \rightarrow \sqrt[6]{|z|}\left(\cos\left(\frac{(\mathrm{argument}(z) + 2\cdot\mathrm{Pi}\cdot k)}{6}\right) + I\cdot\sin\left(\frac{(\mathrm{argument}(z) + 2\cdot\mathrm{Pi}\cdot k)}{6}\right)\right)$

$$w := k \rightarrow |z|^{1/6}\left(\cos\left(\frac{1}{6}\mathrm{argument}(z) + \frac{1}{3}\pi k\right) + \mathrm{I}\sin\left(\frac{1}{6}\mathrm{argument}(z) + \frac{1}{3}\pi k\right)\right)$$

> **for** k **from** 0 **to** 6 **do** $W[k] := w(k)$ **end do**; *#цикл для нахождения первых семи значений*

$$W_0 := \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\mathrm{I}$$

$$W_1 := \mathrm{I}$$

$$W_2 := -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}$$

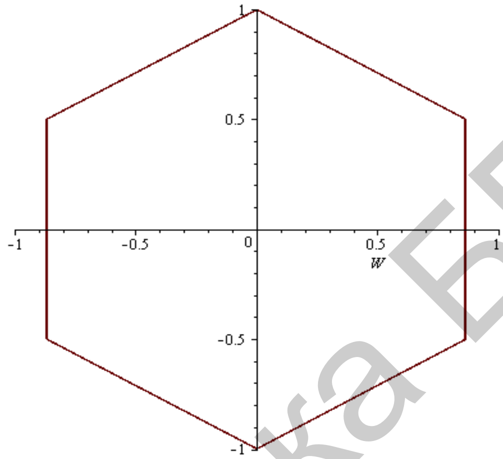
$$W_3 := -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\,\mathrm{I}$$

$$W_4 := -\mathrm{I}$$

$$W_5 := \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\,\mathrm{I}$$

$$W_6 := \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}$$

> $plots[complexplot]([W[0], W[1], W[2], W[3], W[4], W[5], W[6]], W=-1..1)$



Для нахождения всех значений корня была задана известная из комплексного анализа формула как функция, зависящая от номера k корня по отношению к его главному значению (при $k = 0$). Затем с помощью простого цикла было найдено семь значений корня для того, чтобы показать, что седьмое значение совпадет с главным (и цикл далее продолжится), и чтобы построить замкнутый правильный шестиугольник, вершины которого соответствуют найденным шести различным значениям $\sqrt[6]{1}$.

Приведем примеры нахождения значений функций комплексного переменного, используя логарифм. Задачи с другими комплексными функциями можно решать по аналогии.

Для нахождения главного значения логарифма числа $(-1+i)$ можно набрать соответствующую этой математической функции команду ln и применить к результату *evalc*-процедуру:

> $\ln(-1+I);\ evalc(\%)$

$$\ln(-1+\mathrm{I})$$

$$\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{3}{4}\mathrm{I}\pi$$

Можно получить запись результата также в виде равенства:

> $z := -1 + I;\ \ln(z) = evalc(\ln(z));$

$$z := -1 + \mathrm{I}$$

$$\ln(-1+\mathrm{I}) = \frac{1}{2}\ln(2)+\frac{3}{4}\mathrm{I}\pi$$

Для нахождения всех значений натурального логарифма комплексного числа можно определить соответствующий функциональный оператор (см. более подробную информацию о способах задания функций в разд. 4). Например следующим образом:

> $Ln := (z, k) \rightarrow \ln(|z|) + I\cdot\mathrm{argument}(z) + 2\cdot\mathrm{Pi}\cdot k\cdot I;$

$$Ln := (z, k) \rightarrow \ln(|z|) + \mathrm{I}\,\mathrm{argument}(z) + 2\,\mathrm{I}\,\pi\,k$$

Тогда для нахождения частных значений может быть использована привычная математическая запись:

> $'Ln(I)' = Ln(I, k);$

$$Ln(\mathrm{I}) = \frac{1}{2}\mathrm{I}\pi + 2\,\mathrm{I}\,\pi\,k$$

> $Ln(I, 2)$# *значение логарифма отi при k=2*

$$\frac{9}{2}\mathrm{I}\pi$$

2.2. Тождественные преобразования выражений

Maple обладает широкими возможностями для проведения аналитических преобразований математических выражений. К ним относятся такие операции, как приведение подобных слагаемых, разложение на множители, раскрытие скобок, приведение рациональной дроби к нормальному виду и многие другие.

Выделение частей выражений

Математическая формула, над которой будут производиться преобразования, записывается в форме >*eq*:=*expr*1=*expr*2 (*eq* – назначенное имя (идентификатор) выражения; *expr*1 – условное обозначение левой части формулы; *expr*2 – условное обозначение правой части формулы) .

Выделение правой части выражения осуществляется командой *rhs*(*eq*), выделение левой части выражения – командой *lhs*(*eq*):

> $eq1 := (x-y)\cdot(x+y) = x^2 - y^2$

$$eq1 := (x-y)\,(x+y) = x^2 - y^2$$

> $lhs(eq1)$

$$(x-y)\,(x+y)$$

> $rhs(eq1)$

$$x^2 - y^2$$

Если задана рациональная дробь вида *m*/*n*, то можно выделить ее числитель и знаменатель с помощью команд *numer*(*m*/*n*) и *denom*(*m*/*n*) соответственно:

> $eq2 := \frac{x^2 + y^2}{x - y}$

$$eq2 := \frac{x^2 + y^2}{x - y}$$

> $numer(eq2)$

$$x^2 + y^2$$

> $denom(eq2)$

$$x - y$$

<u>Тождественные преобразования математических выражений</u>

1. Раскрытие скобок осуществляется командой *expand*(*expr*):

> $eq3 := (x+1)\cdot(x^2 - 2x + 10)$

$$eq3 := (x+1)\,(x^2 - 2x + 10)$$

> $expand(eq3)$

$$x^3 - x^2 + 8x + 10$$

Команда *expand* может иметь дополнительные параметры, позволяющие при раскрытии скобок оставлять определенные выражения без изменения, а также поддерживает большое количество специальных математических функций (см. **Help**-поддержку). Например, пусть требуется каждое слагаемое выражения $\cos x + \sin x + 1$ умножить на выражение *x* + *y*. Тогда в командной строке следует ввести

> $expand((\cos(x) + \sin(x) + 1)\cdot(x+y), x+y)$

$$(x+y)\cos(x) + (x+y)\sin(x) + x + y$$

2. Разложение многочлена на множители осуществляется командой *factor*(*expr*):

> $factor\left(x^5 - x^4 - 7x^3 + x^2 + 6x\right)$

$$x\,(x-1)\,(x-3)\,(x+2)\,(x+1)$$

Разложение на множители тригонометрических выражений с помощью этой команды не всегда возможно. Сравните:

> $factor\left(\sin^2(x) - \cos^2(x)\right)$

$$(\sin(x) - \cos(x))\,(\sin(x) + \cos(x))$$

> $factor(\sin(2x))$

$$\sin(2x)$$

Но применение команды *expand* поможет решить проблему:

> $expand(\sin(x+y))$

$$\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

> $expand(\sin(2x))$

$$2\sin(x)\cos(x)$$

3. Дробь можно привести к стандартному виду с помощью команды *normal*(*expr*). Сравните:

> $eq4 := \dfrac{\left(x^4 - y^4\right)}{xy\cdot\left(x^2 + y^2\right)}$

$$eq4 := \frac{x^4 - y^4}{xy\left(x^2 + y^2\right)}$$

> *expand*(*eq4*)*# выполняется почленное деление*

$$\frac{x^4}{xy\left(x^2+y^2\right)} - \frac{y^4}{xy\left(x^2+y^2\right)}$$

> *normal*(*eq4*)

 # упрощается дробь до неприводимых многочленов в числителе и знаменателе

$$\frac{x^2 - y^2}{xy}$$

4. Универсальная команда упрощения выражений − *simplify*(*expr*). В качестве дополнительных параметров можно указать, виды каких выражений нужно преобразовывать. Стандартные параметры: *trig* – преобразование тригономет-

рических выражений; *power* – степенных; *radical*, или *sqrt*, – иррациональных; *exp* – показательных; ln – логарифмических. Использование параметров намного увеличивает эффективность этой команды. Для ограничения области вычислений можно использовать специальный пакет *RealDomain*, в котором используются только действительные числа, или команды *assume* и *assuming* (более подробно изучить их назначение позволит справочная система Maple). Сравните:

> $simplify\left(\sin(x)^2 + \cos(x)^2 + \log[2](4)\right)$

$$3$$

> $simplify\left(\sqrt{x^2}\right)$

$$\operatorname{csgn}(x)\, x$$

> $simplify\left(\sqrt{x^2}, assume = negative\right)$

$$-x$$

Замечание. csgn(x) – пороговая функция, принимающая значение 1 при положительных значениях аргумента, (−1) – при отрицательных, 0 – в нуле.

5. Приведение подобных членов в выражении осуществляется командой *collect*(*expr*,*var*), где *expr* – выражение, *var* – имя переменной, относительно которой следует приводить подобные.

6. Для упрощения выражений, содержащих не только квадратные корни, но и корни других степеней, лучше использовать команду *radnormal*(*eqpr*). Сравните:

> $simplify\left(\sqrt{3 + \sqrt{3} + \left(10 + 6\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}}}\right)$

$$\sqrt{3 + \sqrt{3} + \left(10 + 6\sqrt{3}\right)^{1/3}}$$

> $radnormal\left(\sqrt{3 + \sqrt{3} + \left(10 + 6\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}}}\right)$

$$1 + \sqrt{3}$$

7. С помощью универсальной команды *convert(expr, param),* где *expr* – выражение, которое будет переведено в указанный тип *param*, осуществляется большое количество разнообразных преобразований. В частности, можно привести тригонометрическое выражение, содержащее sin x и cos x, в выражение,

содержащее только tg *x*, если указать в качестве параметра tan, или, наоборот, содержащее tg *x*, ctg *x* можно перевести в sin *x* и cos *x*, если в параметрах указать sincos.

Вообще, команда *convert* имеет более широкое назначение. Она осуществляет преобразование выражения одного типа в другой. Например: *convert*(list, Vector) – преобразование некоторого списка list в вектор с теми же элементами; *convert*(*expr*, string) – преобразование математического выражения в его текстовую запись. Для вызова подробной информации о назначении параметров команды *convert*, а также по любой другой команде,можно выделить набранное имя этой команды и нажать клавишу <F2>.

8. Для проверки истинности тождества можно применить команду *testeq*.

2.3. Решение уравнений и их систем

Решение алгебраических уравнений

Для решения уравнений в Maple существует универсальная команда *solve*(*eq*,*x*), где *eq* – уравнение, *x* – переменная, относительно которой надо решить уравнение. В результате выполнения этой команды в строке вывода появится выражение, которое является решением данного уравнения

Если уравнение имеет несколько решений, которые понадобятся для дальнейших расчетов, то команде *solve* следует присвоить имя *name*. Обращение к *k*-му решению данного уравнения производится указанием его имени с номером решения *k* в квадратных скобках: *name*[*k*]:

> $x := solve(x^2 + 5 \cdot x + 6 = 0, x)$

$$x := -2, -3$$

> $x1 = x[1]; x2 = x[2];$

$$x1 = -2$$

$$x2 = -3$$

Функция *solve* проводит решение в аналитическом виде, которое обычно имеет символьный вид. Для получения числовых значений корней (точнее их приближенных значений) можно использовать функцию *evalf* или записывать числовые коэффициенты уравнения в формате с плавающей точкой:

> $solve\left(\sqrt[3]{\ln(x)} = 2, x\right)$ *# получение точного аналитического решения*

$$e^8$$

> $evalf(\%)$*#получение приближенного числового решения*

$$2980.957987$$

> $solve\left(\sqrt[3]{\ln(x)} = 2.0, x\right)$ *# получение приближенного числового решения*

$$2980.957987$$

Решение тригонометрических уравнений

Команда *solve*, примененная к тригонометрическому уравнению, выдает только главные решения, то есть в интервале (–π, π]. Для того чтобы получить все решения, следует осуществить назначение системной переменной командой _EnvAllSolutions:=true. Сравните:

> $solve(\sin(x) = -1)$

$$-\frac{1}{2}\pi$$

> $\_EnvAllSolutions := true:$
> $solve(\sin(x) = -1)$

$$-\frac{1}{2}\pi + 2\pi\_Z1\sim$$

Символ *_Z1~* обозначает константу целого типа, поэтому общее решение данного уравнения имеет вид $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Решение систем уравнений

Систему уравнений в Maple можно решить также с помощью команды *solve*, но в формате *solve*({*eq1,eq2,…*},{*x1,x2,…*}). Аргументы команды − уравнения, указанные в первой паре фигурных скобок через запятую, и переменные, относительно которых требуется решить систему, − во второй. Если необходимо для дальнейших вычислений использовать полученные решения уравнений, то команде *solve* следует присвоить имя *name* с помощью оператора присваивания или команды *assign(name).* После этого над решениями можно производить математические операции:

> $s := solve(\{a \cdot x + y = 2, 5 \cdot x - 6\,a \cdot y = 2\}, \{x, y\})$

$$s := \left\{x = \frac{2\,(6\,a+1)}{6\,a^2+5},\, y = -\frac{2\,(a-5)}{6\,a^2+5}\right\}$$

> $simplify(s[1]-s[2])$

$$x - y = \frac{2\,(7\,a-4)}{6\,a^2+5}$$

Если Maple не может получить корни уравнения или системы уравнений в радикалах, в ответе появляется функция *RootOf*. Для получения ответа в явном виде можно использовать команду *allvalues*(*expr*):

> $eqs := \{x \cdot y = a, x - 2 \cdot y = b\};\ s := solve(eqs, \{x, y\})$

$$eqs := \{x\,y = a, x - 2\,y = b\}$$

$$s := \{x = 2\,RootOf(2\,\_Z^2 + \_Z\,b - a) + b, y = RootOf(2\,\_Z^2 + \_Z\,b - a)\}$$

> $allvalues(s)$

$$\left\{x = \frac{1}{2}\,b + \frac{1}{2}\sqrt{b^2+8\,a},\, y = -\frac{1}{4}\,b + \frac{1}{4}\sqrt{b^2+8\,a}\right\}, \left\{x = \frac{1}{2}\,b - \frac{1}{2}\sqrt{b^2+8\,a},\, y = -\frac{1}{4}\,b - \frac{1}{4}\sqrt{b^2+8\,a}\right\}$$

Для численного решения уравнений в тех случаях, когда уравнения не имеют аналитических решений (или когда система не смогла найти решение в виде действительного числа), используется специальная команда *fsolve*(*eq*,*x*), параметры которой такие же, как у команды *solve*. Сравните разные решения:

> $restart;\ solve\left(\cos(x) = \sqrt{x}, x\right)$

$$RootOf(\_Z - \cos(\_Z)^2)$$

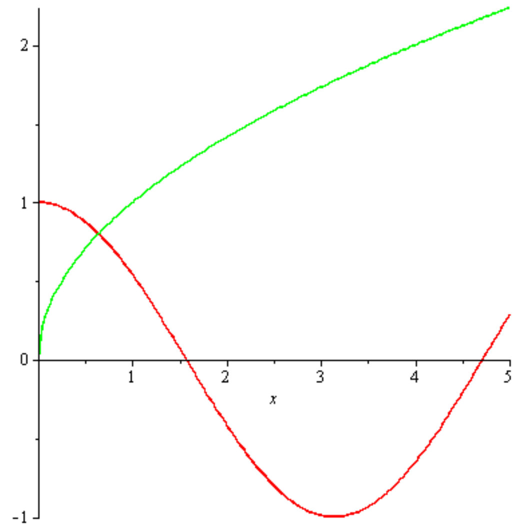
> $allvalues(\%)$

$$RootOf(\_Z - \cos(\_Z)^2, 0.6417143709), RootOf(\_Z - \cos(\_Z)^2, -1.298643110 - 1.057481567\,\mathrm{I}), RootOf(\_Z - \cos(\_Z)^2, -1.298643110 + 1.057481567\,\mathrm{I}), RootOf(\_Z - \cos(\_Z)^2, 2.909694584 - 1.184358746\,\mathrm{I}), RootOf(\_Z - \cos(\_Z)^2, 2.909694584 + 1.184358746\,\mathrm{I})$$

> $fsolve\left(\cos(x) = \sqrt{x}, x\right)$

$$0.6417143709$$

> $plot\left(\left[\cos(x), \sqrt{x}\right], x = 0\,..5, color = [red, green]\right)$



Решение рекуррентных и функциональных уравнений

Команда *rsolve*(*eq*,*f*) позволяет решить рекуррентное соотношение для функции *f*(*n*) натурального аргумента. Если задать для нее начальное условие, то может быть получено и частное решение. Например:

> $eq := 2\cdot f(n) = 3\cdot f(n-1) - f(n-2); f(1) = 1; f(2) = 2; f(n) = rsolve(\{eq, f(1) = 1, f(2) = 2\}, f);$

$$eq := 2f(n) = 3f(n-1) - f(n-2)$$
$$f(1) = 1$$
$$f(2) = 2$$
$$f(n) = 3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Универсальная команда *solve* позволяет решать также и функциональные уравнения, например:

> $F := solve\left(f(x)^2 - 2f(x) + x, f\right)$

$$F := x \rightarrow RootOf\left(\_Z^2 - 2\_Z + x\right)$$

В результате получилось решение в неявном виде. Однако Maple может работать с такими решениями. Неявное решение функционального уравнения можно попытаться преобразовать в какую-либо элементарную функцию с помощью команды *convert*. Продолжая приведенный выше пример, можно получить решение в явном виде:

> $f := convert(F(x), radical)$

$$f := 1 + \sqrt{1-x}$$

Решение трансцендентных уравнений

При решении трансцендентных уравнений для получения решения в явном виде перед командой *solve* можно ввести дополнительную команду *_EnvExplicit:=true*, которая присваивает системной переменной логическое значение *истина.* Это является указанием к нахождению решений в явном виде. Приведенный ниже пример иллюстрирует получение всех решений системы в нужном виде и дальнейшее их приведение к приближенным значениям. Можно убедиться, что множество решений содержит одно действительное и пять комплексных решений:

$> \_EnvExplicit := true : s := solve\left(\left\{2\cdot x^{y} - x^{-y} = 1, \log[2](y) = \sqrt{x}\right\}, \{x, y\}\right);$

$$s := \{x = 1, y = 2\}, \left\{x = e^{RootOf\left(e^{\_Z}\ln(2)^2 - \ln\left(\frac{\_Z}{-\ln(2) + I\pi}\right)^2, -1.653100938 + 2.899146097\, I\right)},\right.$$

$$\left. y = 2^{\sqrt{e^{RootOf\left(e^{\_Z}\ln(2)^2 - \ln\left(\frac{\_Z}{-\ln(2) + I\pi}\right)^2, -1.653100938 + 2.899146097\, I\right)}}}\right\}, \left\{x\right.$$

$$= e^{RootOf\left(e^{\_Z}\ln(2)^2 - \ln\left(\frac{\_Z}{-\ln(2) + I\pi}\right)^2, -0.2874770720 + 5.719619030\, I\right)}, y$$

$$\left. = 2^{\sqrt{e^{RootOf\left(e^{\_Z}\ln(2)^2 - \ln\left(\frac{\_Z}{-\ln(2) + I\pi}\right)^2, -0.2874770720 + 5.719619030\, I\right)}}}\right\}, \left\{x\right.$$

$$= e^{RootOf\left(e^{\_Z}\ln(2)^2 - \ln\left(\frac{\_Z}{-\ln(2) + I\pi}\right)^2, 0.6310752169 + 1.445855403\, I\right)}, y$$

$$\left. = 2^{\sqrt{e^{RootOf\left(e^{\_Z}\ln(2)^2 - \ln\left(\frac{\_Z}{-\ln(2) + I\pi}\right)^2, 0.6310752169 + 1.445855403\, I\right)}}}\right\}, \left\{x\right.$$

$$= e^{RootOf\left(e^{\_Z}\ln(2)^2 - \ln\left(\frac{\_Z}{-\ln(2) + I\pi}\right)^2, 2.671719166 - 2.976259233\, I\right)}, y$$

$$\left. = 2^{\sqrt{e^{RootOf\left(e^{\_Z}\ln(2)^2 - \ln\left(\frac{\_Z}{-\ln(2) + I\pi}\right)^2, 2.671719166 - 2.976259233\, I\right)}}}\right\}, \left\{x\right.$$

$$= e^{RootOf\left(e^{\_Z}\ln(2)^2 - \ln\left(\frac{\_Z}{-\ln(2) + I\pi}\right)^2, 3.060735678 - 8.751085198\, I\right)}, y$$

$$\left. = 2^{\sqrt{e^{RootOf\left(e^{\_Z}\ln(2)^2 - \ln\left(\frac{\_Z}{-\ln(2) + I\pi}\right)^2, 3.060735678 - 8.751085198\, I\right)}}}\right\}$$

$> \textbf{for } i \textbf{ from } 2 \textbf{ to } 6 \textbf{ do } evalf(s[i]); \textbf{end do};$

$\{x = -0.1858559018 + 0.04596427085\,I, y = 0.9906977249 + 0.3076151844\,I\}$

$\{x = 0.6341465144 - 0.4007354128\,I, y = 1.755350364 - 0.2957859869\,I\}$

$\{x = 0.2342322559 + 1.864978842\,I, y = 1.649363928 + 1.199303800\,I\}$

$\{x = -14.26756631 - 2.380636852\,I, y = -1.082321411 - 0.6116359893\,I\}$

$\{x = -16.68024692 - 13.31554798\,I, y = -2.861229082 - 0.3429734305\,I\}$

Решение уравнений в целочисленном виде

Если нужен результат в целых числах, то можно использовать функцию *isolve*($f(x), x$):

$> s1 := isolve(2x - 5 = 7y)$

$$s1 := \{x = 6 + 7\_Z1, y = 1 + 2\_Z1\}$$

Подставляя вместо системной переменной *_Z1* любые целые значения, можем получать частные решения:

$> \textbf{for } i \textbf{ from } 0 \textbf{ to } 5 \textbf{ do } subs(\_Z1 = i, \{s1[1], s1[2]\}) \textbf{ end do};$

$$\{x = 6, y = 1\}$$
$$\{x = 13, y = 3\}$$
$$\{x = 20, y = 5\}$$
$$\{x = 27, y = 7\}$$
$$\{x = 34, y = 9\}$$
$$\{x = 41, y = 11\}$$

2.4. Решение неравенств, их систем и совокупностей

Решение неравенств

Команда *solve* применяется как для решения уравнений, так и для решения неравенств. Решение неравенства выдается в виде интервала, в котором могут изменяться искомые значения переменной. В случае, когда решением неравенства является полуось, в поле вывода можно увидеть конструкцию вида *RealRange*($-\infty$, *Open*(a)), которая означает, что $x \in (-\infty, a)$. Ключевое слово *Open* означает, что луч открытый. Если этого слова нет, то начало луча включено во множество решений. Например:

> $solve\left(\sqrt{x+3} < \sqrt{x+2} + 2\sqrt{x-3}, x\right)$

$$RealRange\left(Open\left(\frac{265}{88}\right), \infty\right)$$

Если нужно получить решение неравенства не в виде интервального множества, а в виде ограничений для искомой переменной, то переменную, относительно которой следует разрешить неравенство, следует указывать в фигурных скобках. Например:

> $solve\left(2\,\mathrm{e} + \ln(x) < 1, \{x\}\right)$

$$\left\{0 < x, x < \mathrm{e}^{1-2\,\mathrm{e}}\right\}$$

<u>Решение систем неравенств</u>

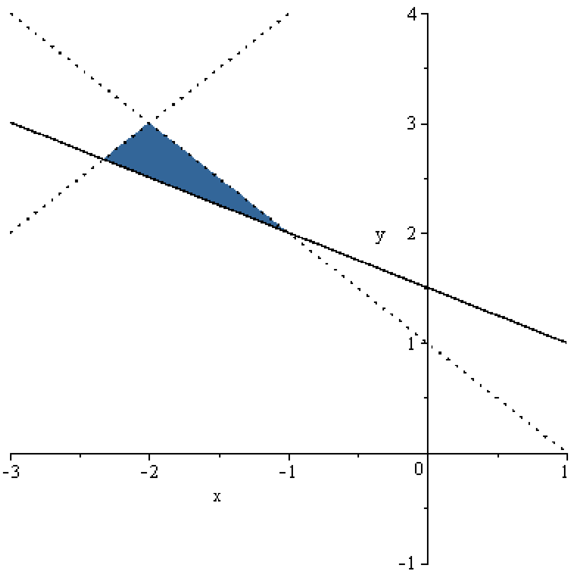
Систему неравенств можно также решить с помощью команды *solve*, изменив немного формат ввода ее аргументов:

> $s2 := solve(\{x + y < 1, x + 2y \geq 3, y < x + 5\}, \{x, y\})$

$$s2 := \left\{x = -2y + 3, 2 < y, y < \frac{8}{3}\right\}, \left\{2 < y, x < -y + 1, y < \frac{8}{3}, -2y + 3 < x\right\}, \left\{y = \frac{8}{3}, -\frac{7}{3} < x, x < -\frac{5}{3}\right\}, \left\{\frac{8}{3} < y, x < -y + 1, y < 3, y - 5 < x\right\}$$

Для геометрической интерпретации решения системы неравенств можно использовать, например, следующую функцию (более подробно о графических средствах Maple будет сказано далее):

> $plots[inequal](\{x + y < 1, x + 2y \geq 3, y < x + 5\}, x = -3\,..1, y = -1\,..4)$



Упражнения

1. Найдите точные и приближенные значения выражений:

1) $\dfrac{20}{99}+0.2+\dfrac{0.097}{1-0.01}$;

2) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{3}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{15}{3-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+5\right)^{-1}$;

3) $\sqrt[4]{32\cdot\sqrt[3]{4}}+\sqrt[4]{64\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}}-3\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[4]{2}}$;

4) $(4-3\sqrt{2})^2+8\sqrt{34-24\sqrt{2}}-\sqrt{5}$;

5) $\sqrt{43+30\sqrt{2}}+\sqrt{43-30\sqrt{2}}$;

6) $6-2\sin\pi-3\cos\pi+2\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos 2\pi$;

7) $8\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}$;

8) $\operatorname{arctg}3-\arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{5}$;

9) $\dfrac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}}27+\log_{\frac{1}{2}}24-2\log_{\frac{1}{2}}3$.

2. Вычислите: 1) $(-1+i)^5$; 2) $e^{i\pi/2}$.

3. Найдите:

1) модуль и аргумент комплексных чисел: $2+2i$; $-1+\sqrt{3}i$; $-2-5i$; $\sqrt{2}-i$;

2) квадрат и куб чисел: $1+i$; $1-i$;

3) значение выражения $\frac{(z_1-2z_2)(3z_1+\overline{z_2})}{z_1 z_2^3}$, $z_1=2+3i$, $z_2=-1+2i$;

4) синус, косинус, логарифм, арктангенс, корень комплексного числа $2-3i$.

4. Упростите:

1) $\dfrac{x^4+3x^2-4}{x^3+x^2-x-1}$; 2) $\dfrac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)}+\dfrac{y^2-xz}{(y+x)(y+z)}+\dfrac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)}$;

3) $\dfrac{\cos(5\pi-2x)}{2\sin^2(\frac{7\pi}{2}+x)}$; 4) $\dfrac{\mathrm{tg}5x+\mathrm{ctg}7x}{\mathrm{ctg}5x+\mathrm{tg}7x}$.

5. Разложите на множители:

1) x^6-1; 2) $x^3-3x^2+5x-15$; 3) $x^2-7xy+12y^2$; 4) $4x^4y^3+16x^3y^4+16x^2y^5$.

6. Решите уравнения:

1) $\dfrac{3-2x}{(x-2)^2}=\dfrac{4}{3x+5}$; 2) $5\sin x+12\cos x=13$; 3) $x-\ln x=1$; 4) $x+2\sqrt{x+5}=0$.

7. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2-y^2=1; \\ x^2+xy=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 16^x+16^y=68; \\ 16^{x+y}=256; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \cos x+\cos y=\dfrac{1}{2}; \\ \sin^2 x+\cos^2 y=\dfrac{7}{4}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2)=7; \\ 2\log_4 x+\log_2 y=6. \end{cases}$

8. Решите неравенства: 1) $x^4-3x^2-6x-2<0$; 2) $e^{2x+3}<1$.

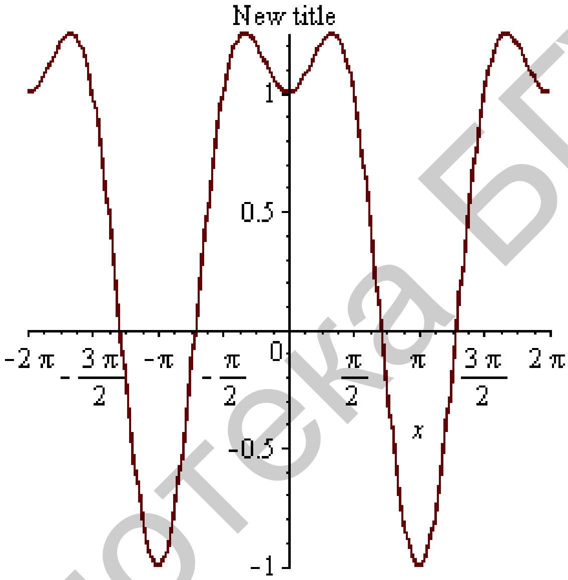
3. Графика и анимация

3.1. Геометрические построения на плоскости

<u>График явно заданной кривой</u>

Самый простой способ для построения графика действительной функции $y = y(x)$, зависящей от одной переменной, − использование команды *plot*(*y*(*x*), *options*), где *options* − параметры (необязательные) управления характеристиками изображения:

> $plot\left(\sin(x)^2 + \cos(x)\right)$



Редактирование полученного чертежа можно осуществить с помощью контекстного меню, которое открывается щелчком правой кнопки мыши после наведения ее указателя на область графики. По умолчанию диапазон изменения независимой переменной (−10…10), а для тригонометрических функций – (–2π…2π). Для установки параметров управления изображением необходимо записать команду в более полном формате: $plot(y(x), options)$, где *options* – параметры настройки. Если их не указывать, то будут использованы установки по умолчанию.

Перечислим значения некоторых дополнительных опций команды *plot*:

1) *axes* = *t* – установка формы координатных осей (значения *t* могут быть *normal* – оси как две пересекающиеся прямые, *boxed* – график в рамке со шкалой, *frame* – оси с центром в левом нижнем углу рисунка, *none* – без осей);

2) *axis*[dir] = *t* – установка параметров цвета, градации других характеристик одной или обеих осей (если dir = 1 – установки касаются оси *Ox*, dir = 2 – оси *Oy*, параметр dir отсутствует – обеих осей).

3) *color* = *t,* или *colour* = *t,* – установка цвета графика (самое простое − придать *t* значение цвета на английском языке, например, *black* – черный, *yellow* – желтый, *red* − красный и т. д.), можно также использовать мощные инструментальные средства пакета *ColorTools* по работе с цветом (см. справочные материалы Maple);

4) *coords* = polar – построить график в полярной системе координат (по умолчанию − декартова), а если добавить еще параллельно опцию *axescoordinates* = polar, то на чертеже будут изображены радиальные лучи;

5) *discont* = *t* – указание разрывов функции на графике, например, для визуализации бесконечного разрыва или построения вертикальных асимптот *t* = *true,* а для выделения точек устранимого разрыва – *t* = [*showremovable*];

6) *font* = [*f*,*style*,*size*] – установка типа шрифта для вывода текста (*f* задает название шрифтов (Times, Courier, Helvetica, Symbol), *style* − стиль шрифта (bold, italic и др.), *size* – размер шрифта в pt);

7) *labels* = [*tx*,*ty*] – надписи по осям координат (*tx* – по оси *Ox, ty* – по оси *Oy*);

8) legend = 'text' – название введенного графика;

9) *linestyle* = *n* – тип линии графика (*solid* − непрерывная, *dot* − точечная, *dash* − пунктирная и т. д.), всего их семь, но вместо названия можно вводить соответствующий номер от 1 до 7 (*n* = 1– непрерывная, значение по умолчанию);

10) *numpoints* = *n* – минимальное количество генерируемых точек для построения графика (по умолчанию *n* = 200), которое в случае необходимости увеличивается автоматически системой;

11) *scaling* = *t* – установка масштаба рисунка (значение *t* = *constrained* – одинаковый масштаб по осям, *unconstrained* (по умолчанию) – график масштабируется по размерам окна);

12) *style* = *t* – вывод графика в виде линии (значение *t* = *polygonoutline* по умолчанию, *line* или *polygon*) или в виде точек (*t* = *point*);

13) *symbol* = *t* – фигура, которой помечают точки графика (*asterisk*, *box*, *circle*, *cross*, *diamond*, *point* и др.);

14) *tickmarks* = [*m*,*n*] – количество числовых меток по оси *Ox* и оси *Oy* соответственно;

15) *thickness* = *n*, где *n* = 0, 1, 2, 3… − толщина линии (по умолчанию *n* = 1);

16) *title* = 'text', где text − заголовок рисунка (текст можно оставлять без кавычек, если он не содержит математических выражений).

Это далеко не полный перечень всех графических опций. Для более детального изучения возможностей системы можно обратиться к справочной системе.

Графики нескольких явно заданных кривых

Для построения нескольких графиков в одной системе координат можно использовать следующий формат команды *plot* и ее параметров: *plot*([$y_1(x)$,…, $y_k(x)$], *options*). Ввод выражений для функций и соответствующие им значения параметров осуществляются как списки. Построим в одной системе координат график функции $y = 2\cos x^3$ и ее производной и укажем с помощью параметра *legend* уравнения кривых для соответствующего цвета линии:

> $plot\left(\left[\cos(x^2), \frac{d}{dx}\cos(x^2)\right], legend = \left['y = \cos(x^2)', 'y = \frac{d}{dx}\cos(x^2)'\right]\right)$

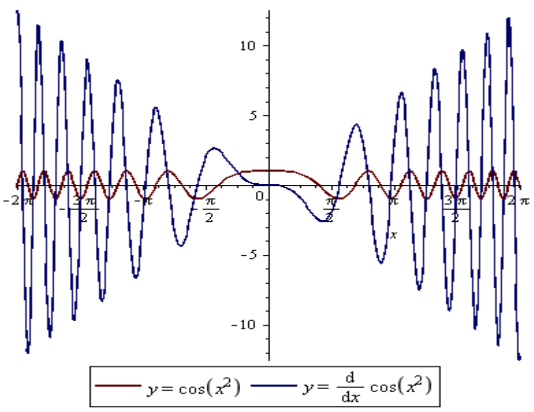


График параметрически заданной кривой

С помощью команды *plot* можно построить график параметрически заданной функции $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t),\ t \in [a,b] \end{cases}$, используя формат *plot*([*x*(*t*),*y*(*t*),*t*=*a*..*b*], *options*):

$> plot([2 \cdot \sinh(t), 3 \cdot \cosh(t), t = -5\,..5])$

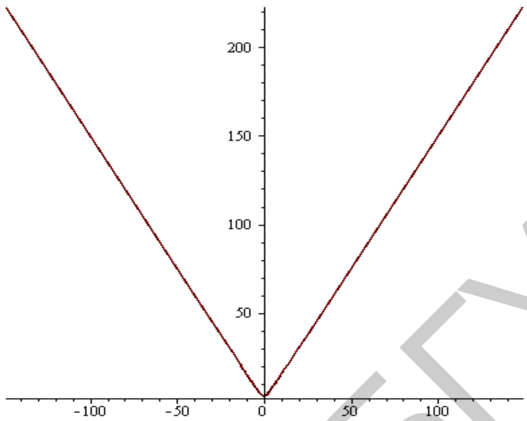


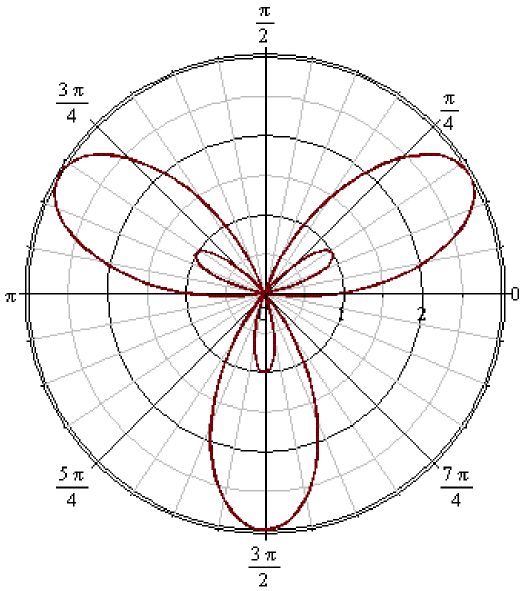
График неявно заданной кривой

Для построения графика неявно заданной в прямоугольных координатах функции $F(x, y) = 0$ может быть использована команда *implicitplot* из графического пакета *plots*. Напомним, что для вызова команды из специализированного пакета есть две формы. Короткая форма состоит из имени и аргументов команды: *implicitplot*(*F*(*x*,*y*)=0, *x*=*a*..*b*, *y*=*c*(*x*)..*d*(*x*),*options*). Ее применение возможно после подключения всего пакета инструкцией *with*(*plots*) или только этой одной команды *with*(*plots*,*implicitplot*). Более длинная форма записи не требует предварительного применения команды *with*(), а именно: *plots*[*implicitplot*](*F*(*x*,*y*)=0, *x*=*a*..*b*, *y*=*c*(*x*)..*d*(*x*),*options*).

График явно заданной кривой в полярных координатах

Выше упоминалась возможность построения графика функции ρ = ρ(φ), явно заданной полярными координатами, с помощью специальных значений параметров команды *plot*. Кроме описанного способа, график можно построить с использованием команды *polarplot* из пакета *plots*: *plots*[*polarplot*](ρ(φ), *options*):

$> plots[polarplot](1 + 2\sin(3 \cdot \varphi), \varphi = 0\,..4 \cdot \mathrm{Pi})$

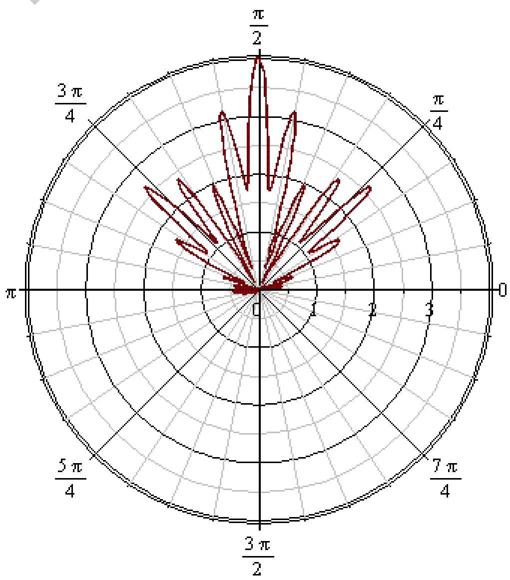


Диапазон изменения полярного угла по умолчанию изменяется от 0 до 2π. Подробное описание возможных значений дополнительных параметров дано в справочной системе с примерами их использования.

<u>График параметрически заданной кривой в полярных координатах</u>

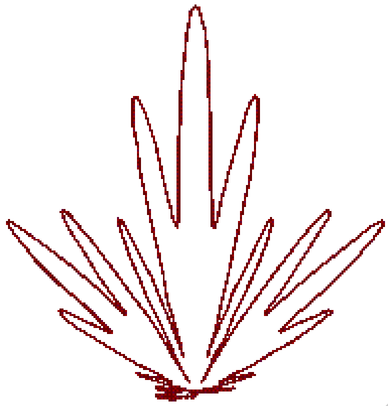
Формат команды для построения графика функции $\begin{cases} \rho = \rho(t), \\ \varphi = \varphi(t), t = a..b \end{cases}$ аналогичен команде построения параметрически заданной функции в декартовых координатах: $plots[polarplot]([\,\rho(t), \varphi(t), t = a..b\,], options)$:

$$> \; plots[polarplot]\left(\left[\frac{1}{1+\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^4}\cdot(2-\sin(7\cdot t)-\cos(30\cdot t)), t, t=0..4\,\pi\right]\right)$$



Если убрать оси, то можно использовать эти команды для создания разнообразных рисунков:

$$> \ plots[polarplot]\left(\left[\frac{1}{1+\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^4}\cdot(2-\sin(7\cdot t)-\cos(30\cdot t)), t, t=0..4\pi\right], axes=none\right)$$



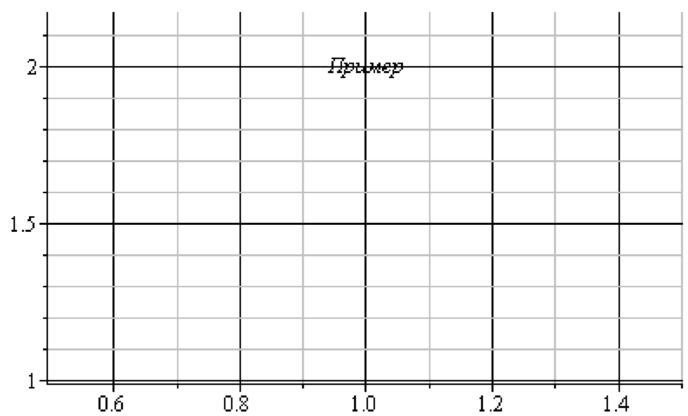
<u>График множества точек</u>

Для построения множества точек в пакете *plots* есть команда *pointplot*($[[x_1,y_1],[x_2,y_2],\ldots,[x_k,y_k]]$, *options*). По умолчанию точки не соединяются линией. Для использования дополнительных параметров управления качеством изображения в справочной системе есть полное описание значений опций, а в самой системе много интерактивных средств для этого (контекстное меню, специальные пакеты, например, *CurveFitting*).

<u>Текстовые комментарии на изображении</u>

В пакете *plots* имеется команда *textplot* для вывода текстовых комментариев на рисунок: *textplot*([*x*,*y*,'text'], *options*), где *x*, *y* – координаты точки, по которой центрируется надпись 'text'. Например,

$$> \ plots[textplot]([1, 2, \textit{Пример}])$$



Для управления изображением существует много параметров, подробно описанных в справочной системе.

Несколько графических объектов на одном рисунке

Часто бывает необходимо совместить на одном рисунке несколько графических объектов, полученных при помощи различных команд. Для этого результат действия команды присваивается некоторой переменной в инертной форме:

> *p*:=*plot*(…):*t*:=*textplot*(…):*imp*:=*implicitplot*(…):*pol*:=*polarplot*(…): …

Затем для вывода графических объектов на экран необходимо выполнить команду *display*(…) из пакета *plots*:

> *with*(*plots*): *display*([*p*,*t*,*imp*,*pol*…], *options*).

Двухмерная область, заданная неравенствами

Если необходимо построить двухмерную область, заданную системой неравенств $f_1(x,y)>c_1, f_2(x,y)>c_2,..., f_n(x,y)>c_n$, то для этого можно использовать команду *inequal* из пакета *plots*. В команде *inequal*({$f_1(x,y)>c_1,\ldots,f_n(x,y)>c_n$}, *x* = *a*..*b*, *y* = *c*..*d*, *options*) в фигурных скобках указывается система неравенств, определяющих область, затем диапазон изменения переменных и дополнительные параметры. Параметры регулируют цвета открытых и закрытых границ, цвета внешней и внутренней областей, а также толщину линий границ, например: *optionsfeasible* = [*color*=*red*] – установка цвета внутренней области; *optionsexcluded* = [*color* = *yellow*] – установка цвета внешней области; *optionsopen* = [*color* = *blue*, *thickness* = 2] – установка цвета и толщины линии открытой границы; *optionsclosed* = [*color* = *green*,*thickness* = 3] – установка цвета и толщины линии закрытой границы.

3.2. Геометрические построения в пространстве

<u>График заданной явно поверхности</u>

График функции $z = f(x, y)$ можно изобразить, используя команду *plot3d*(*f*(*x*,*y*), *x* = *a*..*b*, *y* = *c*..*d*, *options*). Параметры этой команды частично совпадают с параметрами команды *plot*. К часто используемым параметрам команды *plot3d* относится *light* = [*angl*1,*angl*2, *c*1, *c*2, c3] – задание подсветки поверхности, создаваемой источником света из точки со сферическими координатами (*angl1, angl2*). Цвет определяется долями красного (*c*1), зеленого (*c*2) и синего (*c*3) цветов, которые находятся в интервале [0,1]. Используя контекстное меню, можно регулировать стиль изображения, качество и тон заполнителя, линии уровня и т. д.

<u>Графики нескольких явно заданных поверхностей</u>

Для построения нескольких графиков в одной системе координат можно использовать следующий формат команды *plot3d* и ее параметров: *plot3d*([$z_1(x,y)$,…, $z_k(x,y)$], *x*=*a*..*b*,*y*=*c*..*d*, *options*). Ввод выражений для функций и значения параметров осуществляется как список.

$plot3d([\sin(2 \cdot x), x + y], x = -\pi..\pi, y = -\pi..\pi)$

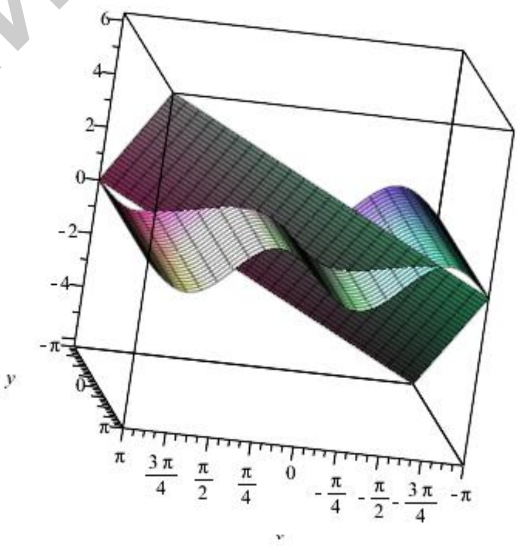


График заданной параметрически поверхности

Если требуется построить поверхность, заданную параметрически уравнениями $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, то эти функции перечисляются в квадратных скобках в команде: *plot3d*([$x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$], $u = a..b$, $v = c..d$).

График неявно заданной поверхности

Трехмерный график поверхности, заданной неявно уравнением $F(x,y,z)=0$, строится с помощью команды пакета *plots*: *implicitplot3d*($F(x,y,z) = 0$, $x = a..b$, $y = c..d$, $z = e..f$), где указывается уравнение поверхности $F(x,y,z)=0$ и размеры рисунка по координатным осям.

График пространственных кривых

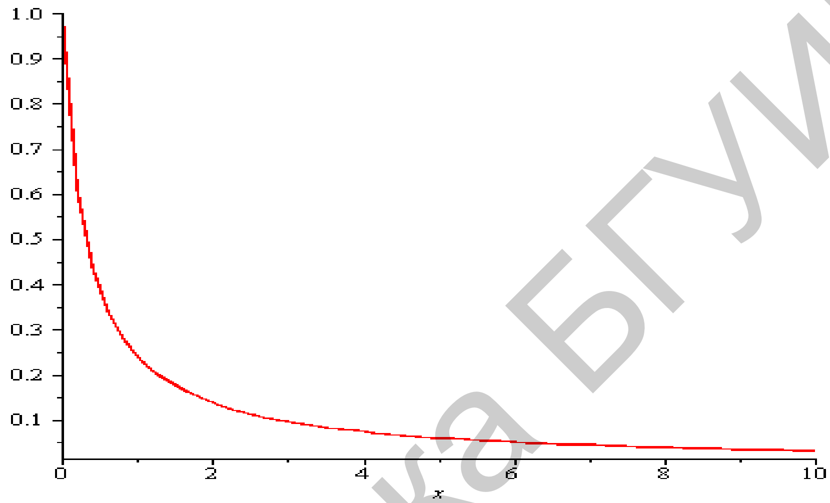
В пакете *plots* имеется команда *spacecurve* для построения пространственной кривой, заданной параметрически: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. Ее компактный формат *spacecurve*([$x(t)$,$y(t)$,$z(t)$],$t = a..b$, *options*).

3.3. Анимация

Maple позволяет выводить на экран движущиеся изображения с помощью команд *animate* (для двухмерного случая) и *animate3d* (для трехмерного случая) из пакета *plots*. Имеется в виду следующее: если некоторая функция зависит от дополнительного параметра (например времени), эти команды позволяют сформировать совокупность кадров в диапазоне его изменения, а затем последовательно их отобразить друг за другом с определенной частотой. Для проигрывания результата нужно выделить график, который появится после выполнения команды, и воспользоваться кнопками контекстной панели анимации или правой кнопкой мыши для вызова контекстного меню. Функции кнопок можно уточнить по всплывающим подсказкам, которые появляются при наведении на них указателя мыши.

Наиболее простой вариант создания объекта двухмерной анимации – использование команды со следующим синтаксисом: *animate*($f(x,t)$, $x=x_1..\ x_2$, $t=t_1..\ t_2$, *options*), где $f(x,t)$ – аналитическое выражение, явно задающее функцию $y=f(x,t)$, которая зависит от переменной x и параметра t; $x=x_1..\ x_2$ – диапазон изменения переменной x; $t=t_1..\ t_2$ – диапазон изменения параметра t; *options* – дополнительные опции команды. Рассмотрим в качестве примера анимационное отображение функции $y=\dfrac{1}{1+tx}$ в зависимости от коэффициента при x:

$> with(plots) : expr := \dfrac{1}{1+t\cdot x} : animate(expr, x=0..10, t=1..5)$



В области вывода появился график функции при $t = 1$ (первое значение параметра из заданного промежутка), который нужно выделить с помощью мыши для вызова контекстной панели средств анимации. По умолчанию будет показано динамическое изображение 16 кадров. Их число можно изменить с помощью опции *frames*.

Можно создавать анимацию также для параметрически заданной кривой, для кривой в полярной системе координат, для множества точек, изменяющихся по определенному правилу. Ниже приведены примеры команд для разных случаев (выполните команды как упражнения и «проиграйте» результат):

$animate([a\cdot\cos(t), \sin(t), t=0..2\cdot\mathrm{Pi}], a=0..2, frames=24);$

$animate\left(polarplot, [3\cdot\cos(\mathrm{phi}), \mathrm{phi}=0..t], t=0..\dfrac{\mathrm{Pi}}{2}\right);$

#Моделирование движения двух объектов по разным кривым в одной системе координат

$ball1 := \mathbf{proc}(x, y)\ plots[pointplot]([[x, y]], color = red, symbol = solidcircle, symbolsize = 30)\ \mathbf{end\ proc}:$

$ball2 := \mathbf{proc}(x, y)\ plots[pointplot]([[x, y]], color = blue, symbol = solidcircle, symbolsize = 30)\ \mathbf{end\ proc}:$

$wave1 := plot(\sin(x), x = 0\,..4\,\pi) : wave2 := plot(\cos(x), x = 0\,..4\,\pi) :$

$a1 := animate(ball1, [t, \sin(t)], t = 0\,..4\,\pi, background = wave1, scaling = constrained) :$

$a2 := animate(ball2, [t, \cos(2\cdot t)], t = 0\,..4\,\pi, background = wave2, scaling = constrained) :$

$display(a1, a2);$

В пространстве анимацию можно создать как с использованием команды *animate*() со специальным синтаксисом, так и с помощью *animate3d*():

$$animate\left(plot3d, \left[t\cdot\left(2\cdot x^2 + y^2\right), x = -2\,..2, y = -2\,..2\right], t = -2\,..2\right)$$

$$animate3d\left(x^{2\cdot t} + t\cdot y, x = -3\,..3, y = -3\,..3, t = 0\,..3\right)$$

Анимационные команды могут одновременно отображать изменение нескольких функций. Все они при этом должны зависеть от одних и тех же независимых аргументов и одного параметра.

Проследить в динамике за построением графика кривой можно также, используя команду *animatecurve*() этого же пакета:

$$animatecurve\left(2\cos^3\left(10\,x + \frac{\mathrm{Pi}}{4}\right), x = -\frac{\pi}{2}\,..\frac{\pi}{2}, frames = 20, scaling = unconstrained\right).$$

Упражнения

1. Выполните все примеры разд. 3. Измените характеристики полученных графических объектов с помощью контекстной панели инструментов и контекстного меню. Задайте дополнительные опции команд, используя при необходимости справочные материалы Maple.

2. Исследуйте изменение графика равносторонней гиперболы в зависимости от значений полуосей.

Указание. Можете использовать, например, такую команду:

$$animate\left(implicitplot, \left[x^2 - y^2 = t, x = -3\,..3, y = -3\,..3\right], t = 1\,..3\right)$$

3. Проследите движение какой-либо кривой по поверхности $z = 1 - x^2 + 2y^2$.

Указание. Можете использовать, например, такие инструкции:

$B := plot3d\left(1 - x^2 + 2\,y^2, x = -1\,..1, y = -1\,..1\right)$:

$animate\left(spacecurve, \left[\left[t, t, 1 + t^2\right], t = -1\,..A, color = red\right], A = -1\,..1, frames = 20, background = B\right)$

4. Математический анализ

В Maple для некоторых математических операций существует по две команды: одна прямого, а другая – отложенного (инертного) исполнения. Имена функций для этих команд состоят из одинаковых букв, за исключением первой: команды прямого исполнения начинаются со строчной буквы, а команды отложенного исполнения – с прописной. После обращения к команде отложенного действия математические операции (предел, производная, интеграл и т. д.) выводятся на экран в виде стандартной аналитической записи, и вычисление в этом случае сразу не производится. Команда прямого исполнения выдает результат немедленно.

4.1. Функции и способы их задания

Рассмотрим некоторые подходы к определению математических функций в Maple.

1. Задание функции с помощью оператора присваивания <:=>, когда некоторому выражению, зависящему от одной или нескольких переменных, присваивается имя, например:

> $f := x^3 + 2\cdot x^2 + 1$

$$f := x^3 + 2\,x^2 + 1$$

> $f1 := \sin(x) + \cos(y)$

$$f1 := \sin(x) + \cos(y)$$

При этом способе задания для вычисления значений функции в конкретных точках или замены переменной алгебраическим выражением требуется использование команд подстановки *subs*(x_1=*a*,…,x_n=*b*, *имя_функции*):

> $subs(x = 2, f)$

$$17$$

> $subs(x = \tan(t), f)$

$$\tan(t)^3 + 2\tan(t)^2 + 1$$

> *evalf*(*subs*($x = 1.0, y = 2.0, f1$))

$$0.4253241483$$

2. Определение функции с помощью оператора, который ставит в соответствие набору переменных ($x_1,\ldots,x_n$) выражение *expr*, от них зависящее. Это соответствие можно задать с помощью стрелки, которая вводится с помощью последовательного нажатия клавиш <-> и <>> или выбора из палитры *Arrows*:

> *restart*;

> $f := (x, y) \rightarrow x^2 + y$

$$f := (x, y) \rightarrow x^2 + y$$

При таком задании функции ее значение при конкретных наборах переменных можно получить привычным в математике способом:

> $f(a \cdot c, b \cdot d)$

$$a^2 c^2 + b\, d$$

3. Преобразовать выражение в функциональный оператор можно с помощью команды *unapply*(*expr*,$x_1,\ldots,x_n$):

> $g := unapply(x^2 + y, x, y)$

$$g := (x, y) \rightarrow x^2 + y$$

> $g(2, 4)$

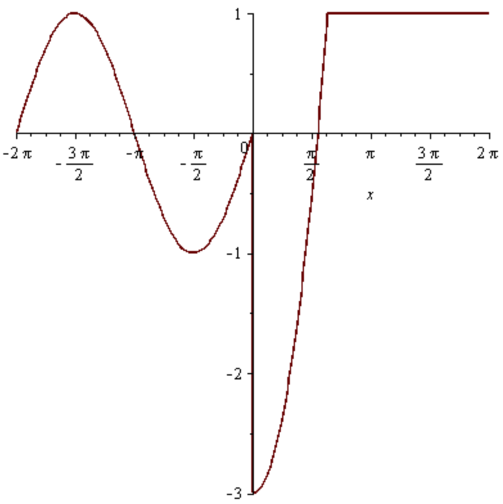
$$8$$

4. Для ввода кусочно-непрерывной функции можно использовать оператор условного перехода *if* или команду *piecewise*(*cond*_1,*expr*_1,…, *cond_n*,*expr_n*,*expr*), где *cond_i* задают условия, при котором функция определяется как *expr_i*, *expr* – выражение (по умолчанию 0) для задания функции на оставшейся части области определения. Приведем пример задания такой функции и построения графика:

>
#ввод кусочно-непрерывной функции
restart; *piecewise*($x < 0, \sin(x), x \geq 0$ **and** $x < 2, x^2 - 3, 1$);

$$\begin{cases} \sin(x) & x < 0 \\ x^2 - 3 & 0 \leq x \textbf{ and } x < 2 \\ 1 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

> *#построение графика заданной функции*
$f := x \rightarrow piecewise\left(x < 0, \sin(x), x \geq 0 \ \mathbf{and}\ x < 2, x^2 - 3, 1\right) : plot(f(x))$



Если необходимо в таком формате определить некоторые пороговые функции, то можно использовать команду *convert*:

> $convert\left(|1 - 2|x| - x^2|, piecewise\right)$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 1 & x \leq 1 - \sqrt{2} \\ -x^2 + 2x + 1 & x < 0 \\ -x^2 - 2x + 1 & x < \sqrt{2} - 1 \\ x^2 + 2x - 1 & \sqrt{2} - 1 \leq x \end{cases}$$

> $convert(\operatorname{signum}(x - 1), piecewise)$

$$\begin{cases} -1 & x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$$

> $convert(x \cdot \operatorname{Heaviside}(x + 1), piecewise, x)$

$$\begin{cases} 0 & x < -1 \\ undefined & x = -1 \\ x & -1 < x \end{cases}$$

5. Удобно также для аналитического задания математической функции использовать процедуру программирования:

Имя_функции:=**proc**(*arguments*) *expr* **end proc**;

Приведем пример:

> $z := \mathbf{proc}(x, y)\ x^2 + y^2\ \mathbf{end\ proc};$

$$z := \mathbf{proc}(x, y)\ \ x\verb|^|2 + y\verb|^|2\ \ \mathbf{end\ proc}$$

> $z(2x, 3y)$

$$4x^2 + 9y^2$$

4.2. Пределы и производные

Вычисление пределов

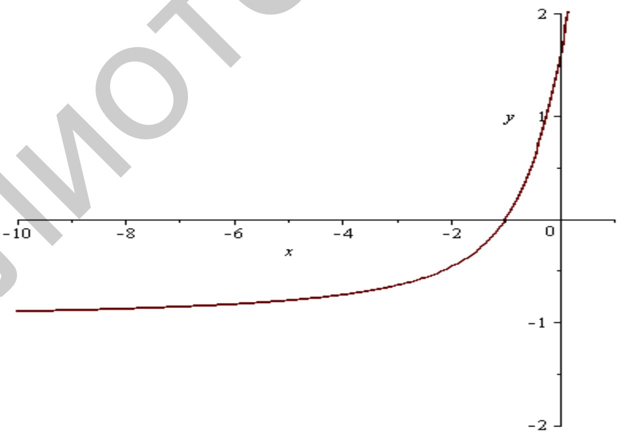
Для вычисления предела $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ имеются две команды: прямого исполнения – *limit*(*f*(*x*), *x*=*a*, *options*) и отложенного – *Limit*(*f*(*x*), *x*=*a*,*options*). Их обязательными аргументами являются аналитическое выражение *f*(*x*) для задания функции и значение точки *a*, в которой вычисляется предел. К числу необязательных параметров *options* относятся значения для поиска односторонних пределов (*left* – слева, *right* – справа), а также для указания типа переменной (*real* – действительная, *complex* – комплексная).

С помощью этих двух команд принято записывать математические выкладки в стандартном аналитическом виде, например:

> $Limit\left((x+1)\cdot\left(\frac{\mathrm{Pi}}{2} + \arctan(x)\right), x = -\infty \right) = limit\left((x+1)\cdot\left(\frac{\mathrm{Pi}}{2} + \arctan(x)\right), x = -\infty \right)$

$$\lim_{x \to -\infty} (x+1)\left(\frac{1}{2}\pi + \arctan(x)\right) = -1$$

> $plot\left((x+1)\cdot\left(\frac{\mathrm{Pi}}{2} + \arctan(x)\right), x = -10\,..1, y = -2\,..2 \right)$ *# сравните с графиком функции*



> $g := piecewise\left(x < 3, x^2 - 6, 3 \le x, 2x - 1\right)$

$$g := \begin{cases} x^2 - 6 & x < 3 \\ 2x - 1 & 3 \le x \end{cases}$$

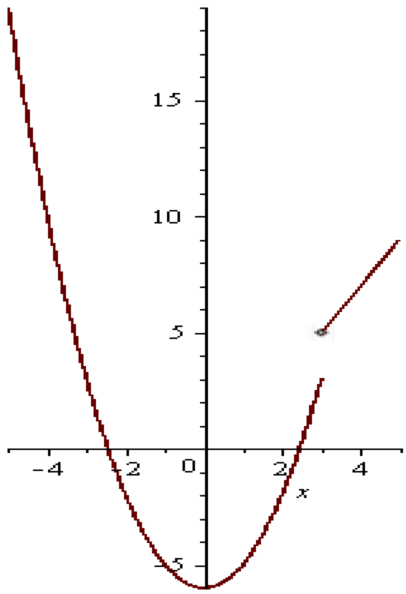
> $Limit(g, x = 3, left) = limit(g, x = 3, left)$

$$\lim_{x \to 3^-} \left(\begin{cases} x^2 - 6 & x < 3 \\ 2x - 1 & x \ge 3 \end{cases} \right) = 3$$

> $Limit(g, x = 3, right) = limit(g, x = 3, right)$

$$\lim_{x \to 3^+} \left(\begin{cases} x^2 - 6 & x < 3 \\ 2x - 1 & x \ge 3 \end{cases} \right) = 5$$

> $plot(g, x=-5\,..5, discont=[showremovable])$# *сравните с графиком функции*



Для исследования функции на непрерывность на заданном интервале (в том числе и бесконечном) можно использовать команду *iscont*(), которая возвращает логическое значение *true* в случае непрерывности, и *false* – в противном случае. Если промежуток, на котором устанавливается непрерывность, является замкнутым отрезком, то к аргументам команды следует добавить необязательный параметр '*closed* ':

> $iscont\left(\frac{1}{x}, x=-infinity\,..infinity\right)$

$$false$$

$iscont\left(\frac{1}{x}, x=0\,..1, 'closed'\right)$

$$false$$

$iscont\left(\frac{1}{x}, x=0\,..1\right)$

$$true$$

Для определения значений переменных, где нарушается непрерывность функции, можно использовать команду *discount*():

> $discont\left(\frac{1}{x^2-7x+10}, x\right)$

$$\{2, 5\}$$

$discont\left(\frac{1}{\sin(x)}, x\right)$

$$\{\pi\_Z1\sim\}$$

Вычисление производных

Для вычисления производной $f'(x)$ функции $y = f(x)$ в Maple имеются две команды: прямого исполнения – *diff*(*f*, *x*) и отложенного исполнения – *Diff*(*f*, *x*). Их обязательными аргументами являются аналитическое выражение *f*(*x*) для задания функции и переменная, по которой проводится дифференцирование. После выполнения дифференцирования полученное выражение можно упростить, используя, например, команды *simplify*, *factor*, *combine* или *expand*:

$$> Diff\left(\frac{(2-x^4)}{1+x}, x\right) = diff\left(\frac{(2-x^4)}{1+x}, x\right);$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-x^4+2}{x+1}\right) = -\frac{4x^3}{x+1} - \frac{-x^4+2}{(x+1)^2}$$

$$> simplify\left(-\frac{4x^3}{x+1} - \frac{-x^4+2}{(x+1)^2}\right)$$

$$-\frac{3x^4+4x^3+2}{(x+1)^2}$$

Для вычисления производных старших порядков следует указать в параметрах команды *x*$*n*, где *n* – порядок производной; например:

$$> Diff\left(\frac{(2-x^4)}{1+x}, x\$3\right) = diff\left(\frac{(2-x^4)}{1+x}, x\$3\right);$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{-x^4+2}{x+1}\right) = -\frac{24x}{x+1} + \frac{36x^2}{(x+1)^2} - \frac{24x^3}{(x+1)^3} - \frac{6(-x^4+2)}{(x+1)^4}$$

$$> simplify\left(-\frac{24x}{x+1} + \frac{36x^2}{(x+1)^2} - \frac{24x^3}{(x+1)^3} - \frac{6(-x^4+2)}{(x+1)^4}\right)$$

$$-\frac{6(x^4+4x^3+6x^2+4x+2)}{(x+1)^4}.$$

В следующем примере сравните результаты, которые получаются в результате применения разных команд упрощения к преобразованию производной четвертого порядка:

$$> Diff(\cos^2(3\cdot x), x\$4) = diff(\cos^2(3\cdot x), x\$4);\ simplify(\%);\ combine(\%);$$

$$\frac{d^4}{dx^4}(\cos(3x)^2) = -648\sin(3x)^2 + 648\cos(3x)^2$$

$$\frac{d^4}{dx^4}(\cos(3x)^2) = 1296\cos(3x)^2 - 648$$

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{1}{2}\cos(6x) + \frac{1}{2}\right) = 648\cos(6x)$$

Команду *diff* можно применить и к функции нескольких переменных для нахождения частных производных. Для этого используется следующий ее формат: *diff*(*f*,$x_1\$n_1$,…, $x_k\$n_k$). Упростим результат нахождения смешанной производной шестого порядка:

> $normal\left(diff\left(\ln\left(x\cdot y^2 - z^3\right), x, y\$2, z\$3\right)\right)$

$$\frac{12\left(3x^4y^8 + 182x^3y^6z^3 + 609x^2y^4z^6 + 276xy^2z^9 + 10z^{12}\right)}{\left(xy^2 - z^3\right)^6}$$

Дифференциальный оператор

Для определения дифференциального оператора функции $y = f(x)$ используется команда *D*(*f*). Например:

> $\mathrm{D}(\cos)$

$$-\sin$$

Тогда для вычисления производной в точке можно применить привычную запись:

> $\mathrm{D}(\cos)\left(\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)$

$$-1$$

Оператор дифференцирования применяется к функциональным операторам:

> $f := x \to \ln\left(x^2 + 1\right); dfx := \mathrm{D}(f);$

$$f := x \to \ln\left(x^2 + 1\right)$$

$$dfx := x \to \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Для производной порядка *n* можно использовать привычную математическую запись $\mathrm{D}^{(n)}(f)$:

> $\mathrm{D}^{(3)}(\sin)$

$$-\cos$$

> $\mathrm{D}^{(n)}(\sin)$

$$z \to \sin\left(z + \frac{1}{2}n\pi\right)$$

Экстремум функции

Для нахождения экстремума функции на заданном промежутке используются команды *minimize*(*expr*,*x*=*a*..*b*) и *maximize*(*expr*,*x*=*a*..*b*). По умолчанию, если не указан диапазон изменения переменной, рассматривается область определения функции, заданной с помощью выражения *expr*. Для получения точки минимума или максимума на отрезке добавляется параметр команды *location*:

> $minimize(\sin(x))$ *#минимальное значение функции на всей области определения*

$$-1$$

> $minimize(\sin(x), location)$ *#точки, в которых достигается минимум*

$$-1, \left\{\left[\left\{x = -\frac{1}{2}\pi + 2\pi\_Z0\right\}, -1\right]\right\}$$

> $maximize(x^2 - 4x - 10, x = 1..5, location)$
> *#максимальное значение функции на отрезке и точка максимума*

$$-5, \{[\{x = 5\}, -5]\}$$

> $minimize(x^2 - 4x - 10, location)$

$$-14, \{[\{x = 2\}, -14]\}$$

Экстремальные значения функции нескольких переменных можно определить командой *extrema*(*expr*,{*cond*_1,…,*cond*_*k*},{x_1,…,x_n}). Здесь *expr* – выражение, определяющее функцию *n* переменных $x_1,\ldots,x_n$, второй аргумент – множество ограничений на переменные при нахождении условного экстремума. Если таких ограничений нет, вводится просто пара пустых фигурных скобок. В приведенном ниже примере находится глобальный экстремум функции двух переменных, а затем с использованием необходимого условия экстремума (частные производные равны нулю) находятся точки, в которых он достигается:

> $extrema(x^3 + 3x\cdot y^2 - 12\cdot x, \{\}, \{x, y\})$

$$\{-16, 16\}$$

> *#точка минимума*
> $solve(\{diff(x^3 + 3x\cdot y^2 - 12\cdot x, x) = 0, diff(x^3 + 3x\cdot y^2 - 12\cdot x, y) = 0, x^3 + 3x\cdot y^2 - 12\cdot x = -16\});$

$$\{x = 2, y = 0\}$$

> *#точка максимума*
> $solve(\{diff(x^3 + 3x\cdot y^2 - 12\cdot x, x) = 0, diff(x^3 + 3x\cdot y^2 - 12\cdot x, y) = 0, x^3 + 3x\cdot y^2 - 12\cdot x = 16\})$

$$\{x = -2, y = 0\}$$

Аналогично можно решить задачу на условный экстремум:

> $extrema(x\cdot y\cdot z, \{x + y + z = 0, x\cdot y + y\cdot z + x\cdot z = -3\}, \{x, y, z\})$

$$\{-2, 2\}$$

Если добавить необязательный параметр 's' в аргументы команды, то выведутся точки экстремума в виде множества:

> $extrema(x \cdot y \cdot z, \{x + y + z = 0, x \cdot y + y \cdot z + x \cdot z = -3\}, \{x, y, z\}, 's'); s;$

$$\{-2, 2\}$$

$$\{\{x = -2, y = 1, z = 1\}, \{x = -1, y = -1, z = 2\}, \{x = -1, y = 2, z = -1\}, \{x = 1, y = -2, z = 1\}, \{x = 1, y = 1, z = -2\}, \{x = 2, y = -1, z = -1\}\}$$

Задача нахождения точек минимума и максимума будет равносильна решению системы трех уравнений:

> *#точки условного минимума* $solve(\{x \cdot y \cdot z = -2, x + y + z = 0, x \cdot y + y \cdot z + x \cdot z = -3\})$

$$\{x = 1, y = -2, z = 1\}, \{x = 1, y = 1, z = -2\}, \{x = -2, y = 1, z = 1\}$$

> *#точки условного максимума* $solve(\{x \cdot y \cdot z = 2, x + y + z = 0, x \cdot y + y \cdot z + x \cdot z = -3\})$

$$\{x = -1, y = 2, z = -1\}, \{x = 2, y = -1, z = -1\}, \{x = -1, y = -1, z = 2\}$$

4.3. Интегралы

Аналитическое интегрирование

Для нахождения неопределенного интеграла $\int f(x)dx$ можно использовать две команды: прямого исполнения – *int*(*f*(*x*), *x*) и отложенного – *Int*(*f*(*x*), *x*). Их обязательными аргументами являются аналитическое выражение *f*(*x*) для задания подынтегральной функции и переменная интегрирования *x*.

Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ в командах *int* и *Int* добавляются пределы интегрирования, например:

> $Int\left((1 + \sin(x))^2, x = 0..\frac{Pi}{2}\right) = int\left((1 + \sin(x))^2, x = 0..\frac{Pi}{2}\right)$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 + \sin(x))^2 \, dx = 2 + \frac{3}{4}\pi$$

Несобственные интегралы

Для исследования сходимости несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования в параметрах команды *int* необходимо указывать соответствующий диапазон изменения переменной интегрирования, например, *x*=0..+*infinity*.

> $Int\left(\frac{\ln(x)}{x^3}, x = 2..+\infty\right) = int\left(\frac{\ln(x)}{x^3}, x = 2..+\infty\right)$

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx = \frac{1}{8}\ln(2) + \frac{1}{16}$$

Если интеграл не сходится к конечному значению, то в ответе будет ∞:

$$> \ Int\left(\frac{1}{x\cdot\ln(x)}, x = 2..+\infty\right) = int\left(\frac{1}{x\cdot\ln(x)}, x = 2..+\infty\right)$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \infty$$

Для исследования несобственных интегралов от неограниченных функций в команде интегрирования нужно добавить параметр *continuous*. В этом случае Maple будет игнорировать любые возможные разрывы подынтегральной функции в отрезке интегрирования. Сравните:

$$> \ Int\left(\frac{1}{(x-1)^2}, x = 0..2\right) = int\left(\frac{1}{(x-1)^2}, x = 0..2\right)$$

$$\int_0^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \infty$$

$$> \ Int\left(\frac{1}{(x-1)^2}, x = 0..2\right) = int\left(\frac{1}{(x-1)^2}, x = 0..2, continuous\right)$$

$$\int_0^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = -2$$

Если функция не определена хотя бы в одной точке отрезка интегрирования, то ответом будет *undefined*:

$$> \ Int\left(\frac{1}{x\cdot\ln(x)}, x = 0..2\right) = int\left(\frac{1}{x\cdot\ln(x)}, x = 0..2\right)$$

$$\int_0^{2} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = undefined$$

$$> \ Int\left(\frac{1}{x}, x = -2..3\right) = int\left(\frac{1}{x}, x = -2..3\right)$$

$$\int_{-2}^{3} \frac{1}{x}\,dx = undefined$$

Для нахождения приближенного числового значения интеграла можно, как и ранее, воспользоваться *evalf*-функцией: *evalf*(*int*(*f*(*x*), *x*=*a*..*b*), *n*), где *n* – количество значащих цифр результата вычислений.

Интегралы, зависящие от параметра

Если требуется вычислить интеграл, зависящий от параметра, то часто его значение может зависеть от знака этого параметра или каких-либо других ограничений. Рассмотрим в качестве примера интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$, который сходится при $a > 1$ и расходится при $a \le 1$. Если ввести непосредственно команду интегрирования, то получим следующий результат:

$$> Int\left(\frac{1}{x^a}, x = 1..+\infty\right) = int\left(\frac{1}{x^a}, x = 1..+\infty\right)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x^{-a+1}-1}{a-1}\right)$$

$$> \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x^{-a+1}-1}{a-1}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x^{-a+1}-1}{a-1}\right)$$

Это еще не тот ответ, который нужен. Очевидно, для получения явного аналитического результата вычислений следует сделать какие-либо предположения о значении параметра *a*, то есть наложить на него ограничения в виде неравенств. Это можно сделать при помощи команды *assume*(*ineq*1), где *ineq*1 – простейшее неравенство относительно параметра. Если нужно использовать двойное неравенство, то дополнительные ограничения вводятся с помощью команды *additionally*(*ineq*2), где *ineq*2 – второе неравенство, ограничивающее значение параметра с другой стороны. После наложения ограничений на параметр Maple добавляет к его имени символ (~). Например, параметр *a*, на который были наложены некоторые ограничения, в строке вывода будет иметь вид *a*~. Для описания наложенных ограничений параметра *a* можно использовать команду *about*(*a*). Например, наложить ограничения на параметр *a* такие, что $1 \le a < 5$, а затем убедиться в этом назначении, можно следующим образом:

$$> assume(a \ge 1) : additionally(a < 5) : about(a);$$

```
Originally a, renamed a~:
  is assumed to be: RealRange(1,Open(5))
```

Вернемся к вычислению интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$, присвоив параметру значения, большие 1:

> $assume(a > 1);\ int\left(\frac{1}{x^a}, x = 1\,..+\infty\right);$

$$\frac{1}{a\sim - 1}$$

Основные методы интегрирования

Для нахождения интегралов можно использовать методы замены переменной и интегрирование по частям с помощью команд пакета *IntegrationTools* соответственно *Change* и *Parts*. Если в интеграле требуется сделать замену переменных t=h(x), то параметры команды замены переменных такие: *Change*(*h*(*x*)=*t*, *Int*(*f*(*x*), *x*), *t*), где *t* – новая переменная. Команда интегрирования по частям: *Parts*(*Int*(*f*(*x*), *x*), *u*(*x*)), где *u*(*x*) – функция, производную от которой предстоит вычислить по формуле интегрирования по частям.

Пошаговое интегрирование

В Maple имеется пакет *Student*, предназначенный для обучения математике. Он содержит набор команд, разбитых по темам и предназначенных для выполнения расчетов шаг за шагом так, чтобы была понятна последовательность действий, приводящих к результату. Их можно использовать непосредственно, подключив нужные библиотеки, или вызвать из главного меню вкладку **Tools →** **Tutors →…** с различными графическими интерактивными приложениями для решения нужных задач.

Численное интегрирование

Численное интегрирование можно выполнить командой *evalf*(*int*(*f*(*x*), *x*=*a*..*b*),*n*), где *n* – точность вычислений (число значащих цифр в результате):

> $evalf\left(int\left(\frac{x}{x^2+1}, x = 1.2\,..2.3\right), 3\right)$

$$0.473$$

Кроме этого, можно использовать в команде *int* формат с плавающей точкой при вводе чисел:

$> int\left(\dfrac{x}{x^2+1}, x = 1.2..2.3\right)$ *#для вычисления используется численный метод*

$$0.4734815157$$

Для выбора аналитического или численного способа интегрирования в параметрах команды *int* предусмотрена также опция *numeric* со значениями *false* или *true* соответственно. Сравните:

$> int\left(\dfrac{x}{x^2+1}, x = 1.2..2.3, numeric = false\right)$ *#аналитическое (точное) решение*

$$-\frac{1}{2}\ln(61)+\frac{1}{2}\ln(17)+\frac{1}{2}\ln(37)-\ln(2)$$

$> int\left(\dfrac{x}{x^2+1}, x = 1..2, numeric = true\right)$

$$0.4581453659$$

<u>Создание процедур в Maple</u>

Как ранее упоминалось, в Maple имеется возможность создавать собственные процедуры. Процедура начинается с заголовка, который состоит из имени (его пользователь определяет сам), оператора присваивания <:=> и служебного слова **proc**, после которого в круглых скобках через запятую указываются формальные параметры процедуры.

Во избежание неполадок работы процедуры рекомендуется в строке ее заголовка описать переменные, которые будут использоваться только внутри тела процедуры (локальные переменные). Для этого используется служебное слово **local**, после которого через запятую перечисляются переменные, наделенные этим качеством.

После заголовка идет основное тело процедуры, состоящее из составленных пользователем команд, причем последняя команда будет выводить окончательный результат выполнения процедуры (или для этих целей может быть использована команда **return**). Заканчивается текст процедуры служебным словосочетанием **end proc**. Общий вид процедуры (стандартный синтаксис):

> *name*:=**proc**(*var1*, *var2*, …) **local** *vloc1*, *vloc2*,…;

> *com1*;

> *com2*;

……………

> *comn*;

> **end proc**;

Порядок обращения к процедуре такой: *name*(*v1*,*v2*,…), где *v1*,*v2*,… − значения формальных аргументов процедуры.

Приведем простой пример создания процедуры численного интегрирования с помощью формулы прямоугольников. В качестве формальных параметров возьмем подынтегральную функцию, левый, правый конец промежутка интегрирования и количество *n* частичных интервалов его разбиения. Обратимся к процедуре с разными значениями для *n* и сравним полученные результаты с «точным» решением:

```
> intn := proc(f, a, b, n) local xl, sm, step;# формула прямоугольников
    step := (b - a)/n;
    sm := 0;
    for xl from a + step/2 to b by step   do
        sm := sm + f(xl)·step;
    end do;
    return sm;
  end proc:
```

> $evalf\left(intn\left(x \to \frac{1}{x^2-1}, 2, 3, 5\right)\right)$;*# разбиение на 5 интервалов*

$$0.2021533668$$

> $evalf\left(intn\left(x \to \frac{1}{x^2-1}, 2, 3, 10\right)\right)$;*# разбиение на 10 интервалов*

$$0.2025867682$$

> $evalf\left(intn\left(x \to \frac{1}{x^2-1}, 2, 3, 20\right)\right)$;*# разбиение на 20 интервалов*

$$0.2026960445$$

> $evalf\left(intn\left(x \to \frac{1}{x^2-1}, 2, 3, 50\right)\right)$;*# разбиение на 50 интервалов*

$$0.2027267097$$

> $evalf\left(int\left(\frac{1}{x^2-1}, x = 2..3\right)\right)$*# округленное точное решение*

$$0.2027325542$$

Кратные интегралы

Для вычисления кратных интегралов можно использовать команду *int* со специальными аргументами:

> $int(x^2 y^3, [x, y])$

$$\frac{1}{12} x^3 y^4$$

> $\int_{-2}^{2}\int_{0}^{y} x^2 y^3 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\frac{256}{21}$$

Можно эту команду также применять повторно:

> $int\left(int\left(x^2 \cdot y^3, x = 0 \,..y\right), y = -2 \,..2\right)$

$$\frac{256}{21}$$

Для вычисления двойных интегралов $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ область интегрирования D, может быть задана в следующих форматах:

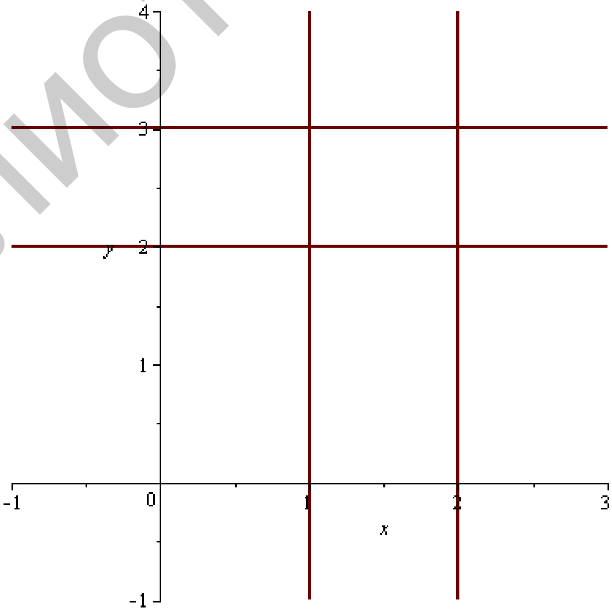
1) $[x=x_1..x_2,\ y=y_1..y_2]$ – прямоугольная область интегрирования;

2) $[y=f_1(x)..f_2(x),\ x=x_1..x_2]$, где $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ – линии, ограничивающие область интегрирования «снизу» и «сверху» на интервале $[x_1, x_2]$;

3) $[x=g_1(y)..g_2(y),\ y=y_1..y_2]$, где $g_1(y)$ и $g_2(y)$ – линии, ограничивающие область интегрирования «слева» и «справа» на интервале $[y_1, y_2]$.

Приведем примеры вычисления интегралов в случае разных способов задания области интегрирования:

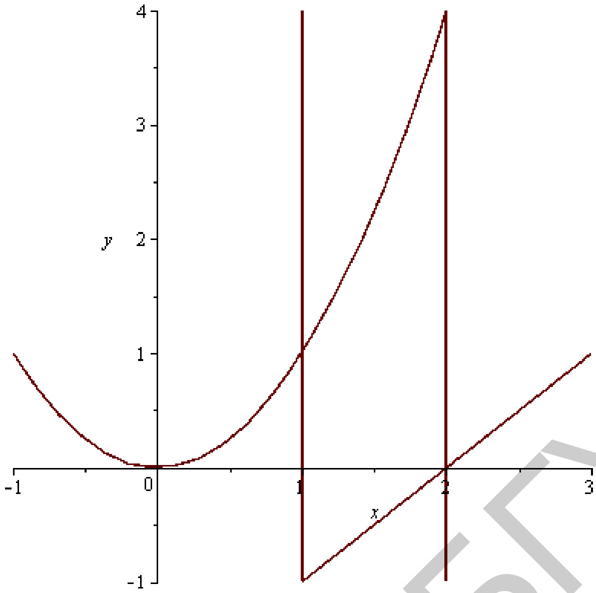
> $plots[implicitplot](\{x = 1, x = 2, y = 2, y = 3\}, x = -1 \,..3, y = -1 \,..4)$



> $int(x \cdot y, [x = 1\,..2, y = 2\,..3])$

$$\frac{15}{4}$$

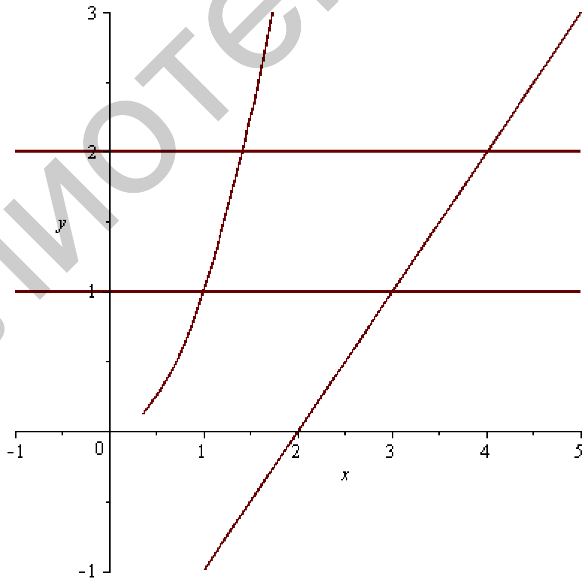
> $plots[implicitplot](\{x = 1, x = 2, y = x - 2, y = x^2\}, x = -1\,..3, y = -1\,..4)$



> $int(x \cdot y, [y = x - 2\,..x^2, x = 1\,..2])$

$$\frac{121}{24}$$

> $plots[implicitplot](\{x = y + 2, x = \mathrm{sqrt}(y), y = 1, y = 2\}, x = -1\,..5, y = -1\,..3)$



> $int(x \cdot y, [x = y + 2\,..\mathrm{sqrt}(y), y = 1\,..2])$

$$-\frac{67}{8}$$

Аналогично с помощью команды *int* вычисляются *n*-кратные интегралы при *n* > 2.

4.4. Ряды

Вычисление суммы и произведения членов последовательности

Конечные и бесконечные суммы $\sum_{n=a}^{b} f(n)$ вычисляются командой *sum* прямого исполнения и *Sum* − отложенного. Аргументы этих команд одинаковые: *sum*(*f*(*n*), *n*=*a*..*b*). Если требуется вычислить сумму бесконечного ряда, то в качестве верхнего предела индекса вводится *infinity*.

Аналогичным образом вычисляются произведения $\prod_{n=a}^{b} f(n)$ командами *product*(*f*(*n*),*n*=*a*..*b*) прямого и *Product*(*P*(*n*),*n*=*a*..*b*) − отложенного действий.

Разложение функции в степенной ряд

Разложение функции *f*(*x*) в степенной ряд $\sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$ в окрестности точки *a* осуществляется командой *series*(*f*(*x*), *x*=*a*, *n*) или *taylor*(*f*(*x*), *x*=*a*, *n*).

Команды *series* и *taylor* выдают результат, имеющий тип *series*. Для того чтобы иметь возможность дальнейшей работы с полученным разложением как с многочленом, его следует преобразовать в полином с помощью команды *convert*(%,*polynom*). Например:

> $s := series(\sin(x), x, 5);\ whattype(\%);\ p := convert(s, polynom);\ whattype(p)$

$$s := x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$$

$$series$$

$$p := x - \frac{1}{6}x^3$$

$$`+`$$

Функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ n переменных можно представить в виде многочлена Тейлора в окрестности точки $(a_1,\ldots,a_n)$ порядка n с помощью команды *mtaylor*($f(x_1,\ldots,x_n)$, $[x_1 = a_1,\ldots,x_n = a_n]$, n):

> $mtaylor(\ln(x \cdot y + z^7), [x = 0, y = 1, z = 2], 2)$

$$7\ln(2) + \frac{7}{2}z - 7 + \frac{1}{128}x$$

Для работы с формальными степенными рядами предназначен пакет *powseries*. Для численной аппроксимации функций на интервале могут быть использованы команды из пакета *numapprox*.

4.5. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в Maple имеется команда *dsolve*(), которая пытается найти общее решение в аналитическом виде, и пакет *DEtools* с возможностями численного решения задачи Коши и мощной графикой. Кроме того, Maple позволяет эффективно получить приближенное аналитическое решение с помощью подходящих рядов. Для решения дифференциальных уравнений в частных производных можно обратиться к пакету *PDEtools*.

Аналитическое решение ОДУ и их систем

Для нахождения в Maple общего решения в символьном виде можно применить команду *dsolve*() в следующем формате: *dsolve*(*DEq*, *options*), где *DEq* – ОДУ, *options* – дополнительные (необязательные) параметры. Они могут указывать метод решения задачи. По умолчанию ищется аналитическое решение, для чего может быть использован аргумент команды *type*=*exact*. При составлении дифференциальных уравнений для обозначения производной применяется команда *diff*:

> $dsolve\left(diff(y(x), x) = x^2 \cdot y(x)\right)$

$$y(x) = \_C1\, e^{\frac{1}{3}x^3}$$

Общее решение ОДУ зависит от произвольных постоянных, число которых равно порядку дифференциального уравнения. В Maple такие константы обозначаются как *_C1, _C2* и т. д.

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения выводится в виде суммы его частного решения (без произвольных постоянных) и общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения (с произвольными постоянными):

> $de := diff(y(x), x\$2) - 4 \cdot diff(y(x), x) + 3 \cdot y(x) = 2 \cdot \exp(-3 \cdot x);\ \ dsolve(de, y(x));$

$$de := \frac{d^2}{dx^2} y(x) - 4 \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) + 3 y(x) = 2\, e^{-3x}$$

$$y(x) = e^{x}\, \_C2 + e^{3x}\, \_C1 + \frac{1}{12}\, e^{-3x}$$

Команда *dsolve* выдает решение дифференциального уравнения в невычисляемом формате. Для дальнейшей работы с решением можно отделить правую часть полученного равенства командой *rhs*(%). Например, построим график полученной функции при *_C1*=1, *_C2*=0:

$$y(x) = e^{3x}\, \_C2 + e^{x}\, \_C1 + \frac{1}{12}\, e^{-3x}$$

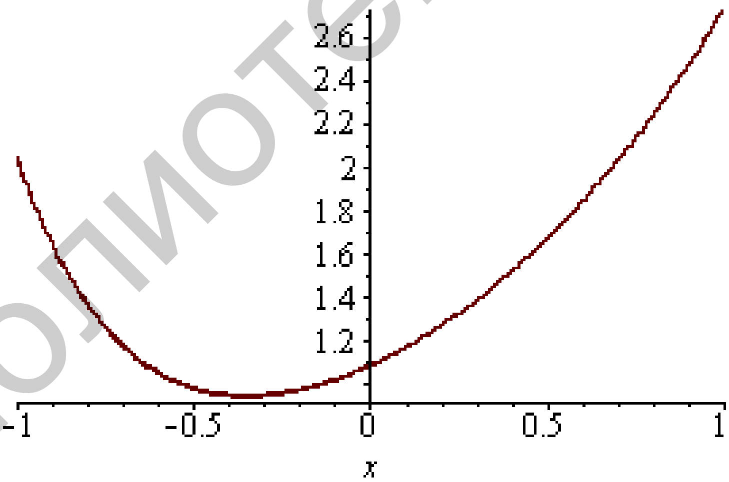
> $r := rhs(\%);$*#формула общего решения*

$$r := e^{3x}\, \_C2 + e^{x}\, \_C1 + \frac{1}{12}\, e^{-3x}$$

> $y := subs(\_C1 = 1, \_C2 = 0, r);$*#подстановка в него значений произвольных постоянных*

$$y := e^{x} + \frac{1}{12}\, e^{-3x}$$

> $plot(y, x = -1\,..1)$*#построение графика полученного частного решения*



Команда *dsolve* представляет возможность найти фундаментальную систему решений (базисные функции) ОДУ. Для этого в параметрах команды *dsolve* следует указать *output=basis*:

> $restart;\ de := diff(y(x), x\$2) - 4 \cdot diff(y(x), x) + 5 \cdot y(x) = 0;\ dsolve(de, y(x), output = basis)$

$$de := \frac{d^2}{dx^2} y(x) - 4 \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) + 5 y(x) = 0$$

$$\left[e^{2x} \sin(x), e^{2x} \cos(x) \right]$$

Команда *dsolve* может найти решение задачи Коши, если помимо дифференциального уравнения задать начальные условия для искомой функции. Для обозначения производных в начальных условиях используется дифференциальный оператор D. Например, условие $y''(1) = 2$ следует записать в виде $\mathrm{D}^{(2)}(y)(1) = 2$.

Команда *dsolve* может найти решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, если использовать следующий ее формат: *dsolve*({de_1,de_2,…,de_n},{$x(t)$,…,$y(t)$}), где {de_1,de_2,…,de_n} – множество уравнений, входящих в заданную систему, $x(t)$,…,$y(t)$ – неизвестные функции.

Найдем решение системы дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций:

> $ds := diff(x(t), t) = x(t) - 2\cdot y(t) + t, diff(y(t), t) = 2\cdot x(t) - 3\cdot y(t);$

$$ds := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, x(t) = x(t) - 2\, y(t) + t,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, y(t) = 2\, x(t) - 3\, y(t)$$

> $dsolve(\{ds\}, \{x(t), y(t)\});$

$$\left\{x(t) = \mathrm{e}^{-t}\,\_C2 + \mathrm{e}^{-t}\, t\,\_C1 + 3\, t - 5,\ y(t) = \mathrm{e}^{-t}\,\_C2 + \mathrm{e}^{-t}\, t\,\_C1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t}\,\_C1 - 4 + 2\, t\right\}$$

Найдены две функции $x(t)$ и $y(t)$, которые зависят от двух произвольных постоянных *_C1* и *_C2*.

Заметим, что переменные *x* и *y* заданной системы необходимо вводить как функции независимого аргумента *t*, то есть в виде $x(t)$ и $y(t)$ соответственно. Если этого не сделать, Maple выдаст ошибку:

> $ds := diff(x(t), t) = x - 2\cdot y + t, diff(y(t), t) = 2\cdot x - 3\cdot y;$

$$ds := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, x(t) = x - 2\, y + t,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, y(t) = 2\, x - 3\, y$$

> $dsolve(\{ds\}, \{x(t), y(t)\});$

```
Error, (in dsolve) ambiguous input: the variables {x, y} and the
functions {x(t), y(t)} cannot both appear in the system
```

Приближенное решение ОДУ и их систем

В случае, когда аналитическое решение дифференциального уравнения не может быть найдено, можно использовать разложение неизвестной функции в степенной ряд или численное приближение решения.

Чтобы найти приближенное решение дифференциального уравнения в виде степенного ряда, в команде *dsolve* следует после переменных указать параметр *type=series* (или просто *series*). Для того чтобы указать порядок *n* разложения, следует перед командой *dsolve* вставить его определение с помощью команды *Order*:=*n*. По умолчанию значение системной переменной *Order* равно шести.

Если ищется общее решение дифференциального уравнения в виде разложения в степенной ряд, то коэффициенты при степенях *x* найденного разложения будут содержать неизвестные значения *y*(0) функции в нуле и ее производных D(*y*)(0), $(D^{(2)})$(y)(0) и т. д. Полученное в строке вывода выражение будет иметь вид, похожий на разложение искомого решения в ряд Маклорена, но с другими коэффициентами при степенях *x*. Для выделения частного решения следует задать начальные условия *y*(0)=y0, D(*y*)(0)=y1, $(D^{(2)})$(*y*)(0)=y2 и т. д., причем количество этих начальных условий должно совпадать с порядком соответствующего дифференциального уравнения.

Разложение в степенной ряд имеет тип *series*, поэтому напомним, что для дальнейшей работы с этим рядом его следует преобразовать в полином с помощью команды *convert*(%,*polynom*), а затем выделить правую часть полученного выражения командой *rhs*(%).

Найдем точное и приближенное в виде степенного ряда до четвертого порядка решения ОДУ $y''' - y' = x\cos x$. Сравним их при начальных условиях $y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 2$, построив соответствующие графики в одной системе координат. Используем следующий набор команд Maple:

```
> restart;
>
  # Ввод исходных данных
  Order := 4; de := diff(y(x), x$3) − diff(y(x), x) = x·cos(x); cond := y(0) = 1, D(y)(0) = 1,
      D^(2)(y)(0) = 2
```

$$Order := 4$$

$$de := \frac{d^3}{dx^3}\,y(x) - \left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = x\cos(x)$$

$$cond := y(0) = 1, D(y)(0) = 1, D^{(2)}(y)(0) = 2$$

> *# Аналитическое решение* $dsolve(\{de, cond\}, y(x))$; $y1 := rhs(\%)$

$$y(x) = \frac{1}{2}\,e^{-x} + \frac{3}{2}\,e^{x} - \cos(x) - \frac{1}{2}\,x\sin(x)$$

$$y1 := \frac{1}{2}\,e^{-x} + \frac{3}{2}\,e^{x} - \cos(x) - \frac{1}{2}\,x\sin(x)$$

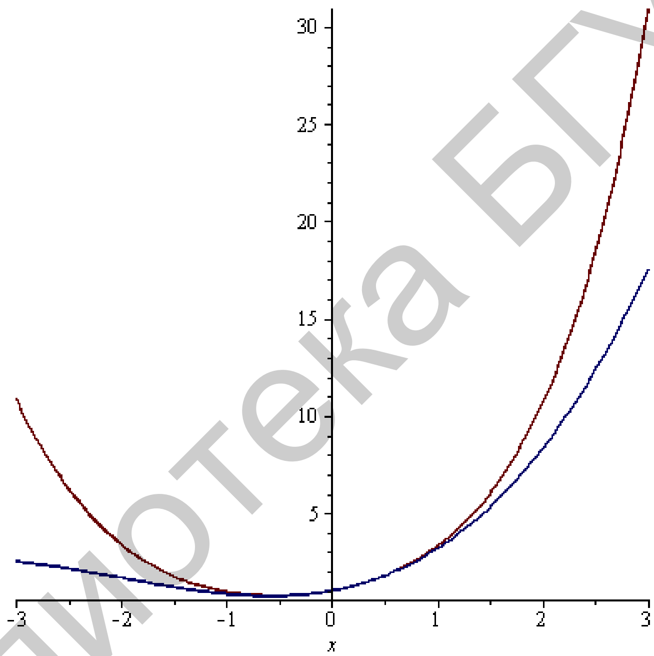
> *# Приближенное решение в виде ряда и его преобразование в полином*
> $dsolve(\{de, cond\}, y(x), series)$; $convert(\%, polynom)$; $y2 := rhs(\%)$

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + O(x^4)$$

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{6}\,x^3$$

$$y2 := 1 + x + x^2 + \frac{1}{6}\,x^3$$

> *# Построение графиков найденных решений* $plot([y1, y2], x = -3..3)$



На рисунке видно, что наилучшее приближение точного решения степенным рядом достигается примерно на интервале ($-1 < x < 1$).

Численное решение дифференциальных уравнений

Для того чтобы найти численное решение дифференциального уравнения (задачи Коши или краевой задачи) в команде *dsolve* следует указать параметр *type=numeric* (или просто *numeric*). Тогда команда решения дифференциального уравнения будет иметь вид *dsolve*(*de*, *var*, *type*=*numeric*, *options*), где *de* – уравнение, *var* – неизвестная функция, *options* – параметры, позволяющие указать метод численного интегрирования дифференциального уравнения. В Maple реализованы следующие методы: *method=rkf45* – метод Рунге – Кутта – Фельберга четвертого и пятого порядка (установлен по умолчанию); *method=dverk78* – метод Рунге – Кутта седьмого и восьмого порядка; *method=classical* – классический метод Рунге – Кутта третьего порядка; *method=gear* и *method=mgear* – одношаговый и многошаговый методы Гира.

График численного решения дифференциального уравнения можно построить с помощью команды *odeplot*(*dsn*, [*x*,*y*(*x*)], *x*=*x*1..*x*2), где в качестве выражения используется результат команды *dsn*:=*dsolve*({*de*,*cond*}, *y*(*x*), *numeric*) численного решения, после нее в квадратных скобках указывают переменную и неизвестную функцию [*x*,*y*(*x*)], а также интервал *x*=*x*1..*x*2 для построения графика. Заметим, что требуется подключение пакета *plots* для ее выполнения.

Найдем численное решение уравнения $y' = -2xy$ при условии $y(0)=1$ и сравним с точным, построив графики:

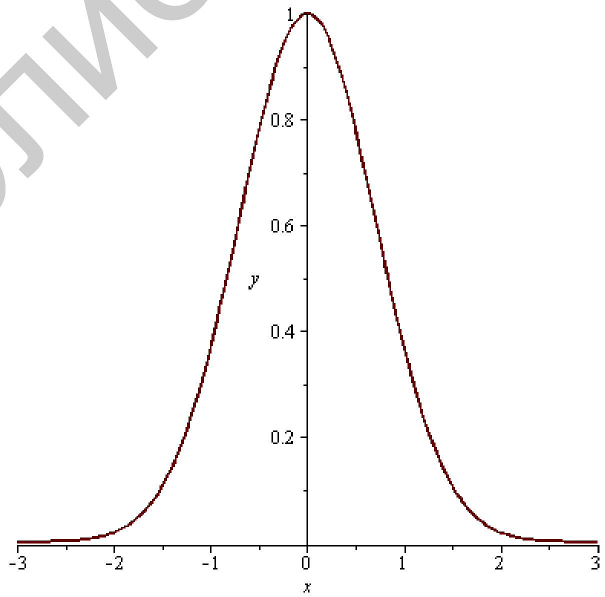
> *with*(*plots*) : *dsolve*({*diff*(*y*(*x*), *x*) = −2·*x*·*y*(*x*), *y*(0) = 1});# *точное частное решение*

$$y(x) = e^{-x^2}$$

> # *Задание графика полученной сеточной функции*
> *p1* := *odeplot*(*dsolve*({*diff*(*y*(*x*), *x*) = −2·*x*·*y*(*x*), *y*(0) = 1}, *numeric*), [*x*, *y*(*x*)], *x* = −3 ..3) :

> # *Задание графика точного решения* *p2* := *plot*$\left(e^{-x^2}, x = -3\,..3\right)$:

> *display*(*p1*, *p2*)# *построение обоих графиков в одной системе координат*

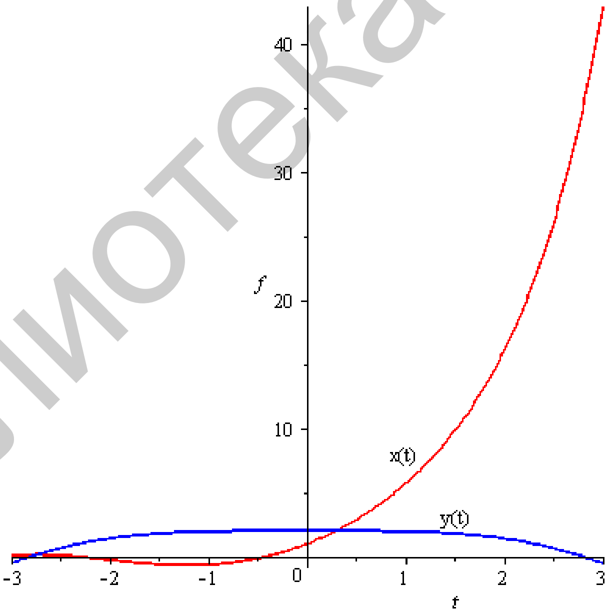


Видим, что найденные решения практически совпадают.

Формат команды *dsolve* для численного решения системы ОДУ отличается незначительно: *dsolve*({*sde*, *cond*},{*vars*}, *type*=*numeric*, *options*), где *sde* – множество уравнений системы, *cond* – начальные условия, *vars* – множество неизвестных функций, *options* – параметры, позволяющие указать метод численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Найдем решение системы $x'(t) = y(t)\cos(t) + x(t),\ y'(t) = \sin(t) - t$ ОДУ с начальными условиями $x(0) = 1,\ y(0) = 2$ с помощью численного метода и построим графики найденных функций в одной системе координат:

```
> dsn := diff(x(t), t) = y(t)·cos(t) + x(t), diff(y(t), t) = sin(t) − t :# ввод системы
  cond := x(0) = 1, y(0) = 2 :# ввод начальных условий
  SF := dsolve({dsn, cond}, {x(t), y(t)}, numeric) :
> with(plots) :# подключение графического пакета
  p1 := odeplot(SF, [t, x(t)], t = −3 ..3, color = red) :
  p2 := odeplot(SF, [t, y(t)], t = −3 ..3, color = blue) :
  p3 := textplot([[1, 8, "x(t)"],[1.5,3,"y(t)"]]) :
  display(p1, p2, p3);
```



Для численного решения задачи Коши, построения графиков решения и фазовых портретов в Maple имеется специальный пакет *DEtools*.

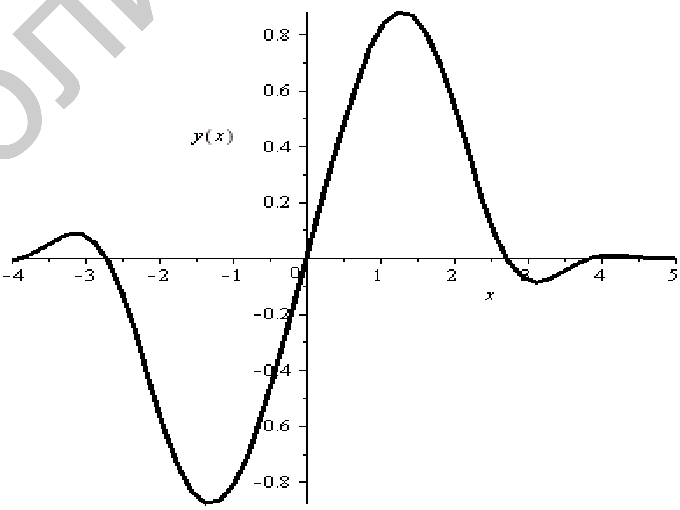
Команда *DEplot* из пакета *DEtools* строит численными методами графики решения или фазовые портреты. Эта команда аналогична команде *odeplot*, но более функциональна: она сама производит численное решение дифференциального уравнения. Основные параметры *DEplot* похожи на параметры *odeplot*: *DEplot*(*sde*, *vars*, *range*, *x*=*x*1..*x*2,…, *y*=*y*1..*y*2, *cond*, *options*), где *sde* – система дифференциальных уравнений (или одно уравнение); *vars* – множество неизвестных функций (или одна функция); *range* – диапазон изменения независимой переменной; *cond* – начальные условия; *x*=*x1*..*x2* и *y*=*y*1..*y*2 – диапазоны изменения функций; *options* – дополнительные (необязательные) параметры.

Наиболее востребованные параметры: *linecolor* − цвет линии; *scene*=[*x*,*y*] – определение зависимости для вывода графика; *iterations*=*n* − число итераций, необходимое для повышения точности вычислений (по умолчанию *n* = 1); *stepsize*=*number* − число, равное расстоянию между точками на графике (по умолчанию *number*= (*x*2–*x*1)/48); *obsrange*=*true*/*false* – указатель прерывания вычислений в случае выхода графика решения за установленный диапазон (по умолчанию имеет значение *true*); различные параметры для анимации (см. справочные материалы о команде).

Построим график решения дифференциального уравнения $y'' + xy' + x^2 y = 0$ с начальными условиями $y(0) = 0, y'(0) = 1$ в интервале $[-4;5]$.

> $with(DEtools):$

$DEplot\left(diff(y(x), x\$2) + x \cdot diff(y(x), x) + x^2 \cdot y(x) = 0, y(x), x = -4..5, [[y(0) = 0, D(y)(0) = 1]]\right)$



>

С помощью команды *DEplot* можно построить фазовый портрет для системы двух дифференциальных уравнений $x'(t) = f_1(t, x, y),\ y'(t) = f_2(t, x, y)$, если в параметрах данной команды указать значение *scene*=[*x*,*y*].

Если система дифференциальных уравнений является автономной, то на фазовом портрете будет построено поле направлений в виде стрелок. Размер стрелок регулируется параметром *arrows*.

Для того чтобы нарисовать весь фазовый портрет, необходимо для каждой фазовой траектории указывать начальные условия: например, для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка несколько начальных условий в команде *DEplot* указываются после задания диапазона изменения независимой переменной *t*: [[*x*(*t*0)=*x*0, *y*(*t*0)=*y*0], [*x*(*t*0)=*x*1, *y*(*t*0)=*y*1],…].

Начальные условия можно задавать в более компактной форме: [*t*0, *x*0, *y*0], где *t*0 – точка, в которой задаются начальные условия, *x*0 и *y*0 – значения искомых функций в точке *t*0.

Фазовый протрет системы двух дифференциальных уравнений первого порядка можно также построить с помощью команды *phaseportrait*(*sde,* [*x*,*y*],*x*1..*x*2,[[*cond*]]), где *sde* – система двух дифференциальных уравнений первого порядка, [*x*,*y*] – имена искомых функций, *x*1..*x*2 – интервал, на котором следует построить фазовый портрет, а в скобках указываются начальные условия.

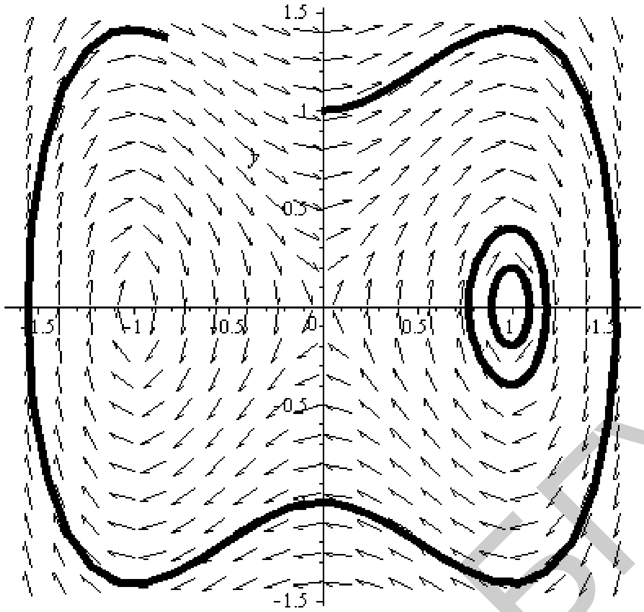
Напомним, что рассмотренные команды находятся в пакете *DEtools*, который должен быть предварительно загружен.

Построим с помощью команды *DEplot* фазовый портрет системы дифференциальных уравнений $x' = \frac{1}{2}y,\ y' = x - x^3$ для нескольких наборов начальных условий: *x*(0)=1, *y*(0)=0.2; *x*(0)=0, *y*(0)=1; *x*(0)=1, *y*(0)=0.4.

> *with*(*DEtools*) :

$$DEplot\left(\left\{diff(x(t),t)=\frac{1}{2}\cdot y(t),\, diff(y(t),t)=x(t)-(x(t))^3\right\}, [x(t),y(t)], t=0..10, [[0,1,0.2],[0,0,1],[0,1,0.4]]\right)$$

>



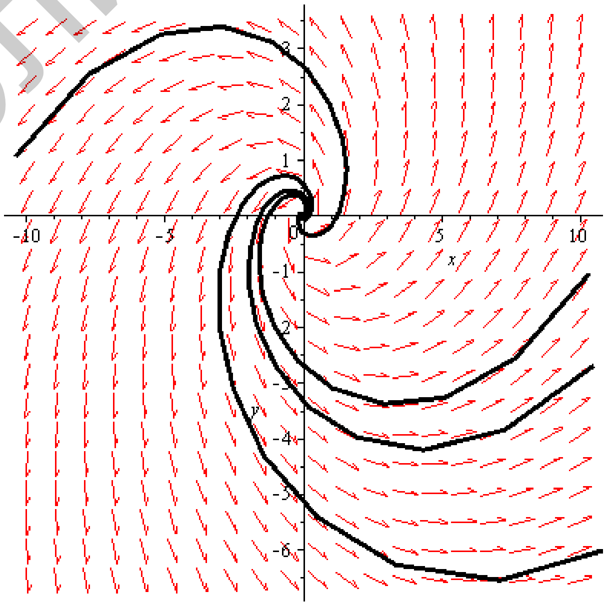
Приведем пример решения аналогичной задачи с использованием команды *phaseportrait* (определите по тексту программы систему и начальные данные):

> $restart;\ with(DEtools):$

$$sde := \mathrm{D}(x)(t)=x(t)-2\cdot y(t), \mathrm{D}(y)(t)=x(t)+y(t):$$

$$phaseportrait(\{sde\}, [x(t),y(t)], t=-5..5, [[0,1,2],[0,-3,-2],[0,2,-4],[0,-1,-2]], x=-10..10)$$

>

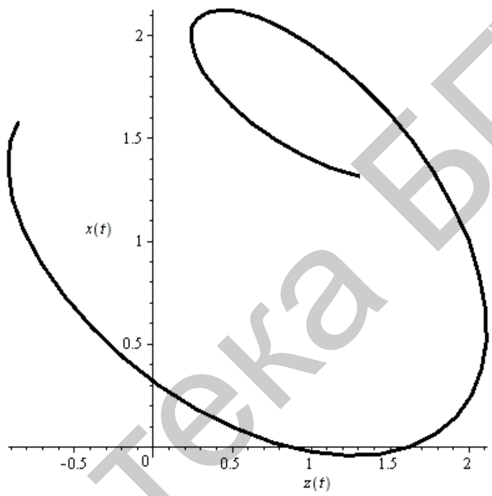


Заметим, что при вводе последней системы использовались дифференциальные операторы D(*f*). Предлагается проследить за изменением рисунка при задании других начальных условий, диапазона изменения переменной и размеров координатных осей.

Наконец, приведем пример системы с тремя неизвестными функциями $x(t), y(t), z(t)$, отражающий зависимость *z* от *x* (параметр *scene* команды *phaseportrait*):

\>

$$phaseportrait([diff(x(t), t) = y(t) - z(t), diff(y(t), t) = z(t) - x(t), diff(z(t), t) = x(t) - y(t) \cdot 2], [x(t), y(t), z(t)], t = -2 ..2, [[x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 2]], scene = [z(t), x(t)])$$



Упражнения

1. Задайте разными способами функцию $y = f(x)$, найдите ее значение в точке x_0 и постройте график, если:

1) $y = 2^{x^3-2}, x_0 = -2$; 2) $y = \sqrt[5]{\dfrac{x-1}{2x}}, x = 10$; 3) $y = |x+3| - |x-3|, x_0 = 7$.

2. Задайте функцию $y = \begin{cases} -2x, x \le -1, \\ x^2 + 1, x > -1. \end{cases}$ Исследуйте ее на непрерывность в точке $x = -1$ и постройте график.

3. Вычислите пределы и выведите ответ в виде равенства $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = "результат"$:

1) $\lim\limits_{x\to\pm0} \dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{x}}}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; 3) $\lim\limits_{x\to2\pm0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$.

4. Вычислите производную функции $y=\cos^3 2x-\sin^3 2x$ при $x=\dfrac{\pi}{6}$.

5. Найдите производные *n*-го порядка для следующих функций (при необходимости упростите результат):

1) $y=\dfrac{\ln(x-2)}{\sqrt{x-2}}$, $n=3$; 2) $y=(4x^3+5)e^{2x+1}$, $n=5$; 3) $y=(1+x^2)\operatorname{arctg} x, n=3$

.

6. Найдите неопределенные интегралы:

1) $\int\dfrac{3x^4+5}{x^2(x^2+1)^3}dx$; 2) $\int\dfrac{\arcsin^2 x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 3) $\int\sin x\sin 2x\sin 3x dx$.

7. Вычислите определенные интегралы:

1) $\int\limits_1^8\dfrac{\ln^2 x dx}{\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $\int\limits_{-1}^0\dfrac{\operatorname{tg}(x+1)dx}{\cos^2(x+1)}$; 3) $\int\limits_0^3\dfrac{e^{\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}}}{(3+x)\sqrt{9-x^2}}dx$.

8. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\cos x dx}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^3}$ при положительных значениях входящих в него параметров.

Указание. Перед вычислением интеграла введите ограничения на параметры с помощью команд *assume* (*a* > 0); *assume* (*b* > 0).

9. Найдите несобственный интеграл $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}dx$ при различных ограничениях на параметр. В частности при $a>-1$.

10. Найдите численное значение интегралов:

1) $\int\limits_1^2 \frac{\sin x}{x} dx$; 2) $\int\limits_2^3 e^{-(x-1)^2} dx$.

11. Полностью проделайте все этапы вычисления интеграла $\int x \ln^2 x dx$ по частям.

12. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$ с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

13. Найдите n-частичную и полную суммы ряда, общий член которого равен $a_n = \frac{1}{(3n+1)(3n-2)}$.

Указание. Воспользуйтесь командами *sum* и *limit*.

14. Найдите сумму степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 x^n$.

15. Найдите точное приближенное значение бесконечного произведения $\prod\limits_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1}$.

16. Разложите в степенной ряд Маклорена функцию $y = e^{-2x}\sqrt{3x+1}$, оставив пять первых членов.

17. Постройте на одном рисунке графики интеграла $\int\limits_0^x e^{-t^2/2} dt$ и его многочлена Тейлора пятого порядка в окрестности нуля.

18. Представьте функцию $f(x, y) = \cos(3x^2 + y^2)$ в виде многочлена Тейлора шестого порядка в окрестности точки (0, 0).

19. Вычислите повторный интеграл $\int\limits_2^4 dy \int\limits_0^y \frac{y^3 dx}{x^2+y^2}$.

20. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_{D} y^2 e^{-xy/4} dxdy$ по области, ограниченной линиями $x=0,\ y=2, y=x$.

21. Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_{V} x^2 zdxdydz$ по области, ограниченной поверхностями $y=3x, y=o, x=2, z=xy, z=0$.

22. Разложите в ряд Фурье функцию $y=x$, заданную на интервале $(-\pi,\pi)$. Постройте в одной системе координат графики заданной функции и суммы ряда с разной точностью приближения.

23. Найдите общее решение дифференциальных уравнений:

1) $y'+y\cos x=\sin 2x$; 2) $y''-2y'+y=\sin x+e^{-x}$.

24. Найдите фундаментальную систему решений дифференциального уравнения $y^{IV}+2y''+y=0$.

25. Найдите решение задачи Коши $y'''+y''=2\sin x, y(0)=-1, y'(0)=1, y''(0)=2$.

26. Найдите решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x''+5x'+2y'+y=0, \\ 3x''+5x+y'+3y=0 \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0)=1, x'(0)=0, y(0)=1$.

27. Найдите решение задачи Коши $y'-y=xe^{y}$, $y(0)=0$ в виде степенного ряда с точностью до пятого порядка.

28. Постройте график численного решения задачи Коши $y'=\sin xy,\ y(0)=1.$

29. Постройте фазовый портрет системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=3x-4y, \\ y'=x-2y, \end{cases}$$

подобрав различные начальные значения самостоятельно.

5. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Для решения задач линейной (векторной и матричной) алгебры в Maple имеется специализированный пакет *LinearAlgebra*, который загружается командой *with*(*LinearAlgebra*)[;\:]. Если воспользоваться фиксатором точка с запятой (;), то более 100 команд пакета будут выведены на экран в алфавитном порядке. Их назначение интуитивно понятно, так как каждое имя команды представляет собой слово, слова или их сокращение на английском языке.

5.1. Векторы

Способы задания векторов

Для определения вектора в Maple можно использовать команду*Vector*[*column**row*]([x_1,x_2,…,x_n],*options*), где в квадратных скобках через запятую указываются координаты вектора:

> $x := Vector([1, 2, 3])$

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Эта команда представляет собой одну из форм функции-конструктора *Vector*(…) с аргументом, представляющим собой непосредственное задание вектора с помощью списка. По умолчанию, это матрица-столбец. Для задания матрицы-строки можно добавить необязательный параметр *row*:

> $y := Vector[row]([4, 5, 6])$

$$y := \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Существует также совсем краткая форма в виде непосредственного ввода компонентов вектора в угловых скобках:

> $x := \langle 1, 2, 3 \rangle$

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Полное описание возможностей конструктора векторов можно найти в справочной системе с большим количеством примеров разных случаев. В данном учебно-методическом пособии будут также описаны дополнительные особенности для создания и работы со специальными матрицами, которые применимы и к векторам.

Координату уже определенного вектора x можно получить, записав $x[i]$, где i – номер координаты. Например, вторую координату вектора x можно вывести так:

> $x[2]$

$$2$$

<u>Операции над векторами (табл. 5)</u>

Таблица 5

Перечень операций над векторами

Операция	Математическая запись	Maple-функция	Краткая форма команды
Сложение	$\bar{a}+\bar{b}$	*Add*(*a*, *b*), *VectorAdd*(*a*, *b*)	$a+b$
Вычитание	$\bar{a}-\bar{b}$	*Add*(*a*, *b*,1,−1), *VectorAdd*(*a*, *b*,1,−1)	$a-b$
Умножение на число	$c\bar{a}$	*ScalarMultiply*(*a*,*c*) *VectorScalarMultiply*(*a*,*c*)	$c*a,\ c\cdot a$
Линейная комбинация	$c_1\bar{a}+c_2\bar{b}$	*Add*(*a*, *b*,*c*1,*c*2), *VectorAdd*(*a*, *b*,*c1*,*c2*)	$c1*a+c2*b,\ c1\cdot a+c2\cdot b$
Скалярное умножение	$\left(\bar{a}, \bar{b}\right)$	*DotProduct*(*a*,*b*)	$a.b$
Векторное умножение	$\left[\bar{a}, \bar{b}\right]$	*CrossProduct*(*a*,*b*)	$a \,\&\!\times b$

Продемонстрируем получение результатов операций из таблицы:

> $a := Vector[row]([1, 2, 3])$

$$a := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

> $b := Vector[row]([3, -2, 0])$

$$b := \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

> $'a + b' = a + b$ *# сумма двух векторов (одной размерности!)*

$$a + b = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

> 'a − b'= a − b#*разность двух векторов (одной размерности!)*

$$a - b = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

> '3 a'= 3·a#*произведение вектора на число*

$$3\,a = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

> 'a·b'= a.b#*скалярное произведение векторов*

$$a\,b = -1$$

> "a×b" = a&× b#*векторное произведение векторов*

$$\text{"a×b"} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -8 \end{bmatrix}$$

Кавычки используются в левых частях равенств для подавления выполнения операции и вывода лишь ее символьной записи.

Норма вектора

Норму вектора $\overline{a} = (x_1,...,x_n)$, которая равна

$\left\|\overline{a}\right\| = \left(x_1^n + ... + x_n^n\right)^{1/n}, 1 \le n \le \infty$, можно вычислить с помощью команды *VectorNorm*(*a*,*n*) (или *Norm*(*a*,*n*)):

> $X := \langle x1, x2, x3 \rangle$

$$X := \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$$

> $VectorNorm(X, 1)$

$$|x1| + |x2| + |x3|$$

> $VectorNorm(X, 2)$

$$\sqrt{|x1|^2 + |x2|^2 + |x3|^2}$$

> $VectorNorm(X, \infty)$

$$\max(|x1|, |x2|, |x3|)$$

По умолчанию *n* = *infiniti*. При *n* = 2 (или *n*=*Euclidean*), как видно из примера, получаем Евклидову норму, что для геометрических векторов означает их длину. Для нормирования вектора *X* можно применить функцию *normalize*(*X*,*n*), в результате которой будет получен орт $X_0 = \frac{X}{\|X\|}$ вектора *X*:

> $Normalize(\langle x1, x2, x3 \rangle, Euclidean)$

$$\begin{bmatrix} \frac{x1}{\sqrt{|x1|^2+|x2|^2+|x3|^2}} \\ \frac{x2}{\sqrt{|x1|^2+|x2|^2+|x3|^2}} \\ \frac{x3}{\sqrt{|x1|^2+|x2|^2+|x3|^2}} \end{bmatrix}$$

Угол между двумя векторами

Для вычисления угла между векторами используется значение его косинуса при нахождении скалярного произведения. Достигается это с помощью команды *VectorAngle*(*a*, *b*, *options*):

> *VectorAngle*(*a*, *b*)*#угол между векторами*

$$\pi - \arccos\left(\frac{1}{182}\sqrt{14}\sqrt{13}\right)$$

> *evalf*(%, 3)*#приближенное значение в радианах*

$$1.64$$

> *convert*(%, *degrees*)*#перевод в градусы*

$$\frac{295.20\, degrees}{\pi}$$

> *evalf*(%, 3)*#приближенное значение в градусах*

$$93.8\, degrees$$

Нахождение базиса системы векторов

Если имеется система $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n\}$ n векторов, то с помощью команды *Basis*([*a*1,*a*2,…,*an*]) можно найти ее базис, а функция *GramSchmidt*([*a*1,*a*2,…,*an*]) ее ортогонализирует по алгоритму Грамма – Шмидта. Если исходная система не является линейно независимой, то количество векторов в результате станет меньшим. Для выполнения нормализации необходимо ввести в аргументы команды параметр *normalized*:

> *onb* := *GramSchmidt*([⟨1, 2, 3⟩, ⟨2, 1, −3⟩, ⟨1, −1, 0⟩, ⟨3, 2, 1⟩], *normalized*)

$$onb := \left[\begin{bmatrix} \frac{1}{14}\sqrt{14} \\ \frac{1}{7}\sqrt{14} \\ \frac{3}{14}\sqrt{14} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{11}{266}\sqrt{266} \\ \frac{4}{133}\sqrt{266} \\ -\frac{9}{266}\sqrt{266} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{19}\sqrt{19} \\ -\frac{3}{19}\sqrt{19} \\ \frac{1}{19}\sqrt{19} \end{bmatrix}\right]$$

> $DotProduct(onb[1], onb[2])$: $DotProduct(onb[1], onb[3])$: $DotProduct(onb[2], onb[3])$
ортогональность

$$0$$

> $Norm(onb[1], 2)$: $Norm(onb[2], 2)$: $Norm(onb[3], 2)$# *нормированность*

$$1$$

5.2. Матрицы и определители

Способы задания матрицы

Для определения матрицы в *Maple* можно использовать команду *Matrix*(*m*, *n*, [[a_{11},a_{12},…,a_{1n}], [a_{21},a_{22},…,a_{2n}],…, [a_{m1},a_{m2},…,a_{mn}]]), где *m* – количество строк, *n* – количество столбцов в матрице. Эти числа задавать необязательно, а достаточно перечислить элементы матрицы построчно в квадратных скобках через запятую:

> $A := Matrix([[1, 2, 3], [-1, -3, 2]])$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

С помощью дополнительных команд в Maple можно генерировать матрицы специального вида. В частности, диагональную матрицу и ее различные обобщения можно получить командой *DiagonalMatrix*(*L*,*m*,*n*,*options*), где *L* – список или вектор значений, *m* и *n* – размеры результирующей матрицы:

> $L := [\langle\langle 1, 2\rangle|\langle 3, 4\rangle\rangle, 5, \langle 6, 7\rangle]$

$$L := \left[\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, 5, \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}\right]$$

> $DiagonalMatrix(L)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

> $V := \langle 1, 2, 3\rangle$

$$V := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

> $DiagonalMatrix(V, 4, 5)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> $DiagonalMatrix([a, b, c, d, e])$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix}$$

Генерировать матрицу можно и с помощью функции $y=f(i, j)$ от переменных i, j – индексов элементов матрицы $Matrix(m, n, f)$:

> $f := (i,j) \rightarrow x^{i+j}$

$$f := (i,j) \rightarrow x^{i+j}$$

> $A := Matrix(3, 4, f)$

$$A := \begin{bmatrix} x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\ x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\ x^4 & x^5 & x^6 & x^7 \end{bmatrix}$$

Размер матрицы A, количество ее строк и столбцов можно определить соответственно с помощью команд *Dimension*(*A*), *RowDimension*(*A*) и *ColumnDimension*(*A*).

<u>Операции над матрицами (табл. 6)</u>

Таблица 6

Перечень операций над матрицами

Операция	Математическая запись	Maple-функция	Краткая форма команды
Сложение	$A+B$	*Add*(*A*, *B*), *MatrixAdd*(*A*, *B*)	$A+B$
Вычитание	$A-B$	*Add*(*A*, *B*,1,−1), *MatrixAdd*(*A*, *B*,1,−1)	$A-B$
Умножение на число	cA	*ScalarMultiply*(*A*,*c*), *MatrixScalarMultiply*(*A*,*c*)	$c*A$, $c\cdot A$
Линейная комбинация	c_1A+c_2B	*Add*(*A*, *B*,*c*1,*c*2), *MatrixAdd*(*A*, *B*,*c1*,*c2*)	$c1*A+c2*B$, $c1\cdot A+c2\cdot B$
Умножение	AB	*Multiply(A,B)* *MatrixMatrixMultiply*(*A*,*B*)	*A.B*
Возведение в степень	A^n	*MatrixPower*(*A*,*n*)	*A^n*
Обратная матрица	A^{-1}	*MatrixInverse*(*A*)	$A\wedge(-1)$, $1/A$
Транспонирование	A^T	*Transpose*(*A*)	–

В качестве второго аргумента в командах, вычисляющих произведение, можно указывать и вектор, например:

> $A := Matrix([[1,0],[2,1]]);\ B := Matrix([[2,3],[1,-2]])$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

> $A + B$*# сумма матриц*

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

> *A.B # произведение матриц*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

> $2A + 3B$# *линейная комбинация матриц*

$$\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$$

> $v := Vector([2, 4]);$

$$v := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

> $A.v$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Определитель, минор, ранг и след матрицы

Определитель квадратной матрицы A можно вычислить с помощью команды *Determinant*(*A*). Функция *Minor*(*A*,*i*,*j*) возвращает значение минора элемента a_{ij} этой матрицы. С помощью специальных параметров последней команды можно не только вычислить миноры элементов квадратной матрицы, но и выделить различные подматрицы из исходной.

Для определения ранга матрицы можно использовать команду *Rank*(*A*). След матрицы, равный сумме ее диагональных элементов, вычисляется командой *Trace*(*A*).

Приведем примеры решения некоторых типичных задач с помощью специализированного пакета линейной алгебры:

> *with*(*LinearAlgebra*) : # *подключение пакета команд*
> *Transpose*(*A*); # *транспонированная матрица*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> A^{-1}; # *обратная матрица*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

> *Determinant*(*A*); # *определитель матрицы*

$$1$$

Собственные значения и собственные векторы матрицы

Получить характеристический многочлен матрицы A относительно переменной x можно с помощью команды *CharacteristicPolynomial*(*A*, *x*). Для нахождения собственных значений матрицы A используется команда *Eigenvalues*(*A*). Для нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы A − команда *Eigenvectors*(*A*):

> *A1* := *Matrix*([[−1,−6,−4], [−1, 1, 1], [1,−2,−2]]); *Eigenvalues*(*A1*);
  #собственные значения

$$A1 := \begin{bmatrix} -1 & -6 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

> *Eigenvectors*(*A1*);*#собственные значения и собственные векторы*

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -\frac{1}{3} & 1 \\ -1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

> *#контроль правильности результата*
  solve({$x - 6\cdot y - 4\cdot z = 0, -x + 3\cdot y + z = 0, x - 2\cdot y = 0$}, {$x, y, z$});

$$\{x = -2\,z, y = -z, z = z\}$$

> *solve*({$-6\cdot y - 4\cdot z = 0, -x + 2\cdot y + z = 0, x - 2\cdot y - z = 0$}, {$x, y, z$});

$$\{x = x, y = 2\,x, z = -3\,x\}$$

> *solve*({$-2\cdot x - 6\cdot y - 4\cdot z = 0, -x + z = 0, x - 2\cdot y - 3\cdot z = 0$}, {$x, y, z$});

$$\{x = z, y = -z, z = z\}$$

Канонические и специальные виды матрицы

Выяснить, являются ли матрицы A и B подобными, можно с помощью команды *IsSimilar*(*A*,*B*). Ортогональность, унитарность, типы эрмитовых матриц можно определить соответственно с помощью команд *IsUnitary*(*A*), *IsOrthogonal*(*A*) и *IsDefinite*(A,*q*=*t*), где *t* может принимать одно из следующих значений: *'positive_definite', 'positive_semidefinite', 'negative_definite', 'negative_semidefinite', or 'indefinite'*.

Привести матрицу A к нормальной форме Жордана можно с помощью команды *JordanForm*(*A*). Верхнюю треугольную матрицу, эквивалентную матрице A, вернет функция *GaussianElimination*(A). Характеристическую матрицу можно вычислить командой *CharacteristicMatrix*(A,x). Например:

> $A := Matrix([[2,-3,5],[4,-6,2],[2,-3,-11]]);$

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & -6 & 2 \\ 2 & -3 & -11 \end{bmatrix}$$

> $LinearAlgebra[GaussianElimination](A)$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Кроме этого, из матриц можно конструировать другие с помощью операций удаления и добавления строк и столбцов (см. пакет *LinearAlgebra*).

5.3. Системы линейных уравнений и матричные уравнения

Система линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ может быть решена двумя способами.

Способ 1. Стандартная команда *solve* находит решение системы линейных уравнений, введенных в развернутом виде в числе аргументов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ .... \\ a_{m1}x_m + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Например, решим систему уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 1, \\ 4x - 6y + 2z = 2, \\ 2x - 3y - 11z = 1. \end{cases}$$

Для этого введем систему, назначив ей имя *slau*, и используем в качестве аргумента команды *solve*:

> $slau := \{2 \cdot x - 3 \cdot y + 5 \cdot z = 1, 4 \cdot x - 6 \cdot y + 2 \cdot z = 2, 2 \cdot x - 3 \cdot y - 11 \cdot z = 1\};$

$$slau := \{2x - 3y - 11z = 1, 2x - 3y + 5z = 1, 4x - 6y + 2z = 2\}$$

> $s := solve(slau, [x, y, z])$

$$s := \left[\left[x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}y, y = y, z = 0\right]\right]$$

Результат решения удобно также присвоить переменной. Например, для нахождения частного решения системы в этом случае можно использовать подстановку:

> $subs(\{y=2\}, s)$

$$\left[\left[x=\frac{7}{2},\, 2=2,\, z=0\right]\right]$$

<u>Способ 2</u>. Команда *LinearSolve*(*A*,*b*) из пакета *LinearAlgebra* находит решение уравнения $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ введением аргументов *A* – матрица и *b* – вектор. Можно также ограничиться вводом одной расширенной матрицы системы, то есть матрицей, полученной приписыванием к матрице *A* системы столбца *b* свободных членов.

Решение *slau* в этом случае будет выглядеть следующим образом:

> $A := Matrix([[2,-3,5],[4,-6,2],[2,-3,-11]])$:# *матрица системы slau*
$b := Vector([1,2,1])$:# *столбец свободных членов*
$X := LinearAlgebra[LinearSolve](A, b)$;

$$X := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{3}{2}\_t0_2 \\ \_t0_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Здесь $\_t0_2$ – произвольная постоянная. В этом случае решение получено в виде вектора:

> $whattype(X)$

$$Vector_{column}$$

Если задать сразу расширенную матрицу системы, то результат может быть получен также с использованием команды *LinearSolve*:

> $Ab := Matrix([[2,-3,5,1],[4,-6,2,2],[2,-3,-11,1]])$: # *ввод расширенной матрицы*
$LinearAlgebra[LinearSolve](Ab)$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{3}{2}\_t2_2 \\ \_t2_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Для решения систем линейных уравнений разными методами у команды *LinearSolve* есть целый арсенал дополнительных параметров, о которых можно узнать в справочной системе.

Ядро матрицы

Ядро матрицы *A* – это множество векторов ***x***, произведение матрицы *A* на которые равно нулевому вектору. Они представляют собой решение однородной системы линейных уравнений с матрицей *A*. Найти ядро матрицы *A* можно командой *NullSpace*(*A*):

```
> A := Matrix([[2,-3, 5], [4,-6, 2], [2,-3,-11]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & -6 & 2 \\ 2 & -3 & -11 \end{bmatrix}$$

```
> LinearAlgebra[NullSpace](A)
```

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

5.4. Аналитическая геометрия

Для решения задач евклидовой геометрии в Maple разработаны специализированные пакеты: *geometry* и *geom3d*, назначение функций которых, в основном, соответствует их названию. Весь список команд можно увидеть, подключив пакеты с помощью команды *with*(). Напомним, что назначение любой команды при этом можно узнать, выделив ее в приведенном перечне и нажав <F2>. Рассмотрим применение некоторых из них.

Задачи на плоскости (команды пакета *geometry*)

Основными геометрическими объектами, с которыми работает Maple на плоскости, являются *point* (точка), *segment* (отрезок), *dsegment* (направленный отрезок), *line* (прямая), *triangle* (треугольник), *square* (квадрат), *circle* (окружность), *ellipse* (эллипс), *hyperbola* (гипербола), *parabola* (парабола), *conic* (коническое сечение, включая вырожденные случаи). Для их ввода в аргументах соответствующей команды должны быть указаны имя и необходимые данные для их определения. Рассмотрим эти форматы:

- *point(A,xA,yA)* – точка *A* с координатами *xA* и *yA*;
- *segment(AB,[A,B])* – отрезок *AB*;
- *dsegment*(*AB*,[*A*,*B*]) – направленный отрезок *AB*;

- *line*(*AB*,[*A*,*B*]) – прямая *AB*;
- *triangle*(*ABC*,[*A*,*B*,*C*]) – треугольник *ABC*;
- *square*(*ABCD*,[*A*,*B*,*C*,*D*]) – прямоугольник *ABCD*;
- *circle*(имя, параметры) – окружность;
- *ellipse*(имя, параметры) – эллипс;
- *hyperbola*(имя, параметры) – гипербола;
- *parabola*(имя, параметры) – парабола;
- *conic*(имя, параметры) – коническое сечение.

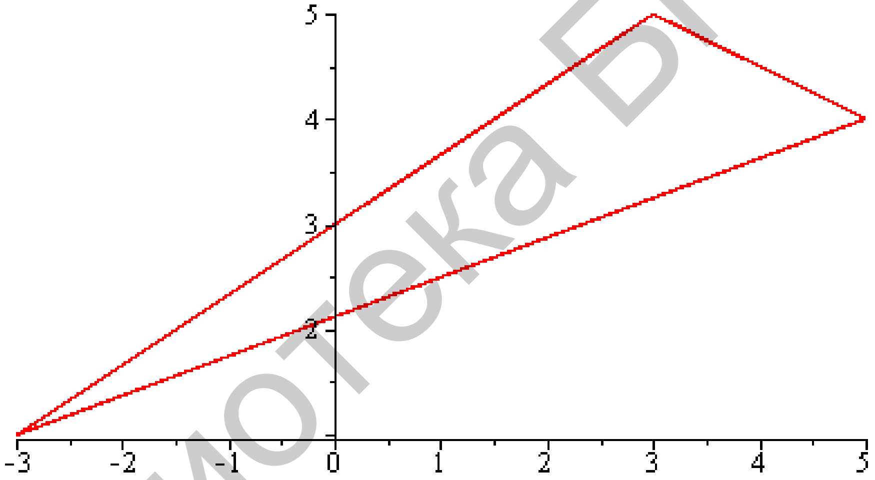
Решим для примера некоторые задачи с треугольником.

Определим и построим треугольник по его вершинам:

> $restart : with(geometry) : triangle(Tr, [point(A, 3, 5), point(B, 5, 4), point(C, -3, 1)])$

$$Tr$$

> $draw(Tr, axes = normal)$



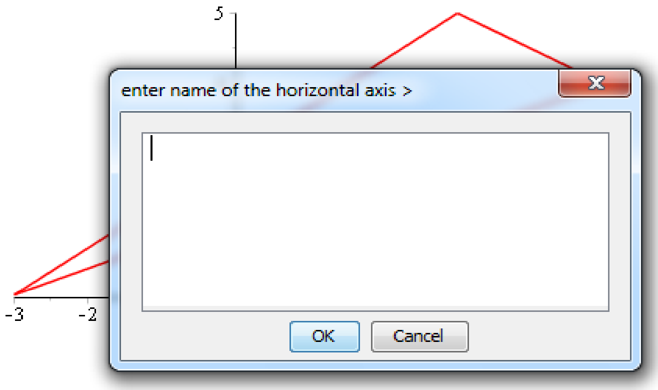
Для вывода уравнения геометрического объекта нужно его задать, а затем вывести с помощью команды *Eqution*(*name*) или *detail*(*name*). При определении объекта Maple запросит имена осей, которым соответствуют переменные. После ввода ответа будет выведено уравнение. Например, найдем уравнение стороны *AC* полученного треугольника. Определим прямую с помощью команды $line(l, [A, C])$ и введем запрос:

> $line(l, [A, C])$

$$l$$

> $Equation(l)$

На экране появится окошко с просьбой ввести имя горизонтальной оси:



Введем *x*, нажмем <enter>, далее появится аналогичное требование по заданию имени вертикальной оси. После ввода *y*, нажав <enter>, получим ответ:

> $Equation(l)$

$$18 + 4x - 6y = 0$$

Можем решить вопрос о принадлежности точки прямой, задав следующую команду:

> $IsOnLine(A, l)$

$$true$$

> $IsOnLine(B, l)$

$$false$$

Углы треугольника можно определить с помощью команды *FindAngle*(*l*1,*l*2), в которой аргументами являются прямые, ограничивающие треугольник.

Найти медиану и ее точку пересечения со стороной можно по следующему сценарию:

> *median*(*mB*, *B*, *Tr*) : *# определение медианы, проходящей через вершину B*
> *detail*(*mB*);*# вывод уравнения заданной медианы*

```
assume that the names of the horizontal and vertical axes are _x
and _y, respectively
```

name of the object *mB*
form of the object *line2d*
equation of the line $15 + \_x - 5\_y = 0$

> *intersection*(*M*, *l*, *mB*) :*# определение точки пересечения медианы и стороны*
> *coordinates*(*M*);*# координаты точки M*

[0,3]

Аналогично можно найти высоту и биссектрису с помощью определяющих их команд *altitude*() и *bisector*() соответственно. С помощью команд пакета можно находить особые точки треугольника, длины ограничивающихся ими отрезков, периметр и площадь, параметры вписанной и описанной окружностей, определять подобие и т. п.

Приведем пример преобразования плоской фигуры с определением ее новых характеристик на примере поворота заданной параболы:

> $f := y^2 = x :$ $parabola(p, f, [x, y])$:*# определение параболы*

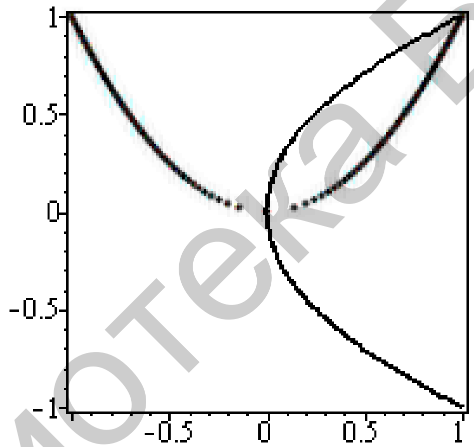
> $point(OO, 0, 0)$:*# определение точки поворота*

> $rotation\left(p1, p, \frac{\pi}{2}, \text{'counterclockwise'}, OO\right)$:*#поворот на угол* $\frac{\pi}{2}$ *против часовой стрелки*

> $detail(\{p1, p\})$*# описание свойств полученных парабол*

$$\left\{\left[\begin{array}{ll} \text{name of the object} & p \\ \text{form of the object} & parabola2d \\ \text{vertex} & [0, 0] \\ \text{focus} & \left[\frac{1}{4}, 0\right] \\ \text{directrix} & x + \frac{1}{4} = 0 \\ \text{equation of the parabola} & y^2 - x = 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ll} \text{name of the object} & p1 \\ \text{form of the object} & parabola2d \\ \text{vertex} & [0, 0] \\ \text{focus} & \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \text{directrix} & y + \frac{1}{4} = 0 \\ \text{equation of the parabola} & x^2 - y = 0 \end{array}\right]\right\}$$

> $draw([p(style = LINE, thickness = 2), p1], style = POINT, color = black)$



<u>Задачи в пространстве (команды пакета *geom3d*)</u>

Для определения пространственных объектов существует гораздо больше конструкций по сравнению с плоскими. Некоторые (*segment, dsegment, line, triangle*) задаются аналогично, другие имеют свои особенности или большее разнообразие. Все подробности представлены в справочной системе.

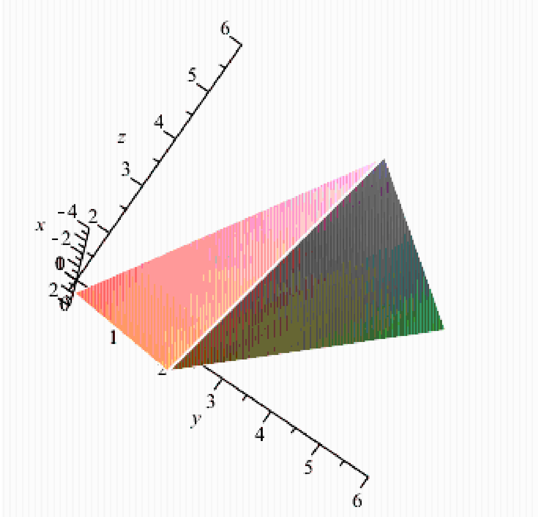
Для примера рассмотрим типичные задачи, которые решаются с пирамидой, заданной своими вершинами:

> $with(geom3d) :$

> $point(A, 1, 3, 6) : point(B, 2, 2, 1) : point(C, 1, 0, 1) : point(S, -4, 6, 3) :$

> $gtetrahedron(Tetr, [S, A, B, C])$:*# задание пирамиды*

> $draw(Tetr, axes = normal)$



Построим уравнение плоскости основания *ABC*:

> *plane*(*p*, [*A*, *B*, *C*]) :# *задание плоскости*
> *detail*(*p*)# *вывод уравнения с уже определенными метками осей*

```
Warning, assuming that the names of the axes are  _x,  _y and  _z
```

name of the object p

form of the object *plane3d*

equation of the plane $13 - 10\_x + 5\_y - 3\_z = 0$

Вычислим площадь основания пирамиды и ее объем:

> *triangle*(*ABC*, [*A*, *B*, *C*]) :# *задание треугольника основания*
> *area*(*ABC*);# *площадь основания*

$$\frac{1}{2}\sqrt{134}$$

> *volume*(*Tetr*);# *объем пирамиды*

$$\frac{37}{3}$$

Упражнения

1. Даны два вектора: $\overline{a} = (1,2,3,4), \overline{b} = (2,-1,4,3)$. Найдите их нормы, скалярное и векторное произведения.

2. Найдите смешанное произведение векторов $\overline{a} = (1,3,-1), \overline{b} = (2,3,1), \overline{c} = (-1,2,4)$ и определите их ориентацию.

3. Из системы векторов $\overline{a_1} = (1,2,2,-1), \overline{a_2} = (1,1,-5,3), \overline{a_3} = (3,2,8,7), \overline{a_4} = (0,1,7,-4)$ выделите базис и ортогонализируйте его.

4. Даны матрицы $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}4 & 5\\ -2 & 1\end{bmatrix}$. Найдите их определители, обратные матрицы и произведение.

5. Получите верхнюю треугольную матрицу, эквивалентную матрице $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 10 & 12 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$. Найдите к ней обратную и $P(A)=A^3+5A^2-3A$.

6. Найдите характеристический многочлен матрицы $A=\begin{bmatrix}-1 & -6 & -4\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -2\end{bmatrix}$, ее собственные значения и собственные векторы.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases}x+y+2z=6,\\ 2x-y=-1,\\ -x+y=z=3\end{cases}$ с помощью формул Крамера, обратной матрицы системы и методом Гаусса.

8. Решите матричное уравнение $AX = B$, где $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{bmatrix}$.

9. Для матрицы $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}$ найдите ее ранг, дефект ($d(A)=n-r(A)$, где n – размерность квадратной матрицы, r – ее ранг) и ядро.

10. Для трех заданных на плоскости точек $A(1,2)$, $B(5,7)$, $C(7,-1)$ постройте треугольник. Определите уравнения его сторон, медиан, высот, биссектрис. Найдите точки пересечения медиан. Определите радиусы вписанной и описанной окружностей. Определите углы треугольника, его периметр и площадь.

11. Постройте пирамиду по ее вершинам $A(5,2,0)$, $B(2,5,0)$, $C(1,2,4)$, $S(-1,1,1)$. Найдите уравнения граней и высоты, проведенной к основанию ABC. Определите угол между ребром AS и плоскостью основания в градусах. Вычислите объем пирамиды и площадь одной из граней.

6. Элементы дискретной математики

6.1. Комбинаторика

Для решения задач с конечными множествами и их конфигурациями в Maple имеется ряд встроенных функций и несколько специализированных пакетов.

Способы задания конечного множества

Для задания в Maple конечного математического множества с помощью перечисления его элементов можно использовать объект типа *set* (набор). Это неупорядоченная последовательность выражений в фигурных скобках, в которой нет повторяющихся элементов. При обработке данных этого типа Maple оставляет каждый элемент в одном экземпляре и упорядочивает их:

> $M := \{3, 2, 3, 1, 7, 2, 6, 5, 4, 8, 2\}$

$$s := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Для определения мощности множества M можно использовать функцию *nops*(*M*):

> $'|M|' = nops(s)$;# *мощность множества M*

$$|M| = 8$$

Значение любого элемента множества можно получить с помощью его индекса согласно порядку, установленному Maple. Для индексации используют натуральные значения (первому элементу соответствует 1) и им противоположные (последнему элементу соответствует(−1)):

> $M[1]; M[4]; M[-1]; M[-2];$

$$1$$
$$4$$
$$8$$
$$7$$

Для выбора из множества нескольких элементов можно использовать объект «диапазон», причем положительные значения индекса соответствуют отсчету элементов слева направо, а отрицательные – справа налево:

> $M1 := M[2..-3]$

$$M1 := \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Если необходимо задать упорядоченное множество с повторяющимися элементами, то можно выбрать объект типа *list* (список). В этом случае элементы сохраняют тот порядок, в котором были введены пользователем. Каждый элемент можно получить с помощью индекса аналогично описанной выше процедуре:

> $L := [3, 1, 1, 3, 2, 4]$# *ввод элементов (сравните с вводом M)*

$$L := [3, 1, 1, 3, 2, 4]$$

> $L[3]; L[-1]; L[3..-2];$

$$1$$

$$4$$

$$[1, 3, 2]$$

Важно заметить, что индексной форме элемента множества, заданного в форме *list*, можно присвоить новое значение, а в форме *set* – нельзя:

> $L[6] := 0; L;$

$$L_6 := 0$$

$$[3, 1, 1, 3, 2, 0]$$

> $M[6] := 0; M;$

```
Error, cannot reassign the entries in a set
```

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Множество можно задать также с помощью характеристического свойства, используя команду *seq*():

> $a := seq\left(\sin\left(\frac{k \cdot \mathrm{Pi}}{4}\right), k = 0..5\right);$

$$a := 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

> $a[1..-1]$

$$0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Еще одним удобным инструментом для определения множества служит операция повторения $:

> $\$3..8$

$$3, 4, 5, 6, 7, 8$$

> $k^2\ \$k = \frac{2}{7}..\frac{16}{7}$

$$\frac{4}{49}, \frac{81}{49}, \frac{256}{49}$$

> $x[k]\$k = 1 ..5$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$

> $y\$4$

$$y, y, y, y$$

В этом случае последовательность выражений сохраняет полученный порядок, и каждый ее элемент имеет индексную форму.

Операции над множествами (табл. 7)

Таблица 7

Перечень операций над множествами

Операция	Математическая запись	Maple-функция	Краткая форма команды
Объединение	$A \bigcup B$	A union B	$A \bigcup B$
Пересечение	$A \bigcap B$	A intersection B	$A \bigcap B$
Вычитание	$A \setminus B$	A minus B	$A \setminus B$
Дополнение	$\overline{A}$	E minus A	$E \setminus A$
Симметрическая разность	$A \oplus B$	(A minus B) union (B minus A)	$(A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$
Подмножество	$A \subseteq B$	A subset B	$A \subseteq B$

Введенные операции можно проводить только для объектов типа *set*. Поэтому для их применения, если тип данных не соответствует, можно воспользоваться командой преобразования *convert*. Например, для множества *L*, заданного с помощью объекта *list*, это просто:

> $convert(L, set)$

$$\{0, 1, 2, 3\}$$

А в случае задания с помощью последовательности выражений − необходимо сначала перевести, например, в табличный тип, используя оператор цикла, а затем конвертировать:

> **for** i **to** 6 **do** $c[i] := a[i]$; **end do**; $convert(c, set)$

$$c_1 := 0$$

$$c_2 := \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$c_3 := 1$$

$$c_4 := \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$c_5 := 0$$

$$c_6 := -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\left\{0, 1, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right\}$$

Вывод всех элементов можно подавить с помощью фиксатора конца команды (:). Сравните в этом случае результат работы команды:

> **for** i **to** 6 **do** $c[i] := a[i]$: **end do**: $convert(c, set)$;# *подавлен вывод*

$$\left\{0, 1, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right\}$$

Рассмотрим результат работы команд на примере трех множеств:

> $A := \{a, a, b, c, d, f\} : B := \{b, b, d, e, f, g\} : C := \{b, d\}$

$$C := \{b, d\}$$

> $A \cup B$;

$$\{a, b, c, d, e, f, g\}$$

> $A \cap B$

$$\{b, d, f\}$$

> $A \setminus B$

$$\{a, c\}$$

> $A \cap B \cap C$

$$\{b, d\}$$

В пакете *combinat* содержатся функции для работы с простейшими комбинаторными конфигурациями. Пакет *combstruct* используется для определения более сложных комбинаторных структур. Рассмотрим полезные функции пакета *combinat*. Для его подключения нужно воспользоваться командой *with*(*combinat*).

Декартово произведение

Для определения декартова произведения $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ n множеств, заданных как тип *set* или *list*, может быть использована функция *cartprod*(*ll*), где *ll* – перечисление заданных множеств в виде списка в квадратных скобках. Эта функция возвращает два значения: *finished* − логическое значение, позволяющее определить последний элемент сгенерированного множества, и *nextvalue* – итерационная процедура для его получения:

$> T := cartprod([\{a, b\}, \{1, 2, 3\}]) :$

$$T := table([nextvalue = \mathbf{proc}(\ )\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}, finished = false]).$$

Для того чтобы вывести полученные элементы можно создать простой цикл, использующий эти значения:

$> T := cartprod([\{a, b\}, \{1, 2, 3\}]) :$

$>$ **while not** $T_{finished}$ **do** $T_{nextvalue}(\ ) :$ **end do**;

$$[a, 1]$$
$$[a, 2]$$
$$[a, 3]$$
$$[b, 1]$$
$$[b, 2]$$
$$[b, 3]$$

С помощью функции *powerset*(*n*) можно сгенерировать множество всех подмножеств совокупности первых *n* натуральных чисел (булеан множества $\{1, 2, \ldots n\}$:

$> powerset(3)$

$$\{\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$> nops(\%)$

$$8$$

Функция *subsets* аналогично *cartprod* позволяет создать итерационный процесс для генерирования булеана конечного множества *M* с помощью процедуры

$> ps := subsets(\{a, b, c\}) :$ **while not** $ps[finished]$ **do** $ps[nextvalue](\ )$;**end do**;

$$\{\ \}$$
$$\{a\}$$
$$\{b\}$$
$$\{c\}$$
$$\{a, b\}$$
$$\{a, c\}$$
$$\{b, c\}$$
$$\{a, b, c\}$$

При решении комбинаторных задач полезным инструментом является биекция между множеством натуральных чисел с нулем и множеством векторов фиксированной длины с целыми неотрицательными компонентами или со множеством одночленов. На примере трехразрядных векторов эти соответствия может продемонстрировать табл. 8.

Таблица 8

Пример биекций

Число	Вектор	Одночлен
0	[0,0,0]	1
1	[1,0,0]	x
2	[0,1,0]	y
3	[0,0,1]	z
4	[2,0,0]	x^2
5	[1,1,0]	xy
6	[1,0,1]	xz
7	[0,2,0]	y^2

В пакете *combinat* есть функция *inttovec*(*i*,*n*), которая возвращает *i*-й вектор длины *n*. С помощью простого цикла можно сгенерировать конечное число таких векторов:

> **for** *i* **from** 0 **to** 10 **do** *inttovec*(*i*, 3) **end do**;

$$[0, 0, 0]$$
$$[1, 0, 0]$$
$$[0, 1, 0]$$
$$[0, 0, 1]$$
$$[2, 0, 0]$$
$$[1, 1, 0]$$
$$[1, 0, 1]$$
$$[0, 2, 0]$$
$$[0, 1, 1]$$
$$[0, 0, 2]$$
$$[3, 0, 0]$$

Вторая функция *vectoint*(*L*) по заданному вектору возвращает соответствующее ему натуральное число. Например:

> *vectoint*([0, 0, 2]);

$$9$$

Перестановки

Функция *permute*(*n*) при натуральном значении *n* генерирует все перестановки множества {1,2,…,*n*} и представляет результат как список списков. Это позволяет, присвоив полученному множеству имя, получить доступ к его любому элементу, то есть к любой перестановке. Число P_n полученных перестановок можно определить, найдя мощность полученного множества:

> $P := permute(3)$*# находим перестановки из элементов множества {1,2,3}*

$$P := [[1, 2, 3], [1, 3, 2], [2, 1, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2], [3, 2, 1]]$$

> $P[2]$;*#находим вторую перестановку в полученном множестве*

$$[1, 3, 2]$$

> $nops(P)$*#определяем число перестановок*

$$6$$

Для нахождения числа перестановок произвольного множества из n элементов без повторений ($P_n = n!$) можно воспользоваться функцией *numbperm*(n):

> $numbperm(50)$

$$30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000$$

Если в качестве аргумента функции *permute* задать конкретное множество, то она сгенерирует все его перестановки. Сравните результаты работы при вводе множества с помощью различных типов данных:

> $permute(\{b, a, c\})$

$$[[a, b, c], [a, c, b], [b, a, c], [b, c, a], [c, a, b], [c, b, a]]$$

> $permute([b, a, c])$

$$[[b, a, c], [b, c, a], [a, b, c], [a, c, b], [c, b, a], [c, a, b]]$$

> $permute([a, a, b, c])$

$$[[a, a, b, c], [a, a, c, b], [a, b, a, c], [a, b, c, a], [a, c, a, b], [a, c, b, a], [b, a, a, c], [b, a, c, a], [b, c, a, a], [c, a, a, b], [c, a, b, a], [c, b, a, a]]$$

> $permute(\{a, a, b, c\})$

$$[[a, b, c], [a, c, b], [b, a, c], [b, c, a], [c, a, b], [c, b, a]]$$

Для нахождения числа перестановок, когда каждый элемент входит заданное число раз, можно воспользоваться известной комбинаторной формулой $P_n(n_1,...,n_m) = \dfrac{(n_1 + ... + n_m)!}{n_1! \cdot ... \cdot n_m!}$, которая вычисляется функцией *multinomial* $(n, n_1, ... n_m)$, или сгенерировать это множество, а затем определить его мощность. Сравните:

> $permute([a, a, b, b, b, c, c, c, c])$:

> $nops(\%)$

1260

> $multinomial(9, 2, 3, 4)$

1260

Функция *randperm*(*M*) генерирует случайную перестановку множества *M*, которое задано в виде *set* или *list*, а если аргумент представлен натуральным числом, − множества первых *n* натуральных чисел:

> $randperm(\{a, b, c\})$

$[b, c, a]$

> $randperm(5)$

$[2, 3, 4, 5, 1]$

Размещения

Функция *permute*(*n,m*) при натуральных значениях *n* и *m* генерирует все размещения множества $\{1,2,\ldots,n\}$ по *m* элементов без повторения и представляет результат как список списков. Это позволяет, присвоив полученному множеству имя, получить доступ к его любому элементу, то есть к любому размещению. Число A_n^m полученных размещений можно определить, найдя мощность полученного множества или воспользовавшись функцией *numberm*(*n,m*):

> $permute(3, 2)$#*генерирование всех размещений из 3 по 2*

$[[1, 2], [1, 3], [2, 1], [2, 3], [3, 1], [3, 2]]$

> $nops(\%)$

6

> $numbperm(3, 2)$#*число размещений из 3 по 2*

6

Если в качестве первого аргумента функции *permute* указать конкретное множество в виде *set* или *list*, то в первом случае будут сгенерированы все размещения без повторения элементов, а во втором – с тем количеством повторений, которые будут заданы в списке:

> $permute(\{a, b, c\}, 2)$#*размещение без повторения*

$[[a, b], [a, c], [b, a], [b, c], [c, a], [c, b]]$

> $nops(\%);$

6

> $permute([a, a, b, b, c, c], 2)$#*размещение с повторениями всех элементов*

$[[a, a], [a, b], [a, c], [b, a], [b, b], [b, c], [c, a], [c, b], [c, c]]$

> $nops(\%)$# *число размещений из 3 по 2 с повторением*

$$9$$

> *permute*$([a, a, b, c], 2)$*#размещение с повторением только одного элемента*

$$[[a, a], [a, b], [a, c], [b, a], [b, c], [c, a], [c, b]]$$

<u>Сочетания</u>

Функция *choose*(*n,m*) при натуральных значениях *n* и *m* генерирует все сочетания множества $\{1,2,\ldots,n\}$ по *m* элементов без повторения и представляет результат как список списков:

> *choose*$(3, 2)$*#генерирование всех сочетаний из 3 по 2*

$$[[1, 2], [1, 3], [2, 3]]$$

Это позволяет, присвоив полученному множеству имя, получить доступ к его любому элементу, то есть к любому сочетанию.

Число C_n^m полученных сочетаний можно определить, найдя мощность полученного множества или воспользовавшись функцией *numbcomb*(*n,m*):

> *nops*(*%*)

$$3$$

> *numbcomb*$(3, 2)$

$$3$$

Если в качестве первого аргумента функции *choose* указать конкретное множество в виде *set* или *list*, то в первом случае будут сгенерированы все сочетания без повторения элементов, а во втором – с тем количеством повторений, которые будут заданы в списке:

> *choose*$(\{a, b, c\}, 2)$*# сочетания из 3 по без повторений*

$$\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

> *choose*$([a, a, b, b, c, c], 2)$*#сочетания с повторениями из 3 по 2*

$$[[a, a], [a, b], [a, c], [b, b], [b, c], [c, c]]$$

> *nops*(*%*)

$$6$$

> *numbcomb*$(4, 2)$

$$6$$

Сравните последнее значение с результатом, полученным по формуле $\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

Функция *randcomb*(*M,m*) генерирует случайное сочетание из элементов множества *M* по *m*, которое задано в виде *set* или *list*, а если аргумент представлен двумя натуральными числами, − случайное сочетание из множества первых *m* натуральных чисел по *m*:

> $randcomb(10, 7)$

$$\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

>

Рекуррентные соотношения и производящие функции

Для нахождения общего и частного решений рекуррентного соотношения, а также его производящей функции можно использовать функцию *rsolve* с соответствующими аргументами и параметрами. Рассмотрим различные случаи на примере рекуррентного соотношения $f(n) = 5f(n-1) - 6f(n-2)$. Записав в качестве первого аргумента функции заданное соотношение, а в качестве второго – переменную для обозначения общего члена искомой последовательности (например, f, $f(n)$, $f(k)$), получим выражение, в котором произвольные постоянные будут выражены через нулевой и первый члены:

> $rseq := f(n) = 5f(n-1) - 6f(n-2);\ rsolve(rseq, f(n))$

$$rseq := f(n) = 5f(n-1) - 6f(n-2)$$

$$-(2f(0) - f(1))\,3^n - (-3f(0) + f(1))\,2^n$$

Если первый аргумент представляет собой множество, содержащее, кроме самого равенства, начальные условия, то будет получено частное решение:

> $rsolve(\{rseq, f(0) = 2, f(1) = 3\}, f)$

$$-3^n + 3\,2^n$$

Наконец, для нахождения производящей функции для заданной последовательности необходимо добавить специальный параметр:

> $rsolve(\{rseq, f(0) = 2, f(1) = 3\}, f, 'genfunc'(x))$

$$\frac{2 - 7x}{6x^2 - 5x + 1}$$

Для работы с производящими функциями можно использовать также специализированный пакет *genfunc*, который содержит несколько функций для работы с производящими функциями:

> $with(genfunc);$

[*rgf_charseq*, *rgf_encode*, *rgf_expand*, *rgf_findrecur*, *rgf_hybrid*, *rgf_norm*, *rgf_pfrac*, *rgf_relate*, *rgf_sequence*, *rgf_simp*, *rgf_term*, *termscale*]

Например, команда *rgf_sequence* позволяет построить по заданной производящей функции соответствующую рекуррентную последовательность и определить начальные значения и порядок, а также сгенерировать ее элементы:

> $Gz := \dfrac{1+2z}{1-3z-4z^2}$:*#производящая функция (вывод на экран подавлен)*

> $rgf\_sequence\left('recur', \dfrac{1+2z}{1-3z-4z^2}, z, f, n\right)$*# рекуррентное соотношение*

$$f(n) = 3f(n-1) + 4f(n-2)$$

> $rgf\_sequence('boundary', Gz, z, f)$*#начальные условия*

$$f(0) = 1, f(1) = 5$$

> $rgf\_sequence('order', Gz, z)$
 # определение порядка полученного рекуррентного соотношения

$$2$$

> **for** i **from** 0 **to** 10 **do** $f(i) = rgf\_term(Gz, z, i)$ **end do**;*# генерирование последовательности*

$$f(0) = 1$$
$$f(1) = 5$$
$$f(2) = 19$$
$$f(3) = 77$$
$$f(4) = 307$$
$$f(5) = 1229$$
$$f(6) = 4915$$
$$f(7) = 19661$$
$$f(8) = 78643$$
$$f(9) = 314573$$
$$f(10) = 1258291$$

Разбиения и композиции чисел

Получить все разбиения натурального числа *n* на неубывающие последовательности натуральных чисел, суммы которых равны *n* при условии, что порядок учитывается, можно с помощью функции *combinat* пакета *partition*(*n*):

> $partition(5)$

$$[[1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 2], [1, 2, 2], [1, 1, 3], [2, 3], [1, 4], [5]]$$

> $nops(\%)$

$$7$$

Таким образом, число 5 можно представить в виде семи сумм натуральных чисел с точностью до порядка слагаемых.

Если необходимо сгенерировать разбиения с максимальным значением *m* слагаемых, то используется команда с дополнительным параметром *m*:

> $partition(5, 2)$

$$[[1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 2], [1, 2, 2]]$$

Для каждого из разбиений *p* можно определить сопряженное с помощью функции *conjpart*(*p*). Найдем сопряженное к разбиению 5 = 2 + 3 и для наглядности построим диаграмму Ферререса для них:

> $conjpart([2, 3])$

$$[1, 2, 2]$$

>
$with(plots) : pointplot([[1, 3], [2, 3], [1, 2], [2, 2], [3, 2], [6, 3], [6, 2], [7, 2], [6, 1], [7, 1]], axes = none)$

Напомним, что транспозиция диаграммы Ферререса определяет биективное соответствие между разбиениями числа *n* на *k* слагаемых и разбиениями числа *n* с наибольшим слагаемым, равным *k*.

Функция *numbpart*(*n*) определяет число разбиений числа *n*. С ее помощью построим производящую функцию для такой последовательности значений и проверим справедливость пентагональной теоремы Эйлера:

> $GP := sum\left(numbpart(n) \cdot x^n, n = 0..10\right)$

$$GP := 42\,x^{10} + 30\,x^9 + 22\,x^8 + 15\,x^7 + 11\,x^6 + 7\,x^5 + 5\,x^4 + 3\,x^3 + 2\,x^2 + x + 1$$

> $series\left(\frac{1}{GP}, x, 10\right)$

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 + \mathrm{O}\left(x^{11}\right)$$

> $series\left(expand\left(\prod_{i=1}^{12}\left(1 - x^i\right)\right), x, 9\right)$

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 + O(x^{12})$$

Аналогичные задачи можно решать и по композициям натуральных чисел с дополнительным требованием – учетом порядка следования слагаемых. Для этих целей в пакете *combinat* предусмотрены функции *composition*, *numbcomp* и некоторые другие (см. в справочной системе).

Последовательности специальных чисел

Кроме перечисленных выше задач в пакете *combinat* можно генерировать последовательности специально определенных чисел. Это биномиальные коэффициенты, числа Фибоначчи, Стирлинга, Каталана, Белла и др.

6.2. Алгебра логики

В Maple имеется пакет *Logic*, в котором можно, используя двоичную логику, совершать некоторые действия над булевыми функциями. В частности, получать для заданной в виде аналитического выражения булевой функции ее канонические формы, минимальную ДНФ, представлять в виде полиномов Жегалкина и т. п. В отличие от логических переменных Maple, которые поддерживают трехзначную логику, в этом пакете можно работать только с булевыми значениями. Отличие операций связано с наличием нейтрального оператора &, приписанного в виде префикса ко всем именам логических операторов. Например, &**or**, &**ob**, &**not** и т. д. Например,

```
> with(Logic) :
> a := BooleanSimplify((x &and z &and (&not y)) &or (x &and z &and y))
                              a := x &and z
```

Среди функций Maple также можно найти работающие с таблицами истинности. Рассмотрим на примере построения простых процедур возможность получить таблицу истинности в привычном формате. Для этого определим через процедуры-функции, не привлекая специализированные пакеты, логические функции, а затем по таблице истинности построим совершенную дизъюнктивную нормальную форму:

```
#Определение конъюнкции
con := proc(x, y)
>     min(x, y)
end:
#Определение дизъюнкции
diz := proc(x, y)
    max(x, y)
end:
#Определение отрицания
no := proc(x)
    1 - x
end:
#Определение эквиваленции
eqv := proc(x, y)
    diz(con(no(x), no(y)), con(x, y))
end:
```

```
#Задача. Построить таблицу истинности заданной функции и СДНФ.
f := (x, y, z) → eqv(x, diz(y, no(z)));
#Ввод столбцов значений переменных
a := [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1] :
b := [0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1] :
c := [0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1] :
p := [seq(f(a[i], b[i], c[i]), i = 1 ..8)] :
LinearAlgebra[Transpose](Matrix([a, b, c, p]));#Распечатка таблицы в виде матрицы
#Построение СДНФ
 pow := proc(x, y)#определение "степени"
if y = 1 then x else 1 - x end if:
end:
add(add(add(f(i, j, k)·(pow(x, i)·pow(y, j)·pow(z, k)), i = 0 ..1), j = 0 ..1), k = 0 ..1);
```

$$(x, y, z) \rightarrow eqv(x, diz(y, no(z)))$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x\,(1-y)\,(1-z) + x\,y\,(1-z) + (1-x)\,(1-y)\,z + x\,y\,z$$

```
> #Определение конъюнкции
  con := proc(x, y)
     min(x, y)
  end:
  #Определение дизъюнкции
  diz := proc(x, y)
     max(x, y)
  end:
  #Определение отрицания
  no := proc(x)
     1 - x
  end:
  #Определение эквиваленции
  eqv := proc(x, y)
     diz(con(no(x), no(y)), con(x, y))
  end:
```

$$(x, y, z) \rightarrow eqv(x, diz(y, no(z)))$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x\,(1-y)\,(1-z) + x\,y\,(1-z) + (1-x)\,(1-y)\,z + x\,y\,z$$

Последнее выражение соответствует СДНФ $x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xyz$.

6.3. Графы

В Maple имеется два пакета, помогающих решить задачи на графах: это пакет *networks* ранних версий системы и *GraphTheory* – более поздних. Рассмотрим некоторые из функций (их количество превышает 150) второго пакета, которые доступны лишь после его подключения. Одна часть из них используется для описания и изображения графов, другая – для операций с заданными графами, проверки их свойств, третья – для решения задач на графах. Существует ограничение: Maple работает с простыми графами (без петель и кратных ребер).

Рассмотрим несколько примеров задания графов и решения на них задач с помощью процедур пакета.

Способы задания графов

Для задания графа как объекта Maple используется команда *Graph*() с потенциально большим перечнем аргументов. Они зависят, главным образом, от способа задания графа и его типа (см. справочную систему). В основном, это следующие действия: задать пустой граф с его порядком, а затем добавить ребра (дуги); перечислить определенным способом его вершины и ребра; ввести матрицу смежности или весовую и т. п. Рассмотрим примеры разных способов задания графов и их изображения.

> *with*(*GraphTheory*) : # *подключение пакета*

> *G* := *Graph*(7)# *определение пустого графа 7-го порядка*

G := *Graph 1: an undirected unweighted graph with 7 vertices and 0 edge(s)*

> *Vertices*(*G*) # *контроль введенных вершин*

$$[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$$

> *Edges*(*G*)# *контроль введенных ребер*

$$\{\ \}$$

> *G1* := *Graph*({{*a*, *b*}, {*b*, *c*}, {*c*, *a*}, {*a*, *d*}}) # *ввод списка ребер (без направления)*

G1 := *Graph 2: an undirected unweighted graph with 4 vertices and 4 edge(s)*

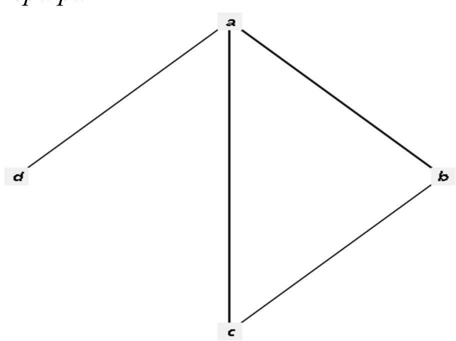
> *Vertices*(*G1*)

$$[a, b, c, d]$$

> *Edges*(*G1*)

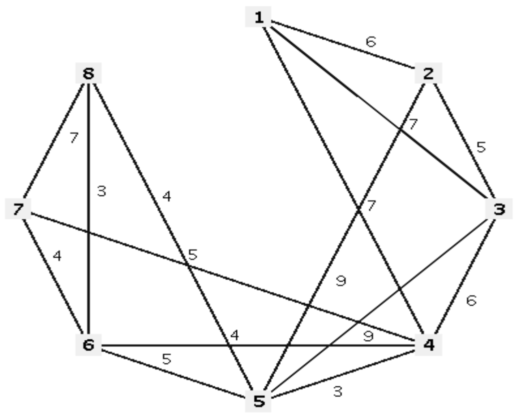
$$\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}\}$$

> *DrawGraph*(*G1*)# *изображение графа*



> *G2* := *Graph*({[{1, 2}, 6], [{1, 3}, 7], [{1, 4}, 7], [{2, 3}, 5], [{2, 5}, 9], [{3, 4}, 6], [{3, 5}, 9], [{4, 5}, 3], [{4, 6}, 4], [{4, 7}, 5], [{5, 6}, 5], [{5, 8}, 4], [{6, 7}, 4], [{6, 8}, 3], [{7, 8}, 7]}) :# *взвешенный неориентированный граф*

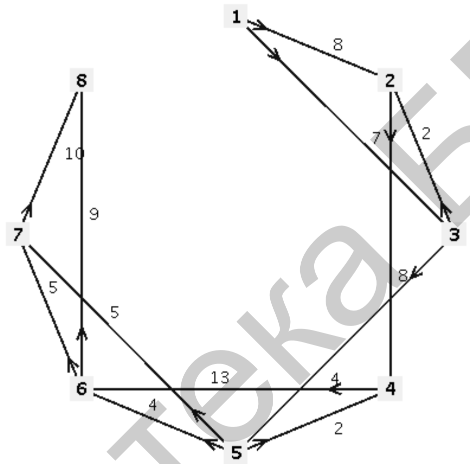
> *DrawGraph*(*G2*)# *изображение графа*



A := *Matrix*([[0, 8, 7, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0], [0, 2, 0, 0, 4, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 13, 0, 0], [0, 0, 0, 2, 0, 4, 5, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 5, 9], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 10], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]])
:

G3 := *Digraph*(*A*, *weighted*) :*# задание ориентированного графа через весовую матрицу*

\> *DrawGraph*(*G3*)



Задачи на графах

1. Задача о максимальном потоке.

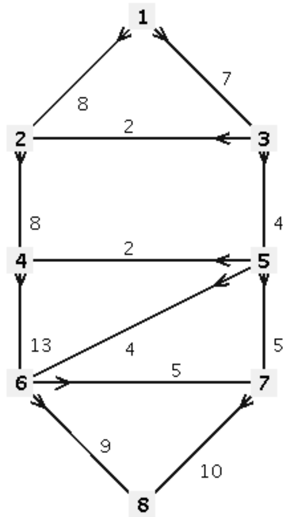
\> *with*(*GraphTheory*) :

A := *Matrix*([[0, 8, 7, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0], [0, 2, 0, 0, 4, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 13, 0, 0], [0, 0, 0, 2, 0, 4, 5, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 5, 9], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 10], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]])
:

N := *Digraph*(*A*, *weighted*) :
IsNetwork(*N*);

$$\{1\}, \{8\}$$

DrawNetwork(*N*);



MaxFlow$(N, 1, 8)$;

$$12, \begin{bmatrix} 0 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Задача о нахождении кратчайших путей.

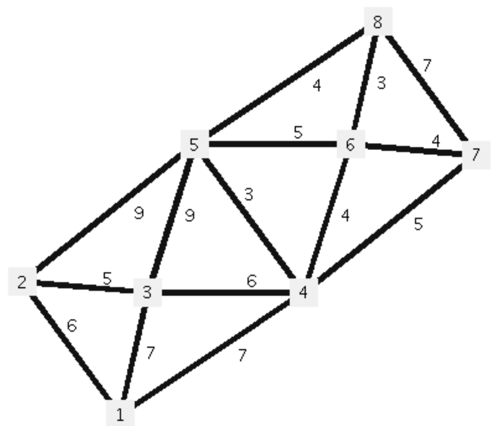
\>

$G := Graph(\{[\{1, 2\}, 6], [\{1, 3\}, 7], [\{1, 4\}, 7], [\{2, 3\}, 5], [\{2, 5\}, 9], [\{3, 4\}, 6], [\{3, 5\}, 9], [\{4, 5\}, 3], [\{4, 6\}, 4], [\{4, 7\}, 5], [\{5, 6\}, 5], [\{5, 8\}, 4], [\{6, 7\}, 4], [\{6, 8\}, 3], [\{7, 8\}, 7]\})$:

DijkstrasAlgorithm$(G, 1, [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8])$;

$[[[1, 2], 6], [[1, 3], 7], [[1, 4], 7], [[1, 4, 5], 10], [[1, 4, 6], 11], [[1, 4, 7], 12], [[1, 4, 5, 8], 14]]$

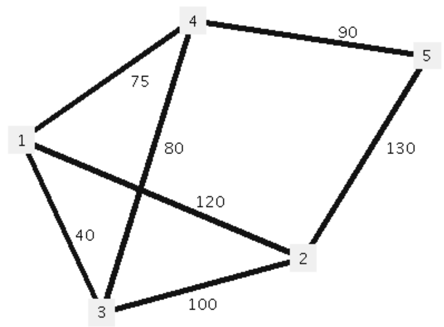
DrawGraph$(G, style = spring)$;



3. Задача коммивояжера.

>
$G1 := Graph(\{[\{1,2\},120],[\{1,3\},40],[\{1,4\},75],[\{2,3\},100],[\{2,5\},130],[\{3,4\},80],[\{4,5\},90]\})$:

DrawGraph(*G1*, *style* = *spring*);

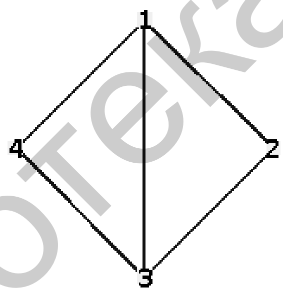


TravelingSalesman(*G1*);

$$435, [1, 3, 2, 5, 4, 1]$$

4. Задача о хроматическом числе и полиноме.

> $G2 := Graph(\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{3,4\}\})$:
DrawGraph(*G2*);



ChromaticNumber(*G2*); *# хроматическое число*

$$3$$

ChromaticPolynomial(*G2*,'*x*');

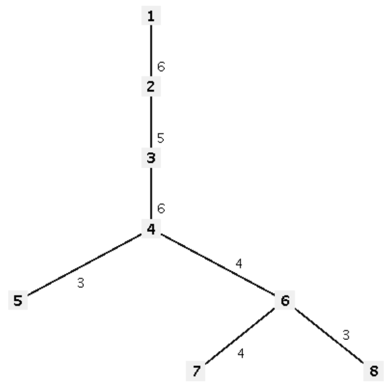
$$x (x-1) (x-2)^2$$

$expand\big(x (x-1) (x-2)^2\big)$;*# приведение многочлена к стандартному виду*

$$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x$$

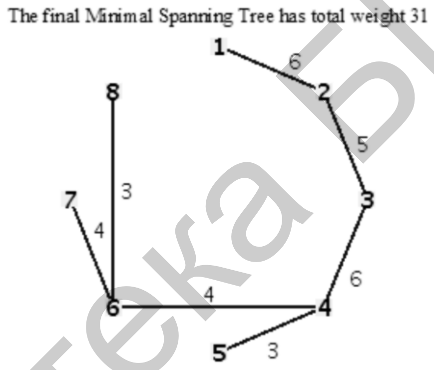
5. Задача о минимальном остовном дереве (граф из задачи 2).

> *G3* := *MinimalSpanningTree*(*G*) :
DrawGraph(*G3*); *# построенное дерево*

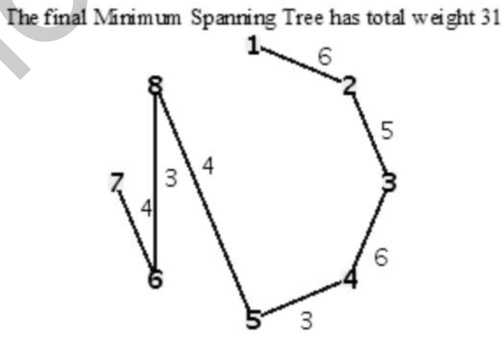


Можно также решить эту задачу с помощью других алгоритмов и в анимированной форме, наблюдая за процессом построения. Покажем лишь последний кадр.

KruskalsAlgorithm(*G*,'*w*', *animate*);# *анимация алгоритма Краскала*



PrimsAlgorithm(*G*,'*w*', *animate*); # *анимация алгоритма Прима*



Сравните полученные результаты.

6.4. Элементы теории чисел

В Maple для решения некоторых задач теории чисел существует специализированный пакет процедур:

> $with(numtheory);$

$$[GIgcd, bigomega, cfrac, cfracpol, cyclotomic, divisors, factorEQ, factorset, fermat, imagunit, index, integral\_basis, invcfrac, invphi, iscyclotomic, issqrfree, ithrational, jacobi, kronecker, \lambda, legendre, mcombine, mersenne, migcdex, minkowski, mipolys, mlog, mobius, mroot, msqrt, nearestp, nthconver, nthdenom, nthnumer, nthpow, order, pdexpand, \phi, \pi, pprimroot, primroot, quadres, rootsunity, safeprime, \sigma, sq2factor, sum2sqr, \tau, thue]$$

Мы рассмотрим лишь некоторые операции по определению объектов в Maple, с которыми оперирует классическая теория чисел.

Приведем примеры некоторых целочисленных функций:

1) *factorial*(*n*) – факториал числа *n*;
2) *iquo*(*a*,*b*) – частное от деления числа *a* на число *b*;
3) *irem*(*a*,*b*) – остаток от деления числа *a* на число *b*;
4) *igcd*(*a*, *b*) − наибольший общий делитель чисел *a* и *b*;
5) *lcm*(*a*,*b*) − наименьшее общее кратное чисел *a* и *b*;

В исполнении Maple это будет выглядеть следующим образом:

> factorial(50)

$$30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000$$

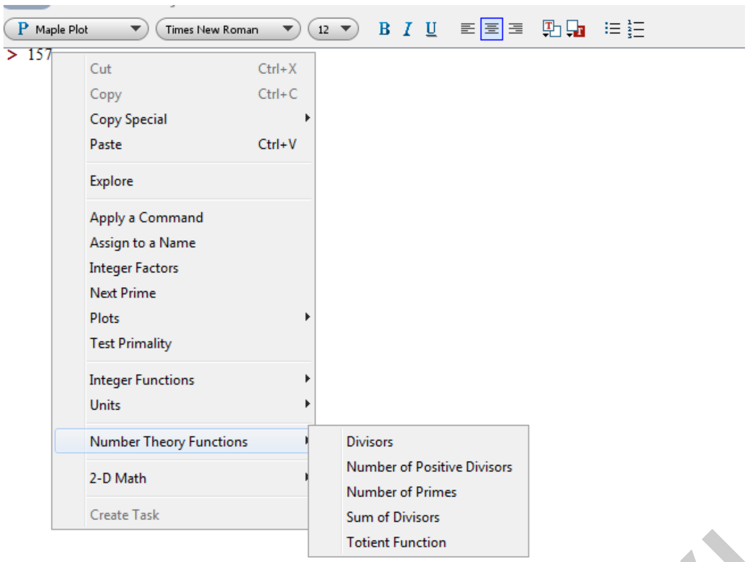
> $igcd(1575, 9725)$

$$25$$

> $lcm(27, 99)$

$$297$$

Кроме этого, при вводе целого числа можно вызвать контекстное меню, в котором есть раскрывающаяся вкладка *Number Theory Functions* (Функции теории чисел):



Приводим некоторые результаты, полученные таким способом, для числа 50:

```
> numtheory:-divisors(50);# список делителей числа 50
```

$$\{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$$

```
> numtheory:-sigma(50);# сумма делителей числа 50
```

$$93$$

```
> numtheory:-tau(50);#количество делителей числа 50
```

$$6$$

```
> numtheory:-pi(50);# количество простых чисел, не превосходящих
50
```

$$15$$

Оператор композиции @@ может использоваться для создания сложных функций, содержащих цепные дроби:

> $f := a \rightarrow \frac{1}{1+a}$

$$f := a \rightarrow \frac{1}{1+a}$$

> $(f@@4)(a)$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}}}$$

В заключение заметим, что в Maple реализован большой список функций для работы в конечных кольцах и полях.

Упражнения

1. На универсальном множестве десятичных цифр выполните следующие операции над множествами $A=\{0,1,2,3,4,5\}$, $B=\{4,5,6,7\}$:

$A\bigcup B, A\bigcap B, A\setminus B, B\setminus A, \overline{A}, A\oplus B$.

2. Даны множества: делителей числа 1235, корней уравнения $x^3-33x^2+279x-247=0$ и нечетных чисел от 1 до 65 включительно. Найдите множества $A\bigcup B, B\bigcup C, (A\bigcup B)\bigcap C, A\bigcap B\bigcap C$.

3. Даны множества $A=\{a,b,c,d\}, B=\{1,2,3\}$. Выведите элементы прямого произведения $A\times B$ этих множеств. Определите мощности множеств и число их подмножеств.

4. На множестве $A=\{1,2,3,4,5\}$ задано бинарное отношение $R=\{(x,y)\in A^2 : x+y<7\}$. Составьте его матрицу. Изобразите на координатной плоскости элементы этого отношения и соответствующий ему граф.

5. Найдите последовательность, заданную рекуррентным соотношением $f(n+2)=7f(n+1)-6f(n)+(2n-1)3^n$ и начальными условиями $f(0)=0,\ f(1)=1$. Постройте для найденной последовательности производящую функцию. Упростите, если необходимо, полученное выражение.

6. Найдите коэффициент при x^5y^9 в разложении $(2x+3y)^{14}$.

7. Для булевой функции $f(x,y,z)=xy\oplus z\to \overline{z}\vee y\,|\,\overline{x}$ постройте таблицу истинности, запишите ее характеристическое множество, постройте СДНФ и упростите, если необходимо.

8. Функции заданы своими характеристическими множествами:

$$M_f^1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}, M_g^1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

Найдите характеристические множества и ДНФ функций $\overline{f}, \overline{g}, f\vee g, fg, f\to g, f\oplus g, f\leftrightarrow g$.

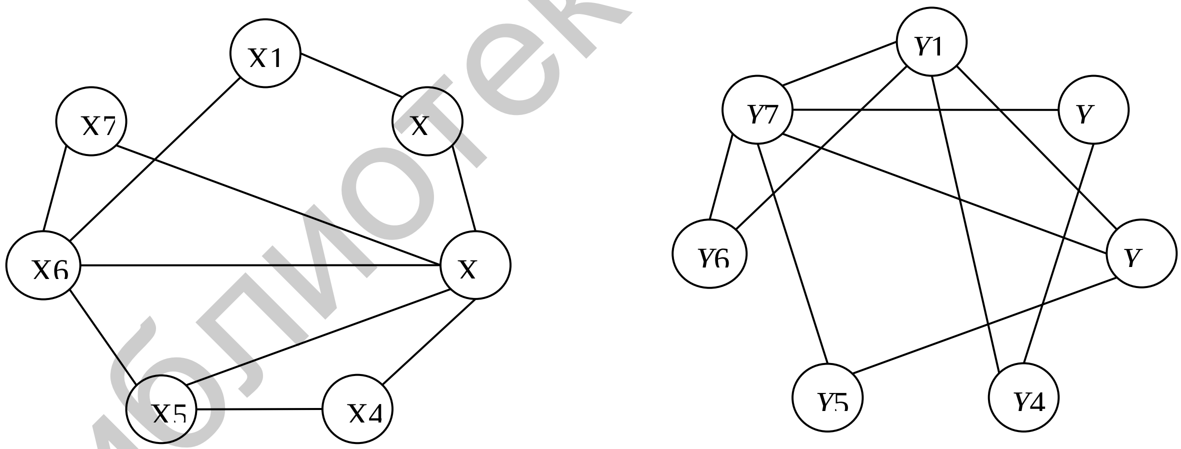
9. Изобразите неориентированный граф со множеством $V=\{a,b,c,d,e,g\}$ вершин и множеством $E=\{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,g\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{d,e\}\}$ ребер. Составьте его матрицы смежности и инцидентности. Определите степени вершин. Выясните, является ли он планарным. Найдите хроматическое число и полином.

10. Изобразите орграф со множеством $V=\{a,b,c,d\}$ вершин и множеством $E=\{(a,b),(b,c),(b,d),(c,d),(d,a),(d,b)\}$ дуг. Составьте его матрицы смежности и инцидентности.

11. Определите связный неориентированный простой граф седьмого порядка с десятью ребрами. Выведите его изображение. Найдите матрицы смежности, инцидентности, радиус, диаметр и центр. Постройте реберный (сопряженный) граф.

12. Припишите ребрам графа из задачи 9 вес (положительное число). Для полученного взвешенного графа постройте минимальное остовное дерево разными методами.

13. Определите, изоморфны ли графы.



14. Найдите:

1) всевозможные комбинации чисел от 1 до 6;

2) всевозможные комбинации по 3 числа из чисел от 1 до 5;

3) представление числа 10 в виде суммы натуральных слагаемых;

4) представление числа 10 в виде суммы трех натуральных слагаемых;

5) число Фибоначчи с номером 100;

6) количество простых делителей числа 100;

7) положительные делители числа 100;

8) простые делители числа 100;

9) разложение числа 10 560 на простые множители;

10) 100-е простое число;

11) наименьшее общее кратное чисел 11, 15, 9;

12) наибольший общий делитель чисел 550, 220, 60;

13) остаток от деления 4328 на 22;

14) число сочетаний C_{100}^{26};

15) число размещений A_{11}^{4}.

Литература

1. Савотченко С. Е. Методы решения математических задач в Maple : учеб. пособие / С. Е. Савотченко, Т. Г. Кузьмичева. – Белгород : Белаудит, 2001. – 116 с.

2. Матросов, А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики / А. В. Матросов. – СПб. : BHV– Санкт-Петербург, 2001. – 528 с.

3. Манзон, Б. М. Maple V Power Edition / Б. М. Манзон. – М. : Филинъ, 1998. – 240 с.

4. Дьяконов, В. П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. / В. П. Дьяконов. – М. : СОЛОН-пресс, 2006. – 719 с.

5. Garvan F. The Maple Book. – CRC Press Comp., 2002. – 462 p.

6. Getting Started with Maple. 3d Ed. – Wiley, 2009. – 208 p.

7. An Introduction to Modern Mathematical Computing with Maple. – London : Springer, 2011. − 216 p.

8. Maple User Manual. –Maplesoft, 2014. – 340 p.

Учебное издание

Калугина Марина Алексеевна
Лапицкая Наталья Владимировна

РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В MAPLE. ПРАКТИКУМ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *Е. С. Чайковская*
Компьютерная правка, оригинал-макет *Е. Д. Степусь*

Подписано в печать 14.09.2015. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л.7, 79. Уч.-изд. л. 6,4. Тираж 100 экз. Заказ 292.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
ЛП №02330/264 от 14.04.2014.
220013, Минск, П. Бровки, 6