АЛГОРИТМЫ ГЕНЕРАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ С ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

И. А. Малашкевич
Кафедра информационно-вычислительных систем, Поволжский государственный технологический университет
Йошкар-Ола, Республика Марий Эл, Россия
E-mail: MalashkevichIA@volgatech.net

В статье приведен анализ вычислительной эффективности нескольких алгоритмов генерации случайных чисел с гамма распределением.

Введение

Моделирование реальных процессов и изучение эффективности технических систем требует генерирования случайных сигналов и полей с заданными статистическими законами. Эта задача возникает в различных областях - от систем анализа речи и обнаружения сигналов до обработки видео и распознавания образов. Разнообразие проблем, в которых используются методы моделирования случайных сигналов[1], требует эффективных вычислительных алгоритмов формирования случайных чисел с существенно негауссовским законом распределения.

Широкий спектр случайных сигналов и полей описывается семейством многомерных распределений Котца[2]. Можно показать, что амплитуда случайного вектора Котца подчиняется обобщенному закону Гамма-распределения с функцией плотности[2,3] (1).

$$p(z) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha\beta-1} exp(-z^{\beta}) \tag{1}$$

где $z \geq 0$ – случайная величина; $\alpha, \beta > 0$ – параметры распределения. К этому распределению также сводятся различные семейства статистических распределений, такие как χ-квадрат, распределение Стьюдента, Фишера, Эрланга, Вейбулла, Накагами и др. Плотность (1) с помощью подстановки $x = z^{1/\beta}$ приводится к Гамма-распределению (2):

$$p(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} exp(-x). \tag{2}$$

I. Алгоритмы генерирования чисел с Гамма-распределением

Для генерирования случайных чисел, подчиняющихся распределению (2), разработано большое количество алгоритмов [3-11]. Наиболее эффективные из них используют метод отбора (метод фон Неймана, rejection method). При этом используются различные мажорирующие функции и дополнительные приемы сжатия области отбора [8] случайных чисел. Вместе с тем, при оценке эффективности алгоритмов генерации в качестве критерия обычно используется средние значение количества тестовых случайных чисел с равномерным распределением, необходимых для получения одного случайного числа с заданным распределением. Такой подход позволяет получить теоретическую оценку вычислительной эффективности, однако не учитывает затраты на вычисления трансцендентных функций, применяемых в алгоритмах. На практике важна комплексная оценка эффективности алгоритмов, описывающая средние затраты времени на генерацию одного случайного числа.

Множество методов генерации случайных чисел с распределением (2) разделяется на два класса. В одном из них рассматриваются алгоритмы с параметром $0 < \alpha < 1$, в других – с параметром $\alpha > 1$. Вместе с тем, любой из этих методов может быть положен в основу универсального алгоритма генерации с произвольным параметром $\alpha > 0$. Действительно, если используется алгоритм генерации с параметром $\alpha > 1$, то случайные числа с параметром $0 < \alpha < 1$ можно получить с помощью (3)

$$X_{\alpha} = X_{\alpha+1} U^{1/\alpha} \tag{3}$$

Если же использован алгоритм с параметром $0 < \alpha < 1$, то случайные числа с параметром $\alpha > 1$ можно получить с помощью (4)

$$X_{\alpha} = X_{\alpha-[\alpha]} - \sum_{i=1}^{[\alpha]} \ln(U_i) \tag{4}$$

где U – случайное число, равномерно распределенное в интервале 0-1, $[\alpha]$ – целая часть параметра α. Отметим, что алгоритм (4) быстро теряет вычислительную эффективность уже при $\alpha > 5$.

II. Анализ алгоритмов

В работе для анализа эффективности выбраны пять по различным оценкам наиболее эффективных алгоритмов генерации случайных чисел с Гамма-распределением.

1. Алгоритм Марсагля и Цанга, описанный в [8] для $\alpha > 1$
2. Алгоритм, представленный в работе [9] для любых $\alpha > 0$

3. Алгоритм, представленный в работе [10] для любых $\alpha > 0$
4. Комбинированный алгоритм, использующий методы, описанные в [11] для $\alpha < 1$ и $\alpha > 1$.
5. Комбинированный алгоритм на основе методов Беста [5].

Алгоритм 1 для генерации случайных чисел при $0 < \alpha < 1$ использует формулу (3), алгоритмы 4 и 5 – применяют разные методы для $\alpha < 1$ и $\alpha > 1$. Все перечисленные алгоритмы реализованы в среде MS Visual Studio 2010 на языке C#. Вычисление всех констант по возможности вынесено из основных циклов генерации случайных чисел. Время работы алгоритмов измерялось с помощью компонента, учитывающего только время работы процессора с нитью алгоритма.

Все алгоритмы исследовались в области значений параметра $0.01 < \alpha < 400$. Эксперименты по измерению времени работы алгоритмов проводились сериями по 100 пачек для каждого алгоритма, причем в каждой пачке генерировалось по 10^6 случайных чисел.

Исследованные алгоритмы показывают хорошее совпадение формы выборочной функции плотности вероятностей с теоретической кривой визуально и по критерию χ-квадрат. Сравнительные оценки времени работы каждого алгоритма во всем диапазоне значений параметра представлены на рис.1.

Заключение

Полученные результаты показывают, что производительность генераторов может отличаться в 1,5-2 раза. Алгоритмы 1 и 5 имеют скачки производительности вблизи граничного значения $\alpha = 1$. Наилучшую производительность демонстрируют алгоритмы 2 и 4.

1. Мясников, В.И. Синтез акустической модели затрубного пространства нефтедобывающей скважины / В. И. Мясников, А.В. Смирнов // Вестник Марийского государственного технического университета. Сер. : Радиотехнические и инфокоммуникационные системы. – 2007. – № 1(1). – с. 86-89.
2. Kotz, S. Continuous Multivariate Distributions, Models and Applications / S. Kotz, N. Balakrishnan. – New-York : J.Wiley&Sons Inc., 2004. – 752 p.
3. Univariate Distribution Relationships [Electronic resource]. – Access mode : http://www.math.wm.edu/~leemis/chart/UDR/UDR.html. – Access date : 13.09.2014.
4. Generalized gamma distribution [Electronic resource]. – Access mode : http://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_gamma_distribution. – Access date : 13.09.2014.
5. Devroye, L. Non-Uniform Random Variate Generation / L. Devroye. – New York : Springer-Verlag, 1986. – 843 p.
6. Kundu, D., Gupta, R. D. A convenient way of generating gamma random variables / D. Kundu, R. D. Gupta // Comp. Stat.& Data Analysis. – 2007. – Vol.51, Iss.6. – pp. 2796-2802.
7. Martino L., Luengo D. Extremely efficient generation of Gammarandom variables for $\alpha > 1$ / L. Martino, D. Luengo // arXiv:1304.3800v3 [Stat.CO]. – 2013. – 10 p.
8. Marsaglia, G. The squeeze method for generating gamma variates / G. Marsaglia // Comp. and Math.App. – 1977. – pp. 321-325
9. Xi, B., Tan, R.M., Liu, C. Logarithmic Transformation-Based Gamma Random Number Generators / B. Xi, R.M. Tan, C. Liu // Journal of Statistical Software. – 2013. – Vol. 55, Issue 4.
10. Tanizaki, H. A Simple Gamma Random Number Generator for Arbitrary Shape Parameters / H. Tanzaki // Economics Bulletin. – 2008. – № 1.
11. Ahrens, J. H., Dieter, U. Generating Gamma Variates / J. H. Ahrens, U. Dieter // Communications of the ACM. – 1982. – Vol.25, № 1.

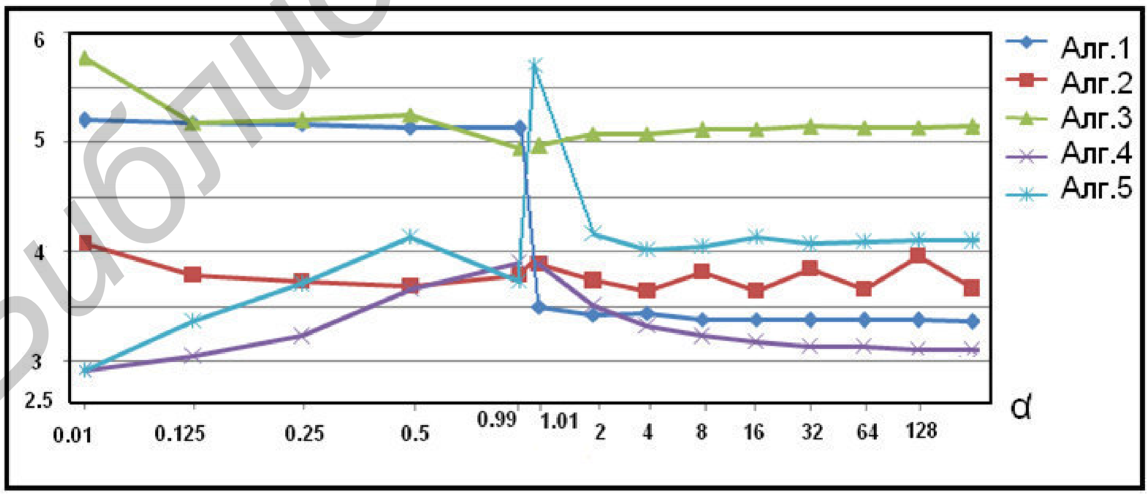

Рис. 1 – Время генерации пачки случайных чисел при различных α