Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

О. В. Герман

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

*Рекомендовано УМО по образованию в области
информатики и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия
для студентов, учреждений, обеспечивающих получение высшего образования
на 2-й ступени по специальности 1-40 80 02
«Системный анализ, управление и обработка информации»*

Минск БГУИР 2012

УДК 004.8(076)
ББК 32.813я73
Г38

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра информационных систем и технологий
Белорусского государственного технологического университета
(протокол №9 от 10.04.2011 г.);

заведующий кафедрой автоматизированных информационных систем
Минского института управления, доктор технических наук,
профессор В. И. Курмашев

Герман, О. В.
Г38 Неклассические логические исчисления : учеб.-метод. пособие / О. В. Герман. – Минск : БГУИР, 2012. – 124 с. : ил.
ISBN 978-985-488-783-8.

Пособие посвящено теоретико-прикладным проблемам неклассических логик. Рассматриваются вопросы представления знаний, построения машин вывода для моделей знаний, использующих неклассические логические формализации. Описаны вопросы, связанные с мотивацией введения многозначных логических исчислений из-за логических парадоксов и аномалий, их причины и способы преодоления.

Предназначено для магистрантов, аспирантов и инженеров, занимающимся теоретико-прикладными аспектами реализации интеллектуальных логических систем.

УДК 004.8(076)
ББК 32.813я73

ISBN 978-985-488-783-8

Содержание

1. ОСНОВЫ ЛОГИЧЕСКИХ ИСЧИСЛЕНИЙ

1.1. ПОНЯТИЕ ИСТИНЫ В КЛАССИЧЕСКОЙ И НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Понятие истины является фундаментальным в естествознании. Под **истиной** следует понимать соответствие того, что утверждается, тому, что есть в действительности. Здесь существуют два момента. Первый – как проверить соответствие и как быть, если такая проверка невозможна в принципе? Второй – о какой *действительности* идет речь? Начнем со второго момента. Еще Аристотель указал на неоднозначность логической интерпретации утверждений о будущих событиях. Например, рассмотрим утверждение «*Завтра состоится морское сражение*». Это утверждение относится не к тому, что есть, а к тому, что будет (к будущему состоянию мира). Вместе с тем будущее состояние мира в данный момент нельзя *знать* точно, например, в силу фундаментального закона неопределенности Гейзенберга. Как же можно вести речь о соответствии тому, что точно *не определено* и принципиально не может быть точно определено в момент высказывания? Иначе говоря, вариантов будущих действительностей множество, а какой из этих вариантов реализуется заранее не известно. Поэтому говоря о будущих событиях, мы не знаем о какой действительности идет речь, а имеем в виду любую действительность, что нарушает трактовку истины в традиционном смысле (мы считаем, что действительность единственна.)

Еще более запутана ситуация в математике, где «действительностью» является мир формальных объектов, например прямых и точек. Так, геометрия Лобачевского исключает постулат о параллельных в геометрии Евклида, следовательно, эти две геометрии «рассматривают» разные действительности. Обратим внимание на тот принципиальный момент, что математика имеет дело с абстрактными понятиями (например, понятием числа или точки, или бесконечно малой величины и т. п.), поэтому математических действительностей, вообще говоря, бесчисленное множество (в отличие от физической действительности).

Неопределенность в отношении к действительности связывается не только с будущим, но и с недостаточностью знаний о ней в настоящем. Например, некто утверждает, что в разложении числа π имеется бесконечное число нулей. Проверка этого утверждения может потребовать получить бесконечное разложение числа π, что невозможно. Поэтому данное высказывание неопределенно в силу незнания. Итак, отношение высказывания к действительности может иметь неопределенное значение, если действительность не определена или нельзя установить соответствие между тем, что утверждается, и тем, что есть в действительности в силу незнания.

Аристотель фактически первым поставил вопрос о необходимости измерения истины с помощью шкалы, содержащей более двух значений [1]. Польский математик Ян Лукасевич разработал теоретическую основу сначала трехзначных, а затем многозначных логик (20-е гг. прошлого века) [2]. Отметим также работы русского математика Николая Васильева (Казанский университет), который построил логическое исчисление для противоречивых формул [3]. Вместе с тем следует отметить, что работы Лукасевича не сразу нашли признание в научном сообществе. Еще в 30-е гг. прошлого века значительная часть ученых противилась «многозначной» трактовке истины.

Ясно, что в отношении физической действительности можно делать упор на ее единственность, таким образом утверждение «*завтра состоится морское сражение*» определенно либо будет иметь место, либо нет в той единственной действительности, которая будет завтра. Однако и в физическом мире все не так очевидно даже и без будущих событий. Например, некто говорит «Я умный». Это утверждение может быть истинным в глазах этого некто и ложным в глазах другого некто. Почему так? Потому что каждый человек видит мир своими глазами, т. е. действительностей столько, сколько точек зрения. Отсюда, в частности, следует, что в истории много утверждений измеряются субъективно, не имеют объективной оценки.

В математике дело «сложилось» еще более запутанно. Здесь столкнулись с *парадоксами*. Парадоксы – это утверждения, которым нельзя приписать ни истинное, ни ложное значение. Именно парадоксы объективно мотивируют введение многозначных логик. Перейдем к их рассмотрению.

1.2. ЛОГИЧЕСКИЕ ПАРАДОКСЫ И ИХ ПРИЧИНЫ

Логических парадоксов сравнительно много [4]. Наиболее известный парадокс – это парадокс лжеца. Пусть некто заявляет: «*Я лгу*». Спрашивается, говорит ли этот некто правду или лжет. Простой анализ показывает, что приведенное утверждение не может быть ни истинным, ни ложным. Так, если оно истинно, то некто лжет в действительности, т. е. утверждение должно быть ложным. И наоборот, если утверждение ложно, то некто говорит правду, что также невозможно в силу характера утверждения.

Причина парадокса в недопустимой самоприменимости формулы к самой себе. Самоприменимость достаточно интересное явление. Например, нельзя себя вытащить за волосы из болота. Любая физическая система не может самой себе сообщить дополнительную энергию. Это случаи невозможной самоприменимости. Вместе с тем есть допустимая самоприменимость. Например, всякую программу (алгоритм) можно применить к самой себе, т. е. подать на вход программы текст этой же программы. Реакция может быть разной – от отторжения до попытки что-то посчитать.

Другой знаменитый парадокс – это парадокс «брадобрея». Он звучит так. В одном швейцарском кантоне брадобрей бреет тех и только тех, кто не бреется сам. Спрашивается, бреет ли брадобрей самого себя?

И опять сталкиваемся с парадоксом. Здесь можно, впрочем, сказать, что подобного брадобрея не существует ни в Швейцарии, ни где-либо еще. Это также вариант недопустимой самоприменимости.

Следующий парадокс (на который будем далее ссылаться как на «**парадокс о доказательствах**») уже имеет формальный характер [5]. Рассмотрим язык $L=\{xy \mid x$ – номер машины Тьюринга, y – доказательство того, что машина с номером x финитна на каждом входе, т. е. за конечное время заканчивает свою работу; наконец, машина с номером x отклоняет слово $xy\}$.

Распознать язык – значит построить алгоритм (читай – машину Тьюринга), которая для любого слова на входе определяет, принадлежит ли входное слово данному языку или нет. Можно ли распознать приведенный язык L? Безусловно, да. Действительно, нетрудно построить машину для распознавания доказательств, поскольку доказательства – это математические конструкции с четко сформулированным синтаксисом. Наша машина просто моделирует работу машины с номером x на входе xy и в силу доказательства y заканчивает моделирование за конечное время. Поэтому она либо примет, либо отклонит слово xy. Пусть эта наша машина имеет номер z. Докажем, что она финитна на каждом входе. Допустим противное – т. е. машина с номером z зависает на некотором входе xy либо распознает, что y не является доказательством. В первом случае это невозможно, поскольку x финитна на каждом входе в силу y. Во втором случае разбор y требует конечное время. Итак, если данное доказательство записать формально, то пусть это доказательство есть w. Зададим вопрос, как описанная машина поведет себя на входе zw? В силу w машина z финитна. Если она принимает слово zw, то она должна его отклонять по определению языка L. Значит, этого быть не может. Если же машина отклоняет слово zw, то она должна его принимать. Получаем парадокс.

Читатель может усомниться в том, что можно формально записать доказательство финитности нашей машины. Мы это сделаем несколько позднее. Причина парадокса в том, что множество доказательств финитности уже как бы схвачено в языке L, вместе с тем, используя это множество доказательств, мы «проталкиваем» новое доказательство финитности. В математике это явление известно как проблема актуальной (завершенной) бесконечности. К завершенной бесконечности нельзя добавить новый элемент.

Вот еще один интересный парадокс. Некий объективный судья выдает справки, удостоверяющие, что их владелец обладает или не обладает свойством, которое указано в справке. Например, справка может утверждать, что ее обладатель левша. Некто обращается к судье с просьбой дать справку, что у него нет справок. Судья удостоверяется в этом и выдает справку, которая «лжет», хотя в момент выдачи справок у этого некто не было. Здесь причина парадокса в изменении действительности. До выдачи справки была одна действительность, после выдачи – другая.

Наконец, приведем последний парадокс.

Прилагательные, которые обладают свойством, о котором говорит их название, называются *гетерогенными*. Например, прилагательное «двухкоренное» имеет два корня и, следовательно, является гетерогенным. Также и прилагательное «русское» является гетерогенным. Прилагательные, которые не являются гетерогенными, называются *негетерогенными*. Спрашивается, является ли прилагательное «негетерогенный» гетерогенным или негетерогенным? Любой ответ дает противоречие. Причина та же, что и выше, – актуальная завершенность множества прилагательных. Мы пытаемся построить новое прилагательное и поместить его в завершенное множество.

Итак, мы привели некоторые известные парадоксы и отметили их причины. Последних три – недопустимая самоприменимость, попытка расширить завершенное множество, изменение действительности. Приведенные причины наиболее типичны для математических парадоксов. Вместе с тем суть проблемы кроется еще глубже – в точном определении доказательства как математического объекта. К этому вопросу мы подойдем чуть позже.

Еще раз отметим, что парадокс не является ни истинным, ни ложным утверждением. Он является неопределенным утверждением, таким образом, мотивировкой введения многозначных исчислений вполне можно считать именно существование парадоксов в классической математике.

1.3. ФОРМАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательством следует считать рассуждение, основанное на построении заключений из посылок по принятым правилам вывода. Доказательство – это обычно многошаговый процесс. На каждом шаге применяется то или иное правило вывода. Для построения доказательства нужно иметь формулу, которую требуется доказать, набор правил вывода и множество заранее установленных фактов – аксиом. Каждое правило вывода имеет набор посылок и заключение. Заключение одного правила вывода может использоваться в качестве посылки другого правила вывода. Формулы логики, не содержащие других формул, называются предикатами.

Универсальным правилом вывода является правило *modus ponens* (правило отсечения):

$$\frac{\begin{array}{l}A\\ A \to B\end{array}}{B}\ . \tag{1.1}$$

Оно читается так: если истинно A и из A следует B, то истинно B.
Пример доказательства.

Правила вывода:

$R1$. Культурный человек не сделает зла другому человеку, исключая, разве что, самого себя.

$R2$: Для любой формулы $\varphi(x,\ldots) \ \& \ x = A \rightarrow \varphi(A,\ldots)$.

Аксиомы:

$a1$. Зло совершено в отношении A.
$a2$. A контактировал только с культурными людьми.

Теорема: A причинил зло самому себе.

Доказательство

Формализуем наши знания. Обозначим К(x) – культурный x; З(x,y) – x причиняет зло y.

Имеем

$R1$. $К(x) \ \& \ З(x,y) \rightarrow x = y$,
$a1$. $З(x,A)$,
$a2$. $К(x)$.

Теорема
$З(A, A)$.

По $R1$: $К(x) \ \& \ З(x, A) \rightarrow x = A$.
По $R2$: $З(x, A) \ \& \ x = A \rightarrow З(A, A)$.

Обозначим правило вывода: $R_i(x_{i1}, x_{i2}, \ldots \mid y)$, где внутри скобок до вертикальной черты указаны посылки, а справа от вертикальной черты – заключение правила.

Определение 1.0

Доказательством называется последовательность

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, \varphi,$$

в которой каждое C_i есть правило вывода, а φ – доказываемая теорема, причем посылки C_i являются либо заключениями предыдущих правил вывода, либо аксиомами.

Построение доказательства часто бывает очень непростой задачей. Согласно знаменитому результату К. Геделя [6], в достаточно развитых системах, содержащих арифметику целых чисел, имеются истинные недоказуемые формулы. Следовательно, в общем случае не всякую истинную формулу можно доказать. Однако, если формула ложна, то ее всегда можно привести к противоречию. Это свойство известно как свойство *полуразрешимости* логики предикатов. Вообще говоря, чтобы далее развивать нашу теорию, потребуется более строго определить *логический язык*.

Логическая модель представляет конечное или бесконечное множество логических формул [7]. Для записи формул используется язык, содержащий алфавит (набор символов) и множество правил образования правильно построенных формул. Символами логического языка являются:

– константы (например, 0, 1, 2,… или a, b, c,…);
– переменные: x, y,…, z;
– функциональные символы: f, g, h, … (функциональные символы называются также функторами);
– символы предикатов (отношений) P, Q, R,… ;
– кванторы всеобщности $\forall$ и существования $\exists$;
– логические операции (связки): & («и»), $\vee$ («или»), $\neg$ («не»), $\rightarrow$ («следует»), $\leftrightarrow$ («эквивалентно»); & называют операцией конъюнкции, $\vee$ – дизъюнкции, $\neg$ – отрицания, $\rightarrow$ – импликацией и $\leftrightarrow$ – эквиваленцией.

Кроме символов языка, рассматриваются синтаксические правила записи предложений (формул) логического языка. Отправным элементом является простейшая формула – **предикат** (в логике предикатов) и булевская переменная (в логике высказываний).

Предикат – это простейшая (атомарная) формула (с отрицанием или без него) вида $P(\ldots)$, где в скобках указываются аргументы формулы – переменные, константы или функторы, либо вовсе не указываются аргументы. Предикат принимает одно из двух возможных значений: истина или ложь. Аргументы предиката имеют произвольную природу. Пусть P, Q – две любые формулы. Тогда формулами также являются следующие выражения:

1. $\neg P$, $\neg Q$;
2. $P \vee Q$;
3. $P \,\&\, Q$;
4. $P \rightarrow Q$;
5. $P \leftrightarrow Q$;
6. $\forall x\, P(x)$;
7. $\exists\, x\, P(x)$.

(В пп. 6 и 7 переменная x входит свободно в $P(\ldots)$, т. е. x не связана в P каким-либо квантором $\forall$,$\exists$). В дальнейшем знак &, как правило, будем опускать, а знак $\leftrightarrow$ заменять на = или $\equiv$.

Определение 1.1

А. Дизъюнктом в логике высказываний называется дизъюнкция литер (булевских переменных) с отрицанием или без, например, $x \vee y \vee \neg z$.

В. Дизъюнктом в логике предикатов называется дизъюнкция литералов (атомарных формул), взятых с отрицанием или без него, например, $P(a,z) \vee \neg Q(z,f(x))$.

Определение 1.2. Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция дизъюнктов.

Определение 1.3. Выполняющей интерпретацией I для заданной КНФ называется множество значений переменных этой КНФ, при которых она истинна. Например, КНФ $(x_1 \vee \neg x_2)(\neg x_1 \vee x_2)(\neg x_2 \vee \neg x_3)(x_1 \vee x_3)$ истинна в интерпретации $I = \langle x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0 \rangle$ либо в интерпретации $\langle x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1 \rangle$.

Число различных интерпретаций для дизъюнкта с $n > 0$ переменными равно 2^n. Однако не все они являются в общем случае выполняющими интерпретациями.

Определение 1.4. Задача ВЫПОЛНИМОСТЬ (коротко – ВЫП) формулируется так: для данной КНФ установить, имеется ли для нее хотя бы одна выполняющая интерпретация [8].

Для задачи ВЫП известно, что она является полиномиально универсальной в классе задач, разрешимых за полиномиальное время на недетерминированной машине Тьюринга, однако найти для нее полиномиальный алгоритм для детерминированной машины Тьюринга до сих пор не удалось. Следовательно, ВЫП можно отнести к категории интеллектуальных задач.

Определение 1.5. Формула B следует из формулы A, если в любой интерпретации, где A истинна, B также истинна. Пишем в этом случае $A \to B$.

Определение 1.6. Формула A тождественно истинна, если она истинна в любой интерпретации. Тождественно истинная формула называется также тавтологией.

Определение 1.7. Правилом вывода R называется такое соотношение между формулами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и B, которое устанавливает истинность формулы B всякий раз, когда выполняется заданное соотношение.

Определение 1.8. Формула B выводима из формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если имеется конечная последовательность формул Π, начинающаяся с любой из формул A_i, такая, что каждая очередная формула этой последовательности либо выводима по некоторому правилу вывода из предшествующих членов (или их части), либо совпадает с какой-то из формул A_i.

Теорема 1.1. (о полноте, в узком смысле логики, первого порядка и логики высказываний). Всякая тождественно истинная формула выводима [9].

Задача логического вывода в логике высказываний может быть эффективно сведена к ВЫП. Действительно, пусть даны дизъюнкты $D_1, D_2, \ldots, D_z$. Спрашивается, выводим ли из них дизъюнкт R? (То есть требуется установить тождественную истинность формулы $D_1 \& D_2 \& \ldots \& D_z \to$ R). Умножим эту последнюю формулу справа и слева на $\neg R$. Получим:

$$D_1 \& D_2 \& \ldots \& D_z \& \neg R \to False.$$

Следовательно, если удастся показать выполнимость системы дизъюнктов $D_1 \& D_2 \& \& \ldots \& D_z \& \neg R$, то получим опровержение исходной формулы $D_1 \& D_2 \& \ldots \& D_z \to \to R$. Если докажем, что система невыполнима, то получим доказательство исходной формулы. Таким образом, задача логического вывода сводится к задаче ВЫП.

В 1965 г. **Дж. Робинсон** разработал принцип резолюций в логике – часто эффективный и удобный для вычислительной реализации метод логического вывода [10]. Это обстоятельство создало предпосылки для практической реализации программ прикладной логики. Дадим объяснение принципа резолюций Робинсона на примере его достаточно эффективной модификации – метода отсечения литер, поскольку владение им необходимо для последующего материала.

Определение 1.9. Пусть даны два дизъюнкта $D_1 = x_i \vee F$ и $D_2 = \neg x_i \vee R$ (F и R – дизъюнкции литер). Резольвентой D_1 и D_2 является дизъюнкт $F \vee R$.

Литеры $x_i, \neg x_i$ образуют контрарную пару литер, которая из резольвенты исключается.

Пусть S^+ обозначает все множество следствий (резольвент), которые можно получить из S. Пусть $S \subseteq S^+$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2 (о полноте метода резолюций). Если S – противоречивое множество формул, то пустая формула $\Box \in S^+$ и наоборот.

Доказательство. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_k$, d – дизъюнкты системы S. Возьмем дизъюнкт z_1. Пусть $z_1 = a \vee F$ (где F – дизъюнкция литер, не содержащая a). Построим все возможные резольвенты: z_1 и z_2 , z_1 и z_3 ,…, z_1 и d с отсекаемой парой литер (a, $\neg a$). Если для a нет контрарной литеры ($\neg a$), то резольвенту не строим. Рассмотрим систему: $S' = \{R_{12}, R_{13}, \ldots, R_{1k}, z_2, z_k, \ldots, d\}$, где z_1 не входит в S', а R_{1j} – резольвента (если есть) z_1 и z_j . Докажем, что S и S' эквивалентны в смысле выполнимости: (A) если S выполнима, то выполнима S', (B) если S противоречива, то S' противоречива.

(A) имеет место в силу свойств резольвент.

(B) Пусть S противоречива, а S' нет. Покажем, что это невозможно. Например, пусть S' выполнима в интерпретации I, а S нет. Рассмотрим какую-нибудь резольвенту R_{1j} , для которой в I имеем:

$$z_1 = a \vee F,$$
$$z_j = \neg a \vee D,$$
$$R_{1j} = F \vee D.$$

При этом z_j , R_{1j} истинны в I, а z_1 ложен в I. Тогда $a = 0$, $F = 0$ в I, а $D = 1$. Если принять $a = 1$, то z_1 станет истинным, z_j останется истинным и R_{1j} также останется истинным. Тем самым, мы получим интерпретацию I', выполняющую и S, и S' вопреки предположению.

Таким образом, обоснован метод отсечения литер, как модификация принципа резолюций: последовательно избавляемся от каждой литеры, пока либо не получим противоречия (пустую формулу), либо не придем к тривиально выполнимой системе. Для иллюстрации рассмотрим пример. Пусть дана система S:

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 \vee x_2, \\ x_3 \vee x_4, \\ x_5 \vee x_6, \\ x_7 \vee x_8, \\ x_9, \\ \neg x_4 \vee \neg x_5, \\ \neg x_1 \vee \neg x_3, \\ \neg x_1 \vee \neg x_7, \\ \neg x_2 \vee \neg x_5, \\ \neg x_2 \vee \neg x_9, \\ \neg x_4 \vee \neg x_9, \\ \neg x_6 \vee \neg x_8. \end{array}\right. \qquad (1.2)$$

Избавимся от литеры x_9. Для этого присоединим к системе все резольвенты пар дизъюнктов с отсекаемой контрарной парой (x_9, $\neg x_9$), а все дизъюнкты, содержащие x_9, $\neg x_9$, исключим из рассмотрения. Новая система S' примет такой вид:

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 \vee x_2, \\ x_3 \vee x_4, \\ x_5 \vee x_6, \\ x_7 \vee x_8, \\ //x_9 \text{ исключен}, \\ \neg x_4 \vee \neg x_5, \\ \neg x_1 \vee \neg x_3, \\ \neg x_1 \vee \neg x_7, \\ \neg x_2 \vee \neg x_5, \\ //\neg x_2 \vee \neg x_9 \text{ исключен}, \\ //\neg x_4 \vee \neg x_9 \text{ исключен}, \\ \neg x_2 \text{ //добавлен как резольвента } x_9 \text{ и } \neg x_2 \vee \neg x_9, \\ \neg x_4 \text{ //добавлен как резольвента } x_9 \text{ и } \neg x_4 \vee \neg x_9, \\ \neg x_6 \vee \neg x_8. \end{array}\right. \qquad (1.3)$$

Избавимся теперь от литеры x_1. Для этого присоединим к системе все резольвенты пар дизъюнктов с отсекаемой контрарной парой (x_1 , $\neg x_1$), а все дизъюнкты, содержащие x_1, $\neg x_1$, исключим из рассмотрения. Новая система S'' примет такой вид:

$$\left\{\begin{array}{c}
//x_1 \vee x_2 \ \text{ исключен,} \\
x_3 \vee x_4, \\
x_5 \vee x_6, \\
x_7 \vee x_8, \\
//\mathrm{x}_9 \ \text{ исключен,} \\
\neg x_4 \vee \neg x_5, \\
//\neg x_1 \vee \neg x_3 \ \text{ исключен,} \\
//\neg x_1 \vee \neg x_7 \ \text{ исключен,} \\
\neg x_2 \vee \neg x_5, \\
//\neg x_2 \vee \neg x_9 \ \text{ исключен,} \\
//\neg x_4 \vee \neg x_9 \ \text{ исключен,} \\
\neg x_2 \ \ //\text{добавлен как резольвента } x_9 \text{ и } \neg x_2 \vee \neg x_9, \\
\neg x_4 \ \ //\text{добавлен как резольвента } x_9 \text{ и } \neg x_4 \vee \neg x_9, \\
\neg x_6 \vee \neg x_8, \\
x_2 \vee \neg x_3 \ //\text{резольвента } x_1 \vee x_2 \text{ и } \neg x_1 \vee \neg x_3, \\
x_2 \vee \neg x_7 \ //\text{резольвента } x_1 \vee x_2 \text{ и } \neg x_1 \vee \neg x_7.
\end{array}\right. \tag{1.4}$$

Продолжая процесс в том же духе, избавимся от литеры x_3. Получим следующую систему:

$$\left\{\begin{array}{c}
x_5 \vee x_6, \\
x_7 \vee x_8, \\
\neg x_4 \vee \neg x_5, \\
\neg x_2 \vee \neg x_5, \\
\neg x_2, \\
\neg x_4, \\
\neg x_6 \vee \neg x_8, \\
x_2 \vee x_4 \ //\text{добавлен,} \\
x_2 \vee \neg x_7.
\end{array}\right. \tag{1.5}$$

Избавимся теперь от x_2:

$$\begin{cases} x_5 \vee x_6, \\ x_7 \vee x_8, \\ \neg x_4 \vee \neg x_5, \\ \neg x_5, \\ \neg x_7, \\ \neg x_4, \\ \neg x_6 \vee \neg x_8, \\ x_4. \end{cases} \qquad (1.6)$$

Система (1.6) является противоречивой (содержит контрарную пару однолитерных дизъюнктов: $\neg x_4$ и x_4). Процесс доказательства завершается.

Имеются другие модификации принципа резолюций: линейная входная резолюция, лок-резолюция, метод семантической резолюции Слэйгла, упорядоченная резолюция (OL-резолюция) и пр [7, 9]. У них всех одна общая проблема: экспоненциальные от размера задачи в общем случае временные потери. Эта проблема напрямую касается эффективности логического программирования как такового.

Для неклассических логик выводимость одних формул из других определяется следующим образом.

Определение 1.10. В неклассическом исчислении формула *B* следует из формулы *A*, если в любой интерпретации *I* значение истинности $val_I(A)$ формулы *A* не превосходит значения истинности $val_I(B)$ формулы *B*.

1.4. ИДЕИ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ИСЧИСЛЕНИЙ

Любое логическое исчисление с числом значений истинности, большим 2, является *неклассическим*. Так, Я. Лукасевич первоначально сформулировал исчисление с тремя значениями истинности – 0, 1, 0,5 (неопределенность). Разумеется, можно к неклассическим отнести и исчисления с двумя значениями истинности, но *иным* определением правил вывода. Такого рода исчисления в этом пособии не рассматриваются.

Итак, для каждой логической формулы *f* в неклассическом исчислении должна быть представлена мера истинности этой формулы в любой интерпретации (т. е. при любых значениях аргументов). Обозначим такую меру как $val(f)$.

Каковы бы ни были неклассические логики, для них справедливы следующие аксиомы [11]:

A1. *val*(*false*) = 0;   *val*(*true*) = 1; $1 \geq val(f) \geq 0$.
A2. Если $\alpha \to \beta$, то $val(\alpha) \leq val(\beta)$. (1.7)

Эти аксиомы настолько общи, что допускают бесконечное число различных неклассических логик. Каждая неклассическая логика задает свой вариант исчисления значений логических операций. В качестве примера рассмотрим трехзначную логику Лукасевича.

Пусть $x, y, ..., z$ представляют термы (переменные) 3-значной логики Лукасевича, которые принимают значения из множества {0, ½, 1}, где 0 < ½ < 1. Логические операции ($\vee, \&, \neg$) вводятся стандартным способом:

$$
\begin{gathered}
val(x \vee y) = \max(val(x);\ val(y)), \\
val(x \,\&\, y) = \min(val(x); val(y)), \\
val(\neg x) = 1 - val(x) = \begin{cases} 1, \text{if } val(x) = 0, \\ \dfrac{1}{2}, \text{if } val(x) = \dfrac{1}{2}, \\ 0, \text{if } val(x) = 1, \end{cases} \\
val(x \to y) = \min(1,\ 1 - val(x) + val(y)).
\end{gathered} \tag{1.8}
$$

Здесь *val(x)* представляет значение истинности переменной *x*.

Пусть α, β – формулы. Тогда $\alpha \to \beta$ означает, что $val(\alpha) \leq val(\beta)$ в любой интерпретации *I* (наборе значений истинности) для переменных в формулах α и β. Обозначим $\alpha[\mu_\alpha]$ формулу, которая допускает только такие интерпретации *I*, в которых $val_I(\alpha) \geq \mu_\alpha$. Можно рассматривать μ_α как значение неопределенности формулы α.

Определение 1.11 [12]. Формула $e[\mu_\varepsilon]$ выводима из формул $\alpha_1[\mu_1],...,\alpha_k[\mu_k]$ тогда (и только тогда), когда любая интерпретация *I*, допускаемая каждой формулой $\alpha_{\text{й}}[\mu_i]$ $(i = \overline{1,k})$, допускается также формулой $\varepsilon[\mu_\varepsilon]$.

Ясно, что

$$\alpha_1 \,\&\, \alpha_2 \,\&...\&\, \alpha_k \to \varepsilon \tag{1.9}$$

эквивалентно

$$\alpha_1[0], \alpha_2[0], ..., \alpha_k[0] \vdash \varepsilon[\min\{val(\alpha_1),..., val(\alpha_k)\}],$$

где $\vdash$ означает выводимость. Следовательно, (1.9) является частным случаем выводимости в *k*-значной логике ($k \geq 3$).

Для 2-значной стандартной логики выводимость ($\alpha \vdash \beta$) и импликация ($\alpha \rightarrow \beta$) суть эквивалентные понятия. Для *n*-значной логики ($n > 2$) можно получить аналогичный результат в форме следующей теоремы.

Теорема 1.3. $\alpha[\mu_\alpha] \rightarrow \beta[\mu_\beta] \equiv \alpha[\mu_\alpha] \vdash \beta[\mu_\beta]$.

Доказательство

1. Пусть $б[\mu_\alpha] \rightarrow \beta[\mu_\beta]$. Это означает, что в любой интерпретации *I*, в которой val_I (α) $\geq$ μ_α, имеет место val_I (β) $\geq$ μ_β также. Тогда $\vdash \alpha[\mu_\alpha]$ $\beta[\mu_\beta]$ в силу конечности числа интерпретаций *I*.
2. Пусть $\alpha[\mu_\alpha] \vdash \beta[\mu_\beta]$. Тогда $\alpha[\mu_\alpha] \rightarrow \beta[\mu_\beta]$ в силу определения операции ($\rightarrow$).

Как и в стандартной логике, основной задачей любой неклассической логики является проблема построения выводов. Эта задача формулируется таким образом. Заданы формулы $\alpha_1[\mu_1],...,\alpha_k[\mu_k]$, которые допускают соответствующие интерпретации. Напомним, что формула $\alpha[\mu_\alpha]$ допускает только такие интерпретации *I*, в которых $val_I(\alpha) \geq \mu_\alpha$. Справедлива ли при этих условиях формула $\varepsilon[\mu_\varepsilon]$? Это значит, что (***а***) любая интерпретация, которую **одновременно допускают** все формулы $\alpha_1[\mu_1],...,\alpha_k[\mu_k]$, допускается также формулой $\varepsilon[\mu_\varepsilon]$, либо (***б***) нет ни одной интерпретации, допускаемой $\alpha_1[\mu_1],...,\alpha_k[\mu_k]$ (это значит, что исходная система формул противоречива). В рассматриваемой в данном пособии логике **противоречий**, впрочем, не всякая формула выводима в противоречивой системе. Следовательно, п. ***a*** считается универсальным, в то время как п. ***b*** может приниматься, а может и не приниматься.

Исходя из сказанного, может создаться впечатление, что неклассические логики расширяют границы классической логики. Вместе с тем известен тезис Романа Сушко, который утверждает, что это не так.

1.5. ТЕЗИС Р. СУШКО

В 60-х годах XX в. математик Р. Сушко выдвинул тезис (гипотезу), что всякое неклассическое исчисление эквивалентно некоторому классическому исчислению. Этот тезис неизменно находил подтверждение. Таким образом, всегда стремятся заменить неклассическую логику эквивалентной двоичной логикой, что, во всяком случае, позволит использовать достаточно богатый арсенал математических методов, разработанных для классического варианта. Если тезис Сушко справедлив, то возникает вопрос о целесообразности неклассических логик. Во-первых, тезис Сушко не доказан. Во-вторых, гораздо проще выражать знания с помощью неклассических логических языков, чем в классическом представлении. Например, предложение «*Маша не очень любит читать*» проще записать так:

$любит$(маша, чтение) [$\mu \le 0,7$].

Попытка записать это выражение в классической логике встретит определенные трудности, поскольку нужно строить эквивалентное двоичное исчисление для данного неклассического.

В данном пособии возьмем тезис Сушко за основу и будем всякий раз строить классический эквивалент данной неклассической системы.

1.6. ПАРАДОКС О ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ – ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ АРГУМЕНТ В ПОЛЬЗУ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ЛОГИЧЕСКИХ ИСЧИСЛЕНИЙ

Вернемся снова к парадоксу о доказательствах и рассмотрим знакомый нам язык LAR*={ $y_1@y_2 \mid y_1$ – номер машины Тьюринга, y_2 – доказательство того, что машина с номером y_1 финитна на каждом входе, т. е. за конечное время заканчивает свою работу; наконец, машина с номером y_1 отклоняет слово $y_1@y_2$}. Символ @ используется как спецсимвол для разграничения двух слов. Далее слово «спецификация» понимается как аналог номера машины Тьюринга.

Замечание. Доказательства y_2 представляют корректные выводы в стандартной логической системе (мета-теории) P_s с точно определенными понятиями правил машин Тьюринга, финитных (конечных) принимающих (отклоняющих) вычислений и т. п., что позволяет формализовать рассуждения о работе произвольной машины Тьюринга $МТ_\varepsilon$. Мы отделяем теорию P_s, в которой строятся «формальные рассуждения» о работе машин Тьюринга, от объектной теории *Th*, которая формализует работу конкретной машины Тьюринга в терминах ее правил.

Итак, можно построить машину $МТ_{LAR*}$ (с набором правил y_1^{LAR*}) для распознавания языка LAR*. Для построения формального доказательства финитности $МТ_{LAR*}$ введем следующие предикаты, функции и константы:

– $prffin(z, x)$ – z есть доказательство финитности машины Тьюринга со спецификацией x;

– $fin(x)$ – утверждает, что машина Тьюринга со спецификацией x является тотально финитной машиной. Этот предикат эквивалентен $\forall y(accept(x, y) \vee decline(x, y))$; (см. ниже).

– $accept(x, y)$ – машина Тьюринга со спецификацией x принимает слово y;

– $decline(x, y)$ – машина Тьюринга со спецификацией x отклоняет слово y;

– m – строковая константа, представляющая спецификацию (набор правил) машины $МТ_{LAR*}$;

– $f_1(w)$ представляет рекурсивную функцию, которая возвращает левую от символа «@» часть входной строки w и $f_2(w)$ – соответственно возвращает правую часть (если возвращать нечего, то функция вернет пустую строку). Будем использовать $f_1(w)$ и $f_2(w)$ в записи аксиом.

Следующие аксиомы определяют метатеорию P_s, которая рассматривает $\mathrm{MT}_{\mathrm{LAR*}}$:

1. $\forall x \forall y\ accept(x, y) \to \neg decline(x, y)$.
2. $\forall w\ \neg prffin(f_2(w), f_1(w)) \to decline(m, w)$.
3. $\forall w\ prffin(f_2(w), f_1(w))\ \&\ decline(f_1(w), w) \to accept(m, w)$.
4. $\forall w\ prffin(f_2(w), f_1(w))\ \&\ accept(f_1(w), w) \to decline(m, w)$.
5. $\forall w\ accept(m, w) \to prffin(f_2(w), f_1(w))\ \&\ decline(f_1(w), w)$.
6. $\forall w\ prffin(f_2(w), f_1(w)) \to accept(f_1(w), w) \vee decline(f_1(w), w)$.

Нам нужно доказать следующую теорему:
7. $\forall y\ accept(m, y) \vee decline(m, y)$.

Доказательство♣.

Для каждого y имеем $prffin(f_2(y), f_1(y)) \vee \neg prffin(f_2(y), f_1(y))$. Аксиома 2 оставляет на рассмотрение только вариант с $prffin(f_2(y), f_1(y)) = \mathrm{true}$. Из аксиомы 6 получаем $accept(f_1(y), y) \vee decline(f_1(y), y)$. Теперь с помощью аксиом 1, 3, 4 доказываем *accept*(*m*,*y*) или *decline* (*m*,*y*).

Основанная на методе резолюций стратегия доказательства дает следующие резольвенты.

8. $\neg accept\ (m, c)$ /*c* – произвольная константа /.
9. $\neg decline\ (m, c)$.

Из (2, 9):
10. $prffin\ (f_2(c), f_1(c))$.

Из (3, 8):
11. $\neg\ decline\ (f_1(c), c) \vee \neg prffin\ (f_2(c), f_1(c))$.

Из (4, 9):
12. $\neg\ accept\ (f_1(c), c) \vee \neg prffin\ (f_2(c), f_1(c))$.

Из (10, 11, 12):
13. $\neg\ decline\ (f_1(c), c)$.

14. $\neg\, accept\,(f_1(c), c)$.

Из (6, 13, 14):

15. $\neg prffin\,(f_2(c), f_1(c))$.

Теперь 10, 15 дают □.

Совместимость аксиом устанавливается без сложностей. Таким образом, получаем слово $y_1^{LAR*} @ y_2^{LAR*}$ с $y_1^{LAR*} = m$ и y_2^{LAR*}, представляющее построенное выше доказательство. Это слово $y_1^{LAR*} @ y_2^{LAR*}$ должно быть принято и отклонено машиной $\mathrm{MT}_{\mathrm{LAR*}}$ одновременно, что невозможно. Мы получили аномалию совмещения понятий выводов и доказательств (причина уже указывалась выше – множество доказательств уже схвачено предикатом *prffin*(*z*, *x*), после чего в него «проталкивается» новое доказательство. Чтобы избежать этой аномалии следует рассматривать некоторые формулы как некорректные. Каждая замкнутая некорректная формула может иметь значение, отличное от true или false. Формула *prffin*(*x*, *y*) сама является некорректной, следовательно, множество доказательств можно считать некорректным множеством. Однако такая точка зрения нуждается в новой теоретической платформе (см. раздел о некорректных множествах).

Пусть замкнутая формула φ некорректна в *Th*. Говорят, что *Th* неполна в этом случае. Тогда можно получить две непротиворечивые теории: $Th1 = Th \cup \varphi$ и $Th2 = Th \cup \neg\varphi$. Ясно, что φ истинна в *Th*1, а ¬φ истинна в *Th*2. Однако истинностное значение φ в *Th не определено*. Вопрос об истинности φ в *Th* лишен в целом смысла. Мы, однако, полагаем, что невыводимость формулы в теории недостаточна, чтобы считать ее некорректной. Тем не менее считаем, что любая проверяемая формула корректна.

Некоторые формулы могут объявляться корректными по определению. Можно построить теорию некорректных логических исчислений (что мы сделаем ниже) на основе следующих постулатов, которые рассматривают каждую формулу как верифицируемую (проверяемую), если значение истинности или ложности этой формулы на любых значениях аргументов можно выяснить с помощью детерминированного конечного алгоритма (машины Тьюринга).

ПОСТУЛАТЫ

a. Каждая верифицируемая формула φ в теории ψ корректна.

b. Каждая формула в ψ, выведенная или отклоненная из корректных формул, сама является корректной.

c. Каждая формула в ψ, эквивалентная некоторой корректной (некорректной) формуле, корректна (некорректна) в ψ.

d. Отрицание любой некорректной формулы представляет некорректную формулу.

e. Если формула $\varphi(x)$ со свободной переменной x является корректной формулой, то формула $\forall x\ \varphi(x)$ также корректна.
f. Формулы, которые не удовлетворяют указанным выше дефинициям корректных формул, являются некорректными ψ.
g. Каждая замкнутая некорректная в ψ формула φ не является ни истинной, ни ложной.
h. Множество $A = \{x \mid P(x)\}$ с некорректной характеристической формулой $P(x)$ называется некорректным множеством в стандартной логике.
i. Любое множество может быть либо корректным, либо некорректным и никаким иным.

Замечания

1. Чтобы вычислить формулу $\varphi(c)$ для заданной константы c нужно свести ее к примитивно-рекурсивным функциям, например:

$$len(w) = \begin{cases} 0 \ \text{ if } \ w = "" \\ 1 + len\,(x) \text{ if } \ w = [h \mid x]. \end{cases}$$

2. Формулы, выводимые из некорректных аксиом, порождают семантические аномалии наподобие рассмотренной проблемы распознавания языка.
3. Следствием из постулатов ***d***, ***e*** является то, что если $\varphi(x)$ со свободной переменной x является корректной, то и формула $\exists x\ \varphi(x)$ также корректна.

Итак, в логике могут быть некорректные формулы, которые имеют значения, отличные от истины и лжи. Стандартная логика «не может своими силами» обрабатывать такие формулы без аномалий. Следовательно, приведенные семантические аномалии являются важным мотивом для введения неклассических логик.

2. МНОГОЗНАЧНЫЕ ЛОГИКИ Я. ЛУКАСЕВИЧА

2.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Неклассические логики играют существенную роль в теории и практике интеллектуальных систем. Остановимся на многозначных логиках Я. Лукасевича с неопределенностями. Ясно, что n-значная логика при достаточно большом n может вполне удовлетворительно аппроксимировать нечеткую логику Л. Заде. Таким образом, эффективная машина вывода для многозначной логики важна и в плане использования ее для нечеткой логики Заде. Однако имеется два аспекта, касающихся нечеткой логики:

– использование принципа резолюций ограничено в силу следующего ограничения [13]:

$$\alpha \to \beta \equiv val(\alpha) \le val(\beta),$$

где α, β – формулы и *val*(α), *val*(β) представляют их нечеткие меры;
– $\alpha \& \neg\alpha$ не представляет противоречивой формулы в общем случае. Поэтому концепция противоречивости для таких систем должна быть ясно сформулирована и разрешена.

Основные логические операции задаются в 3-значной логике Лукасевича согласно следующей таблице истинности (* – значение «*не определено*»).

Таблица 2.1

a	b	$a \& b$	$a \vee b$	$\bar{a}$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
0	*	0	*	1
1	1	1	1	0
1	*	*	1	0
*	*	*	*	*

Рассмотрим, например, формулу 3-значного исчисления Лукасевича $a \vee \bar{a}$. Пусть значение a = * (далее символу * будем приписывать числовое значение $\frac{1}{2}$). По табл. 2.1 устанавливаем, что значение формулы $a \vee \bar{a}$ в этом случае равно *. Таким образом, видим, что принцип исключенного третьего в 3-значной логике места не имеет. Аналогичным образом логическое произведение $a \& \bar{a}$ необязательно равно false. Следовательно, уже в указанных фактах содержится принципиальное отклонение от классической 2-значной логики.

Рассмотрим, как реализовать сведение к классическому исчислению. Введем 2-значное логическое исчисление, эквивалентное 3-значному исчислению Лукасевича с тремя значениями истинности: 0, ½, 1 и логическими операциями: & (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\neg$ (отрицание), $\to$ (следование) и $\leftrightarrow$ (эквивалентность). Это позволяет построить машину вывода стандартным способом. Описываемый подход может быть обобщен для произвольных *n*-значных логик Лукасевича и, следовательно, применим для нечеткой логики Заде с континуумом значений истинности для формул.

Для достижения поставленных целей потребуется некоторое промежуточное исчисление, названное здесь векторным логическим исчислением со специфически определенной операцией отрицания ($\neg$). Базовая идея, следовательно, такова: любая неклассическая логика может быть заменена эквивалентной ей 2-значной логикой.

Для того чтобы интерпретировать формулы 3-значного исчисления Лукасевича, введем векторную логику с формулами, аргументы которых представляют векторы, причем каждая переменная вектора представляет булевскую переменную, булевскую формулу или константу (0,1). Обозначим векторные формулы v и w как $v = (v_1, v_2)$, ($w = (w_1, w_2)$) и определим следующие отношения:

$$\begin{aligned}
&v = 1 \leftrightarrow (v_1 = 1, v_2 = 1),\\
&v = 0 \leftrightarrow (v_1 = 0, v_2 = 0),\\
&v = \frac{1}{2} \leftrightarrow (v_1 = 1, v_2 = 0),\\
&\neg v \leftrightarrow (\neg v_2, \neg v_1),\\
&v \,\&\, w \leftrightarrow (v_1 \,\&\, w_1, v_2 \,\&\, w_2),\\
&v \vee w \leftrightarrow (v_1 \vee w_1, v_2 \vee w_2),\\
&v \rightarrow w \leftrightarrow v_i \rightarrow w_i,\ \forall i = 1, 2,\\
&v[\alpha] \leftrightarrow I_1 \vee I_2 \vee \ldots \vee I_t,\\
&val(v_{I_m}) \geq \alpha, \quad (m = 1, \ldots, t).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Замечание. Считается, что для каждой векторной формулы α выполняется следующее условие $\alpha_1 \vee \neg\alpha_2$, которое не допускает набор $\alpha = <0, 1>$, исключаемый определением (2.1).

Рассмотрим следующие примеры в качестве пояснения.

Пример 2.1. Доказать или опровергнуть утверждение, что из формул $\alpha \vee \beta$ $[\mu = 1]$, $\neg\alpha \vee \beta$ $[\mu \geq 0{,}5]$ можно вывести β $[\mu \geq 0{,}5]$.
Перепишем $\alpha \vee \beta$ в векторной форме, как показано ниже:

$$(\alpha_1, \alpha_2) \vee (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 \vee \beta_1, \alpha_2 \vee \beta_2) = (1, 1).$$

Поскольку мера этой формулы равна 1, то можно записать

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \vee \beta_1,\\
&\alpha_2 \vee \beta_2.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Вторая формула $\neg\alpha \vee \beta$ $[\mu \geq 0{,}5]$ переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&(\neg\alpha_2, \neg\alpha_1) \vee (\beta_1, \beta_2) = (\neg\alpha_2 \vee \beta_1, \neg\alpha_1 \vee \beta_2) =\\
&= (1, 0) \vee (1, 1),
\end{aligned}$$

откуда получаем $\neg\alpha_2 \vee \beta_1$, что дает исходную систему посылок в виде

$$\begin{aligned} &\neg\alpha_2 \vee \beta_1, \\ &\alpha_1 \vee \beta_1, \\ &\alpha_2 \vee \beta_2, \\ &\alpha_1 \vee \neg\alpha_2, \\ &\beta_1 \vee \neg\beta_2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Необходимо показать, что из (2.3) следует формула $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ $[\mu \geq 0{,}5]$ (т. е. $(1, 0) \vee (1, 1)$ или просто β_1). Это можно сделать с помощью стандартной резолюционной стратегии: β_1 действительно следует из (2.3).

Пример 2.2. Доказать или опровергнуть утверждение, что из формул

$$\alpha\vee\beta\ [\mu \geq 0],$$
$$\neg\alpha\ \ [\mu \geq 0]$$

можно вывести

$$\beta\ [\mu \geq \min\{val(\alpha \vee \beta); val(\neg\alpha)\}].$$

Имеем

$$(\alpha \vee \beta) = (\alpha_1 \vee \beta_1, \alpha_2 \vee \beta_2) = (0, 0) \vee (1, 0) \vee (1, 1),$$

что дает

$$\alpha_1 \vee \beta_1 \vee \neg(\alpha_2 \vee \beta_2),$$
$$\neg\alpha = (\neg\alpha_2, \neg\alpha_1) = (0,\ 0) \vee (1,\ 0) \vee (1,\ 1),$$

откуда следует

$$\neg\alpha_2 \vee \alpha_1.$$

Покажем, что

$$(\alpha \vee \beta) \,\&\, \neg\alpha \to \beta,$$

что эквивалентно

$$\neg\alpha_2 \,\&\, (\alpha_1 \vee \beta_1) \to \beta_1,$$
$$\neg\alpha_1 \,\&\, (\alpha_2 \vee \beta_2) \to \beta_2.$$

Итак, для системы посылок

$$\beta_1 \vee \neg\beta_2,$$
$$\alpha_1 \vee \beta_1 \vee \neg(\alpha_2 \vee \beta_2),$$
$$\neg\alpha_2 \vee \alpha_1$$

необходимо вывести

$$\neg\alpha_2 \,\&\, (\alpha_1 \vee \beta_1) \to \beta_1,$$
$$\neg\alpha_1 \,\&\, (\alpha_2 \vee \beta_2) \to \beta_2.$$

Нетрудно заметить, что выводимость в этом случае места не имеет.

2.2. СХЕМА ВЫВОДА В МНОГОЗНАЧНЫХ ЛОГИКАХ Я. ЛУКАСЕВИЧА

Представленный выше подход может быть относительно легко обобщен для случая k-значной логики с $k > 3$ [12, 13]. Для начала рассмотрим варианты с $k = 4$ и $k = 5$.

При $\boldsymbol{k = 4}$ будем использовать следующее векторное представление:

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$$

с операцией отрицания в форме

$$\neg\nu = (\neg\nu_1, \neg\nu_3, \neg\nu_2)$$

и значениями истинности

$$\nu = 0 \leftrightarrow (0,\ 0,\ 0),$$
$$\nu = 1 \leftrightarrow (0,\ 1,\ 0),$$
$$\nu = 2 \leftrightarrow (1,\ 1,\ 0),$$
$$\nu = 3 \leftrightarrow (1,\ 1,\ 1).$$

При $\boldsymbol{k} = \mathbf{5}$ имеем:

$$\nu = (\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ \nu_4),$$
$$\neg\nu = (\neg\nu_2,\ \neg\nu_1, \neg\nu_4,\ \neg\nu_3),$$
$$\nu = 0 \leftrightarrow (0,\ 0,\ 0,\ 0),$$
$$\nu = 1 \leftrightarrow (0,\ 0,\ 1,\ 0),$$
$$\nu = 2 \leftrightarrow (0,\ 1,\ 1,\ 0),$$
$$\nu = 3 \leftrightarrow (1,\ 1,\ 1,\ 0),$$
$$\nu = 4 \leftrightarrow (1,\ 1,\ 1,\ 1).$$

Общий случай может быть представлен в следующем виде:

$$\nu = (\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ \ldots,\ \nu_n),$$
$$\nu = 0 \leftrightarrow (0,\ 0,\ 0, \ldots\ 0,\ 0),$$
$$\nu = 1 \leftrightarrow (0,\ 0,\ 0, \ldots\ 1,\ 0),$$
$$\nu = 2 \leftrightarrow (0, 0,\ 0,\ \ldots\ 1, 1,\ 0),$$
$$\nu = n-1 \leftrightarrow (1,\ 1,\ 1, \ldots, 1,\ 0),$$
$$\nu = n \leftrightarrow (1,\ 1,\ 1, \ldots, 1,\ 1)$$

с операцией отрицания $\neg\nu$, удовлетворяющей соотношению

$$val(\neg\nu) = n - val(\nu) + 1,$$

и

$$\neg\nu = (\neg\nu_{n-2},\ \ldots, \neg\nu_3, \neg\nu_2,\ \neg\nu_1,\ \neg\nu_n,\ \neg\nu_{n-1}).$$

Корректность операций $\&$ и $\vee$ в общем случае устанавливается непосредственно. Так же легко определяются формулы, устанавливающие только допустимые наборы. Эти формулы таковы:

$$\nu_1 \rightarrow \nu_i + 1\ (i = 1, 2, \ldots, n-2),$$
$$\nu_n = 1 \rightarrow \nu_i = 1.$$

Они указывают, что «единицы» в векторном представлении могут располагаться только последовательно одна за другой. Рассмотренный здесь общий подход дает ключ к построению машины логического вывода в нечеткой логике посредством аппроксимации нечетких значений значениями многозначной логики, достаточными для практических приложений.

Общая схема проверки выводимости состоит из следующих шагов:

1. Рассматриваем выводимость в общем виде:

$$\alpha_1\,[\mu_1]\,\&\,\ldots\,\&\,\alpha_z\,[\mu_z] \to \beta\,[\mu_\beta]. \tag{2.4}$$

2. В соответствии с векторным представлением формул получаем систему посылок и заключений для (2.4).
3. Выполняем стандартную резолюционную стратегию в 2-значной логике.
4. Доказательство формулы в форме $\alpha_1 \& \alpha_2 \& \ldots \& \alpha_n \to \beta_1 \vee \beta_2 \vee \ldots \vee \beta_m$ требует записать каждую формулу α_i, β_j в векторной форме $\alpha_i = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2})$, $\beta_j = (\beta_{j_1}, \beta_{j_2})$ и затем показать выводимость

$$\begin{cases} \alpha_{11} \,\&\, \alpha_{21} \&\ldots\& \alpha_{z1} \to \beta_{11} \vee \beta_{21} \vee \ldots \vee \beta_{m1}, \\ \alpha_{12} \,\&\, \alpha_{22} \&\ldots\& \alpha_{z2} \to \beta_{12} \vee \beta_{22} \vee \ldots \vee \beta_{m2}. \end{cases}$$

3. НЕЧЕТКАЯ ЛОГИКА Л. ЗАДЕ И СИСТЕМЫ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ

3.1. АКСИОМЫ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ И ПРАВИЛА НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА

Пусть $\mu(x)$ – нечеткая мера формулы x. Аксиомы нечеткой логики таковы [7].

$$\begin{aligned} &\text{A1. } \mu(x) = 1 - \mu(\bar{x})). \\ &\text{A2. } \mu(x \vee y) = \max\,(\mu(x), \mu(y)). \\ &\text{A3. } \mu(x \& y) = \min(\mu(x), \mu(y)). \\ &\text{A4. } \mu(x \to y) = \mu(\bar{x} \vee y) = \max(1 - \mu(x),\ \mu(y)) = 1 - \min(\mu(x), 1 - \mu(y)). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Наряду с указанными формулами применяют и такие:

A5. $\mu(x \,\&\, y) = \mu(x) \cdot \mu(y)$.

A6. $\mu(x \to y) = \dfrac{\mu(y) \text{ при } \mu(x) \le \mu(y)}{0 \text{ в противном случае}}$.

Однако формула А5 справедлива (если брать аналогию с вероятностью) для независимых формул x и y. Уточнение этой формулы можно получить, если ввести функцию условной нечеткой меры. Следует начать с того, что в нечетком исчислении Заде неверен аналог формулы Байеса:

$$\mu(H_i \mid E) \neq \frac{\mu(H_i)\cdot\mu(E \mid H_i)}{\mu(\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} H_i E)}.$$

Возникает вопрос, как строить условную нечеткую меру? Неизвестно исчислений, использующих условную формулу $\{a|b\}$, а не условную меру $\mu(a \mid b)$. В многозначных логиках, насколько нам известно, условных формул (не мер) нет. Поэтому разработка соответствующего теоретического подхода к исчислению условных логических формул вполне оправдана и интересна. Далее строится трехзначное логическое исчисление с условной формулой $\{a|b\}$, которое обобщается на непрерывный случай.

Обратимся к правилам нечеткого вывода. Имеет место следующий результат.

Лемма 3.1

$$\frac{\begin{array}{l}\mu(p\to q)\geq a\\ \mu(p)\geq b\end{array}}{\mu(q)\geq \min\,(a,b)}. \qquad (3.2)$$

Доказательство

$\mu(q)\geq\mu(q\,\&\,p)=\mu(p\,\&(p\to q))=\min(\mu(p);\,\mu\,(p\to q)=\min(a,b)$.

Рассмотрим следующую схему вывода:

$$\frac{\begin{array}{l}\mu(p\to q)=a\\ \mu(p)=b\end{array}}{\mu(q)-?}. \qquad (3.3)$$

Имеем

$\mu(p\to q)=\mu(\overline{p}\vee q)=\max(1-b;\mu(q))=a,$
$\mu(p)=b.$

а. Пусть $\mu(q)\geq 1-b.$ Тогда $\mu(q)=a.$

б. Пусть $\mu(q)<1-b.$ Тогда $a=b.$

Итак, при $a\geq 1-b$ $\mu(q)=a.$ Для $a<1-b$ результат не определен. Мы столкнулись с ситуацией, в которой аксиомы А1–А3 не позволяют во всех случаях находить нечеткую меру заключения формулы. Эти же аксиомы «стопорят» применение правила резолюций в нечеткой логике. В качестве иллюстрации рассмотрим два дизъюнкта:

$$D_1 = L_1 \vee R_1,$$
$$D_2 = \overline{L}_1 \vee R_2.$$

Пусть $\mu(L_1) = 0{,}3$, $\mu(R_1) = 0{,}1$, $\mu(R_2) = 0{,}2$. Получим

$$\mu(D_1) = 0{,}3,\ \mu(D_2) = 0{,}7, \mu(D_1 \,\&\, D_2) = 0{,}3.$$

Резольвентой (логическим следствием) дизъюнктов D_1, D_2 является формула $R_1 \vee R_2$. Согласно общей для всех неклассических логик аксиоме (1.2), должно иметь место соотношение $\mu(D_1 \,\&\, D_2) \le \mu(R_1 \vee R_2)$, чего нет в действительности – $0{,}3 \ge 0{,}2$. Таким образом, метод резолюций в нечеткой логике не сохраняет общезначимость.

Не удается избежать аномалий и при использовании «альтернативных» определений

A*1. $\mu(x) = 1 - \mu(\bar{x}))$.

A*2. $\mu(x \vee y) = \mu(x) + \mu(y) - \mu(x) \cdot \mu(y)$. (3.4)

A*3. $\mu(x \,\&\, y) = \mu(x) \cdot \mu(y)$.

Здесь A*2 называется формулой Шортлифа. Теперь соотношение (3.3) легко «раскрыть» до конца:

$$\mu(p \to q) = \mu(\bar{p} \vee q) = \mu(\bar{p}) + \mu(q) - \mu(\bar{p}) \cdot \mu(q) = 1 - b + \mu(q) - (1-b) \cdot \mu(q) = a,$$
$$\mu(q) \cdot b = a + b - 1,$$
$$\mu(q) = \frac{a+b-1}{b}.$$

И здесь, очевидно, появляются аномалии при $a + b < 1$ или $b = 0$, или $a + b - 1 > b$.

В известных системах нечеткого вывода Mamdani, Tsukamoto, Sugeno [13] это ограничение преодолено, однако приведенные системы используют правила вида

если $x(\mu_x)$ & $y(\mu_y)$ &…& $z(\mu_z)$, *то* $w(\mu_w)$.

Ограниченность указанных подходов в том, что:

а) они не рассматривают нечеткую меру самого правила (продукции)

если …, *то* …(μ – ?),

полагая, что эта продукция истинна ($\mu = 1$);

б) они не рассматривают формулы произвольного вида, например,

$x(\mu_x) \vee \bar{y}(\mu_y)$ [$\mu = 0{,}4$], и не показывают, как перейти от *б*) к *а*). Вместе с тем именно такой переход и является проблематичным. Например, в [14] дается такое определение

$$\mu(\alpha \to \beta) = 1 \text{ при } \mu(\alpha) \le \mu(\beta),$$
$$\mu(\alpha \to \beta) = 0 \text{ в противном случае.}$$

При этом формула

$$\alpha \vee \beta$$

не может быть просто заменена на

$$\overline{\alpha} \to \beta$$

в общем случае.

Итак, в нечеткой логике имеются открытые проблемы, связанные с построением исчисления выводов. Таким образом, проблема аномалий должна решаться из других соображений. Имеется, по крайней мере, два выхода из положения. Первый выход состоит в использовании многозначных логик Я. Лукасевича для аппроксимации нечеткого вывода. Об этом говорилось выше в разд. 2.2. Остановимся более подробно на этом моменте.

Нечеткий логический вывод имеет достаточно широкое применение при решении практических задач, во всяком случае более широкое, нежели многозначный. Поэтому построение машины нечеткого логического вывода является важной теоретико-прикладной задачей. В свете изложенных выше результатов (разделы 2.1, 2.2) машину нечеткого вывода можно строить сравнительно просто.

Пусть требуется реализовать вывод в системе формул с заданной точностью аппроксимации $0 < \Delta < 1$. Найдем наименьшее значение $n \ge \Delta^{-1}$ и будем использовать *n*-значную логику Лукасевича. Для практических расчетов вполне достаточно использовать $\Delta = 0{,}05$ и аппроксимацию вывода на основе 20-значной логики Лукасевича. С учетом указанных замечаний сложность представления таких формул не становится критическим фактором и вполне приемлема для расчетов. Открытым остается вопрос о достаточности для построения правильных выводов в нечеткой логике некоторой фиксированной *n*-значной логики Я. Лукасевича. Имеет место следующий результат.

Лемма 3.2. Если формула φ выводима в *n*-значной логике Лукасевича, то она не обязательно выводима в $(n+1)$-значной. Если формула φ невыводима в *n*-значной логике Лукасевича, то она невыводима и в $(n+1)$-значной логике.

Таким образом, повышение мерности (значности) логики Лукасевича увеличивает только степень достоверности вывода.

Обоснование представленного утверждения можно получить из следующих простых соображений. Пусть формула φ выводима в *n*-значной логике Лукасевича из формул $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Это значит, что она удовлетворяет данному выше определению выводимости. Однако вполне может оказаться, что в $(n+1)$-значной логике Лукасевича найдется интерпретация I, в которой $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ истинны, а значение формулы φ попадет в область с меньшим значением истинности, что сделает φ невыводимой. Иначе говоря, в логике с меньшим числом значений истинности заключения носят более грубый характер, однако в практических расчетах вполне можно удовлетвориться заданным уровнем точности.

Представленный подход дает общую теоретическую платформу реализации нечетких выводов, преодолевая отмеченные недостатки существующих систем нечеткого вывода. Он прямо указывает на то, что теоретические положения бесконечнозначных логик можно вывести из конечно-мерных логик с помощью предельного перехода, обеспечив точность аппроксимации в пределах 90 – 95 % выбором 10-значной (20-значной) логики Лукасевича.

Второй возможный вариант реализации машины нечеткого логического вывода состоит в использовании условной (нечеткой) формулы.

3.2. УСЛОВНАЯ ФОРМУЛА

Определение 3.1. Формула $\{a|b\}$, называемая условной формулой [15], задается посредством таблицы истинности трехзначного исчисления следующим образом:

Таблица 3.1

a	***b***	***a*|*b***
0	0	0
0	1	0
0	*	0
1	0	*
1	1	1
1	*	*
*	0	*
*	1	*
*	*	*

Таким образом, семантика формулы $\{a|b\}$ такова: формула $\{a|b\}$ принимает значение формулы a всякий раз, когда b истинна; значение «*ложь*», если ложна a; значение «*не определена*» во всех других случаях.

Табл. 3.1 не допускает редукции к классическому двузначному исчислению из-за неопределенности значения $\{a|b\}$ при $a = 1$, $b = 0$. Для того чтобы построить нужную аксиоматику для формул, содержащих $\{a|b\}$, будем использовать вычисления значений формул $a \vee b, a \& b, \bar{a}$ в трехзначной логике Лукасевича, реализованные в табл. 3.2.

Ниже приводится совокупность аксиом, справедливых для формулы $\{a|b\}$ с учетом данных табл. 3.1.

$$
\begin{aligned}
&1)\ \{a \mid true\} = a;\\
&2)\ \{a \mid a\} = a;\\
&3)\ \{\{a \mid b\} \mid b\} = \{a \mid b\};\\
&4)\ \overline{\{a \mid b\}} = \{\bar{b} \mid \bar{a}\} \vee \bar{a};\\
&5)\ \{a \mid b\} \,\&\, a = \{a \mid b\};\\
&6)\ \{a \mid b\} \,\&\, b = a \,\&\, b;\\
&7)\ \{a \mid a \vee b\} = a;\\
&8)\ \{a \mid b\} \,\&\, \{c \mid a\} = \{a \,\&\, c \mid b \,\&\, a\} = \{a \,\&\, c \mid b\};\\
&9)\ \{a \mid c\} \vee \{b \mid c\} = \{a \vee b \mid c\};\\
&10)\ \{a \,\&\, b \mid c\} = \{a \mid b \,\&\, c\} \,\&\, b;\\
&11)\ \{a \mid b\} = \{a \mid b \vee \bar{a}\};\\
&12)\ \{a \mid b\} \,\&\, \{c \mid b\} = \{a \,\&\, c \mid b\};\\
&13)\ \{a \mid b\} \,\&\, \{c \mid d\} = \{a \,\&\, c \mid b \,\&\, d\};\\
&14)\ \{a \mid b\} \vee b = \{a \vee b \mid b\};\\
&15)\ \{a \mid c \vee d\} = \{a \mid c\} \vee \{a \mid d\};\\
&16)\ \{false \mid b\} = false;\\
&17)\ \{a \mid b \,\&\, c\} = \{a \mid b\} \,\&\, \{a \mid c\}.
\end{aligned}
$$

Примечания:

1. Чтение формул $\{F \mid G\}$ не вызывает труда, если иметь в виду, что F и G – произвольные правильно записанные формулы исчисления, поэтому, разумеется, $\{a \& c | a \vee b\}$ равносильно $\{(a \& c) | (a \vee b)\}$.

2. $a \to b$ и $\{a|b\}$ различаются, например, на наборе $b = *$, $a = 0$ ($a \to b = *$, $\{a|b\}$ = = 0 в этом случае).

Теорема 3.1. Формула $\{a|b\}$ не выражается посредством только операций $^{-}$, $\vee$, & и переменных a, b с константами *false*, *true*.

Доказательство

Имеется набор a =1, b = 0 , на котором $\{a|b\}$=*, тогда как операции $^{-}$,$\vee$, & на этом наборе не дают значение *.

Теорема 3.2. Система функций $S = \{^{-}, \vee, \&, \{a|b\}\}$ является замкнутой, но не полной.

Доказательство

Неполнота устанавливается, например, из невозможности представления в S функции

$$x+1=\begin{cases} * & \text{при} \quad x=0, \\ 1 & \text{при} \quad x=*, \\ 0 & \text{при} \quad x=1 \end{cases}$$

на наборе, состоящем только из ”*”, т. к. каждая из функций в S на этом наборе равна «*», а x + 1 = 1.

Функциональная замкнутость означает, что любая суперпозиция функций в S не выходит за пределы S, т. е. снова дает функцию из S. Доказательство проверяется непосредственно, но является трудоемкой процедурой. Трехзначную формулу $\{a|b\}$ можно опять же заменить эквивалентным двоичным представлением в векторной форме (табл. 3.2).

Таблица 3.2

$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$		$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$		$\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}=(d_1,d_2)$	
a_1	a_2	b_1	b_2	d_1	d_2
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1

Из табл. 3.2 непосредственно получаем, что

$$d_1 = a_1 \vee a_2,\ \ d_2 = a_1 \& a_2 \& b_1 \& b_2.$$

Воспользуемся сведением к эквивалентному двоичному исчислению с целью доказательства того, что из формул

$$\begin{aligned}&F = \{a \mid b \vee c\} = \{a \mid b\} \vee \{a \mid c\},\\ &\overline{a},\\ &\overline{b}\end{aligned}$$

не выводима формула $\overline{c}$.

Имеем

$$\begin{aligned}&F = (a_1 \vee a_2, a_1 \& a_2 \& b_1 \& b_2) \vee (a_1 \vee a_2, a_1 \& a_2 \& c_1 \& c_2) =\\ &= (a_1 \vee a_2, a_1 \& a_2 \& (b_1 \& b_2 \vee c_1 \& c_2)),\\ &\overline{a} = (\overline{a}_2, \overline{a}_1),\\ &\overline{b} = (\overline{b}_2, \overline{b}_1).\end{aligned}$$

Находим

$$F \& \overline{a} \& \overline{b} = ((a_1 \vee a_2) \& \overline{a}_2 \& \overline{b}_2, 0) = (a_1 \& \overline{a}_2 \& \overline{b}_2, 0).$$

Поскольку $\overline{c} = (\overline{c}_2, \overline{c}_1)$, то следует показать, что из формул

$a_1 \& \overline{a}_2 \& \overline{b}_2$,

$a_1 \vee \overline{a}_2$ (ограничение на недопустимость $a = (0, 1)$;

$c_1 \vee \overline{c}_2$ (ограничение на недопустимость $c = (0, 1)$;

$b_1 \vee \overline{b}_2$ (ограничение на недопустимость $b = (0, 1)$

логически следует $\overline{c}_2$, что делается уже средствами двузначной логики. Убеждаемся, что следование места не имеет.

Теперь, используя правила задания формулы $\{a|b\}$ табл. 3.1, можно получить условную меру $\mu(a|b)$ в следующем виде:

$$\mu\,(a \mid b) = \begin{cases}\mu(a \& b) \text{ при } (a \neq *,\ \ b \neq 0) \text{ и } (a \neq 1,\ \ b \neq 0),\\ 0{,}5 \text{ в остальных случаях,}\end{cases}$$

причем $\mu(0) = 0,\quad \mu(*) = 0{,}5,\quad \mu(1) = 1.$

Обобщая на непрерывный случай, имеем следующее:

$$\mu\ (a \mid b) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad \mu\,(a) = 0, \\ 0{,}5 \quad \text{при} \quad 0 < \mu\ (b) \le 0{,}5, \\ (2 \cdot \mu\,(\,a) - 1) * \mu\,(\,b) + 1 \ - \ \mu\,(a)\,. \end{cases} \tag{3.5}$$

Это определение наглядно иллюстрируется рисунком. Заметим, что при $\mu(b) \le 0{,}5$ значение $\mu(a|b)$ остается неопределенным, так что при проведении практических расчетов эта область значений не информативна и не используется (см. пример далее по тексту). Как правило, при решении практических задач задаются значения $\mu(a|b{=}1)$, так что пересчет для иных значений b выполняется по формуле (3.5). Определение (3.5) непосредственно проверяется по табл. 3.1.

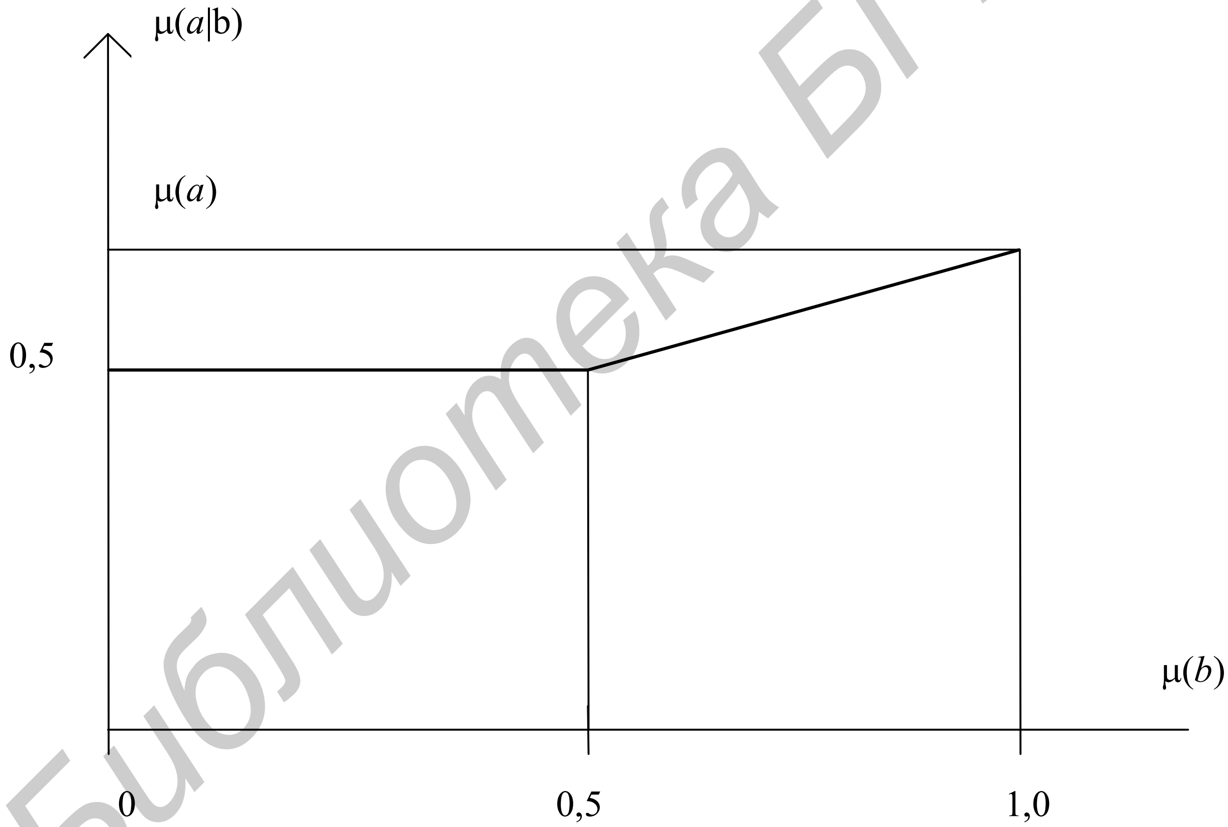


Рис. 3.1

Оно интерпретирует тот факт, что при стремлении $\mu(b) \to 1$ $\mu(a|b)$ стремится к величине $\mu(a)$. Полученные зависимости легко переводятся на многопосылочный случай с учетом аксиом (15, 17) для условной формулы. Полезно в этом случае использовать формулу Шортлифа:

$$\mu(a|\, b \vee c) = \mu(\{a \mid b\} \vee \{a \mid c\}) = \mu(\{a \mid b\}) + \mu(\{a \mid c\}) - \mu(\{a \mid b\}) \cdot \mu(\{a \mid c\})\,.$$

Приведенные результаты могут быть без труда переведены в плоскость практического использования, когда отсутствует статистический материал для использования формулы Байеса. При этом можно опираться на субъективные оценки $\mu(\{a \mid b\})$ и находить нечеткую меру интересующего параметра.

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу диагностики мостового сооружения с использованием нечеткой условной формулы. Будем полагать, что состояние мостового сооружения определяется его грузоподъемностью и габаритом по ширине. Введем следующие лингвистические переменные:

R – оценка общего состояния мостового сооружения: R_1 – аварийная, R_2 – удовлетворительная, R_3 – хорошая и R_4 – отличная;

t – фактическая грузоподъемность моста;

h – габариты по ширине мостового сооружения.

Для решения задачи необходима матрица нечеткого отношения типа «вход – выход», заполняемая экспертом. Так, рассмотрим (табл. 3.3) пример матрицы отношения «фактическая грузоподъемность моста – оценка общего состояния мостового сооружения (t–R)».

Таблица 3.3

	R_1	R_2	R_3	R_4
$t_{низ}$	0,1	0,2	0,7	0,9
$t_{ср}$	0	0,4	0,8	0,7
$t_{выс}$	0	0,6	0,9	1

Смысл представленной матрицы такой: в ячейке (i, j) записана экспертная оценка для варианта R_j состояния мостового сооружения при фактической грузоподъемности t_i. Например, при низкой грузоподъемности моста $t_{низ}$ экспертная оценка «*аварийное состояние* – R_1» равна 0,1. Чем больше значение $\mu(t)$ отклоняется от «1», тем в большей степени отклоняется от истинного значение $\mu(R|t)$. Из рис. 3.1 видно, что значение $\mu(R|t)$ совпадает с $\mu(R)$ при $\mu(t) = 1$. Таким образом, табл. 3.3 задает значения $\mu(R|t) = \mu(R)$ при $\mu(t) = 1$.

Теперь допустим, что нечеткий вектор грузоподъемности задан таким:

t = <μ(t = *низкая*) = 0,2; μ(t = *средняя*) = 0,6; μ(t = *высокая*) = 0,9 >.

Непосредственно воспользуемся формулами (3.5) и нечеткого сложения $\tilde{+}$:

$$a \tilde{+} b = \max(a,b).$$

Получим

$$\mu(R_1|\,t) = \mu(R_1|\,0,2) \tilde{+} \mu(R_1|\,0,6) \tilde{+} \mu(R_1|\,0,9)\,.$$

Поскольку величина $\mu(R|0{,}2)$ неинформативна при $\mu(t) < 0{,}5$, то в расчетах она не учитывается.

Находим, что $\mu(R|0{,}6)$ и $\mu(R|0{,}9)$ равны 0 при $\mu(R) = 0$ согласно (3.5). Далее обратимся к вычислению

$$\mu(R_2\,|\,t) = \mu(R_2\,|\,0,2) \tilde{+} \mu(R_2\,|\,0,6) \tilde{+} \mu(R_2\,|\,0,9) \;=\; \mu(R_2\,|\,0,6) \tilde{+} \mu(R_2\,|\,0,9) =$$
$$= (\,2\cdot 0,4-1)\cdot 0,6+1-0,4 \tilde{+} (2\cdot 0,6-1)\cdot 0,9+1-0,6 \;=\; 0,48 \;\tilde{+}\; 0,58 \;=\; 0,58\,.$$

Снова заметим, что $\mu(R|0{,}2)=0$. $\mu(R_2|0{,}6)=(2\cdot\mu(R_2)-1)\cdot 0{,}6+1-\mu(R_2)) = (2\cdot 0{,}4-1)\cdot 0{,}6+1-0{,}4=0{,}48$. В этой расчетной формуле $\mu(R_2|0{,}6)$ определяется для меры грузоподъемности моста, определенной как «средняя» и равной $\mu(t=\textit{средняя})=0{,}6$.

Далее по аналогии найдем

$$\mu(R_3\,|\,t) = \mu(R_3\,|\,0{,}2) \tilde{+} \mu(R_3\,|\,0{,}6) \tilde{+} \mu(R_3|\,0{,}9) = \mu(R_3\,|\,0{,}6) \tilde{+} \mu(R_3\,|\,0{,}9) =$$
$$= (2\cdot 0{,}8-1)\cdot 0{,}6+1-0{,}8 \tilde{+} (2\cdot 0{,}9-1)\cdot 0{,}9+1-0{,}9 = 0{,}56 \tilde{+} 0{,}82 = 0{,}82\,,$$

$$\mu(R_4\,|\,t) = \mu(R_4\,|\,0{,}2) \tilde{+} \mu(R_4\,|0{,}6) \tilde{+} \mu(R_4\,|0{,}9) = \mu(R_4\,|\,0{,}6) \tilde{+} \mu(R_4\,|\,0{,}9) =$$
$$= \;(2\cdot 1-1)\cdot 0{,}6+1-1 \tilde{+} (2\cdot 1-1)\cdot 0{,}9+1-1 = 0{,}6 \tilde{+} 0{,}9 \;=\; 0{,}9\,.$$

В результате получаем нечеткий вектор оценки состояния мостового сооружения по грузоподъемности:

R_t ={аварийное(0), удовлетворительное (0,58), хорошее (0,82), отличное (0,9)}.

Аналогичные вычисления нужно провести для получения оценки состояния на матрице отношения по габаритам мостового сооружения (табл. 3.4).

Таблица 3.4

	R_1	R_2	R_3	R_4
$h_{узк}$	0,9	0,4	0,2	0,1
$h_{ср}$	0,7	0,5	0,3	0,2
$h_{шир}$	0,1	0,6	0,8	0,9

Рассматриваем значение оценки состояния мостового сооружения для следующего нечеткого вектора габаритов по ширине: h = {узкий (0,6), средний (0,7), широкий (0,1)}. Таким же образом находим оценки состояния мостового сооружения по габаритам:

$$\mu(R_1 \mid h) = 0{,}58,$$
$$\mu(R_2 \mid h) = 0{,}52,$$
$$\mu(R_3 \mid h) = 0{,}44,$$
$$\mu(R_4 \mid h) = 0{,}42$$

и результирующий вектор оценки состояния мостового сооружения по габаритам:

R_h ={аварийное(0,58), удовлетворительное (0,52), хорошее (0,44), отличное (0,42)}.

Объединение значений R_t и R_h выполняется по формуле Шортлифа. Так, например, для удовлетворительного состояния мостового сооружения имеем

$$R_2 = 0{,}48+0{,}52-0{,}48\cdot 0{,}52 = 0{,}75.$$

Результирующий вектор оценки общего состояния мостового сооружения имеет вид

$R_{t,h}$ ={аварийное(0,58), удовлетворительное (0,75), хорошее (0,81), отличное (0,9)}.

Полученный нечеткий вектор далее приводим к конкретному числовому значению по формуле

$$R = \frac{\sum_i \mu(x_i)\cdot x_i}{\sum_i \mu(x_i)}\ , \qquad (3.6)$$

где $\mu(x_i)$ – мера принадлежности к вектору R лингвистической переменной на уровне x_i .

Исходя из найденных оценок получаем

$$R = \frac{0*1+0{,}58*2+0{,}82*3+0{,}9*4}{0+0{,}58+0{,}82+0{,}9} = 3{,}2\ .$$

Вывод: общая оценка состояния мостового сооружения равна 3,2 и соответствует *хорошему*.

3.3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ

Логическим уравнением с неопределенностью называем всякое уравнение вида

$$x^{\alpha 1} \vee y^{\alpha 2} \vee \ \dots \vee w^{\alpha z} \ (\mu), \tag{3.7}$$

где (μ) определяет значение меры правдоподобия.

Данное уравнение содержит логические переменные x ($y,\dots,w$), причем $x^{\alpha 1} = 1$, если (условно говоря) $\alpha_1 = 1$ и $x^{\alpha 1} = 0$ в противном случае.

Значение μ определяет степень правдоподобия данной формулы. Под степенью правдоподобия формулы можно понимать меру выполнимости (истинности) этой формулы в произвольной интерпретации. Таким образом, необходимо определить, что значит решить систему логических уравнений с неопределенностями, и как это сделать. Ясно, что решением системы с неопределенностями могут быть привычные нам значения логических переменных, т. е. ложь или истина. В качестве решения можно также рассматривать нечеткие значения, в наибольшей мере удовлетворяющие заданной системе формул с неопределенностями. Рассмотрим уравнение

$$x \vee \sim y \vee z \ (0{,}8).$$

Пусть $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Подставив это решение в данное уравнение, получим, что значением уравнения является 1. Нечеткое значение 0.8 следует интерпретировать так: примерно в 8 случаях из десяти данное уравнение истинно. Следовательно, наше решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ должно рассматриваться как решение в вероятностном смысле (экспертная оценка может рассматриваться как субъективная вероятность). В вероятностном смысле следует и оценивать близость ответа для уравнения (3.7) к вероятностному значению (0.8). Если уравнений много, то вполне можно использовать известные статистические критерии адекватности (например, критерий Фишера или χ^2). Но начнем с рассмотрения способа отыскания решения в стандартных булевских переменных.

Рассмотрим следующую систему уравнений в качестве примера:

$$\begin{aligned} &x \vee \sim y \vee z && (0{,}8), \\ &\sim x \vee y && (0{,}8), \\ &\sim x \vee \sim z && (0{,}4), \\ &y \vee z && (1). \end{aligned}$$

Прежде всего введем замены для уравнений:

$$T1 = x \vee \sim y \vee z,$$
$$T2 = \sim x \vee y,$$
$$T3 = \sim x \vee \sim z,$$
$$T4 = y \vee z.$$

Теперь можно записать систему в ином эквивалентном виде:

$$T1 \rightarrow x \vee \sim y \vee z,$$
$$T2 \rightarrow \sim x \vee y,$$
$$T3 \rightarrow \sim x \vee \sim z,$$
$$T4 \rightarrow y \vee z,$$
$$x \vee \sim y \vee z \rightarrow T1,$$
$$\sim x \vee y \rightarrow T2,$$
$$\sim x \vee \sim \mathrm{z} \rightarrow T3,$$
$$y \vee z \rightarrow T4.$$

Здесь $\rightarrow$ есть символ эквивалентности. Используя известное соотношение

$$A \rightarrow B = \sim A \vee B,$$

получим

$$\sim T1 \vee x \vee \sim y \vee z,$$
$$\sim T2 \vee \sim x \vee y,$$
$$\sim T3 \vee \sim x \vee \sim z,$$
$$\sim T4 \vee y \vee z,$$
$$\sim x \vee T1,$$
$$y \vee T1,$$
$$\sim z \vee T1,$$
$$x \vee T2,$$
$$\sim y \vee T2,$$
$$x \vee T3,$$
$$z \vee T3,$$
$$\sim y \vee T4,$$
$$\sim z \vee T4.$$

Теперь уже можно ввести функционал

$$\boldsymbol{F} = (T1 - 0{,}8)^2 + (T2 - 0{,}8)^2 + (T3 - 0{,}4)^2 \rightarrow \min.$$

Этот функционал означает, что нас интересует не просто решение системы, а такое ее решение, которое обеспечивает минимальное отклонение от заданных мер неопределенности для уравнений. Выражение для $\boldsymbol{F}$ можно упростить, если раскрыть скобки и принять во внимание, что $1^2 = 1$ и $0^2=0$.

Таким образом, целевая функция будет переписана так:

$$\boldsymbol{F} = -\,0{,}6\cdot T1 - 0{,}6\cdot T2 + 0{,}2\cdot T3 \to \min.$$

Или (умножив на 10):

$$-\,6\cdot T1 - 6\cdot T2 + 2\cdot T3 \to \min.$$

Ограничения системы можно теперь просто переписать как

$$\begin{aligned}
&1 - T1 + x + 1 - y + z \ \geq 1,\\
&1 - T2 + 1 - x + y \ \geq 1,\\
&1 - T3 + 1 - x + 1 - z \geq 1,\\
&1 - T4 + y + z \geq 1,\\
&1 - x + T1 \geq 1,\\
&y + T1 \geq 1,\\
&1 - z + T1 \geq 1,\\
&x + T2 \geq 1,\\
&1 - y + T2 \geq 1,\\
&x + T3 \geq 1,\\
&z + T3 \geq 1,\\
&1 - y + T4 \geq 1,\\
&1 - z + T4 \geq 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем систему линейных булевских уравнений с линейной целевой функцией. Для ее решения будем использовать систему Excel и пакет ПОИСК РЕШЕНИЯ. Предполагая это известным, покажем теперь, как в Excel оценить статистическую адекватность полученного решения.

Пусть найдено решение для нашей системы:

$$x = 1,\ y = 1,\ z = 1.$$

Запишем два ряда чисел: один ряд соответствует значениям уравнений системы после подстановки в них найденного решения, второй – исходным значениям неопределенностей:

Таблица 3.5

Уравнение	Значение для $x = 1, y = 1, z = 1$	Исходная мера μ
$x \vee \sim y \vee z$	1	0,8
$\sim x \vee y$	1	0,8
$\sim x \vee \sim z$	0	0,4
$y \vee z$	1	1

Спрашивается, как оценить насколько эти ряды чисел близки? Для этой цели можно использовать статистический критерий адекватности Фишера или χ^2.

Вычисляем расчетное значение критерия χ^2 по формуле

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(n_j - E_j\right)^2}{E_j} \sim \chi^2_{k-1} .$$

Здесь n_j – фактическое значение j-го уравнения (значение уравнения можно связать с вероятностью принятия им истинного значения); E_j – заданная мера истинности j-го уравнения. Данное уравнение позволяет найти расчетное значение критерия χ^2. В нашем случае имеем

$$\chi^2 = \frac{(1 - 0,8)^2}{0,8} + \frac{(1 - 0,8)^2}{0,8} + \frac{(0 - 0,4)^2}{0,4} + 0 = 0,5 .$$

Это значение следует сравнить с табличной величиной χ^2 для числа степеней свободы, равной числу переменных, поскольку только переменные определяют значения уравнений (но не наоборот). В нашем случае число степеней свободы p равно 3. Должно выполняться соотношение

расчетное значение χ^2 не выше табличного.

Чтобы проверить выполнимость этого соотношения, можно воспользоваться статистическими функциями Excel, именно функцией ХИ2ОБР (рис. 3.2).

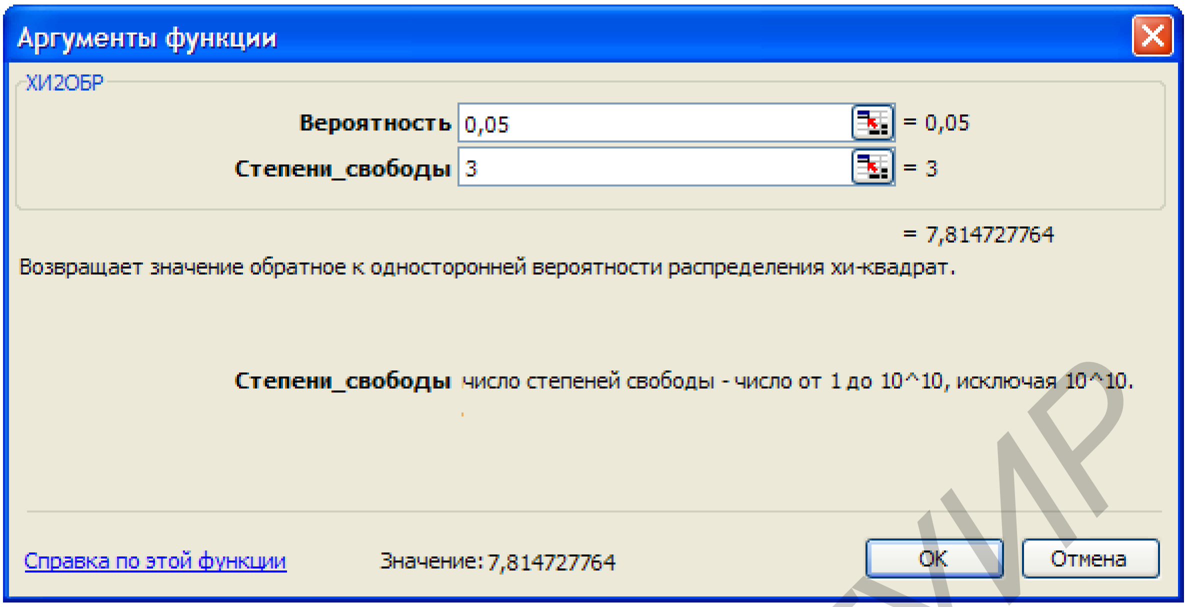


Рис. 3.2

Используя эту функцию, следует ввести число степеней свободы *p* и вероятность ошибки, например 0,05. Это значение x=7,814 и будет соответствовать χ^2 табличному. Так, в нашем случае заключаем, что найденное точное решение можно рассматривать как *статистически адекватное*.

4. ПРОТИВОРЕЧИВЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

4.1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ВВЕДЕНИЯ ИСЧИСЛЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ МНОЖЕСТВ

Исключение аномалий, связанных с принципом *reductio ad absurdum*, имеет определяющее значение при построении машины для автоматического распознавания доказательств. Хорошо известно, что современные различные направления математики – интуиционистское, конструктивистское, аксиоматическое, логистическое, нестандартное и другие – связаны с различными исходными точками зрения на проблему доказательства. Анализ этих направлений далеко выходит за цели пособия. Вместе с тем представляется, что одна из главных причин подобного одна – рассмотрение противоречивости как аномалии, недопустимой для корректной системы рассуждений. Отметим известные подходы к исчислению противоречивых систем формул [16,17]. Особенностью описываемого в данном подразделе подхода является то, что мы «не выходим» за рамки классической логики предикатов (высказываний), т. е. обеспечиваем сохранение большинства известных результатов.

Мотивация для введения исчисления противоречивых множеств (логик) связана с аномалией разбора доказательств на примере языка LAR (см. подразд. 1.6).

4.2. НЕКОРРЕКТНЫЕ МНОЖЕСТВА – НОВАЯ ПЛАТФОРМА

Введем понятие некорректного множества, базируясь на (интуитивном) понятии отношения строгой принадлежности ($\in$) и функции меры $\mu_A(x)$ принадлежности элемента x множеству A [5].

В общем случае некорректное множество A определяется как пара:

$$A =_{\text{def}} \{A^{\text{int}}, \sigma_A\}, \tag{4.1}$$

где

$$A^{\text{int}} =_{\text{def}} \{x \mid \mu_A(x) = 1\},$$
$$\sigma_A =_{\text{def}} \{y \mid \mu_A(y) < 1\}$$

и $\mu_A()$ – однозначная функция, в силу чего A^{int}, σ_A не имеют общих элементов.

Считаем, что A^{int}, σ_A – обычные (например по Цермело-Френкелю) множества, т. е. вводимые ниже некорректные множества получаются из корректных на основе операции получения пары. Указанное допущение, разумеется, не является общим. В (4.1) A^{int} есть «непротиворечивое ядро» множества A и σ_A – противоречивая часть множества A .

Определение 4.1. Множество A корректно, если $\sigma_A = \varnothing$. Множество A некорректно, если $\sigma_A \neq \varnothing$.

Определение 4.2. Для произвольного множества $A = \{A^{\text{int}}, \sigma_A\}$ зададим множество-сумму $A^{\text{U}} = \{A_{\Sigma}^{\text{int}}, \varnothing\}$ как

$$t \,\xi\, A_{\Sigma}^{\text{int}} \leftrightarrow (t \,\xi\, A^{\text{int}}) \vee (t \,\xi\, \sigma_A).$$

Здесь ξ – символ принадлежности к некорректному множеству.

Определение 4.3. Дополнением множества $A = \{A^{\text{int}}, \sigma_A\}$ назовем множество $B = \{B^{\text{int}}, \sigma_B\}$ такое, что

1) $\sigma_A = \sigma_B$ (противоречивые части множеств совпадают);
2) $\forall x\, (x \,\xi\, A \rightarrow x \not\xi\, B)\ \&\ (x \,\xi\, B \rightarrow x \not\xi\, A)$;
3) не существует множества $C = \{C^{\text{int}}, \sigma_C\}$, удовлетворяющего пп.1,2 при замене B на C, и такого, что $B^{\text{int}} \subset C^{\text{int}}$ (для отношения $\subset$ в строгом смысле).

Будем обозначать дополнение некорректного множества A как $\sim A$.

Приведем определение основных операций \, ∪, ∩ для некорректных множеств [5]:

a)
$$X \setminus Y = \{Z^{\mathrm{int}}, \sigma_Z\},$$
$$t\ \xi\ Z^{\mathrm{int}} \leftrightarrow (t\ \xi\ X^{\mathrm{int}})\ \&\ (t\ \not\xi\ Y^{\mathrm{int}}),$$
$$q\ \xi\ \sigma_Z \leftrightarrow (q\ \xi\ \sigma_X)\ \&\ \neg(q\ \xi\ \sigma_Y);$$

b)
$$A \cup B = \{C^{\mathrm{int}}, \sigma_C\},$$
$$t\ \xi\ C^{\mathrm{int}} \leftrightarrow (t\ \xi\ A^{\mathrm{int}}) \vee (t\ \xi\ B^{\mathrm{int}}),$$
$$q\ \xi\ \sigma_C \leftrightarrow (q\ \xi\ \sigma_A \vee q\ \xi\ \sigma_B)\ \&\ \neg(q\ \xi\ C^{\mathrm{int}});$$

c)
$$A \cap B = \{D^{\mathrm{int}}, \sigma_D\},$$
$$t\ \xi\ D^{\mathrm{int}} \leftrightarrow (t\ \xi\ A^{\mathrm{int}})\ \&\ (t\ \xi\ B^{\mathrm{int}}),$$
$$q\ \xi\ \sigma_D \leftrightarrow (q\ \xi\ (\sigma_A)^{\mathrm{U}} \vee q\ \xi\ (\sigma_B)^{\mathrm{U}})\ \&\ (\mathrm{q}\ \xi\ A^{\mathrm{U}})\ \&\ (q\ \xi\ B^{\mathrm{U}}).$$

Определим отношение принадлежности для некорректных множеств:
$$A \subseteq B \leftrightarrow \exists\, C\ (B = A \cup C)$$
или
$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall t\ ((t\ \xi\ A \rightarrow t\ \xi\ B)\ \&\ (t\ \xi\ A^{\mathrm{int}} \rightarrow t\ \xi\ B^{\mathrm{int}}).$$

Логико-алгебраическая операция ⊆ является формальной основной для определения операции логического сдедования.

АКСИОМЫ

1. $A = A$.
2. $A = {\sim}{\sim}A$.
3. $A \cup B = B \cup A$.
4. $A \cap B = B \cap A$.
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
6. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
7. $A \cup A = A \cap A = A$.
8. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
9. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Доказательства всех этих аксиом получаются прямым использованием определений логико-алгебраических операций над некорректными множествами.

Определение 4.4. Формула *S* локализует множество *Z*, если она является характеристической функцией этого множества. Соответствие между формулой *S* и локализуемым ею множеством $\{S^{\mathrm{int}}, \sigma_S\}$ передаем так: $S \equiv (S^{\mathrm{int}}, \sigma_S)$.

Определение 4.5. Формула $B \equiv (B^{\text{int}}, \sigma_B)$ следует из формулы $A \equiv (A^{\text{int}}, \sigma_A)$ (пишем $A \to B$), если одновременно верно:

(i) $A^{\text{int}} \subseteq B^{\text{int}}$,
(ii) $A^{\text{U}} \subseteq B^{\text{U}}$.

Далее запись $P(f_1, f_2) \equiv (P^{\text{int}}, \sigma_P)$ понимаем так: f_1 локализует P^{int}, f_2 локализует σ_P. Используя логико-алгебраические операции над некорректными множествами, найдем:

$P(f_1, f_2) \vee R(g_1, g_2)$;
$P(f_1, f_2)$ & $R(g_1, g_2)$;
$\sim P(f_1, f_2)$.

Следующие результаты получаются непосредственно из определений.

a) $P(f_1, f_2) \vee R(g_1, g_2) = \{P \vee R\}\ (f_1 \vee g_1\ ,\ f_2 \& \neg g_1 \vee \neg f_1 \& g_2)$,
b) $P(f_1, f_2) \& R(g_1, g_2) = \{P \& R\}\ (f_1 \& g_1\ , f_2 \& g_1 \vee f_1 \& g_2 \vee f_2 \& g_2)$,
c) $\sim P(f_1, f_2) = \{\sim P\}\ (\neg f_1 \& \neg f_2,\ f_2)$.

В дальнейшем без ущерба для смысла, где это возможно, опускаем символ &; отметим, что символ ~ применяется к некорректным множествам и локализующим их формулам, а $\neg$ – к строгим формулам, так что мы их не всегда отождествляем.

Определение (базовых локализующих формул)

(i) каждая атомарная литера S суть (базовая) локализующая формула с представлением $S \equiv (f_S, \sigma_S)$, где f_S локализует S^{int}, а σ_S – одноименное множество, причем строго истинно $\neg f_S \vee \neg \sigma_S$ (это соотношение должно приниматься во внимание каждый раз при построении выводов);
(ii) если P, R – (базовые) локализующие формулы, то таковыми являются формулы, получаемые на основе операций $\vee$, &, ~, как показано в пп. «***a***», «***b***», «***c***»;
(iii) других базовых локализующих формул нет;
(iv) каждая базовая локализующая формула суть локализующая;
(v) пусть α – локализующая формула, β – нет. Тогда

$\alpha \vee \beta$, $\alpha \& \beta$ – обе локализующие формулы, причем

$$\alpha \& \beta = (f_\alpha \& \beta, \sigma_\alpha \& \beta);\ \ \alpha \vee \beta = (f_\alpha \vee \beta, \sigma_\alpha \& \neg\beta).$$

Разделение формул на локализующие и нелокализующие связано с тем, что отношение следования ($\to$) нельзя представить в базисе &, $\vee$, ~ ($\neg$). Это доказано далее по ходу изложения. Данное обстоятельство существенно при интерпретации формул типа $\alpha \to \beta$.

Определение 4.6.

А. Локализующая формула $\alpha \equiv (f_\alpha\ ,\ \sigma_\alpha)$ слабо истинна, если строго истинна формула $f_\alpha \vee \sigma_\alpha$.

Б. Локализующая формула $\sim\alpha \equiv (\neg f_\alpha \& \neg\sigma_\alpha\ ,\ \sigma_\alpha)$ слабо истинна, если строго истинна $(\neg f_\alpha \& \neg\sigma_\alpha \vee \sigma_\alpha) = (\neg f_\alpha \vee \sigma_\alpha)$.

Из данных определений следует, что отрицание слабо истинной формулы, являющееся слабо ложной формулой, таково, что $\alpha\ \&\ \sim\alpha = \sigma_\alpha \neq \text{false} = (\varnothing,\varnothing)$ в общем случае.

В1. Если α, β обе локализующие формулы ($\alpha \equiv (f_\alpha\ ,\ \sigma_\alpha)$, $\beta \equiv (f_\beta\ ,\ \sigma_\beta)$), то $\alpha \to \beta$ эквивалентна следующей системе:

[i] $f_\alpha \to f_\beta$,

[ii] $f_\alpha \vee \sigma_\alpha \to f_\beta \vee \sigma_\beta$.

В2. Пусть α – локализующая формула, β – нелокализующая. Тогда

$$\alpha\ \&\ \beta \equiv (f_\alpha\ \&\ \beta,\ \sigma_\alpha\ \&\ \beta),$$

откуда получаем для локализующих α , h и не локализующих β, g , что $\alpha\ \beta \to h\ g$ эквивалентна системе условий:

[i] $f_\alpha\, \beta \to f_h\, g$,

[ii] $f_\alpha\, \beta \vee \sigma_\alpha\, \beta \to f_h\, g \vee \sigma_h\, g$.

В3. Пусть α – нелокализующая, β – локализующая. Тогда $\alpha \to \beta$ равносильно высказыванию: «если α истинна, то β слабо истинна», т. е.

$$\text{условие\_истинности\_}\alpha \to f_\beta \vee \sigma_\beta.$$

Если α – локализующая формула, β – нелокализующая, то $\alpha \to \beta$ равносильно высказыванию: «если β ложно, то $\sim\alpha$ слабо истинна», т. е.

$$\text{условие\_истинности\_}\neg\beta \to \neg f_\alpha \& \neg\sigma_\alpha \vee \sigma_\alpha .$$

Отсюда, используя доказываемое ниже тождество $\alpha \to \beta \equiv \sim\beta \to \sim\alpha$, получим

$$f_\alpha \& \neg\sigma_\alpha \to \text{условие\_истинности\_}\beta .$$

В4. Рассмотрим общий по представлению случай

$$\alpha_1 \& \alpha_2 \& \ldots \alpha_n \& \beta_1 \& \beta_2 \& \ldots \& \beta_z \rightarrow h_1 \& h_2 \& \ldots h_t \& g_1 \& g_2 \& \ldots \& g_K,$$

где α_i, h_j – локализующие, $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, t}$;

β_s, g_p – нелокализующие, $s = \overline{1, z}$; $p = \overline{1, K}$.

Тогда истинность этой обобщенной формулы эквивалентна следующей системе условий:

(i) $f_{\alpha 1} \& f_{\alpha 2} \& \ldots \& f_{\alpha n} \& B_1 \& B_2 \ldots \& B_z \rightarrow f_{h1} \& f_{h2} \& \ldots \& f_{ht} \& G_1 \& \& G_2 \ldots \& G_K$,

(ii) $(f_{\alpha 1} \vee \sigma_{\alpha 1}) \& (f_{\alpha 2} \vee \sigma_{\alpha 2}) \& \ldots \& (f_{\alpha n} \vee \sigma_{\alpha n}) \& B_1 \& B_2 \ldots \& B_z \rightarrow$
$\rightarrow (f_{h1} \vee \sigma_{h1}) \& (f_{h2} \vee \sigma_{h2}) \& \ldots \& (f_{ht} \vee \sigma_{ht}) \& G_1 \& G_2 \ldots \& G_K,$

где

B_i – условие истинности нелокализующей формулы β_i;

G_i – условие истинности нелокализующей формулы g_i.

Замечание. По умолчанию предполагается наличие дополнительных посылок: $\neg f_i \vee \neg \sigma_i$ для каждой локализующей формулы.

Пример

Некорректная формула $(\alpha \rightarrow \beta) \& \sim\beta \rightarrow \sim\alpha$ эквивалентна следующей системе условий классической пропозициональной логики:

$$(f_\alpha \rightarrow f_\beta) \& (f_\alpha \vee \sigma_\alpha \rightarrow f_\beta \vee \sigma_\beta) \& \neg f_\beta \neg \sigma_\beta \rightarrow \neg f_\alpha \neg \sigma_\alpha,$$
$$(f_\alpha \rightarrow f_\beta) \& (f_\alpha \vee \sigma_\alpha \rightarrow f_\beta \vee \sigma_\beta) \& (\neg f_\beta \vee \sigma_\beta) \rightarrow (\neg f_\alpha \vee \sigma_\alpha)$$

с дополнительными условиями:

$$\neg f_\alpha \vee \neg \sigma_\alpha, \qquad \neg f_\beta \vee \neg \sigma_\beta.$$

Теорема 4.1. Формула $\alpha \rightarrow \beta$ не выразима только с помощью операций $\&, \vee, \sim$ над α, β.

Доказательство.

Пусть $\alpha \rightarrow \beta$ эквивалентна некоей формуле $q(\alpha, \beta)$ над α, β, использующей лишь $\&, \vee, \sim$. Тогда $\alpha \rightarrow \beta$ суть локализующая формула, так что

$$\alpha \rightarrow \beta \equiv (U(\alpha, \beta), W(\alpha, \beta)).$$

В силу определения $\alpha \rightarrow \beta$ имеем:

$U(\alpha, \beta) \equiv f_\alpha \rightarrow f_\beta$ (для ядра);

$U(\alpha, \beta) \vee W(\alpha, \beta) \rightarrow (f_\alpha \vee \sigma_\alpha \rightarrow f_\beta \vee \sigma_\beta)$.

Отсюда

$f_\alpha \to f_\beta \vee W(\alpha, \beta) \to (f_\alpha \vee \sigma_\alpha \to f_\beta \vee \sigma_\beta) \equiv \neg f_\alpha \neg\sigma_\alpha \vee f_\beta \vee \sigma_\beta$, что опровергается интерпретацией: $f_\beta = \sigma_\beta = 0$, $\neg f_\alpha = 1$, $\sigma_\alpha = 1$, какую бы формулу $W(\alpha, \beta)$ мы ни взяли.

4.3. ПРАВИЛА ВЫВОДА И ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пусть формула f локализует множество $F = \{R_F, \sigma_F)$. f слабо истинна, если и только если $F^U = \Re$, где $\Re$ – Universe of Discourse (множество всех возможных интерпретаций для f). Слабо ложная (слабо противоречивая) формула $\sim f$ есть отрицание слабо истинной формулы f.

Определение 4.7. Правилом вывода $A \Rightarrow B$ называется такое соотношение между некорректными формулами A и B, при котором всякий раз, когда A слабо истинна, B слабо истинна также.

Замечание. Фраза «Всякий раз, когда A слабо истинна ... » равносильна фразе «Каким бы образом формула A не локализовала $\Re$».

Теорема 4.2. Для того чтобы имело место

$$p_1 \,\&\, p_2 \,\&\, \ldots \,\&\, p_n \to S,$$

необходимо, но недостаточно слабой противоречивости

$$p_1 \,\&\, p_2 \,\&\, \ldots \,\&\, p_n \,\&\, \sim S.$$

Покажем только недостаточность посылки на следующем контрпримере:

$x_1 \,\&\, \sim x_1 \,\&\, x_2$ – слабо противоречива, но следование

$$x_1 \,\&\, \sim x_1 \to \sim x_2$$

не имеет места, например, когда x_1, $\sim x_1$ слабо истинны, а x_2 – просто истинно, т. е. $x_2 \equiv (\Re, \varnothing)$, так что $\sim x_2 = (\varnothing, \varnothing)$.

Следовательно, принцип **reductio ad absurdum** не может служить основанием для получения выводов.

В рассматриваемой логике не верен принцип резолюций Робинсона, но справедливы правила Де Моргана, **modus ponens**, и закон исключенного третьего. Последнее обстоятельство разнит эту логику от трехзначной логики Лукасевича, где закон исключенного третьего места не имеет [1]. Используем следующую основу выводов в некорректной логике: *исходная система некорректных формул сводится к эквивалентной системе формул классической логики, для которой верен принцип **reductio ad absurdum** и принцип резолюций Робинсона*.

Доказываются следующие основные правила тождественных преобразований:

А1) $\alpha \vee \sim\alpha \,\&\, \beta = \alpha \vee \beta$,
А2) $\sim\sim\alpha = \alpha$,
А3) $\sim(\alpha \,\&\, \beta) = \sim\alpha \vee \sim\beta$,
А4) $\sim(\alpha \vee \beta) = \sim\alpha \,\&\! \sim\beta$,
А5) $\alpha \vee \sim\alpha$,
А6) $\alpha \vee \alpha \,\&\, \beta = \alpha$,
А7) $j \vee \alpha \,\&\, \beta = (\alpha \vee j) \,\&\, (\beta \vee j)$.

Доказательство всех приведенных результатов методически одинаково, поэтому рассмотрим, например, **А6**. Полагаем $\alpha \equiv (f_\alpha , \sigma_\alpha)$, $\beta \equiv (f_\beta , \sigma_\beta)$.
Получаем $\alpha \,\&\, \beta \equiv (f_\beta f_\alpha , f_\alpha \sigma_\beta \vee f_\beta \sigma_\alpha \vee \sigma_\beta \sigma_\alpha)$.

$$\alpha \vee \alpha \,\&\, \beta \equiv (f_\alpha , \sigma_\alpha (\sim f_\alpha \vee \sim f_\beta)).$$

Теперь получаем

$$f_\alpha \vee \sigma_\alpha (\sim f_\alpha \vee \sim f_\beta) \to f_\alpha \vee \sigma_\alpha.$$

Наоборот,
$f_\alpha \vee \sigma_\alpha \to f_\alpha \vee \sigma_\alpha (\sim f_\alpha \vee \sim f_\beta)$ с учетом $\sim f_\alpha \vee \sim\sigma_\alpha$. Таким образом, локализующие функции одинаковы.

Теорема 4.3. Пусть $f_1, f_2, \dots , f_я$ слабо истинны. Тогда

У1) если $f_1 \,\&\, f_2 \,\&\, \dots \,\&\, f_я \to h$, то и $f_1 \,\&\, f_2 \,\&\, \dots \,\&\, f_я \Rightarrow h$,
У2) если $f_1 \,\&\, f_2 \,\&\, \dots \,\&\, f_я \Rightarrow h$, то и $f_1 \,\&\, f_2 \,\&\, \dots \,\&\, f_я \to h$.

Эта теорема дает ответ относительно вопроса о том, как строить выводы в некорректной логике. Назовем ее теоремой о полноте в узком смысле. Доказательство приведено в [5].

Тем самым показано, как строить машину вывода для некорректной логики.

Пример. Покажем, что из

$\alpha \to \beta$,
$\beta \vee \gamma \to \varepsilon$

выводима формула $\alpha \to \varepsilon$.

Обозначим $\alpha \equiv (f_\alpha\,,\, \sigma_\alpha)$, $\beta \equiv (f_\beta\,,\, \sigma_\beta)$, $\gamma \equiv (f_\gamma\,,\, \sigma_\gamma)$, $\varepsilon \equiv (f_\varepsilon\,,\, \sigma_\varepsilon)$.

Посылки:

1) $f_\alpha \to f_\beta$,
2) $f_\alpha \vee \sigma_\alpha \to f_\beta \vee \sigma_\beta$,
3) $f_\beta \vee f_\gamma \to f_\varepsilon$,
4) $f_\beta \vee \sigma_\beta \vee f_\gamma \vee \sigma_\gamma \to f_\varepsilon \vee \sigma_\varepsilon$.

Из пп. 1, 3 получим $\neg f_\alpha \vee f_\varepsilon$ или $f_\alpha \to f_\varepsilon$.

Из пп. 2, 4 выводим $\neg f_\alpha \neg \sigma_\alpha \vee f_\varepsilon \vee \sigma_\varepsilon$. или $f_\alpha \vee \sigma_\alpha \to f_\varepsilon \vee \sigma_\varepsilon$.

Убедимся далее в справедливости следующих правил вывода.

Пусть α, β, γ – слабо истинные формулы. Тогда справедливо

1) $\alpha \to \alpha \vee \beta$.

Доказательство.

$\alpha = (f_\alpha, \sigma_\alpha)$;

$\beta = (f_\beta, \sigma_\beta)$.

$\alpha \vee \beta = (f_\alpha \vee f_\beta;\ \sigma_\alpha \overline{f}_\beta \vee \sigma_\beta \overline{f}_\alpha)$.

Покажем, что

(i) $f_\alpha \to f_\alpha \vee f_\beta$ – это справедливо для обычной логики;

(ii) $f_\alpha \vee \sigma_\alpha \to f_\alpha \vee f_\beta \vee \sigma_\alpha \overline{f}_\beta \vee \sigma_\beta \overline{f}_\alpha$ – что также справедливо.

2) $\alpha \cdot \beta \to \alpha$.

При тех же обозначениях:

(i) $f_\alpha \,\&\, f_\beta \to f_\alpha$, что верно;

(ii) $f_\alpha \cdot f_\beta \vee \sigma_\alpha \cdot f_\beta \vee \sigma_\beta \cdot f_\alpha \vee \sigma_\alpha \cdot \sigma_\beta \to f_\alpha \vee \sigma_\alpha$,

но

$f_\alpha \cdot f_\beta \to f_\alpha$,

$\sigma_\alpha \cdot f_\beta \to \sigma_\alpha$,

$\sigma_\beta \cdot f_\alpha \to f_\alpha$,

$\sigma_\alpha \cdot \sigma_\beta \to \sigma_\alpha$, что и дает результат.

3) $\alpha \cdot \overline{\alpha} = \overline{\alpha}$ (если α слабо истинна по предположению),

$\alpha \vee \overline{\alpha} = \alpha,$

$\overline{\overline{\alpha}} = \alpha.$

4) $\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \vee \overline{\beta},$

$\overline{\alpha \vee \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}.$

5) $\dfrac{\alpha \to \beta, \ \ \beta \to \gamma}{\alpha \to \gamma}.$

Доказательство. Пусть

$\alpha = (f_\alpha, \sigma_\alpha),$

$\beta = (f_\beta, \sigma_\beta),$

$\gamma = (f_\gamma, \sigma_\gamma).$

Имеем:

$f_\alpha \cdot \overline{f}_\beta \to \square,$

$\sigma_\alpha \cdot \overline{f}_\beta \cdot \overline{\sigma}_\beta \to \square,$

$f_\beta \cdot \overline{f}_\gamma \to \square,$

$\sigma_\beta \cdot \overline{f}_\gamma \cdot \overline{\sigma}_\gamma \to \square.$

Но тогда

$f_\alpha \cdot \overline{f}_\gamma \to \square,$

и $\sigma_\alpha \cdot \overline{f}_\gamma \cdot \overline{\sigma}_\gamma \to \square.$

Действительно, в силу обычной (классической) логики

$f_\alpha \to f_\beta$ и $f_\beta \to f_\gamma \to f_\alpha \to f_\gamma,$ отсюда $f_\alpha \cdot \overline{f}_\gamma \to \square.$

Далее

$\sigma_\alpha \to f_\beta \vee \sigma_\beta,$

$f_\beta \to f_\gamma,$

$\sigma_\beta \to f_\gamma \vee \sigma_\gamma,$

отсюда

$$\sigma_\alpha \to f_\gamma \vee \sigma_\gamma,$$

что и дает $\sigma_\alpha \cdot \overline{f}_\gamma \cdot \overline{\sigma}_\gamma \to \square$.

6) правило **modus ponens** также справедливо.

$$\frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}.$$

Доказательство.

$\alpha = (f_\alpha, \sigma_\alpha)$,

$\beta = (f_\beta, \sigma_\beta)$.

Из условия $\alpha \to \beta$ получаем

$f_\alpha \to f_\beta$,

$f_\alpha \vee \sigma_\alpha \to f_\beta \vee \sigma_\beta$.

Слабая истинность α дает еще одну посылку:

$f_\alpha \vee \sigma_\alpha$.

Доказывается формула $f_\beta \vee \sigma_\beta$. Это делается с помощью принципа резолюций Робинсона и оставляется в качестве упражнения.

4.4. ОБОБЩЕНИЕ НА ЛОГИКУ ПРЕДИКАТОВ

Формулу некорректной логики предикатов $P(x)$ со свободной переменной x представим как

$$P(x) \equiv (F_P(x), \sigma_P(x)).$$

Рассматриваем основные операции &, $\vee$, ~ , как и ранее.

1) $P(x, y) \vee Q(x) \equiv (P \text{ v } Q)\ (F_P(x,y) \vee F_Q(x)$**;** $\sigma_Q(x)\ \neg F_P(x, y) \vee \neg F_Q(x)\ \sigma_P(x, y))$;

2) $P(x, y)\ \&\ Q(x) \equiv (P\&Q)\ (F_P(x, y)\ \&\ F_Q(x)$**;** $\sigma_Q(x)F_P(x, y) \vee F_Q(x)\sigma_P(x, y) \vee$ $\vee\ \sigma_Q(x)\sigma_P(x, y))$;

3) $\sim P(x, y) \equiv (\sim P)(\neg F_P(x, y) \neg \sigma_P(x, y)\ ;\ \sigma_P(x, y))$;

4) $P(x, y) \to Q(x) \equiv$

$$\equiv \begin{cases} F_P(x,y) \to F_Q(x), \\ F_P(x,y) \vee \sigma_P(x,y) \to F_Q(x) \vee \sigma_Q(x). \end{cases}$$

Таким образом, для бескванторных предикатных формул не выходим за пределы известных нам формализмов**.** Формула $\exists x P(x)$ не является локализующей и эквивалентна следующей формуле обычной логики предикатов: $\exists x\ (F_P(x) \vee \sigma_P(x))$. Аналогично формула $\forall x\ P(x)$ не является локализующей и эквивалентна следующей формуле обычной логики предикатов: $\forall x\ (F_P(x) \text{ v } \sigma_P(x))$.

Каждая квантифицированная формула не может быть представлена конечным выражением в базисе &, $\vee$, ~ с помощью тех предикатов, которые входят в ее тело. Например, $\exists$x $P(x) = P(a) \vee P(b) \vee ...$ и т. д. Следовательно, только в конечном домене формула $\exists x\ P(x)$ является локализующей. Кроме того, замкнутая формула $\exists x$ $P(x)$ утверждает, что не пусто $F_P(x)$ либо $\sigma_P(x)$. Поскольку мы представляем некорректное множество парой корректных множеств (это обстоятельство, разумеется, не может быть исчерпывающим пунктом видения состояния вещей), то формула $\exists x$ $P(x)$ передает лишь некое свойство множества, локализуемого бескванторной формулой $P(x)$. Действительно, факт наличия в корректном множестве хотя бы одного элемента не может быть противоречивым. Эти соображения дают, впрочем, только содержательно устанавливаемое основание для принятия факта нелокализуемости формул с кванторами. Вместе с тем мы допускаем, что иная точка зрения может дать иной вариант исчисления для некорректных формул с кванторами.

Рассмотрим формулу $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$. Эта формула означает, что для произвольного α справедливо $P(\alpha) \to Q(\alpha)$, что дает эквивалентную систему:

$$\begin{cases} F_P(\alpha) \to F_Q(\alpha), \\ F_P(\alpha) \vee \sigma_P(\alpha) \to F_Q(\alpha) \vee \sigma_Q(\alpha). \end{cases}$$

Поэтому $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$ эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \forall x\, F_P(x) \to F_Q(x), \\ \forall x\, F_P(x) \vee \sigma_P(x) \to F_Q(x) \vee \sigma_Q(x). \end{cases}$$

Аналогично $\exists x\ (P(x) \to Q(x))$ заменяется эквивалентной формулой классической логики первого порядка:

$$\exists x\ ((F_P(x) \to F_Q(x))\ \&\ (F_P(x) \text{ v } \sigma_P(x) \to F_Q(x) \vee \sigma_Q(x))\ .$$

Сформулируем общее правило записи эквивалентной системы в логике первого порядка для заданной квантифицированной некорректной формулы.

ПРАВИЛО. Пусть дана некорректная квантифицированная формула с локализующими предикатами $A()$, $B()$:

$$Qx_1\ Qx_2\ \ldots\ Qx_n\ (\ A(x_1,x_2,\ldots,x_n) \to B(x_1,x_2,\ldots,x_n)),$$

где $Q \in \{\forall,\exists\}$.

Ей эквивалентна система обычной логики первого порядка вида

$$Qx_1\ Qx_2\ \ldots\ Qx_n\ ((\ f_A(x_1, x_2,\ldots, x_n) \to f_B(x_1, x_2, \ldots , x_n))\ \&\ (\ f_A(x_1, x_2,\ldots, x_n) \vee \sigma_A(x_1, x_2,\ldots, x_n) \to f_B\ (x_1, x_2,\ldots, x_n) \vee \sigma_B\ (x_1, x_2,\ldots, x_n)).$$

Пусть $A(\ldots)$ – нелокализующая формула, $B(\ldots)$ – локализующая. Тогда исходная некорректная формула эквивалентна

$$Qx_1\ \ Qx_2\ \ \ldots\ \ Qx_{\mathrm{n}}((\text{условие\_истинности\_}A(x_1,x_2,\ \ldots\ ,\ x_n)\ \ \to f_B\ \ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \vee \vee\ \sigma_B\ (x_1, x_2, \ldots , x_n)).$$

Пусть $A(\ldots)$ – локализующая, $B(\ldots)$ – нелокализующая. Тогда эквивалентная система имеет такой вид:

$$\mathrm{Q}x_1\ \mathrm{Q}x_2\ \ldots\ \mathrm{Q}x_n\ ((\neg f_A\ (x_1, x_2, \ldots , x_n)\ \&\ \neg\sigma_A\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)) \to \text{усло-вие\_истинности\_}B(x_1, x_2, \ldots , x_n)).$$

Пример. Докажем формулу

$$(\forall x\ P(x)\ \&\ (P(c) \to Q)) \to Q.$$

Здесь в посылочной части $\forall x\ P(x)$ – нелокализующая;

$P(c) \equiv (F_P\ (c), \sigma_P(c))$ – локализующая и Q – локализующая формулы.

$P(c) \to Q$ – нелокализующая. Условия истинности посылок таковы:

1) $\forall x(F_P\ (x) \vee\ \ \sigma_P(x))$.
2) $F_P\ (c) \to f_Q$.
3) $F_P\ (c)\ \ \vee \sigma_P(c) \to f_Q \vee \sigma_Q$.

В заключительной части утверждается слабая истинность Q, т. е.

4) $f_Q \vee \sigma_Q$.

Условия 1 – 4 рассматриваются как формулы классической логики предикатов. Нетрудно видеть, что 4 следует из 1 – 3.

Таким образом, некорректная логика предикатов сохраняет многие результаты о невыводимости, характерные для классической логики предикатов. Важно то, что для некорректной логики сохраняется весь арсенал механизмов вывода, применяемых в классической логике.

4.5. АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ ПОДХОД К ВЫВОДУ В ПРОТИВОРЕЧИВЫХ СИСТЕМАХ

Можно представить иную точку зрения на вывод в противоречивых системах. Данный подраздел основан на материалах работ [18] , [19]. Пусть дана система дизъюнктов (возможно противоречивая, хотя и не обязательно противоречивая). Дана формула, которую требуется вывести. Спрашивается, имеется ли такое непротиворечивое и непустое подмножество дизъюнктов исходной системы, из которого выводима доказываемая формула. Обозначим эту задачу ПРВЫП. Выводимость в такого рода постановке мы назовем *пр*-выводимостью, чтобы не отождествлять ее с классически понимаемой выводимостью. Ясно, что такая постановка отличается от рассмотренной ранее. Вместе с тем, можно обосновать ее целесообразность хотя бы таким образом: в базе знаний экспертной системы какая-то часть *In* формул может вызывать общую противоречивость, причем эта часть заранее не определена. Следовательно, корректный логический вывод можно строить тогда, когда не задействованы формулы из *In*. Можно сформулировать модификацию данной задачи в следующей постановке. Сохраняя предыдущую постановку, потребуем, чтобы непротиворечивое и непустое подмножество дизъюнктов, из которого выводима данная формула, было максимальным по включению, т. е. содержало бы максимальное число дизъюнктов. Эту задачу будем обозначать как ПРВЫП-М.

Решение ПРВЫП-М

Пусть доказываемая формула есть φ, а исходное множество дизъюнктов – W. Согласно теореме дедукции, для доказательства φ следует установить противоречивость множества $\{W, \neg\varphi\}$.

Назовем подмножество $\wp \subseteq \Re$ дизъюнктов максимальным по включению, если одновременно истинно:

– $\wp$ непротиворечиво;

– добавление в $\wp$ любой формулы из $\Re \setminus \wp$ делает множество $\wp$ противоречивым.

Прежде всего сформулируем основную идею решения. Необходимо найти некоторое максимальное по включению множество $Z \subseteq W$ столбцов исходной матрицы, которые соответствуют непротиворечивой системе дизъюнктов. Добавление в это множество любого другого дизъюнкта исходной задачи должно делать множество Z противоречивым. Отрицание доказываемой формулы φ не должно входить в Z. Поэтому $\{Z, \neg\varphi\}$ противоречиво и, следовательно, $Z \Rightarrow \varphi$.

Таким образом нас интересует не всякое максимальное по включению множество дизъюнктов $Z \subseteq W$, а только такое, для которого любая выполняющая интерпретация выполняет одновременно φ.

В процессе решения множество столбцов 0,1-матрицы разбивается на два подмножества. В первое войдут те столбцы, которые должны быть покрыты обязательно. Во второе подмножество войдут те столбцы, которые могут оказаться непокрытыми. В исходном состоянии все столбцы относятся к подмножеству необязательно покрываемых столбцов, за исключением столбцов, соответствующих тавтологическим дизъюнктам вида $x_i \vee \neg x_i$. Особенную роль играет столбец, соответствующий доказываемой формуле φ.

Сначала остановимся на однолитерных формулах φ. Более сложные варианты формулы φ можно свести к однолитерному случаю. В систему добавляется столбец, соответствующий ¬φ. Столбец, соответствующий ¬φ, все время относится к множеству столбцов, покрытие которых не обязательно. Более того, этот столбец должен так и остаться не покрытым. Тем самым гарантируется, что максимальное по включению множество Z будет выполнять ¬φ.

Дальнейшее изложение алгоритма проведем на примере. Так, возьмем в качестве исходной следующую систему дизъюнктов:

$$
\begin{aligned}
&D1= x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3,\\
&D2=\neg x_1 \vee \neg x_2,\\
&D3= x_1 \vee \neg x_3,\\
&D4= \neg x_1 \vee \neg x_3,\\
&D5= x_2 \vee x_3.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Эта система противоречива. Пусть требуется вывести формулу $\varphi = \neg x_2$. Для решения задачи введем дополнительные булевские переменные $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_5$ и запишем следующую систему логических формул

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \to \max,\\
&\alpha_1 \to x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3,\\
&\alpha_2 \to \neg x_1 \vee \neg x,\\
&\alpha_3 \to x_1 \vee \neg x_3,\\
&\alpha_4 \to \neg x_1 \vee \neg x_3,\\
&\alpha_5 \to x_2 \vee x_3,\\
&x_2 \text{ (отрицание доказываемой формулы).}
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Если эта система выполнима, то часть переменных α_i окажется равной 0 (в противном случае делаем вывод, что формула $\varphi = \neg x_2$ не доказуема, т. к. принятие ее отрицания не ведет к противоречию). Решение системы (4.3) можно найти методом на основе принципа групповых резолюций, который описан в [7,12]. Например, пусть решением будет следующее: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = =1$, $\alpha_3 = \alpha_5 = = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = 1$.

Добавим к системе новый дизъюнкт, определяемый относительно формул $\alpha_i = 0$, т. е. $\alpha_3 \vee \alpha_5$. (В дальнейшем будем ссылаться на правило присоединения новых дизъюнктов в описываемом методе как на правило RADD).

Получим новую систему:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \alpha_4 \vee \alpha_5,\\
&\alpha_1 \to x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3,\\
&\alpha_2 \to \neg x_1 \vee \neg x_2,\\
&\alpha_3 \to x_1 \vee \neg x_3,\\
&\alpha_4 \to \neg x_1 \vee \neg x_3,\\
&\alpha_5 \to x_2 \vee x_3,\\
&\alpha_3 \vee \alpha_5,\\
&x_2 \text{ (отрицание доказываемой формулы).}
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Находим снова решение этой системы:

$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 1$, $\alpha_2=0$, $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$.

Добавим к системе новый дизъюнкт α_2 :

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \alpha_4 \vee \alpha_5,\\
&\alpha_1 \to x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3,\\
&\alpha_2 \to \neg x_1 \vee \neg x_2,\\
&\alpha_3 \to x_1 \vee \neg x_3,\\
&\alpha_4 \to \neg x_1 \vee \neg x_3,\\
&\alpha_5 \to x_2 \vee x_3,\\
&\alpha_3 \vee \alpha_5,\\
&\alpha_2,\\
&x_2.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Очередное решение суть

$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 1$, $\alpha_1=0$, $x_1=0, x_2=1, x_3=0$.

Система на этот раз расширяется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \alpha_4 \vee \alpha_5,\\
&\alpha_1 \to x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3,\\
&\alpha_2 \to \neg x_1 \vee \neg x_2,\\
&\alpha_3 \to x_1 \vee \neg x_3,\\
&\alpha_4 \to \neg x_1 \vee \neg x_3,\\
&\alpha_5 \to x_2 \vee x_3,\\
&\alpha_3 \vee \alpha_5,
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

α_2,
α_1,
x_2.

Находим решение
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = 1, \ \alpha_3 = 0, \ \ x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1.$

Система принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \alpha_4 \vee \alpha_5,\\
&\alpha_1 \to x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3,\\
&\alpha_2 \to \neg x_1 \vee \neg x_2,\\
&\alpha_3 \to x_1 \vee \neg x_3,\\
&\alpha_4 \to \neg x_1 \vee \neg x_3,\\
&\alpha_5 \to x_2 \vee x_3,\\
&\alpha_3 \vee \alpha_5,\\
&\alpha_2,\\
&\alpha_1,\\
&\alpha_3,\\
&x_2.
\end{aligned} \qquad (4.7)$$

Эта система противоречива. На этом процесс итераций останавливается. В процессе итераций добавлены следующие новые формулы:

$$\begin{aligned}
&\alpha_3 \vee \alpha_5,\\
&\alpha_2,\\
&\alpha_1,\\
&\alpha_3.
\end{aligned}$$

На основании этих формул далее определяем интересующее нас максимальное по включению множество дизъюнктов исходной задачи, из которого выводима формула φ. Для этого строим матрицу следующего вида:

	$\alpha_3 \vee \alpha_5$	α_2	α_1	α_3
α_1	0	0	1	0
α_2	0	1	0	0
α_3	1	0	0	1
α_5	1	0	0	0

В этой матрице строки определяют все те литеры α_i, которые использованы в записи присоединенных в ходе итераций новых формул. Столбцы матрицы соответствуют присоединенным новым формулам.

Определим какое-нибудь неизбыточное покрытие данной матрицы, например,

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3.$$

Итак, теперь мы получили ответ на исходную задачу – интересующее максимальное по включению множество дизъюнктов системы (4.2), из которого выводима формула $\neg x_2$, есть

$$D1 = x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3,$$
$$D2 = \neg x_1 \vee \neg x_2, \qquad (4.8)$$
$$D3 = x_1 \vee \neg x_3.$$

Теперь обратимся к точному решению задачи (4.2) на основе сведения к задаче о минимальном взвешенном покрытии (ЗМВП). Для системы (4.2) строим матрицу покрытия (рис. 4.1). Таблица на рис. 4.1 использует кодировку формул столбцами обычным образом. Условие

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \to \max$$

преобразуем следующим образом:

$$\neg\alpha_1 + \neg\alpha_2 + \neg\alpha_3 + \neg\alpha_4 + \neg\alpha_5 \to \min. \qquad (4.9)$$

Итак, задача свелась к отысканию не просто минимального покрытия матрицы, а такого минимального покрытия, которое обеспечивает условие (4.9).

Заметим, что минимальное покрытие для матрицы на рис. 4.1 должно содержать ровно 8 строк (по числу переменных) при условии, что исходная система формул выполнима.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x_1		1		1							1							
x_2						1				1		1						
x_3		1				1							1					
$\neg x_1$			1		1						1							
$\neg x_2$		1	1									1						
$\neg x_3$				1	1								1					
α_1	1							1						1				
α_2	1								1						1			
α_3	1						1									1		
α_4	1																1	
α_5	1						1											1
$\neg\alpha_1$		1												1				
$\neg\alpha_2$			1												1			
$\neg\alpha_3$				1												1		
$\neg\alpha_4$					1												1	
$\neg\alpha_5$						1												1

Рис. 4.1

Условие (4.9) перепишем в иной форме:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \neg x_1 + \neg x_2 + \neg x_3 + 12\neg\alpha_1 + 12\neg\alpha_2 + 12\neg\alpha_3 + 12\neg\alpha_4 + 12\neg\alpha_5 + \\ + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \to \min. \tag{4.10}$$

Коэффициенты при переменных в условии (4.10) представляют веса строк в матрице на рис. 4.1. Теперь нас будет интересовать покрытие с минимальным суммарным весом образующих его строк. Принцип подбора коэффициентов в (4.10) следующий: т. к. строки $\neg\alpha_1$,$\neg\alpha_2$,$\neg\alpha_3$,$\neg\alpha_4$,$\neg\alpha_5$ желательно исключить из покрытия, им приписывается наибольший вес. Веса остальных строк одинаковы и минимальны. Вес для строки $\neg\alpha_i$ взят таким, чтобы включение в результирующее покрытие хотя бы одной такой строки было хуже в смысле (4.10), чем включение сразу всех «хороших» строк.

5. ПРОДУКЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ С ВРЕМЕННЫМ ПАРАМЕТРОМ

5.1. ОПИСАНИЕ СИСТЕМ С ВРЕМЕННЫМ ПАРАМЕТРОМ И ЗАДАЧА СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим задачу синтеза алгоритма управления по спецификациям, заданным в форме системы логических уравнений с временным параметром логики вида

$$f(x_{i1}(t),\dots,x_{iz}(t),y_k(t)) \to x_i(t+1), \tag{5.1}$$

где x_i представляет i-й разряд вектора состояния системы, определяемый в момент t (x_i называется разрядной переменной);

y_k соответствует характеристической переменной, определяющей выбор (при $y_k = 1$) k-й управляющей программы.

Запись

$$S_i \mathbin{\&} y_j(t) \to x_k(t+1)$$

интерпретируется так: «если состояние разрядных переменных суть S_i в момент t и выбирается j-я управляющая программа, то k-я разрядная переменная устанавливается в «1» на следующем такте $t + 1$».

Заметим, что запись

$$S_i \mathbin{\&} y_j(t) \to \bar{x}_k(t+1)$$

означает, что при реализации управления $y_i(t)$ k-я разрядная переменная устанавливается в значение «0», а не инвертируется. Это замечание важно, но можно показать, что такое «видение дела» не изменяет его сути. Наконец хотелось бы заметить, что продукция

$$S_i \mathbin{\&} y_j(t) \to \bar{x}_k(t+1) \mathbin{\&} x_l(t+1)$$

«распадается» на две:

$$S_i \mathbin{\&} y_j(t) \to \bar{x}_k(t+1),$$
$$S_i \mathbin{\&} y_j(t) \to x_l(t+1),$$

так что мы не теряем общности выкладок, используя запись (5.1), но допускаем, что y_k может не изменять часть переменных $x_i(t)$. Переменная t играет роль тактовой (номер шага/состояния).

Если y_j используется только в состояниях $S_{j1}, \dots, S_{jw}$, то мы включаем продукцию

$$\bar{S}_{j1} \mathbin{\&} \bar{S}_{j2} \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \bar{S}_{jw} \to \bar{y}_j$$

наряду с другими, чтобы указать, когда y_j точно не может применяться. Кроме того, нам нужны продукции, которые устанавливают, что если ни одна управляющая программа не используется, то ни одна разрядная переменная не изменяется.

Задача синтеза управления состоит в построении упорядоченной последовательности управляющих программ y_i, последовательная реализация которых переведет систему из начального состояния в конечное состояние, за число шагов, не превышающее заданную величину $k > 0$.

Итак, далее номер шага j ассоциируется с временным параметром индивидуальной управляющей программы, выполняемой на этом шаге.

Будем ссылаться на следующий иллюстративный пример:

$$x_1(t)\,\&\,\bar{x}_2(t)\,\&\,x_3(t)\,\&\,y_1(t) \to \bar{x}_1(t+1),$$
$$x_1(t)\,\&\,\bar{x}_2(t)\,\&\,x_3(t)\,\&\,y_2(t) \to x_2(t+1),$$
$$\bar{x}_1(t)\,\&\,\bar{x}_3(t)\,\&\,y_1(t) \to x_2(t+1),$$
$$\bar{x}_1(t)\,\&\,\bar{x}_2(t)\,\&\,y_3(t) \to x_3(t+1),$$
$$\bar{x}_1(t)\,\&\,x_3(t)\,\&\,y_1(t) \to x_1(t+1),$$
$$x_2(t)\,\&\,\bar{x}_3(t)\,\&\,y_2(t) \to x_3(t+1),$$
$$x_2(t)\,\&\,x_3(t)\,\&\,y_3(t) \to \bar{x}_3(t+1),$$
$$x_2(t)\,\&\,x_3(t)\,\&\,y_2(t) \to \bar{x}_2(t+1),$$
$$\bar{y}_1(t) \to x_1(t)\,\&\,x_1(t+1) \vee \bar{x}_1(t)\,\&\,\bar{x}_1(t+1),$$
$$\bar{y}_2(t) \to x_2(t)\,\&\,x_2(t+1) \vee \bar{x}_2(t)\,\&\,\bar{x}_2(t+1),$$
$$\bar{y}_3(t) \to x_3(t)\,\&\,x_3(t+1) \vee \bar{x}_3(t)\,\&\,\bar{x}_3(t+1),$$
$$(\bar{x}_1(t) \vee x_2(t) \vee \bar{x}_3(t))\,\&\,(x_1(t) \vee \bar{x}_3(t))\,\&\,(x_1(t) \vee x_2(t)) \to \bar{y}_1(t),$$
$$(\bar{x}_1(t) \vee x_2(t) \vee \bar{x}_3(t))\,\&\,(\bar{x}_2(t) \vee \bar{x}_3(t))\,\&\,(\bar{x}_2(t) \vee x_3(t)) \to \bar{y}_2(t),$$
$$(x_1(t) \vee x_2(t))\,\&\,(\bar{x}_2(t) \vee \bar{x}_3(t)) \to \bar{y}_3(t).$$

Пусть исходное состояние $S_0 = \{x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 0\}$ и целевое состояние $S_I = \{x_1(k) = 1,\ x_2(k) = 1,\ x_3(k) = 1\}$, где k – фиксированная величина, $k \le 3$ (в примере).

Приведенная постановка есть частный пример общего варианта задачи синтеза управления в продукционной экспертной системе.

Далее дается описание одной из «технологий» ее решения, которая может базироваться либо на указанном в [20] методе эквивалентных подстановок, либо на описанном в [21] методе отсечения литер. В качестве альтернативного варианта можно отметить вывод в динамической логике, который рассмотрим в следующем подразделе.

Теоретическое обоснование метода эквивалентных подстановок и метода отсечения литер содержится в указанных источниках.

5.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЯ

Для рассматриваемого иллюстративного примера построим эквивалентную систему дизъюнктов:

$$
\begin{aligned}
&\bar{x}_1(t) \vee x_2(t) \vee \bar{x}_3(t) \vee \bar{y}_1(t) \vee \bar{x}_1(t+1),\\
&\bar{x}_1(t) \vee x_2(t) \vee \bar{x}_3(t) \vee \bar{y}_2(t) \vee x_2(t+1),\\
&x_1(t) \vee x_3(t) \vee \bar{y}_1(t) \vee x_2(t+1),\\
&x_1(t) \vee x_2(t) \vee \bar{y}_3(t) \vee x_3(t+1),\\
&x_1(t) \vee \bar{x}_3(t) \vee \bar{y}_1(t) \vee x_1(t+1),\\
&\bar{x}_2(t) \vee x_3(t) \vee \bar{y}_2(t) \vee x_3(t+1),\\
&\bar{x}_2(t) \vee \bar{x}_3(t) \vee \bar{y}_3(t) \vee \bar{x}_3(t+1),\\
&\bar{x}_2(t) \vee \bar{x}_3(t) \vee \bar{y}_2(t) \vee \bar{x}_2(t+1),\\
&y_1(t) \vee x_1(t) \,\&\, \bar{x}_1(t+1),\\
&y_1(t) \vee \bar{x}_1(t) \,\&\, x_1(t+1),\\
&y_2(t) \vee x_2(t) \,\&\, \bar{x}_2(t+1),\\
&y_2(t) \vee \bar{x}_2(t) \,\&\, x_2(t+1),\\
&y_3(t) \vee x_3(t) \,\&\, \bar{x}_3(t+1),\\
&y_3(t) \vee \bar{x}_3(t) \,\&\, x_3(t+1),\\
&x_1(t)\bar{x}_2(t)x_3(t) \vee \bar{x}_1(t)x_3(t) \vee \bar{x}_1(t) \vee \bar{x}_2(t) \vee \bar{y}_1(t),\\
&x_2(t) \vee x_1(t)x_3(t) \vee \bar{y}_2(t),\\
&\bar{x}_1(t)\bar{x}_2(t) \vee x_2(t)x_3(t) \vee \bar{y}_3(t).
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Теперь мы полностью (хотя и укрупненно) опишем технологию решения задачи, исходя из (5.2). Предварительно введем одно определение, которое существенно для наших целей.

Определение 5.1. Системы дизъюнктов $S_1(x_1, \dots, x_n)$ и $S_2(x_1, \dots, x_{n-1})$, записанные соответственно с помощью литер(алов) $x_1, \dots, x_n$ и $x_1, \dots, x_{n-1}$ называем *Н-эквивалентными,* если и только если выполняются следующие условия:

(a) либо обе они несовместимы, либо

(b_1) каждый выполняющий набор $x_1^*, \dots, x_n^*$ для S_1 дает (содержит) выполняющий набор $x_1^*, \dots, x_{n-1}^*$ для S_2 и

(b_2) каждый выполняющий набор $x_1^*, \dots, x_{n-1}^*$ для S_2 может быть достроен до выполняющего набора $x_1^*, \dots, x_n^*$ для S_1 подходящим выбором значения x_n.

Как метод эквивалентных подстановок, так и метод отсечения литер реализуют схему построения цепочки *Н-эквивалентных* задач ВЫПОЛНИМОСТЬ, т. е. попросту сокращают число литер в системе, сохраняя при этом свойство *Н-эквивалентности*.

Теперь идея решения для системы (5.2) и заданных начальных условий может быть сформулирована следующим образом.

Редуцируем систему (5.2) к *Н-эквивалентной* ей системе, не содержащей литералов $y_i(t)(\bar{y}_i(t))$. Обозначим редуцированную систему $F^0(t,\ t+1)$, которая связывает два смежных состояния, таких, что из одного можно достичь другое с помощью некоторой управляющей программы.

Из $F^0(t, t+1)$ получим эквивалентные подстановки для $x_i(t+1)$ через $x_j(t)$. Короче и точнее найдем зависимости (эквиваленции):

$$(*) \qquad x_i(t+1) \equiv f_i(x_1(t),..., x_n(t)), \quad i = \overline{1, n}.$$

Теперь, используя (*), просто проверяем достижимость S_1 из S_0, начиная с заданного вектора $x_1(0), \ldots , x_n(0)$.

Может оказаться, что эквиваленции (*) будут иметь вид

$$(**) \qquad x_i(t+1) \equiv f_i(x_1(t),..., x_n(t), x_k(t+1),..., x_r(t+1)),$$

где в правой части (**) содержится одна или более переменных с временным параметром $(t + 1)$. В этом случае «временная раскрутка» (**) для $t = 0, 1, \ldots, k$ в общем случае предполагает решение системы булевых уравнений с пропозиционными переменными для каждого t.

Ситуация (*) соответствует наиболее благоприятному исходу, когда переходы на множестве допустимых состояний системы однозначны и единственны для каждого состояния. Ситуация (**) соответствует случаю, когда из некоего состояния можно попасть в несколько других. Однако даже зависимости (**) допускают, что из некоторых состояний может быть только единственный переход в другое состояние.

Теперь мы проиллюстрируем схему решения.

Для системы (5.2) избавимся от переменных y_1, y_2, y_3. Для этого можно использовать, например, правило эквивалентных подстановок либо метод отсечения литер. Укажем суть этих правил. Правило эквивалентных подстановок продемонстрируем, например, для литеры $y_1(t)$. Выпишем все дизъюнкты, содержащие $\bar{y}_1(t)$, и представим их в схематичном виде:

$$\begin{gathered}\bar{y}_1(t) \vee R_1 \\ \bar{y}_1(t) \vee R_2 \\ \ldots \\ \bar{y}_1(t) \vee R_z,\end{gathered}$$

где R_i – дизъюнкция литералов.

Тогда на основании выписанных дизъюнктов записывается эквиваленция, которая используется для замены $y_1(t)(\bar{y}_1(t))$:

$$y_1(t) \equiv R_1 \,\&\, R_1 \,\&\, \ldots \,\&\, R_z.$$

Правило отсечения литер состоит в следующем. Допустим, мы избавляемся от литеры (литерала) $y_1(t)(\bar{y}_1(t))$, т. е. строим *H*-эквивалентную систему *S'* для (5.2) без указанной литеры. Для этого перепишем в *S'* все те дизъюнкты, которые не содержат $y_1(t)(\bar{y}_1(t))$. На множестве Y_1 тех дизъюнктов, которые содержат $y_1(t)(\bar{y}_1(t))$, построим все возможные нетавтологические дизъюнкты –

резольвенты пар дизъюнктов из Y_1 с отсекаемым литералом $y_1(t)$. Эти резольвенты включим в *S'*; при этом сами дизъюнкты Y_1 в *S'* не включаются.

После этого объяснения построим систему $\mathrm{F}^0(t,\ t+1)$, не содержащую переменных $y_i(t)$. Но сначала (в целях иллюстрации) методом отсечения литер избавимся только от $y_1(t)(\bar{y}_1(t))$ и получим *H*-эквивалентную для (5.2) систему:

$$
\begin{aligned}
&x_1(t) \vee x_3(t) \vee \bar{x}_1(t+1) \vee x_2(t+1),\\
&x_1(t) \vee \bar{x}_1(t+1) \vee \bar{x}_2(t) \vee x_3(t),\\
&\bar{x}_1(t) \vee x_1(t+1) \vee \bar{x}_2(t)\,\&\, x_3(t),\\
&\bar{x}_1(t) \vee x_2(t) \vee \bar{x}_3(t) \vee \bar{y}_2(t) \vee x_2(t+1),\\
&x_1(t) \vee x_2(t) \vee \bar{y}_3(t) \vee x_3(t+1),\\
&\bar{x}_2(t) \vee x_3(t) \vee \bar{y}_2(t) \vee x_3(t+1),\\
&\bar{x}_2(t) \vee \bar{x}_3(t) \vee \bar{y}_3(t) \vee \bar{x}_3(t+1),\\
&\bar{x}_2(t) \vee \bar{x}_3(t) \vee \bar{y}_2(t) \vee \bar{x}_2(t+1),\\
&y_2(t) \vee x_2(t) \vee \bar{x}_2(t+1),\\
&y_2(t) \vee \bar{x}_2(t) \vee x_2(t+1),\\
&y_3(t) \vee x_3(t) \vee \bar{x}_3(t+1),\\
&y_3(t) \vee \bar{x}_3(t) \vee x_3(t+1),\\
&x_2(t) \vee x_1(t)x_3(t) \vee \bar{y}_2(t),\\
&\bar{x}_1(t)\bar{x}_2(t) \vee x_2(t)x_3(t) \vee \bar{y}_3(t).
\end{aligned}
$$

Теперь, опуская выкладки, приводим $\mathrm{F}^0(t,\ t+1)$:

$$
\begin{aligned}
&\bar{x}_2(t) \vee x_3(t) \vee x_2(t+1) \vee x_3(t+1),\\
&x_2(t) \vee \bar{x}_2(t+1) \vee x_1(t)x_3(t),\\
&x_1(t) \vee x_3(t) \vee \bar{x}_1(t+1) \vee x_2(t+1),\\
&x_1(t) \vee \bar{x}_1(t+1) \vee \bar{x}_2(t) \vee x_3(t),\\
&\bar{x}_1(t) \vee x_1(t+1) \vee \bar{x}_2(t)x_3(t),\\
&x_1(t) \vee x_2(t) \vee \bar{x}_3(t) \vee x_3(t+1),\\
&x_3(t) \vee \bar{x}_1(t)\,\&\,\bar{x}_2(t) \vee \bar{x}_3(t+1),\\
&\bar{x}_3(t) \vee x_3(t+1) \vee x_2(t) \vee \bar{x}_1(t).
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

Видим, что (5.3) не выполнима для значений $x_i(t)$ и $x_i(t+1)$ $(i = 1, 2, 3)$, которые мы берем из S_0 и S_1 (действительно, достаточно подставить во второй дизъюнкт $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0$ и $x_2(1) = 1$). Поступаем согласно описанной ранее укрупненной схеме. Выразим из (5.3) сначала

$a)\quad x_3(t+1) \equiv x_3(t) \vee \bar{x}_1(t) \,\&\, \bar{x}_2(t).$

Подставляя это выражение для x_3 в (5.3), и преобразовав ее, получим систему

$$\begin{aligned}
&\bar{x}_2(t) \vee x_3(t) \vee x_2(t+1),\\
&x_2(t) \vee \bar{x}_2(t+1) \vee x_1(t)x_3(t),\\
&x_1(t) \vee x_3(t) \vee \bar{x}_1(t+1) \vee x_2(t+1),\\
&x_1(t) \vee \bar{x}_1(t+1) \vee \bar{x}_2(t) \vee x_3(t),\\
&\bar{x}_1(t) \vee x_1(t+1) \vee \bar{x}_2(t)x_3(t),
\end{aligned}$$

находим

$b)\quad x_2(t+1) \equiv x_2(t) \vee x_1(t) \,\&\, x_3(t).$

Снова редуцируем систему:

$$\begin{aligned}
&x_1(t) \vee x_3(t) \vee \bar{x}_1(t+1) \vee x_2(t),\\
&x_1(t) \vee \bar{x}_1(t+1) \vee \bar{x}_2(t) \vee x_3(t),\\
&\bar{x}_1(t) \vee x_1(t+1) \vee \bar{x}_2(t)x_3(t).
\end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$c)\quad x_1(t+1) \equiv x_1(t) \vee x_3(t).$

Подстановки *a*), *b*), *c*) играют ключевую роль. Их можно найти один единственный раз по записи исходной системы продукций и хранить в базе данных управляющей системы для целей управления.

Тривиально находим нужную нам последовательность переходов на множестве состояний (системы):

$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Также очевидно устанавливается сам управляющий алгоритм:

$$Y = (y_3(0),\ y_1(1),\ y_2(2)).$$

Формальное обоснование

Пусть задача ВЫПОЛНИМОСТЬ$_1$ (коротко ВЫП$_1$) представлена множеством дизъюнктов D_1 & D_2 & … & D_k, записываемых с помощью литер $x_1, \ldots, x_n$ и их отрицаний. Рассматриваем задачу ВЫП$_2$, определенную на множестве переменных – литер $y_1, \ldots, y_q$, к которой ВЫП$_1$ сводится на основе гомоморфизма H:

$$\text{ВЫП}_2(y_1, \ldots, y_q) = H(\text{ВЫП}(x_1, \ldots, x_n)).$$

Известны [22] свойства гомоморфизма H:

(i) $H(\overline{A}) = \overline{H}(A)$,

(ii) если $A \to B$, то $H(A) \to H(B)$, откуда устанавливаем

(iii) $H(A \vee B) = H(A) \vee H(B)$,
$H(A \,\&\, B) = H(A) \,\&\, H(B)$.

Теорема 5.1. Гомоморфизм H устанавливает такое соответствие между множествами допустимых наборов I и J соответственно для ВЫП$_1$ и ВЫП$_2$, что любой набор $I_k \in I$, на котором истинен произвольный дизъюнкт D_f, отображается в набор(ы) $J_s \in J$, на котором истинна формула $H(D_f)$; если D_f ложен на $I_k \in I$, то $H(D_f)$ ложна на $J_s \in J$.

Теорема 5.2. H-сведение на основе метода эквивалентных подстановок или метода отсечения литер является тотально определенным гомоморфизмом.

Доказательство теорем является хорошим учебным упражнением. Таким образом, теоремы 5.1 и 5.2 являются основой следующего замечательного свойства H-сведения (на основе тотального гомоморфизма): в силу эквивалентных подстановок любому (выполняющему) набору $x_1^*(t + 1), x_2^*(t + 1), \ldots x_n^*(t + 1)$ можно указать один (или несколько в общем случае) (выполняющих) наборов $x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots x_n^*(t)$; наоборот, каждый выполняющий набор $x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots x_n^*(t)$ определяет один или несколько наборов $x_1^*(t + 1), x_2^*(t + 1), \ldots x_n^*(t + 1)$. В разобранном иллюстративном примере определялся единственный набор из *a*), *b*), *c*). В этом формальном обосновании остается разобрать два момента.

Во-первых, может оказаться, что редукция системы дизъюнктов на основе сокращения литер или эквивалентных подстановок приводит к вырожденной системе (система вырождена, если в ней одни лишь тавтологии; поскольку тавтологии нами отбрасываются, то вырожденная система в нашем случае – это пустая система без формул). Вырожденная система всегда выполнима на любом допустимом наборе. Таким образом, все зависит от того, на каком этапе редукций исходной системы дизъюнктов возникло вырождение. Рассмотрим возможные случаи.

А. Вырождение возникло на этапе удаления управляющих переменных. Это значит, что требуемый перевод системы из S_0 в S_1 реализует за один такт (!).

Иначе говоря, каково бы ни были начальное состояние S_0 и конечное состояние S_1, переход $S_0 \to S_1$ обеспечивается логикой управления за один такт.

Б. Вырождение возникло на этапе получения эквиваленций для $x_i(t+1)$. При этом часть переменных $x_j(t+1)$ получила эквивалентные представления типа *a*), *b*), *c*). В этом случае, те переменные $x_h(t+1)$, которые «не успели получить» эквивалентных представлений ввиду вырождения системы, могут быть установлены в любое состояние. Случай (Б) распадается на два подслучая.

Б1. Переменные $x_r(t+1)$, для которых найдены эквиваленции, содержат в правых частях эквиваленций только переменные с параметром t. В этом случае в цепочке $S_0 \to S_A \to S_B \to \ldots \to S_1$ нужно учитывать не все разрядные переменные, а только эти переменные x_r. Не выраженные через эквиваленции переменные могут быть установлены независимо в любое нужное значение, и эта установка не влияет на установку переменных x_r.

Б2. Переменные $x_r(t+1)$, для которых найдены эквиваленции, содержат в правых частях эквиваленций также невыраженные переменные с параметром $(t+1)$. Приведем какую-нибудь иллюстрацию подобной ситуации:

$$x_1(t+1) \equiv \bar{x}_1(t) \vee \bar{x}_3(t+1) \,\&\, \bar{x}_2(t),$$
$$x_2(t+1) \equiv x_2(t) \,\&\, x_3(t+1) \vee \bar{x}_3(t).$$

Переменная $x_3(t+1)$ не выражена через эквиваленцию ввиду вырождения системы. Неоднозначность такой ситуации связана с произвольным выбором значения $\bar{x}_3(t+1)$, в то время как выбор $x_1(0)$, $x_2(0)$, $x_3(0)$ задается начальными данными. В то же время переменная $x_3(t+1)$ может быть установлена в любое требуемое значение на любом такте. Пусть для определенности $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 1$.

Ближайшее состояние S_A суть:

$$x_1(1) \equiv \bar{x}_3(1),$$
$$x_2(1) \equiv 0.$$

Следующее состояние S_B суть:

$$x_1(2) \equiv x_3(1) \vee \bar{x}_3(2),$$
$$x_2(2) \equiv \bar{x}_3(1).$$

Сделаем еще шаг:

$$x_1(3) \equiv \bar{x}_3(1) \,\&\, x_3(2) \vee \bar{x}_3(3) \,\&\, x_3(1),$$
$$x_2(3) \equiv \bar{x}_3(1) \,\&\, x_3(2) \vee \bar{x}_3(2) \quad \text{и} \quad \text{т. д.}$$

Теперь легко усмотреть идею: при переходе от t к $t+1$ нужно решать очередную систему булевых уравнений, согласно требуемой установке выраженных переменных. Разумеется, в общем случае решение булевых систем сама по себе задача (от которой мы всячески пытаемся уйти) крайне трудоемкая. Некоторым (хотя и очень слабым) утешением может служить тот факт, что с каждым переходом $t \to t + 1$ увеличивается число вводимых в систему переменных.

Второй момент этого обоснования состоит в уяснении правомочности использованной интерпретации:

$$x_i(t) \equiv x_i(t) = 1,$$
$$\bar{x}_i(t) \equiv x_i(t) = 0.$$

Действительно, здесь нет вовсе никакого ограничения, т. к. пропозициональная переменная $x_i(t)$ означает «$x_i(t) = 1$». Поэтому если действительно $x_i(t) = 1$, то высказывание «$x_i(t) = 1$» истинно, и если $x_i(t) = 0$, то высказывание « $x_i(t) = 1$ » ложно, т. е. верно « $x_i(t) = 0$ ». Таким образом, синтаксис временных пропозициональных переменных адекватен их смыслу и нет никакого противоречия.

Рассмотрим правило эквивалентных подстановок. Для ясности рассмотрим какую-нибудь систему S:

$$S = \begin{array}{l} \bar{x}_1 \vee R_1, \\ \bar{x}_1 \vee R_2, \\ \ldots \\ \bar{x}_1 \vee R_z, \\ x_1 \vee D_1, \\ \ldots \\ x_1 \vee D_\omega, \\ P_1 \ldots P_Q, \end{array}$$

где R_i, D_j, P_h – дизъюнкции литер x_2 ... x_n и их отрицаний. Пусть S' получается подстановкой:

(*) $$x_1 = R_1 \,\&\, R_2 \,\&\, \ldots \,\&\, R_z .$$

1. Пусть I выполняет S и не выполняет S', например, не выполняется

(**) $$R_1 \,\&\, R_2 \,\&\, \ldots \&\, R_z \vee D_1 \quad \text{на} \quad I .$$

Однако (**) есть множество дизъюнктов

$$R_1 \vee D_1,$$
$$R_2 \vee D_1,$$
$$\ldots$$
$$R_z \vee D_1,$$

являющихся резольвентами S, а резольвенты как логические следствия выполняются на всяком наборе, на котором выполняется исходная система. Это противоречие означает, что любой набор I, выполняющий S, выполняет S'.

2. Пусть набор I' выполняет S', но не может быть достроен ни до одного набора I, выполняющего S никаким выбором значения для x_1. Но это невозможно. Действительно, если в $R_i \vee D_j$ выполняется D_j, а R_i – нет, то $x_1 = 0$, т. к. имеет место (*). Но тогда выполняется каждый дизъюнкт $\bar{x}_i \vee R_i$. С другой стороны, пусть D_j не выполняется. Тогда в силу (**) выполняется каждый набор R_1, R_2, … ,R_z, так что можно принять $x_1 = 1$. Итак, п. 2 опровергаем. Доказательство теоремы 5.2 получено.

5.3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛОГИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Рассмотрим динамическое уравнение

$$x(t+1) = x(t) \oplus \Delta x\ . \tag{5.4}$$

Это уравнение связывает значения переменной x в соседние моменты времени. Операция $\oplus$назвается сложением по модулю 2. Ее особенность в том, что результат сложения по модулю 2 дает значение 1, если и только если, значения операндов различны:

Таблица 5.1

$x(t)$	Δx	$x(t+1)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Из табл. 5.1 видно, что значение $x(t+1)$ изменяется только тогда когда $\Delta x = 1$. Применение дифференциала диктуется следующей идеей [23]:

1. Составить уравнения динамики системы, содержащие дифференциалы. Решить уравнения и найти все возможные решения.

2. Построить граф переходов между состояниями, связав любые два состояния дугой, если и только если соответствующие в этом решении дифференциалы приводят к такому переходу.

3. Найти путь между заданными состояниями в построенном графе, если таковой имеется.

Продемонстрируем данную идею примером задачи о козе, капусте и волке. Имеется лодка и лодочник, а также коза, капуста и волк. В лодке помещается лодочник и какой-то один и только один из объектов: коза, капуста, волк. Сначала все находятся на одном берегу (скажем левом). Необходимо перевезти всех на правый берег, причем ни на каком берегу не должно оставаться два взаимоисключающих объекта: козы и капусты, волка и козы без присутствия лодочника.
Введем переменные: P – лодочник, K – коза, S – капуста, W – волк, причем значение X=1 означает, что объект находится на левом берегу, а X=0 – что объект X находится на правом берегу. Составим уравнения, описывающие поведение системы [23].

1. Следующие уравнения показывают недопустимость пребывания на одном берегу антагонистических объектов без присутствия лодочника:

$$\overline{P}(WK \vee KS) = 0,$$
$$\overline{P}(\overline{W}\overline{K} \vee \overline{K}\overline{S}) = 0.$$

Из этих уравнений первое определяет недопустимость указанных комбинаций на левом берегу, а второе уравнение – соответственно на правом берегу.

2. В лодке может быть только лодочник и один из объектов:

$$\Delta P \Delta W \Delta K \vee \Delta P \Delta W \Delta S \vee \Delta P \Delta S \Delta K \vee \Delta S \Delta W \Delta K = 0,$$

$$\overline{\Delta P}(\Delta W \vee \Delta K \vee \Delta S) = 0.$$

Первое из этих уравнений означает, что невозможно одновременное изменение состояния сразу трех (любых) объектов. Второе уравнение означает, что если лодочник не изменяет своей позиции, то и никакой из оставшихся предметов своей позиции не изменяет также.

3. Следующее уравнение означает, что кто-то из объектов должен изменить свою позицию:

$$\Delta P \vee \Delta S \vee \Delta W \vee \Delta K = 1.$$

4. Следующие два уравнения показывают, что невозможны переходы в запрещенные состояния и из запрещенных состояний:

$$\overline{(P \oplus \Delta P)}[(W \oplus \Delta W)(K \oplus \Delta K) \vee (S \oplus \Delta S)(K \oplus \Delta K)] = 0,$$
$$(P \oplus \Delta P)[\overline{(W \oplus \Delta W)}\,\overline{(K \oplus \Delta K)} \vee \overline{(K \oplus \Delta K)}\,\overline{(S \oplus \Delta S)}] = 0.$$

Понять эти уравнения нетрудно, если учесть, например, что $W \oplus \Delta W$ означает новое (очередное, на следующем такте) состояние волка и т. п.
Теперь решим эту систему уравнений и найдем все подходящие решения. Выпишем эти решения в следующую таблицу.

Таблица 5.2

P	***S***	***W***	***K***	ΔP	ΔS	ΔW	ΔK	***P****	***S****	***W****	***K****
1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1

В этой таблице правые крайние четыре столбца соответствуют новым состояниям на следующем такте. По данной таблице можно построить граф переходов на множестве состояний объектов. Этот граф приведен на рис. 5.1.

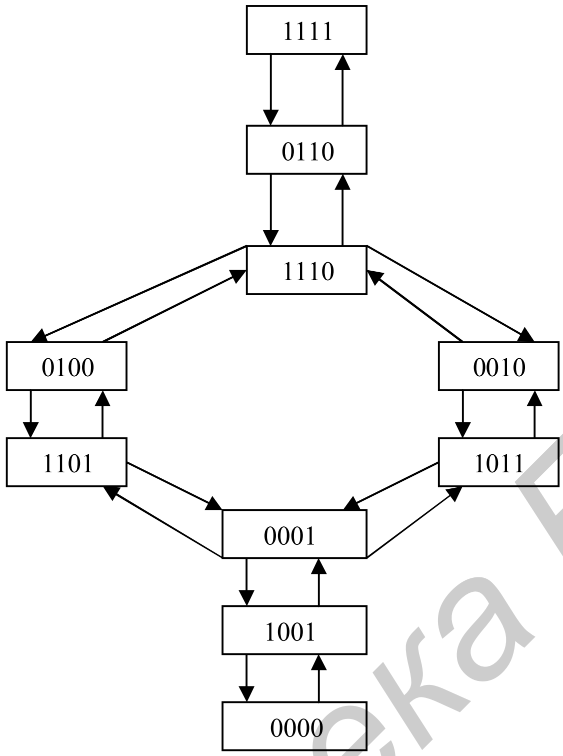


Рис. 5.1

По данному графу переходов уже не составит труда найти путь из исходной вершины-состояния (1111) к целевой вершине-состоянию (0000). Этот путь и определяет порядок перевозок, например, 1111 → 0110 → →1110→ 0010 → 1011 → 0001 → 1001 → 0000. Следует отметить, что данный путь является не единственным в графе на рис. 5.1.

6. ВЕРОЯТНОСТНАЯ ЛОГИКА

6.1. ОСНОВНЫЕ АКСИОМЫ

Пусть P – вероятностная мера. Она удовлетворяет следующему определению, в котором T – тождественно истинная, а F – тождественно ложная формула [24].

А1. $0 \le P(f) \le 1$ для $\forall f$, f – логическая формула;
А2. $P(T) = 1$, $P(F) = 0$;
А3. Если $f \to g$, то $P(f) \le P(g)$;
А4. Если $f \,\&\, g = F$, то $P(f \vee g) = P(f) + P(g)$ и $P(f \,\&\, g) = 0$.

Легко установить следующее.

$$P(f \vee g) = P(f \vee \bar{f}g) = P(f) + P(\bar{f}g) = P(f) + P(g) - P(f \,\&\, g),$$
$$P(f \,\&\, g) \ge P(f) + P(g) - 1.$$
$$P(T) = 1 = P(\bar{f} \vee g \vee \bar{g}f) = P(\bar{f} \vee g) + P(\bar{g}f),$$
$$1 = P(f \to g) + P(\bar{g} \mid f) \cdot P(f).$$

Как следствие находим

$$P(f) = \frac{1 - P(f \to g)}{P(\bar{g} \mid f)} = \frac{1 - P(f \to g)}{1 - P(g \mid f)} \quad . \qquad (6.1)$$

В самом деле,

$$P(\bar{g} \mid f) = \frac{P(\bar{g}f)}{P(f)}, \quad P(g \mid f) = \frac{P(gf)}{P(f)},$$

откуда $P(\bar{g} \mid f) + P(g \mid f) = 1.$

Соотношение (6.1) может быть использовано при построении вероятностных выводов.

Рассмотрим следующую схему вывода:

$$\frac{\begin{array}{l} P(x) = a, \\ P(x \to y) = b \end{array}}{P(y) - ?} \quad . \qquad (6.2)$$

Из (6.1) получим

$$a = \frac{1-b}{1-P(y\,|\,x)}\ .$$

Воспользовавшись формулой

$$P(y\,|\,x) = \frac{P(y)\cdot P(x\,|\,y)}{P(x)}\ ,$$

найдем

$$P(y) = \frac{a+b-1}{P(x\,|\,y)} = \frac{P(x)+P(x\to y)-1}{P(x\,|\,y)}\ . \qquad (6.3)$$

Теперь следует иметь в виду, что величина $P(x\,|\,y)$ характеризует меру связи между y и x, поэтому для ее определения нужно иметь, вообще говоря, статистические таблицы. Пусть дана такая таблица наблюдений :

Таблица 6.1

x	y
1	0
1	1
1	1
1	1
0	0
0	0
0	1
0	0

Из этой таблицы непосредственно найдем $P(x\,|\,y) = 0{,}75$. Из (6.3), например, для $P(x)$=0,6 , $P(x\to y)$=0,875 получим $P(y)$ = 0,63.

Замечание. Величина $P(x|\,y)$ как и $P(x\to y)$ является статистически устойчивым значением, характеризующим связь между переменными x, y. Поэтому соотношение (6.3) надо применять на практике при заданной статистической таблице типа табл. 6.1, но вероятность $P(x)$ может быть произвольной, удовлетворяющей лишь ограничению $\frac{P(x)+P(x\to y)-1}{P(x\,|\,y)} \le 1.$ Если статистическая таблица типа табл. 6.1 не задана, то удобно использовать введенную нами ранее условную формулу и соотношение (3.5).

Снова рассмотрим формулу (6.2). Можно записать

$$P(x \to y) = P(\bar{x} \vee y) = P(\bar{x}) + P(y) - P(\bar{x}y).$$

Используя следствия аксиом вероятностной логики, запишем

$$\frac{\begin{array}{l} P(\bar{x}y) \le P(\bar{x}), \\ P(\bar{x}y) \le P(y) \end{array}}{P(\bar{x}y) \le \min(P(\bar{x}), P(y)).}$$

Отсюда можно получить

$$P(x \to y) = b \ge P(\bar{x}) + P(y) - \min(P(\bar{x}), P(y))$$

или

$$b \ge 1 - a + P(y) - \min(1 - a, P(y)).$$

Простой анализ полученного соотношения дает следующий результат:

1) если $(a+b) \ge 1$, то $P(y) \le b$;
2) если $(a+b) < 1$, то правило вывода modus ponens в вероятностной логике неприменимо.

Полученный результат внутренне противоречив: независимо от того, выполнимо правило вывода modus ponens в вероятностной логике или нет, для любой формулы y существует объективная вероятностная мера $P(y)$. Следовательно, установленный выше результат означает неуниверсальность правила вывода modus ponens в вероятностной логике.

Имеет место также следующая аксиома [7].

$$\frac{\begin{array}{l} P(x) = a, \\ P(y) = b \end{array}}{\begin{array}{l} P(x \,\&\, y) \le \min(a, b), \\ P(x \vee y) \ge \max(a, b). \end{array}}$$

6.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ФОРМУЛ

Пусть дана следующая система формул пропозициональной логики.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \vee x_2, \\ x_3 \vee x_4, \\ x_5 \vee x_6, \\ x_7 \vee x_8, \\ \neg x_1 \vee \neg x_3, \\ \neg x_2 \vee \neg x_7, \\ \neg x_4 \vee \neg x_7. \end{array} \right. \qquad (6.4)$$

Пусть A и B – пропозициональные формулы. В силу законов вероятностной логики можно записать

$$P(A \vee B) = P(A)+P(B)-P(AB) = P(A)+P(AB)+P(\neg AB)- P(AB) = P(A)+P(\neg AB). \qquad (6.5)$$

Здесь $P(A)$ – вероятность того, что произвольная интерпретация I выполняет формулу A. Далее, если $A\&B=false$, то $P(A \vee B) = P(A)+P(B)$. В этом случае A и B называют ортогональными. Обобщением (6.5) служит

$$P(A \vee B \vee \ldots \vee W) = P(A)+ P(\neg AB)+ P(\neg A\neg BC)+\ldots+ P(\neg A\neg B\neg C\ldots W). \qquad (6.6)$$

Ясно, что если формула A тождественно истинна, то $P(A) = 1$. Если A и B ортогональны, то

$$P(\neg AB) = P(B). \qquad (6.7)$$

Наконец, воспользуемся тем, что для $A= x_{k1}^{z1} \vee x_{k2}^{z2} \vee \ldots \vee x_{kr}^{zr}$ $P(A)=1-2^{-r}$, а для $A = x_{k1}^{z1} \;\&\; x_{k2}^{z2} \;\&\; \ldots \;\&\; x_{kr}^{zr}$ $P(A)=2^{-r}$.

Так, для системы (6.4) найдем

$P((\mathbf{6.4})) = 1- [P(\neg x_1\neg x_2) + P((x_1 \vee x_2) \neg x_3\neg x_4)+ P((x_1 \vee x_2) (x_3 \vee x_4) \neg x_5\neg x_6) + P((x_1 \mathrm{v} \vee x_2) (x_3 \vee x_4)(x_5 \vee x_6) \neg x_7 \neg x_8) + P((x_5 \vee x_6) (x_7 \vee x_8) x_1x_3) + P((x_3 \vee x_4) (x_5 \vee x_6) \times(\neg x_1 \vee \neg x_3) x_2x_7) + P((x_1 \vee x_2) (x_5 \vee x_6) (\neg x_1 \vee \neg x_3)(\neg x_2 \mathrm{v} \neg x_7) x_4x_7)] = 1 - [1/4 +3/16+ + 9/64+27/256 +9/64+ \mathrm{P}((x_3 \vee x_4) (x_5 \vee x_6) (\neg x_1 \vee \neg x_3) x_2x_7) + P((x_5 \vee x_6)\times \times\neg x_3x_1\neg x_2 x_4x_7)] = 1 - [1/4 + 3/16+ 9/64+27/256 +9/64+ P((x_3 \vee x_4)(x_5 \vee x_6)(\neg x_1 \vee \vee \neg x_3) x_2x_7) +3/128]$.

Далее, по аналогии будем иметь:

$P((x_3 \vee x_4) (x_5 \vee x_6) (\neg x_1 \vee \neg x_3) x_2x_7)=P((x_3 \vee x_4)(x_5 \vee x_6)\neg x_1 x_2x_7) \vee (x_3 \vee x_4) (x_5 \vee \vee x_6) \neg x_3 x_2x_7)) = P((x_3 \vee x_4) (x_5 \vee x_6) \neg x_1 x_2x_7) + P((\neg x_3\neg x_4 \vee \neg x_5\neg x_6 \vee x_1 \vee \neg x_2 \vee \vee\neg x_7)(x_5 \vee x_6) \neg x_3x_4x_2x_7)) = 9/128+ P(x_1 (x_5 \vee x_6) \neg x_3x_4x_2x_7) = 9/128+3/128 = 12/128$.

Отсюда окончательно:

$$P((6.4)) = 1- [1/4 + 3/16+ 9/64+27/256 +9/64+12/128+3/128] = 15/256.$$

Из этого следует, что система (6.4) непротиворечива (вероятность ее выполнения для произвольной интерпретации ненулевая). Важно заметить, что сложность процедуры вычисления вероятности экспоненциально растет от размера формулы в общем случае. Следовательно, вычисление каждого слагаемого в правой части вида

$P((\neg A \neg B \neg C \ldots \neg R)$ можно заменить вычислением $1 - P(A' \vee B' \vee C' \vee \ldots \vee R')$, где A', B', C', … ,R' получены соответственно из A, B, C, … ,R с помощью следующих правил:

1) $x_i Y(x_i \vee Z) = x_i Y$;
2) $x_i Y(\sim x_i \vee Z) = x_i YZ$.

Следовательно, вычисление $P(\neg A \neg B \neg C \ldots W)$ реализуется рекурсивно, причем на каждом шаге рекурсии пропадает как минимум одна переменная, что гарантирует конечность процедуры.

Механизм вычисления вероятностей формул можно непосредственно использовать для проверки выводимости формул.

Пример. Показать, что из формул

$$\begin{aligned} &x_1 \vee x_2 \vee x_3, \\ &\bar{x}_1 \vee x_2, \\ &\bar{x}_2 \vee x_3 \end{aligned} \qquad (6.8)$$

выводима формула x_3. Согласно технике вывода, основанной на приведении к противоречию, добавляем к (6.8) отрицание доказываемой формулы и показываем, что вероятность выполнимости построенной системы равна 0. Имеем систему

$$\begin{aligned} &x_1 \vee x_2 \vee x_3, \\ &\bar{x}_1 \vee x_2, \\ &\bar{x}_2 \vee x_3, \\ &\bar{x}_3. \end{aligned} \qquad (6.9)$$

Необходимо убедиться, что

$$P(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee x_3) = 1.$$

Здесь $(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee x_3)$ есть отрицание (6.9). Воспользуемся одним упрощающим вычисления приемом: расположим формулы справа налево так, чтобы каждая последующая формула содержала как можно больше переменных, индексы которых совпадают с индексами предыдущей формулы. Так, можно использовать следующую последовательность:

$$x_3, x_2 \bar{x}_3, x_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

Теперь в силу (6.6) непосредственно получаем

$$
\begin{aligned}
P(6.9) = \\
&= P(x_3) + P(x_2\bar{x}_3 \cdot \bar{x}_3) + P(x_1\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot (\bar{x}_2 \vee x_3)) + P(\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \cdot \bar{x}_3 \cdot (\bar{x}_2 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2)) = \\
&\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1.
\end{aligned}
$$

Выводимость доказана. Следует заметить, что в общем случае вычисление вероятностей формул может потребовать экспоненциальных затрат.

7. ЛОГИКА Р. РЕЙТЕРА

7.1. ОСНОВНЫЕ АКСИОМЫ

Логика Рейтера замечательна тем, что содержит кроме основных аксиом множество гипотез, совместных с аксиомами, но необязательно совместных друг с другом. Таким образом, логику Рейтера можно представить в виде пары

$$LR = \{Ax, Hyp\}\ , \tag{7.1}$$

где Ax – множество аксиом;

Hyp – множество гипотез.

Аксиомы принимаются безусловно. Какие-то гипотезы могут приниматься, какие-то нет. В зависимости от того, какие гипотезы принимаются, получаем ту или иную модель мира. Таким образом, логика Рейтера может в общем случае порождать множество различных моделей мира в зависимости от того, какие гипотезы принимаются. В этом контексте логика Рейтера может быть ассоциирована с логикой изобретений. Построить изобретение – значит найти модель мира, в которой выводима формула изобретения. Гипотезы в логике Рейтера называются также правилами умолчаний. Вообще говоря, каждое правило умолчаний имеет следующий вид:

$$\frac{\alpha}{\beta}$$

и понимается таким образом: если формула β не противоречит тому, что нам известно, то можно принять формулу α. Мы упростим рассмотрение таким образом, чтобы вести речь просто о гипотезах безотносительно к тому, какой вид они имеют.

Рассмотрим следующую логическую систему Рейтера:

$$
\begin{aligned}
&\{A \to B, C \to D, \overline{B \,\&\, D}, A \to E, C \to E, E \to F,\\
&HYP = A, C\}.
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

Здесь имеется две гипотезы: A и C. Если принять гипотезу A, то получим модель мира (которую называют также *экспликацией*), в которой справедливы $B, \overline{D}, E, F, \overline{C}$. Если принять гипотезу B, то получим модель мира, в которой справедливы: $\overline{B}, D, \overline{A}, F$. Следовательно, указанные в (7.2) гипотезы несовместны по отношению к аксиомам. Что понимать под выводом в логике Рейтера? Здесь может быть несколько вариантов. Каждый из них имеет интересное математическое и философское содержание. Во-первых, можно сказать, что формула α выводима в логике Рейтера $LR = \{Ax, HYP\}$, если она выводима в любой экспликации этой логики. Это есть своего рода *абсолютная истина*. Действительно, формула α скорее выводима в одних экспликациях и невыводима в других. Тогда можно, например, считать, что α выводима в логике Рейтера, если она выводима в большинстве экспликаций. Такой подход, однако, практически весьма неэффективен, т. к. число различных экспликаций может быть огромным. Поэтому станем на следующую позицию: формула α выводима в логике Рейтера $LR = \{Ax, HYP\}$, если она выводима хотя бы в одной экспликации этой логики. Это определение будем использовать в качестве рабочего. Мы видим прямую аналогию с геометрией: то, что выводимо в геометрии Евклида, необязательно выводимо в геометрии Лобачевского и наоборот, хотя обе геометрии описывают одну и ту же действительность.

7.2. ПОСТРОЕНИЕ ВЫВОДОВ В ЛОГИКЕ Р. РЕЙТЕРА

Обратимся к центральной задаче – построению выводов в логике Рейтера. Будем для ясности использовать следующий иллюстративный пример.

$$
\begin{aligned}
&LR = \{Ax, HYP\},\\
&Ax =\\
&= \{x_1 \vee x_2 \vee x_3,\\
&\bar{x}_1 \vee x_2\},\\
&HYP =\\
&= \{\bar{x}_2 \vee x_3,\\
&x_2 \vee \bar{x}_3\}.
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

Спрашивается, выводима ли в этой логике формула $\varphi = x_3$. Эту задачу рассматриваем в содержательном плане как следующую: какие гипотезы следует присоединить к аксиомам, чтобы построить вывод формулы x_3.

Сначала проверим с помощью стандартной техники вывода, выводима ли φ из аксиом (в данном случае этого нет). Принимая, как и ранее, позицию Р. Сушко, построим стандартную пропозициональную систему формул, эквивалентную (7.3). С этой целью введем булевские переменные α_1, α_2 для каждой из гипотез, причем положим

$$\alpha_1 \to \bar{x}_2 \vee x_3,$$
$$\alpha_2 \to x_2 \vee \bar{x}_3,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 1 \equiv \alpha_1 \vee \alpha_2.$$

Последняя формула означает, что, как минимум, одна из гипотез должна быть принята. Итак, мы имеем следующую систему, эквивалентную (7.3):

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \to \bar{x}_2 \vee x_3, \\ &\alpha_2 \to x_2 \vee \bar{x}_3, \\ &\alpha_1 \vee \alpha_2, \\ &x_1 \vee x_2 \vee x_3, \\ &\bar{x}_1 \vee x_2. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Для доказательства формулы φ нужно присоединить к системе ее отрицание и вывести противоречие. Итак, наша отправная система такова:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \to \bar{x}_2 \vee x_3, \\ &\alpha_2 \to x_2 \vee \bar{x}_3, \\ &\alpha_1 \vee \alpha_2, \\ &x_1 \vee x_2 \vee x_3, \\ &\bar{x}_1 \vee x_2, \\ &\bar{x}_3. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Найдем какое-нибудь решение этой системы, например, $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0.$ То, что нам удалось найти решение, означает, что система (7.5) непротиворечива. В свою очередь, это означает, что нам не удалось доказать формулу φ. Следовательно, нужно изменить гипотезы. Для этого следует добавить в систему дизъюнкции тех гипотез, которым соответствуют нулевые значения α_i в найденном решении. Получаем новую систему такого вида:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 \to \bar{x}_2 \vee x_3, \\
&\alpha_2 \to x_2 \vee \bar{x}_3, \\
&\alpha_1 \vee \alpha_2, \\
&x_1 \vee x_2 \vee x_3, \\
&\bar{x}_1 \vee x_2, \\
&\bar{x}_3, \\
&\alpha_1.
\end{aligned} \tag{7.6}
$$

Нами добавлена гипотеза α_1. Находим, что система (7.6) оказалась противоречивой. Следовательно, нами доказана формула φ. Процесс заканчивается. Остается выяснить, какие гипотезы следует принять. Для этого из системы (7.6) выпишем только те формулы, которые содержат исключительно переменные α_i и не содержат других переменных:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 \vee \alpha_2, \\
&\alpha_1.
\end{aligned}
$$

Теперь достаточно найти минимальное или близкое к минимальному множество α_i, которое входит в каждую из выписанных формул. В нашем примере сразу выбираем α_1, т. е. она входит в обе формулы. Итак, получен итоговый ответ: для вывода формулы $\varphi = x_3$ из системы (7.3) следует принять гипотезу $\bar{x}_2 \vee x_3$.

Однако могла возникнуть ситуация, когда мы переберем все возможности и не получим требуемого вывода. Иными словами, не окажется подходящих гипотез для построения требуемого вывода. Такую ситуацию мы обнаруживаем следующим образом. В решение вошли все $\alpha_i = 1$ либо получена противоречивая система, но любое покрытие этой системы набором каких-то α_i является противоречивым. Иначе говоря, можно вывести формулу φ только из противоречивых гипотез, что, разумеется, лишено практического смысла. Надо показать, как выявить эту последнюю ситуацию. Поэтому, вообще говоря, следует рассмотреть еще одну задачу – как найти из выбранных гипотез непротиворечивое покрытие матрицы гипотез. Для этого нужно просто убедиться, что система

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 \to \bar{x}_2 \vee x_3, \\
&\alpha_2 \to x_2 \vee \bar{x}_3, \\
&\alpha_1 \vee \alpha_2, \\
&\alpha_1
\end{aligned} \tag{7.7}
$$

непротиворечива, т. е. имеет хотя бы одно решение. В систему (7.7) вписываем все сделанные гипотезы и те формулы, которые им соответствуют по предположению. Нетрудно убедиться, что система (7.7) действительно непротиворечива.

8. МОДАЛЬНАЯ ЛОГИКА К. ЛЬЮИСА

8.1. ОСНОВНЫЕ АКСИОМЫ

Модальную логику можно рассматривать как расширение логики первого порядка за счет введения модальностей (функторов) необходимости (□) и возможности (◊). Формула $\Box p$ интерпретируется как «необходимо» p, а формула $\Diamond p$ – как возможно р. Необходимость означает, что в силу имеющихся знаний и правил вывода данная формула выводима из этих знаний. Возможность означает, что в силу имеющихся знаний и правил вывода данная формула невыводима, но нельзя вывести и ее отрицание, так что либо знаний недостаточно, либо правила вывода не универсальны. Поскольку последнее невозможно, то следует считать, что возможность формулы продиктована недостаточностью знаний. Разработка систем модальных логик связана главным образом с именем К. Льюиса, которому принадлежат модальные логические исчисления, известные как S2 и S3 [25]. Отправным пунктом для Льюиса была интерпретация правила modus ponens через понятие строгой импликации ($\Rightarrow$). Импликация считается строгой, если не только доказано, что $P \to Q$, но и доказана невозможность формулы $P \,\&\, \overline{Q}$ быть истинной, что формально записывается следующим образом:

$$P \Rightarrow Q \to \overline{\Diamond}(P \,\&\, \overline{Q}).$$

Для обоснования модальностей необходимости и возможности применительно к логике построены различные модели исчислений, например, Лукасевича, Прайора, Решера, Крипке и др.

В исчислении Прайора имеется два альтернативных положения дел (мира) $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Для любой формулы p справедливы следующие исходы:

1) p истинно в $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ (необходимо истинно);
2) p истинно в $\boldsymbol{x}$ и ложно в $\boldsymbol{y}$ (истинно, но не необходимо истинно);
3) p ложно в $\boldsymbol{x}$ и истинно в $\boldsymbol{y}$ (ложно, но не необходимо ложно);
4) p ложно в $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ (необходимо ложно).

Пусть множество миров счетно. С каждой формулой p связывается последовательность распределения значений истинности p (в этих мирах), например,

<**T(**rue),**F(alse)**,**F**,**T**,**T**,**T**, …>. Тогда функторы возможности и необходимости могут интерпретироваться следующим образом:

$$\Diamond p = \mathbf{T}, \text{ если } p \neq <\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{F}, \ldots>,$$
$$\Diamond p = \mathbf{F}, \text{ если } p = <\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{F}, \ldots>,$$
$$\Box p = \mathbf{T}, \text{ если } p = <\mathbf{T},\mathbf{T},\mathbf{T},\mathbf{T},\mathbf{T},\mathbf{T}, \ldots>,$$
$$\Box p = \mathbf{F}, \text{ если } p \neq <\mathbf{T},\mathbf{T},\mathbf{T},\mathbf{T},\mathbf{T},\mathbf{T}, \ldots>.$$

Имеются и иные интерпретации модальной логики.

Отметим, что формула является **общезначимой**, если при любом распределении значений истинности ее аргументов, формула имеет значение **T**(rue). Нетрудно убедиться, что формула

$$\Box p \to p$$

общезначима, как и импликация

$\Diamond p \to p$ (доказательство опускаем).

Рассмотрим множество аксиом системы S1 [7,25].

Аксиомы (система Фейса–Райта):

1) аксиомы классической логики высказываний;
2) $\Box p \to q \to (\Box p \to \Box q)$;
3) $\Box(p \;\&\; q) \leftrightarrow (\Box p \;\&\; \Box q)$;
4) $p \to \Diamond p$;
5) $\Diamond(p \vee q) \leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$;
6) $\Diamond(p \;\&\; q) \to \Diamond p \;\&\; \Diamond q$;
7) $\Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$;
8) $(p \;\&\; \overline{p}) \to q$;
9) $\Box p \leftrightarrow \overline{\Diamond \overline{p}}$;
10) $(p \to q) \;\&\; \Box p \to \Box q$;
11) $(p \to q) \;\&\; \Diamond \overline{q} \to \Diamond \overline{p}$;
12) $\Box p \to p$.

Рассмотрим, как строить выводы в модальных логиках. Для этой цели будем интерпретировать формулы следующим образом:

$$\Diamond p \to \mathrm{val}(p) \geq 0.5;$$
$$\Box p \to \mathrm{val}(p) = 1;$$

$$p \to \mathrm{val}(p) \geq 0.$$

Такая интерпретация позволит строить выводы в модальной логике аналогично тому, как мы это делали ранее в логике Лукасевича.

8.2. ПРИМЕР ВЫВОДА В МОДАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Пусть дана следующая система:

$$\Box(p \vee q),$$
$$\bar{q}.$$

Спрашивается, выводима ли в этой системе формула $\overline{\Diamond}\bar{p}$. В силу аксиом доказываемая формула эквивалентна $\Box p$.

Перепишем систему формул следующим образом.

Посылки:

$$(p \vee q)\ [\mu = 1],$$
$$\bar{q}\ [\mu \geq 0].$$

Требуется доказать

$$p\ [\mu = 1].$$

Воспользуемся техникой доказательства в трехзначной логике Лукасевича. Полагаем

$$p = (p_1, p_2),$$
$$\bar{q} = (\bar{q}_2, \bar{q}_1),$$
$$q = (q_1, q_2).$$

При переписывании посылок учитываем, что комбинация (0,1) недопустима.
Итак, посылочную часть можно переписать в следующем виде:

$$(p_1 \vee q_1)\,\&\,(p_2 \vee q_2),$$
$$(\bar{q}_2, \bar{q}_1) = (0{,}0) \vee (1{,}0) \vee (1{,}1) \equiv \bar{q}_2 \vee q_1,$$
$$p_1 \vee \bar{p}_2.$$

Доказываем формулу

$$p_1.$$

Присоединяем к системе отрицание доказываемой формулы и пытаемся вывести противоречие, например, с помощью техники порождения резольвент. Убеждаемся, однако, что выводимость места не имеет.

9. ТЕОРИЯ ДЕМПСТЕРА – ШАФЕРА

В теории Демпстера–Шафера каждая формула φ наделяется относительным весом $m(\varphi)$ таким образом, что этот вес характеризует степень доверия, связанную с φ. Мера доверия **Cr,** определяемая на основе веса m, выражается следующим образом:

$$\mathbf{Cr}(\varphi) = \sum_{\varepsilon \text{ имплицирует } \varphi} m(\varepsilon). \tag{9.1}$$

Функция $m(\varphi)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases} m(\varnothing) = 0, \\ \sum\limits_{\varphi \in \Psi} m(\varphi) = 1, \end{cases} \tag{9.2}$$

где Ψ – полное множество формул.

Доказано Шафером, что если **Cr** удовлетворяет условию (9.1), то справедливо

$$\mathbf{Cr}(p \vee q) \geq \mathbf{Cr}(p) + \mathbf{Cr}(q) - \mathbf{Cr}(p \,\&\, q). \tag{9.3}$$

Двойственной к мере доверия **Cr** является мера правдоподобия **Pl**:

$$\mathbf{Pl}(p) = 1 - \mathbf{Cr}(p). \tag{9.4}$$

Соотношение, двойственное к (9.3), имеет следующий вид:

$$\mathbf{Pl}(p \,\&\, q) = \mathbf{Pl}(p) + \mathbf{Pl}(q) - \mathbf{Pl}(p \vee q). \tag{9.5}$$

Для меры доверия и правдоподобия справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases}\mathbf{Cr}(p)+\mathbf{Cr}(\overline{p})\le 1,\\ \mathbf{Pl}(p)+\mathbf{Pl}(\overline{p})\ge 1.\end{cases} \tag{9.6}$$

Из (9.4) устанавливаем непосредственно, что

$$\mathbf{Pl(}q\mathbf{) =} \sum_{p \ \text{ не имплицирует } q} m(p) = 1 - \sum_{p \ \text{ имплицирует } \overline{q}} m(p)\ . \tag{9.7}$$

Пусть m_1, m_2 – две весовые функции, соответствующие двум различным источникам информации. Тогда для каждой формулы p устанавливается значение $m_{1,2}(p)$ согласно следующей формуле:

$$m_{1,2}(p) = \frac{\sum\limits_{p=q\&r} m_1(q)\cdot m_2(r)}{1-\sum\limits_{q\&r\equiv False} m_1(q)\cdot m_2(r)}\ . \tag{9.8}$$

Пусть Ψ = {F(alse),T(rue), $p, \overline{p}$ }. Положим, что имеется два источника информации с весовыми функциями m_1, m_2 . Пусть известны меры доверия $\mathbf{Cr}_1\mathbf{(}\ p\ \mathbf{)=}b_1$, $\mathbf{Cr}_2\mathbf{(}\ p\ \mathbf{) =}\ b_2$ и правдоподобия $\mathbf{Pl}_1\mathbf{(}\ p\ \mathbf{)=}a_1$, $\mathbf{Pl}_2\mathbf{(}\ p\ \mathbf{)=}\ a_2$. По определению

$$\mathbf{Cr}_1\mathbf{(}\ p\ \mathbf{)=} \sum_{\varepsilon \ \text{ имплицирует } p} m_1(\varepsilon)\ .$$

В Ψ только $\mathrm{F}\to p, p\to p$. Поэтому $\mathbf{Cr}_1\mathbf{(}\ p\ \mathbf{)} = m_1(\mathrm{F}) + m_1(p) = m_1(p)$, поскольку $m_1(p) = m_2(p) = 0$. Аналогично устанавливаем

$$\mathbf{Cr}_1\ \mathbf{(}\ \overline{p}\ \mathbf{)} = m_1(\ \overline{p}\ )\ = 1 - \mathbf{Pl}_1\mathbf{(}\ p\ \mathbf{)} = 1 - a_1.$$

На основе этих выкладок получим: $m_1(p) = b_1$; $m_2(p) = b_2$; $m_1(p) = 1- a_1$; $m_2(p) = 1- a_2$.

Наконец, $\mathbf{Cr}_1\mathbf{(}\ \mathrm{T}\ \mathbf{)} = m_1(\mathrm{F}) + m_1(\ \overline{p}\ ) + m_1(p) + m_1(\mathrm{T}) = 1$. Отсюда получаем, что $m_1(\mathrm{T}) = a_1 - b_1$. Аналогично, $m_2(\mathrm{T}) = a_2 - b_2$. Воспользуемся формулой (9.8).

Без труда найдем знаменатель этой формулы:

$$\begin{aligned}&1-\sum_{q\&r\equiv False} m_1(q)\cdot m_2(r) = m_1(p)\cdot m_2(\overline{p}) + m_1(\overline{p})\cdot m_2(p) + m_1(F)\cdot m_2(p) + \\ &+ m_1(p)\cdot m_2(F) + m_1(T)\cdot m_2(F) + m_1(F)\cdot m_2(T) + m_1(F)\cdot m_2(\overline{p}) + m_1(\overline{p})\cdot m_2(F) = \\ &= b_1(1-a_2) + b_2(1-a_1).\end{aligned}$$

Имеем в виду, что $m_i(F) = 0$.

Далее находим, например,

$$m_{1,2}(p) = \frac{m_1(p) \cdot m_2(p) + m_1(T) \cdot m_2(p) + m_1(p) \cdot m_2(T)}{1 - b_1(1 - a_2) - b_2(1 - a_1)} =$$
$$= \frac{a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 - b_1 \cdot b_2}{1 - b_1 \cdot (1 - a_2) - b_2 \cdot (1 - a_1)},$$

и т. д.

Таким образом, имея две различные весовые функции (например, двух экспертов), получаем новую весовую функцию. Разумеется, число источников информации не ограничивается двумя. Приведенные выкладки просто обобщаются на произвольное целое положительное число источников. Этим обеспечивается согласование знаний по общим вопросам, предоставляемым различными источниками.

10. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФОРМУЛЫ Е. ШОРТЛИФА ПРИ ИСЧИСЛЕНИИ ПРАВДОПОДОБНЫХ ВЫВОДОВ

Основы нечеткой логики предложены Л. Заде [26] в 60-х годах. Рассмотрим, например, следующую логическую формулу:

$$\bar{x}_1 \vee x_2 \ . \qquad (10.1)$$

Эта формула при одних значениях переменных может быть истинной, а при других – ложной. Если о значениях переменных ничего не известно, то в предположении их равновероятности, можно оценить вероятность формулы быть истинной как 0,75 (три случая из четырех). С другой стороны, если переменные неравновероятны, то вероятность этой же формулы быть истинной уже может быть не 0,75, а например, 0,9 или 0,6. На практике мы не всегда знаем вероятности переменных быть истинными, а используем вместо этого *субъективные* оценки. Такие субъективные оценки выражаются словами типа «достаточно правдоподобно», «трудно отдать предпочтение чему-либо», «мало вероятно» и т. п. Подобные оценки называются **лингвистическими**. Они не являются численными. Однако их следует перевести к числовому виду. Для этого используют **нечеткую функцию меры**. Нечеткую функцию меры обозначают, как правило, символом μ. Она сопоставляет лингвистическим значениям нечетких переменных числовые. Такое сопоставление субъективно. Оно не основано на опытных статистических данных, а отражает представление эксперта. Эти субъективные оценки называются также **субъективными вероятностями**. Если, например, мы оцениваем переменную x_1 как истинную с вероятностью 0,8, а переменную x_2 как истинную с вероятностью 0,4, то какова субъективная вероятность формулы (10.1)? Ведь при этом мы уже не опираемся на какой бы то ни было статистический материал. На помощь нам может придти диаграмма Венна для решения этой проблемы. Условно можно разделить предметы на четыре части: *A*, *B*, *C*, *D*. Часть *A* составят предметы, у которых нет ни свойства $\bar{x}_1$, ни свойства x_2. Для них формула (10.1) ложна. Часть *B* составят предметы, у которых нет свойства $\bar{x}_1$, но есть свойство x_2. Часть *C* составят предметы, у которых есть свойство $\bar{x}_1$, но нет свойства x_2. Наконец, часть *D* составят предметы, обладающие обоими свойствами. Обозначим через m_a, m_b, m_c, m_d – числа предметов в каждой части соответственно. Тогда свойством (10.1) обладает число предметов, равное $m_b + m_c - m_d$. Это простое соображение дает нам первую отправную позицию для исчисления нечетких оценок истинности формул типа (10.1):

$$\mu(\bar{x}_1 \vee x_2) = \mu(\bar{x}_1) + \mu(x_2) - \mu(\bar{x}_1 \,\&\, x_2).$$

Считая переменные x_1, x_2 независимыми, получаем

$$\mu(\bar{x}_1 \vee x_2) = \mu(\bar{x}_1) + \mu(x_2) - \mu(\bar{x}_1) \cdot \mu(x_2). \qquad (10.2)$$

Формула (10.2) называется формулой Шортлифа. Она легко обобщается на случай трех и более переменных. Следующая формула также постулируется без доказательств:

$$\mu(\bar{x}_1) = 1 - \mu(x_1). \qquad (10.3)$$

Заметим, что Л. Заде использовал не формулу (10.2), а формулу

$$\mu(\bar{x}_1 \vee x_2) = \max\{\mu(\bar{x}_1); \mu(x_2)\}. \qquad (10.4)$$

Насколько (10.2) отличается от (10.4) можно судить по следующей таблице:

Таблица 10.1

$\bar{x}_1$	x_2	$\mu(\bar{x}_1 \vee x_2)(9.2)$	$\mu(\bar{x}_1 \vee x_2)(9.4)$	Расхождение
0	0	0	0	0
0	0,1	0,1	0,1	0
0	0,3	0,3	0,3	0
0,1	0,6	0,64	0,6	0,06
0,2	0,8	0,84	0,8	0,04
0,5	1	1	1	0
0,6	0,6	0,84	0,6	0,28
0,8	0,8	0,96	0,8	0,16
0,9	0,9	0,99	0,9	0,1
1	1	1	1	0

Итак, наиболее значительное расхождение имеет место, когда меры истинности переменных близки друг к другу и группируются в области значений от 0,5 и выше.

Наконец, Заде использовал формулу

$$\mu(\bar{x}_1 \,\&\, x_2) = \min\{\mu(\bar{x}_1); \mu(x_2)\}, \qquad (10.5)$$

хотя вероятностным аналогом этой формулы является

$$\mu(\bar{x}_1 \,\&\, x_2) = \mu(\bar{x}_1) \cdot \mu(x_2 \mid \bar{x}_1).$$

Опять же, если считать переменные независимыми, то получим

$$\mu(\bar{x}_1 \,\&\, x_2) = \mu(\bar{x}_1) \cdot \mu(x_2). \qquad (10.6)$$

Собственно, (10.2), (10.3) и (10.6) дают нам возможность строить машину нечеткого логического вывода на сравнительно ясной математической платформе. Это можно показать на примере. Пусть дана система нечетких логических дизъюнктов:

$$\begin{aligned} D_1 &= x_1 \vee \bar{x}_2 \quad (0{,}6), \\ D_2 &= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \quad (0{,}9). \end{aligned} \qquad (10.7)$$

Требуется найти нечеткое решение этой системы. Запишем систему уравнений:

$$\begin{aligned} 0{,}6 &= \mu(x_1 \vee \bar{x}_2) = \mu(x_1) + \mu(\bar{x}_2) - \mu(x_1) \cdot \mu(\bar{x}_2), \\ 0{,}9 &= \mu(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) = \mu(\bar{x}_1) + \mu(\bar{x}_2) - \mu(\bar{x}_1) \cdot \mu(\bar{x}_2). \end{aligned}$$

Воспользовавшись (10.3), получим в итоге

$$0{,}6 = \mu(x_1)+1-\mu(x_2)-\mu(x_1)\cdot(1-\mu(x_2)),$$
$$0{,}9 = 1-\mu(x_1)+1-\mu(x_2)-(1-\mu(x_1))\cdot(1-\mu(x_2)).$$

Здесь ровно две переменные и два уравнения (уравнения нелинейные). Кроме того, следует добавить еще ограничения на значения переменных:

$$0 \le \mu\,(\bar{x}_1) \le 1; \quad 0 \le \mu\,(x_2) \le 1.$$

Такую систему легко решить в Excel с помощью пакета «Поиск Решения».

	b
0,2	**0,499999**
0,399999	
1,1	
0,2	
0,2	
0,499999	
0,499999	

Получили ответ $\mu(x_1) = 0{,}2; \quad \mu(x_2) = 0{,}5$.

Если использовать соотношение Заде (10.4), то примем во внимание, что $\max(x, y) = 0{,}5\cdot[abs(x+y)+abs(x-y)]$.

Работа с абсолютными значениями (*abs*) является крайне неудобной по техническим соображениям. Например, $abs(x+y) = \sqrt{(x+y)^2}$. Поэтому нотацию Заде следует признать плохо приспособленной к вычислениям. Далее не будем ее рассматривать в практическом плане.

Введем в систему еще один дизъюнкт:

$$D_1 = x_1 \vee \bar{x}_2 \quad (0{,}6),$$
$$D_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \quad (0{,}9),$$
$$D_3 = x_1 \vee x_2 \quad (0{,}7).$$

Теперь пакет «Поиск Решения» не может найти решения. Поэтому ищем приближенное решение, введя новые переменные, как показано ниже:

$$
\begin{aligned}
&D_1 \leftrightarrow x_1 \vee \bar{x}_2, \\
&D_2 \leftrightarrow \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, \\
&D_3 \leftrightarrow x_1 \vee x_2\ , \\
&(D_1 - 0{,}6)^2 + (D_2 - 0{,}9)^2 + (D_3 - 0{,}7)^2 \to \min .
\end{aligned}
$$

Эта система перепишется следующим образом:

$$
\begin{gathered}
D_1 \to x_1 \vee \bar{x}_2, \\
D_1 \leftarrow x_1 \vee \bar{x}_2, \\
D_2 \to \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, \\
D_2 \leftarrow \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, \\
D_3 \to x_1 \vee x_2\ , \\
D_3 \leftarrow x_1 \vee x_2\ , \\
(D_1 - 0{,}6)^2 + (D_2 - 0{,}9)^2 + (D_3 - 0{,}7)^2 \to \min, \\
0 \le x_i \le 1, \\
0 \le D_i \le 1.
\end{gathered}
\qquad (10.8)
$$

Теперь нужно выяснить, что такое в нечеткой логике операция следования (импликации) – $\to$. Здесь мы не выходим за рамки общепринятого подхода:

$$\alpha \to \beta \ \equiv\ \mu(\alpha) \le\ \mu(\alpha).$$

Это дает окончательно:

$$
\begin{gathered}
\mu(D_1) = \mu(x_1) + \mu(\bar{x}_2) - \mu(x_1)\cdot\mu(\bar{x}_2), \\
\mu(D_2) = \mu(\bar{x}_1) + \mu(\bar{x}_2) - \mu(\bar{x}_1)\cdot\mu(\bar{x}_2), \\
\mu(D_3) = \mu(x_1) + \mu(x_2) - \mu(x_1)\cdot\mu(x_2), \\
(\mu(D_1) - 0{,}6)^2 + (\mu(D_2) - 0{,}9)^2 + (\mu(D_3) - 0{,}7)^2 \to \min, \\
0 \le \mu(x_i) \le 1, \\
0 \le \mu(D_i) \le 1.
\end{gathered}
\qquad (10.9)
$$

Решим эту систему с помощью пакета «Поиск Решения» и найдем:

D1	D2	D3	mx1	mx2
0,583307	**0,859066**	**0,669432**	**0,252739**	**0,557627**
-4,9E-08				
4,92E-08			0,002889	

4,92E-08
0,252739
0,252739
0,557627
0,557627

Итак,

$$\mu(x_1) = 0{,}253\,; \quad \mu(x_2) = 0{,}557\ .$$

Возникает вопрос, насколько найденное решение хорошо или плохо? Этот же вопрос возникает и тогда, когда число уравнений больше числа переменных или наоборот. Таким образом, общий случай решения систем нечетких систем уравнений (дизъюнктов) требует искать приближенное решение, наилучшим образом соответствующее заданным значениям. Степень доверия найденному решению можно оценить с помощью статистического критерия, например, χ^2.

Теперь можно с рассмотренных позиций указать, как строить *нечеткий логический вывод*. Пусть имеется множество формул $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, для каждой из которых известна нечеткая мера истинности : $\mu(\alpha_1),\ldots, \mu(\alpha_n)$. Спрашивается, выводима ли из этого множества формула β с нечеткой мерой истинности $\mu(\beta)$? Согласно общему правилу, выводимость трактуется так $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \to \beta$, если и только если $\mu(\alpha_1 \,\&\, \alpha_2 \,\&\, \ldots \&\, \alpha_n) \le \mu(\beta)$ в любой интерпретации.

Так, относительно системы (10.8, 10.9) спросим, выводима ли из нее формула

$$D_4 \leftrightarrow x_1 \quad (0{,}6)\,?$$

Присоединим к системе отрицание доказываемой формулы и попытаемся найти решение. Если нам удастся найти **статистически адекватное** (по критерию χ^2) решение, то выводимость места не имеет. Если решения найти не удастся, то выводимость имеет место. Итак, нам потребуется решить систему

$$\begin{aligned}
&\mu(D_1) = \mu(x_1) + \mu(\bar{x}_2) - \mu(x_1)\cdot\mu(\bar{x}_2),\\
&\mu(D_2) = \mu(\bar{x}_1) + \mu(\bar{x}_2) - \mu(\bar{x}_1)\cdot\mu(\bar{x}_2),\\
&\mu(D_3) = \mu(x_1) + \mu(x_2) - \mu(x_1)\cdot\mu(x_2),\\
&\mu(D_4) = \mu(\bar{x}_1),\\
&(\mu(D_1) - 0{,}6)^2 + (\mu(D_2) - 0{,}9)^2 + (\mu(D_3) - 0{,}7)^2 + (\mu(D_4) - 0{,}4)^2 \to \min,\\
&0 \le \mu(x_i) \le 1,\\
&0 \le \mu(D_i) \le 1.
\end{aligned}$$

При этом мы добавили в систему формулу

$$\mu(D_4) = \mu(\bar{x}_1)$$

и изменили критерий

$$(\mu(D_1)-0{,}6)^2+(\mu(D_2)-0{,}9)^2+(\mu(D_3)-0{,}7)^2+(\mu(D_4)-0{,}4)^2\to\min .$$

11. ПРОБЛЕМА РЕАЛИЗАЦИИ БЫСТРОЙ МАШИНЫ ВЫВОДА В ЛОГИКЕ[1]

Как было показано в предыдущем материале, проблема вывода в неклассических логиках в общем случае может решаться сведением к классическому логичекому исчислению (тезис Р. Сушко). Для классической логики можно использовать механизмы логического вывода типа резолюций Робинсона, групповых резолюций и др. Однако эффективность этих методов резко падает с увеличением размерности задачи либо с изменением других параметров задачи. В настоящее время сложилась достаточно четкая позиция, что для задачи типа ВЫПОЛНИМОСТЬ вообще нет эффективного (полиномиального, быстрого) алгоритма решения. Учитывая важность этого алгоритма, все время предпринимаются попытки «продвинуть» машину вывода для классической логики в плане повышения скорости работы. Наиболее перспективными вариантами следует считать следующие:

– реализация слабых (эвристических) методов и получение на их основе точных решений или статистически точных решений (с некоторой достаточно малой вероятностью потери решения);

– выделение классов задач с близкими значениями параметров и разработка достаточно эффективных точных алгоритмов для этих классов.

Остановимся более подробно на втором подходе. В работе [12] изложен модифицированный алгоритм на основе принципа групповых резолюций, для которого известно, что он дает хорошие результаты для задач ВЫПОЛНИМОСТЬ, кодируемых двоичными матрицами (переменные и их отрицания соответствуют строкам матриц, а дизъюнкты – столбцам) такими, что плотность «1» в матрицах не ниже 0,05–0,1. Разреженные матрицы в каких-то случаях достаточно плохо поддаются решению (перебор становится значительным). Другими словами, принцип групповых резолюций теряет свою эффективность (разумеется, не во всех случаях) для задач ВЫПОЛНИМОСТЬ с малым и очень малым числом выполняющих решений [12]. В этом разделе мы рассмотрим метод эквивалентных подстановок, теоретическое обоснование которого дано в [20,21]. Мы продемонстрируем, как адаптировать (модифицировать) этот метод для задач ВЫПОЛНИМОСТЬ, кодируемых разреженными матрицами (покрытия). Практическая апробация этого метода дает обнадеживающие результаты, хотя имеется

[1] Данный раздел написан совместно с Ю.О. Герман.

недостаток, который все же преодолеть не всегда удается, именно: метод эквивалентных подстановок (далее для краткости м. э. п.) устраняет перебор не до конца, встречаются задачи, где перебор решений является значительным.

Обратимся к примеру. Пусть дана система дизъюнктов:

$$\begin{aligned} &D_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3, \\ &D_2 = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4, \\ &D_3 = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3, \\ &D_4 = \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4, \\ &D_5 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4. \end{aligned} \qquad (11.1)$$

Метод эквивалентных подстановок (м. э. п.) строит последовательно подстановки для переменных (порядок переменных не имеет значения). В результате подстановок переменные выводятся из системы, так что рано или поздно останется теоретически только одна переменная в системе (если факт невыполнимости не будет обнаружен раньше). Подстановки можно строить как для самих переменных, так и для их отрицаний (значения не имеет). Так, чтобы построить подстановку для переменной x_1, нужно сначала выписать все дизъюнкты, содержащие ее отрицание, т. е. $\bar{x}_1$. Наоборот, чтобы построить подстановку для $\bar{x}_1$, нужно выписать дизъюнкты, содержащие x_1. Построим подстановку для x_1. Выпишем дизъюнкты:

$$\begin{aligned} &D_2 = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4, \\ &D_5 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4. \end{aligned} \qquad (11.2)$$

Для системы (11.2) запишем подстановку:

$$x_1 = (x_2 \vee x_4) \cdot \bar{x}_4 \ . \qquad (11.3)$$

Эта подстановка получается путем произведения (конъюнкции) частей каждого из выписанных дизъюнктов, исключая $\bar{x}_1$. Теперь можно подставить (11.3) в (11.1). Сразу заметим, что те дизъюнкты, из которых получена данная подстановка (т. е. (11.2)), пропадут как избыточные. В самом деле, возьмем к примеру

$$D_2 = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4 = \overline{(x_2 \vee x_4) \cdot \bar{x}_4} \vee x_2 \vee x_4 = \overline{(x_2 \vee x_4)} \vee \bar{\bar{x}}_4 \vee x_2 \vee x_4 = TRUE \ ,$$

поскольку формула содержит комбинацию $\varphi \vee \bar{\varphi}$, которая всегда истинна. У нас $\varphi = x_2 \vee x_4$. Поэтому система (11.1) «ужмется» до системы

$$D_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3,$$
$$D_3 = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3, \qquad (11.4)$$
$$D_4 = \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4.$$

Здесь нужно выполнить подстановку (11.3) вместо x_1:

$$D_1 = (x_2 \vee x_4) \cdot \bar{x}_4 \vee x_2 \vee x_3 = x_4 \cdot \bar{x}_4 \vee x_2 \vee x_3 = x_2 \vee x_3. \qquad (11.5)$$

При подстановке используем **правила упрощения** следующего вида:

$$\alpha \vee (\alpha \vee B) \cdot C = \alpha \vee B \cdot C,$$
$$\alpha \vee (\bar{\alpha} \vee B) \cdot C = \alpha \vee C. \qquad (11.6)$$

Эти правила легко обосновываются теоретически, что, впрочем, мы не делаем (см. [20, 21]). Рассмотрите, как применены эти правила в (11.5). Итак, наша система стала теперь такой:

$$D_1 = x_2 \vee x_3,$$
$$D_3 = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3, \qquad (11.7)$$
$$D_4 = \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4.$$

Снова займемся подстановками. Выразим, например,

$$x_2 = \bar{x}_3. \qquad (11.8)$$

Теперь система «ужмется» до

$$D_1 = x_2 \vee x_3,$$
$$D_4 = \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4.$$

Проводим замену:

$$D_1 = \bar{x}_3 \vee x_3 = TRUE,$$
$$D_4 = \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4.$$

Первый дизъюнкт стал лишним (он всегда истинен). Его поэтому выбрасываем. В системе останется одна единственная формула – дизъюнкт D_4. Найдем какое-нибудь решение для него, например, $x_3 = 0, x_4 = 0$. Выбор именно этого, а не какого-то иного решения не имеет значения. Значения остальных переменных находим из подстановок (11.8), (11.3).

Получим

$$x_2 = 1,\ x_1 = 1.$$

Легко убедиться, что найденные значения переменных действительно выполняют систему (11.1). Можете проверить и другие возможные решения, исходя из $x_3 = 0, x_4 = 1$; $x_3 = 1, x_4 = 0$.

Итак, м. э. п. изложен. Проблема в том, что для больших систем м. э. п. может приводить к весьма сложным выражениям, а если мы упрощаем их, то система «разрастается» до неприемлемых размеров. Поясним сказанное. Так, подстановка

$$x_1 = (x_2 \vee x_4) \cdot \bar{x}_4,$$

например, в дизъюнкт

$$x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_5$$

(который взяли без связи с предыдущим примером) даст формулу

$$\bar{x}_3 \vee x_5 \vee (x_2 \vee x_4) \cdot \bar{x}_4.$$

Эта формула порождает два дизъюнкта:

$$\bar{x}_3 \vee x_5 \vee x_2 \vee x_4,$$
$$\bar{x}_3 \vee x_5 \vee \bar{x}_4.$$

Таким образом, подобная операция всегда позволяет «вернуть» систему дизъюнктов, полученную после подстановки к «линейному виду». При этом система «разрастается вглубь». Это обстоятельство, разумеется, не всегда имеет место, так что интересно исследовать, в каких случаях «разрастание» размеров системы некритично для времени счета. Поэтому мы изложим упрощенный вариант м. э. п., который был анонсирован в начале этого раздела. Однако этот вариант может приводить к потере решения. Так что идея упрощения не всегда дает результат. А если потребовать, чтобы решение не терялось, то упрощения может и не получиться вовсе. Идея этого варианта м. э. п. состоит в следующем. Пусть дан дизъюнкт D_i. Построим новый дизъюнкт $\alpha \vee D_i$. Это и есть «усовершенствование». Тогда множество выполняющих интерпретаций для $\alpha \vee D_i$ будет во всяком случае содержать множество выполняющих интерпретаций для D_i. Другими словами, переход от D_i к $\alpha \vee D_i$ не приводит к потере решения, даже если оно единственное, но могут появиться лишние решения. В этом аспекте содержится уязвимость рассматриваемого метода. Однако дело в том, что при сокращении числа формул и переменных в итоговой системе останется мало переменных, так что можно прямым перебором рассмотреть все варианты решений. Метод требует сохранять все подстановки и все получаемые при решении промежуточные системы дизъюнктов. Проиллюстрируем все сказанное на вышерассмотренном примере системы (11.1). Рассмотрим (11.5) как результат подстановки без упрощения: $D_1 = (x_2 \vee x_4) \cdot \bar{x}_4 \vee x_2 \vee x_3$. Ранее мы упростили эту формулу с помощью правил упрощения (11.6). Но в других задачах правила (11.6) могут оказаться **неприменимыми** (не будет к чему применять). Поэтому усовершенствуем механизм следующим правилом:

$$A \vee A \cdot B ... \cdot C = A .$$

Это правило называется правилом поглощения. Поэтому как расширим дизъюнкт, так и применим правило поглощения:

$$D_1 = (x_2 \vee x_4) \cdot \bar{x}_4 \vee x_2 \vee x_3 \to [x_2 \vee x_4] \vee x_2 \vee x_3 \vee (x_2 \vee x_4) \cdot \bar{x}_4 = x_2 \vee x_3 \vee x_4 .$$

Здесь в квадратные скобки мы заключили добавленную формулу, что позволило применить правило сокращения, а это и было нашей основной целью. Конечно, на практике нужно добавлять самые короткие формулы из списка возможных формул. При этом решений мы не потеряли. Но могли появиться ложные решения, которые далее мы должны будем убрать. Итак, результат нашей подстановки есть дизъюнкт

$$D_1' = x_2 \vee x_3 \vee x_4 ,$$

а ранее (11.5) был $D_1 = x_2 \vee x_3$, в чем и усматривается отличие. Новая система примет вид

$$\begin{aligned} D_1 &= x_2 \vee x_3 \vee x_4 , \\ D_3 &= \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 , \\ D_4 &= \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 . \end{aligned} \tag{11.9}$$

Далее все производим по аналогии и, когда нужно, применяем «усовершенствование» м. э. п. Как и ранее, получим

$$x_2 = \bar{x}_3 ,$$

в силу чего система перепишется таким образом:

$$\begin{aligned} D_1 &= \bar{x}_3 \vee x_3 \vee x_4 = TRUE, \\ D_4 &= \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 . \end{aligned}$$

Снова получаем единственный дизъюнкт:

$$D_4 = \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4.$$

Решения те же, что и ранее. Любопытно заметить, что новых решений в итоге не появилось.

Теперь дадим более сложный пример с минимальными комментариями, поскольку суть метода должна быть к этому моменту ясна. Пусть дана система

$$\begin{aligned}
D_1 &= x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_5,\\
D_2 &= \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4,\\
D_3 &= \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_5,\\
D_4 &= \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5,\\
D_5 &= x_2 \vee x_5,\\
D_6 &= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4,\\
D_7 &= x_5 \vee x_6 \vee x_7,\\
D_8 &= \bar{x}_4 \vee \bar{x}_7,\\
D_9 &= \bar{x}_3 \vee x_7,\\
D_{10} &= x_5 \vee x_4 \vee x_7.
\end{aligned} \tag{11.10}$$

Первая подстановка (произвольно)

$$x_1 = (x_2 \vee x_4) \cdot \bar{x}_4. \tag{11.11}$$

Получаем упрощенную систему

$$\begin{aligned}
D_1 &= (x_2 \vee x_4) \cdot \bar{x}_4 \vee x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_5,\\
D_3 &= \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_5,\\
D_4 &= \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5,\\
D_5 &= x_2 \vee x_5,\\
D_7 &= x_5 \vee x_6 \vee x_7,\\
D_8 &= \bar{x}_4 \vee \bar{x}_7,\\
D_9 &= \bar{x}_3 \vee x_7,\\
D_{10} &= x_5 \vee x_4 \vee x_7.
\end{aligned} \tag{11.12}$$

Используем «усовершенствование»:

$$D_1 = (x_2 \vee x_4)\cdot \bar{x}_4 \vee x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_5 \to (x_2 \vee x_4)\cdot \bar{x}_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_5 \vee [\bar{x}_4] =$$
$$= x_3 \vee \bar{x}_5 \vee \bar{x}_4,$$
$$D_3 = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_5,$$
$$D_4 = \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5,$$
$$D_5 = x_2 \vee x_5,$$
$$D_7 = x_5 \vee x_6 \vee x_7,$$
$$D_8 = \bar{x}_4 \vee \bar{x}_7,$$
$$D_9 = \bar{x}_3 \vee x_7,$$
$$D_{10} = x_5 \vee x_4 \vee x_7.$$

Система принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
&D_1' = x_3 \vee \bar{x}_5 \vee \bar{x}_4,\\
&D_3 = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_5,\\
&D_4 = \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5,\\
&D_5 = x_2 \vee x_5,\\
&D_7 = x_5 \vee x_6 \vee x_7,\\
&D_8 = \bar{x}_4 \vee \bar{x}_7,\\
&D_9 = \bar{x}_3 \vee x_7,\\
&D_{10} = x_5 \vee x_4 \vee x_7.
\end{aligned} \qquad (11.13)$$

Выражаем, например,

$$x_3 = (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_5)\cdot(\bar{x}_4 \vee x_5)\cdot x_7\,. \qquad (11.14)$$

Система упрощается к виду

$$D_1' = (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_5)\cdot(\bar{x}_4 \vee x_5)\cdot x_7 \vee \bar{x}_5 \vee \bar{x}_4 =$$
$$= \bar{x}_2 \cdot x_7 \vee \bar{x}_5 \vee \bar{x}_4 \to [x_7] \vee \bar{x}_5 \vee \bar{x}_4,$$
$$D_5 = x_2 \vee x_5,$$
$$D_7 = x_5 \vee x_6 \vee x_7,$$
$$D_8 = \bar{x}_4 \vee \bar{x}_7,$$
$$D_{10} = x_5 \vee x_4 \vee x_7.$$

Здесь мы ввели в первый дизъюнкт дополнительную переменную x_7, что и дает упрощенную систему:

$$\begin{aligned} &D_1'' = x_7 \vee \bar{x}_5 \vee \bar{x}_4, \\ &D_5 = x_2 \vee x_5, \\ &D_7 = x_5 \vee x_6 \vee x_7, \\ &D_8 = \bar{x}_4 \vee \bar{x}_7, \\ &D_{10} = x_5 \vee x_4 \vee x_7. \end{aligned} \tag{11.15}$$

Выражаем, например,

$$\bar{x}_5 = (x_6 \vee x_7) \cdot (x_4 \vee x_7) \cdot x_2. \tag{11.16}$$

Получаем

$$\begin{aligned} &D_1'' = x_7 \vee \bar{x}_4 \vee (x_6 \vee x_7) \cdot (x_4 \vee x_7) \cdot x_2 = x_7 \vee \bar{x}_4, \\ &D_8 = \bar{x}_4 \vee \bar{x}_7. \end{aligned}$$

Выражаем

$$x_7 = \bar{x}_4. \tag{11.17}$$

Получаем

$$D_8 = x_4 \vee \bar{x}_4 = TRUE.$$

Легко находим решения. Можем задавать произвольные значения (0 или 1) переменной x_4. Значения остальных переменных получаем из подстановок. При этом для x_2 , x_6 также можно задать любые значения. Наши решения сведем в табл. 11.1.

Таблица 11.1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Решение
0	0	0	0	1	0	1	Нет
0	0	0	1	1	0	0	Нет
0	0	1	0	1	1	1	Есть
0	0	0	1	1	1	0	Нет
1	1	1	0	0	0	1	Есть
0	1	0	1	1	0	0	Нет
1	1	1	0	0	1	1	Есть
0	1	0	1	0	1	0	Есть

Данный пример показывает, что реализованный здесь способ выполнения м. э. п. может порождать неправильные (лишние) решения. Поэтому нужно проверять все возможные решения. Если ни одно из найденных решений не подойдет к исходной системе, то исходная система все же может иметь решение(-я). Назовем эту проблему проблемой ***U***. Проблема также состоит в том, что не для всех переменных получены в итоге подстановки, так что значения таких переменных можно устанавливать произвольно. Это приводит к росту перебора, что и наблюдаем. Итак, в идеале все переменные должны быть выражены через подстановки. По крайней мере к этому следует стремиться. Опускаем технические приемы, которые позволяют достаточно неплохо справляться с отмеченной трудностью. Например, если из системы «выпала», скажем, переменная x_i, то всегда можно восстановить ее присутствие в системе, используя любой из дизъюнктов этой системы D_k, заменив его на два дизъюнкта $D_k \vee x_i, D_k \vee \bar{x}_i$. При этом, если бы нам удалось всякий раз добраться путем подстановок до системы с одной единственной переменной, мы бы получили ключ к решению задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ за полиномиальное время, поскольку значение единственной переменной можно сразу подставить в исходную систему и сократить ее, после чего «прокрутить» процедуру на сокращенной системе заново. Снова получить единственную переменную и т. д. К сожалению, «добраться» в итоге до единственной переменной удается крайне редко и не видно, как эффективно обеспечить это обстоятельство.

Теперь остановимся на проблеме ***U***. Если ни одно из найденных решений не удовлетворяет исходной системе, то на некотором этапе (этапах) мы получили неполную подстановку. Найдем тот этап, где ни одно найденное решение не выполняется. Определим из соответствующей системы «полную» подстановку и проведем ее без сокращения (без описанной выше модификации). Последующие этапы проведем как обычно. Снова проверим все найденные решения. Если ни одно из них не выполняется, то опять найдем этап, где впервые не выполнилось ни одно из найденных решений. Построим для него полную подстановку и проведем в систему при условии, что для этого этапа мы не строили полной подстановки до этого.

Таким образом, придется многократно выполнять расширенную систему подстановок, пока это возможно, т. е. в худшем случае, пока не повторим все ходы немодифицированного м. э. п. Должно быть очевидным то, что в худшем случае описанный процесс носит существенно переборный характер.

12. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

12.1. РЕАЛИЗАЦИЯ НЕЧЕТКОГО ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА

Цель работы. Целью работы является изучение механизма нечеткого логического вывода в системе программирования Пролог.

Краткие теоретические сведения. Рассмотрим следующее предложение языка Пролог:

```
Suit (peter, X): -
   Big_salary (X,_)),
   Good_conditions (X,_).

   Big_salary(mailer, 0.4).
   Big_salary(officer, 0.7).
   Big_salary(bob, 0.8).
   Big_salary(artist, 1.0).

   Good_conditions(mailer, 0.7).
   Good_conditions(officer, 0.3).
   Good _conditions(bob, 0.6).
   Good_conditions(artist, 0.9).
```

В нечетком Прологе вывод осуществляется таким образом, чтобы либо найти ответ с максимальной правдоподобностью, либо «обычным образом», но учитывая, что значение 0,5 и ниже в качестве меры истинности рассматривается как ложное. Рассмотрим, как реализовать два этих подхода.

Подход по принципу <u>0,5 и ниже – ложь</u>. В этом случае наша программа должна быть переписана следующим образом:

```
Suit (peter, X): -
   Big_salary (X,Y)),
   Y>=0.5,
   Good_conditions (X,Z),
    Z>=0.5.

   Big_salary(mailer, 0.4).
   Big_salary(officer, 0.7).
   Big_salary(bob, 0.8).
   Big_salary(artist, 1.0).

   Good_conditions(mailer, 0.7).
```

```
Good_conditions(officer, 0.3).
Good _conditions(bob, 0.6).
Good_conditions(artist, 0.9).
```

Как видим, изменения в этом случае в тексте программы минимальные.

Теперь рассмотрим второй подход: поиск ветви с наибольшим значением степени истинности. Для реализации второго подхода нам потребуется воспользоваться рекурсией следующим образом:

```
Database
  Job(string)


Suit (peter, R): -
   Big_salary (X,Y)),
   Good_conditions (X,Z),
    T=Y*Z.
     T>R,
   Retractall(_), !,
   Assert(job(X)),
   Suit(peter,T).

  Suit (peter, _): -
    Job(X),
    Write ("VYBRANA RABOTA:",X).



   Big_salary(mailer, 0.4).
   Big_salary(officer, 0.7).
   Big_salary(bob, 0.8).
   Big_salary(artist, 1.0).

   Good_conditions(mailer, 0.7).
   Good_conditions(officer, 0.3).
   Good _conditions(bob, 0.6).
```

Здесь используем предикат базы данных job , в котором хранится в конце-концов выбранная работа. Цель данной программы должна быть записана в следующем виде:

```
GOAL

Suit(peter,0).
```

Объясним наиболее сложный участок данной программы:

```
Suit (peter, R): -
    Big_salary (X,Y)),
    Good_conditions (X,Z),
     T=Y*Z.
      T>R,
    Retractall(_), !,
    Assert(job(X)),
    Suit(peter,T).
```

Сначала последовательно выполняются предикаты:

```
Big_salary (X,Y)),
Good_conditions (X,Z),
 T=Y*Z.
```

Здесь по порядку выбирается работа, а затем выбирается соответствующая ей зарплата и условия. Вычисляется величина T=Y*Z. После этого выполняется проверка

$$T>R, \qquad (*)$$

которая в случае удачи вызовет смену содержимого предиката базы данных job, записав в него выбранную работу и снова вызвав предикат suit (peter, T), где T – новая оценка степени истинности правила. Заметим, что хотя бы одна работа всегда будет выбрана. Если нет уже ни одной работы, для которой выполняется условие (*), то осуществляется выход в правило

```
Suit (peter, _): -
  Job(X),
  Write ("VYBRANA RABOTA:",X).
```

для вывода найденной работы на экран.

ЗАДАНИЕ

1. Надлежит заменить критерий T=Y*Z на критерий T= min (Y,Z).
2. Реализуйте в программе выбор значений меры истинности формул с помощью функций полезности, а не прямым заданием внутри формул, как например в Good_conditions(mailer, 0.7).
3. Реализуйте комбинированную схему вывода с отсечением ветвей, где предикат получает значение меры истинности, меньшее 0,5.

12.2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ

Цель работы. Научиться находить решения систем логических уравнений с неопределенностями.

Краткое теоретическое введение (см. подразд. 3.2 настоящего пособия**)**. Логическим уравнением с неопределенностью называем всякое уравнение вида

$$x^{\alpha 1} \vee y^{\alpha 2} \vee \ \ldots \vee w^{\alpha z} \ (\mu).$$

Данное уравнение содержит логические переменные x ($y,\ldots,w$), причем $x^{\alpha 1} = 1$, если (условно говоря) $\alpha 1 = 1$ и $x^{\alpha 1} = 0$ в противном случае.

Значение μ определяет степень правдоподобия данной формулы. Таким образом, необходимо определить, что значит решить систему логических уравнений с неопределенностями, и как это сделать. Ясно, что решением системы с неопределенностями будут в одних случаях привычные нам значения логических переменных, т. е. ложь или истина, в других – нечеткие значения переменных. Для второго случая следует использовать теоретический материал, помещенный в разд. 10. Важно отметить, что полученные решения следует использовать для проверки их статистической адекватности, например по критерию χ^2.

ЗАДАНИЕ

Найти решение систем методом подразд. 3.2.

1) $\sim x \vee y \vee \sim z$ (0,7),
$x \vee \sim z$ (0,2),
$\sim x \vee \sim y$ (0,9),
$y \vee z$ (0,6);

2) $x \vee y \vee z$ (0,9),
$\sim x \vee \sim z$ (0,3),
$\sim x \vee \sim y$ (0,4),
$y \vee z$ (0,6).

Найти решение тех же систем методом разд. 10.

3) показать выводимость (невыводимость) формулы $\sim x$ (0,6) в системе 1) для обоих вариантов.

Замечание. Использовать определение выводимости формул (см. разд. 10).

12.3. РЕАЛИЗАЦИЯ ВЫВОДА В ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКЕ ЛУКАСЕВИЧА

Цель работы. Целью работы является практическое овладение механизмом вывода в многозначной логике Лукасевича.

Краткие теоретические сведения

Следует обратиться к материалам разд. 2. Напомним, что нужно построить двоичную логическую систему, эквивалентную заданной многозначной системе Лукасевича. При этом для трехзначной логики вводим векторную логику с формулами, аргументы которых представляют векторы, и интерпретируем их согласно формулам (2.1). Если мы рассматриваем трехзначную логику, то каждая формула φ представляется вектором $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$. При этом следует учитывать дополнительное условие $\varphi_1 \vee \overline{\varphi}_2$. Данная формула не допускает комбинацию (0,1). Заметим, что эта же формула справедлива и в отношении отрицания формулы $\overline{\varphi} = (\overline{\varphi}_2, \overline{\varphi}_1)$. Далее остановимся более подробно на составлении эквивалентных стандартных формул для заданных многозначных формул. Рассмотрим, например, формулу

$$\alpha\,[\mu \geq 0{,}5] \vee \overline{\alpha}\beta\,[\mu <= 0{,}5].$$

Представим формулы

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2),\ \beta = (\beta_1, \beta_2),\ \overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_1).$$

Тогда будем иметь

$$\alpha\,[\mu \geq 0{,}5] \vee \overline{\alpha}\beta\,[\mu <= 0{,}5] = (\alpha_1, \alpha_2)\,[\mu \geq 0{,}5] \vee (\overline{\alpha}_2\beta_1, \overline{\alpha}_1\beta_2)\,[\mu <= 0{,}5].$$

Рассмотрим сначала

$$(\alpha_1, \alpha_2)[\mu \geq 0{,}5].$$

Согласно интерпретации (2.1) получим следующие варианты:

$(\alpha_1, \alpha_2)[\mu \geq 0{,}5] = \alpha_1\alpha_2 \vee \alpha_1\overline{\alpha}_2$. (Это равносильно комбинациям (1,1) $\vee$(1,0)).

Аналогично

$$(\overline{\alpha}_2\beta_1, \overline{\alpha}_1\beta_2)\,[\mu <= 0.5] = \overline{\alpha}_2\beta_1\overline{\overline{\alpha}_1\beta_2} \vee \overline{\overline{\alpha}_2\beta_1} \cdot \overline{\overline{\alpha}_1\beta_2} = \overline{\alpha}_2\beta_1 \cdot (\alpha_1 \vee \overline{\beta}_2) \vee (\alpha_2 \vee \overline{\beta}_1)(\alpha_1 \vee \overline{\beta}_2).$$

Таким образом, получаем двоичный эквивалент для $\alpha\,[\mu \geq 0{,}5] \vee \overline{\alpha}\beta\,[\mu <= 0{,}5]$

в виде

$$\alpha_1\alpha_2 \vee \alpha_1\overline{\alpha}_2 \vee \overline{\alpha}_2\beta_1 \cdot (\alpha_1 \vee \overline{\beta}_2) \vee (\alpha_2 \vee \overline{\beta}_1)(\alpha_1 \vee \overline{\beta}_2)\,.$$

Итак, нужно научиться правильно преобразовывать трехзначные формулы, опираясь на правила (2.1).

ЗАДАНИЕ

1. Показать или опровергнуть, что из формул

$$\alpha\,[\mu \geq 0{,}5] \vee \beta[\mu \leq 1],$$
$$\overline{\alpha}\,[\mu \geq 0{,}5]$$

выводима формула

$$\beta\,[\mu \leq 0{,}5]\,.$$

2. Показать или опровергнуть, что из формул

$$\alpha\,[\mu \leq 0{,}5] \vee \beta\,[\mu \leq 1],$$
$$\overline{\alpha}\,[\mu \geq 0{,}5]$$

выводима формула

$$\beta\,[\mu = 0{,}5]\,.$$

3. Показать или опровергнуть, что из формул

$$\alpha\,[\mu \geq 0{,}5] \vee \beta\,[\mu \leq 1],$$
$$\overline{\alpha}\,[\mu \geq 0{,}5] \vee \varphi\,[\mu = 1],$$
$$\overline{\alpha}\,[\mu \geq 0{,}5] \vee \overline{\varphi}\,[\mu = 1]$$

выводима формула

$$\beta\,[\mu \leq 0{,}5]\,.$$

4. Показать или опровергнуть, что из формул

$$\alpha\,[\mu \geq 0{,}5] \vee \beta\,[\mu \leq 1],$$
$$\overline{\alpha}\,[\mu \leq 0{,}5] \vee \varphi\,[\mu = 1],$$
$$\overline{\varphi}\,[\mu \geq 1]$$

выводима формула

$$\beta\,[\mu \leq 1]\,.$$

5. Показать или опровергнуть, что из формул

$$\alpha\,[\mu \ge 0{,}5] \vee \beta\,[\mu \le 1] \vee \gamma\,[\mu <= 1],$$
$$\overline{\alpha}\,[\mu \ge 0{,}5] \vee \varphi\,[\mu = 1],$$
$$\overline{\alpha}\,[\mu \ge 0{,}5] \vee \overline{\varphi}\,[\mu = 1],$$
$$\overline{\gamma}\,[\mu \ge 0{,}5]$$

выводима формула

$$\beta\,[\mu \le 0{,}5].$$

12.4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛОГИК С ВРЕМЕННЫМ ПАРАМЕТРОМ

Цель работы. Целью работы является практическое овладение механизмом синтеза решений в динамических логиках с временным параметром.

Краткие теоретические сведения

Следует обратиться к материалам разд. 5. Сначала рассмотрим упрощенный вариант задачи. Рассмотрим следующие операторы:

$$O_1 = (*11*0),$$
$$O_2 = (1**1*),$$
$$O_3 = (00*01),$$
$$O_4 = (*0*10),$$
$$O_5 = (***11),$$
$$O_6 = (00***).$$

Каждый из этих операторов определяет, как он изменяет значения переменных состояния системы, будучи примененным. Например, оператор $O_1 = (*11*0)$ определяет следующее: если его применить, то он не изменит значения переменной x_1 (указана * в первой ячейке, соответствующей переменной x_1); установит в первую, вторую и третью переменные x_2, x_3, не изменит значения переменной x_4 и установит в нуль переменную x_5. Таким образом, значение * означает, что данный разряд вектора состояния системы не изменяется при применении этого оператора. Проблема состоит в том, чтобы для заданного начального и конечного состояний системы найти цепочку (последовательность) операторов, которая переведет систему из начального состояния в требуемое конечное состояние. Так, пусть

$$S_0 = (00000), S_{fin} = (11111).$$

Как построить интересующую нас цепочку? Пока что обойдемся без использования двоичных дифференциалов. Цепочку будем строить с конца (т. е. от требуемого конечного состояния) в направлении к началу. Смотрим, какой оператор можно применить на последнем шаге? Ясно, что этот оператор не должен устанавливать ни одного 0. Подходящими операторами являются O_2, O_5. Выберем любой из них и поставим на последнее место в синтезируемой цепочке:

$$\text{CH} = < O_2 >.$$

Данный оператор устанавливает в первый и четвертый разряды вектора состояния. Поэтому значения этих разрядов на предпоследнем шаге уже безразличны. Заменим их на *. Теперь требуемое состояние будет таким:

$$S_0 = (00000), S_{fin} = (*11*1).$$

Смотрим опять, какой оператор можно применить к новому конечному состоянию. Подходит только один оператор O_5. Почему, например, не подходит O_1? Потому что он устанавливает в 0 последний пятый разряд и выполняемый последним оператор O_2 это состояние не изменит. Имеем новую цепочку:

$$\text{CH}=< O_5 , O_2 >$$

и состояния

$$S_0 = (00000), S_{fin} = (*11**).$$

Теперь можно применить оператор O_1 (заметим, что только этот оператор пока и подходит). Получаем

$$\text{CH}=< O_1 , O_5 , O_2 >,$$
$$S_0 = (00000), S_{fin} = (*****).$$

В финальном состоянии устанавливать больше нечего (все заполнено звездочками). Процесс завершен.

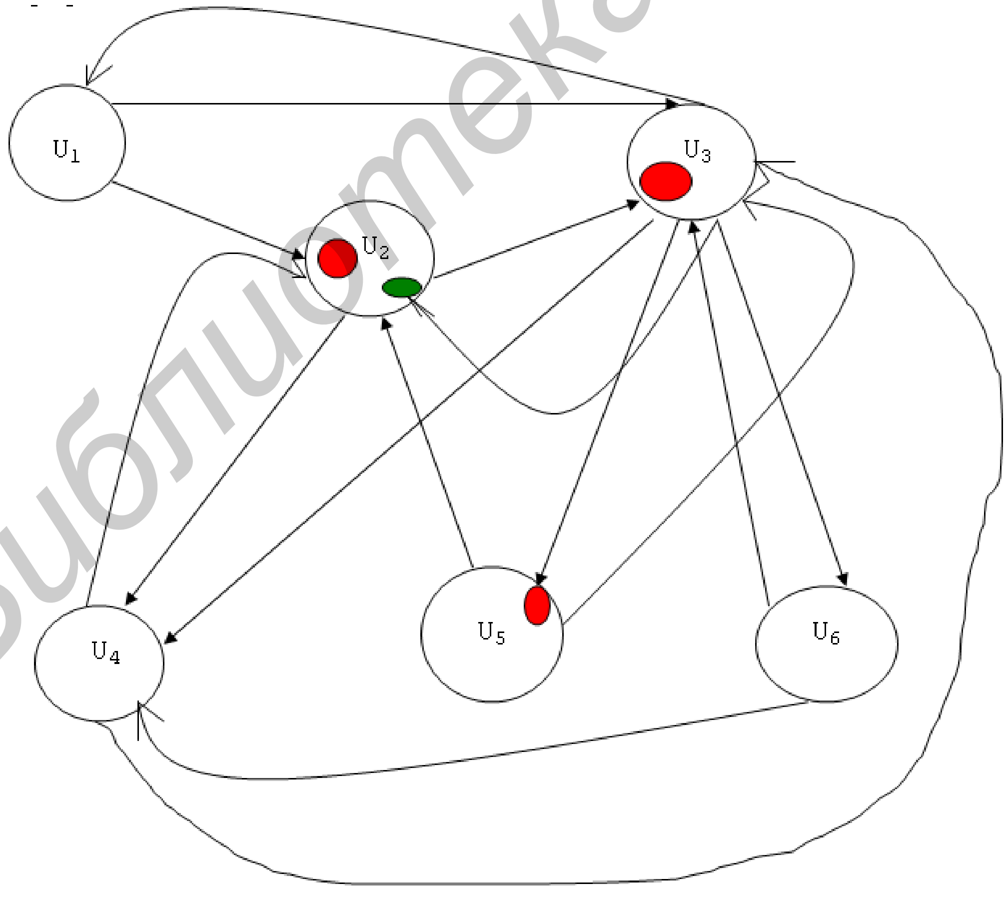
ЗАДАНИЕ

1. Реализовать алгоритм синтеза на языке Пролог и проверить его на представленном примере.

Перейдем к общему случаю. Рассмотрим следующую систему операторов:

$$U_1 =<01*><10*>,$$
$$U_2 =<*0*><11*>,$$
$$U_3 =<**0><0*1>,$$
$$U_4 =<*1*><100>,$$
$$U_5 =<0**><10*>,$$
$$U_6 =<0*1><110>.$$

Каждый оператор представлен парой векторов. Первый вектор определяет условие срабатывания, а второй – результат. Пусть требуется перевести систему из состояния <000> в состояние <111>. Для решения этой задачи построим граф следования операторов. Операторы в этом графе будут представлены вершинами. Два оператора U_α, U_β связываются дугой, если в состоянии, где заканчивает выполнение U_α, может стартовать U_β. Вот этот граф.



На данном графе найдем те точки (на дугах), где содержится начальное состояние (000) и конечное состояние. Начальное состояние <000> включается в условие срабатывания операторов $U_2, U_{3,} U_5$. Конечное состояние <111> включается в результат действия оператора U_2. Пометим эти точки красным и зеленым цветами. Теперь следует рассмотреть все возможные пути из вершины с красным цветом в вершину с зеленым цветом и найти из этих путей (если есть) решающую последовательность операторов. Рассмотрим, например, такой путь:

$000\_U_3 \to 001\_U_4 X U_2$.

Этот путь не может быть реализован. Не срабатывает оператор U_2 (проверьте).

Другой вариант

$U_5 \to U_3 \to U_2$ приводит к правильному ответу. Также правильный ответ дает вариант $U_3 \to U_5 \to U_2$.

Недостатком описанного метода является значительное количество путей в графе как кандидатов на решение задачи.

Рассмотрим такую форму представления:

$$
\begin{aligned}
O_1 &= if \;\; (1***0) \;\; then \;\; (*11*0),\\
O_2 &= if \;\; (0****) \;\; then \;\; (1**1*),\\
O_3 &= if \;\; (00***) \;\; then \;\; (00*01),\\
O_4 &= if \;\; (*0***) \;\; then \;\; (*0*10),\\
O_5 &= if \;\; (*****) \;\; then \;\; (***11),\\
O_6 &= if \;\; (0****) \;\; then \;\; (00***).
\end{aligned}
$$

В условной части указан, в каких состояниях можно применять оператор. Например, оператор O_1 можно применять всегда, когда первая переменная $x_1 = 1$, а пятая равна 0 – $x_5 = 5$.

Для этой задачи можно воспользоваться двоичным дифференциалом. Рассмотрим, как это сделать. Введем следующие двоичные дифференциалы: $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6$. Если соответствующий дифференциал равен *true* (1), то это означает, что применяется данный оператор. Поскольку на каждом шаге синтеза решения применяется один и только один оператор, то вводим сразу условие:

1. $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6 = 1$.

Это условие арифметическое. Оно равносильно следующей логической системе:

$$\Delta_1 \vee \Delta_2 \vee \Delta_3 \vee \Delta_4 \vee \Delta_5 \vee \Delta_6,$$
$$\overline{\Delta}_1 \vee \overline{\Delta}_2,$$
$$\ldots$$
$$\overline{\Delta}_5 \vee \overline{\Delta}_6.$$

2. Теперь передадим характер действия каждого оператора:

$$\Delta_1 \rightarrow x_2 \mathbin{\&} x_3 \mathbin{\&} \bar{x}_5,$$
$$\Delta_2 \rightarrow x_1 \mathbin{\&} x_4,$$
$$\Delta_3 \rightarrow \bar{x}_1 \mathbin{\&} \bar{x}_2 \mathbin{\&} \bar{x}_4 \mathbin{\&} x_5,$$
$$\Delta_4 \rightarrow \bar{x}_2 \mathbin{\&} x_4 \mathbin{\&} \bar{x}_5,$$
$$\Delta_5 \rightarrow \bar{x}_1 \mathbin{\&} \bar{x}_2.$$

3. Следующая группа формул задает условия выполнимости операторов

$$\Delta_1 \rightarrow y_1 \mathbin{\&} \bar{y}_5,$$
$$\Delta_2 \rightarrow \bar{y}_1,$$
$$\Delta_3 \rightarrow \bar{y}_1 \mathbin{\&} \bar{y}_2,$$
$$\Delta_4 \rightarrow \bar{y}_2,$$
$$\Delta_5 \rightarrow \bar{y}_1.$$

Мы здесь ввели новые обозначения для переменных состояния (вместо x_i используем y_i). Таким образом, операторы связывают предшествующие состояния с последующими. Наконец, последнее ограничение указывает, что если оператор не применяется, то состояние не изменяется:

4. $\overline{\Delta_1 \vee \Delta_2 \vee \Delta_3 \vee \Delta_4 \vee \Delta_5} \rightarrow y_1 \leftrightarrow x_1 \mathbin{\&} y_2 \leftrightarrow x_2 \mathbin{\&} y_3 \leftrightarrow x_3 \mathbin{\&} y_4 \leftrightarrow x_4 \mathbin{\&} y_5 \leftrightarrow x_5$.

ЗАДАНИЕ

Запишите систему в среде Excel и найдите все возможные решения. Постройте дерево переходов на множестве состояний. Отыщите переход из (000000) в (11111).

12.5. ВЫВОД В ВЕРОЯТНОСТНОЙ ЛОГИКЕ

Цель работы. Целью работы является практическое овладение механизмом вывода в вероятностой логике.

Краткие теоретические сведения

Следует обратиться к материалам разд. 5. Пусть дана таблица наблюдений, табл. 12.1.

Таблица 12.1

x_1	x_2	y
1	1	0
1	0	0
1	1	1
0	1	0
1	0	0
1	0	1
0	0	1
1	0	0
0	0	0
0	0	1
0	0	1

По этой таблице легко рассчитать (эмпирические) вероятности выполнимости любых формул. Например, рассчитаем вероятность выполнимости формулы $x_1 \vee x_2 \rightarrow y$. Подсчитаем число случаев, когда эта формула выполняется, 6 и когда не выполняется, 5 (формула $x \rightarrow y$ не выполняется, если и только если $x = 1$, а y равен 0). Вероятность выполнимости составляет $\frac{6}{11}$.

Основная задача любой неклассической логики – установление выводимости одной формулы из других. Для вероятностной логики это означает следующее. Пусть требуется установить выводимость

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \mapsto \beta.$$

Для этой цели достаточно показать, что вероятность $P(\alpha)$ не превосходит вероятности $P(\beta)$. Вероятности определяем по таблице непосредственно. Воспользуемся формулой

$$P(y)=\frac{a+b-1}{P(x|y)}=\frac{P(x)+P(x\to y)-1}{P(x|y)}.$$

Эта формула позволяет рассчитать вероятность заключения в формуле modus ponens

$$\frac{\begin{matrix} x \\ x\to y \end{matrix}}{y},$$

когда для посылок известны вероятности и требуется найти вероятность заключения.

ЗАДАНИЕ

1. По табл. 12.1 проверить, выводима ли формула $x_1 \,\&\, \bar{x}_2 \to y$.
2. Найти вероятность заключения в схеме modus ponens

$$\frac{\begin{matrix} P(x)=0{,}7 \\ P(x\to y)=0{,}9 \end{matrix}}{P(y)?}$$

3. Найти вероятность формулы

$(x_1 \vee \bar{x}_2) \,\&\, (\bar{x}_1 \vee x_2) \,\&\, (x_1 \vee x_3) \,\&\, (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

4. Найти вероятностное решение системы дизъюнктов

$$\begin{aligned} &x_1 \vee x_2 (0{,}8), \\ &\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 (0{,}7), \\ &x_1 \vee \bar{x}_2 (0{,}3). \end{aligned}$$

Найти вероятностное решение, значит, найти вероятности истинности переменных задачи, удовлетворяющие всем вероятностям представленных в системе дизъюнктов.

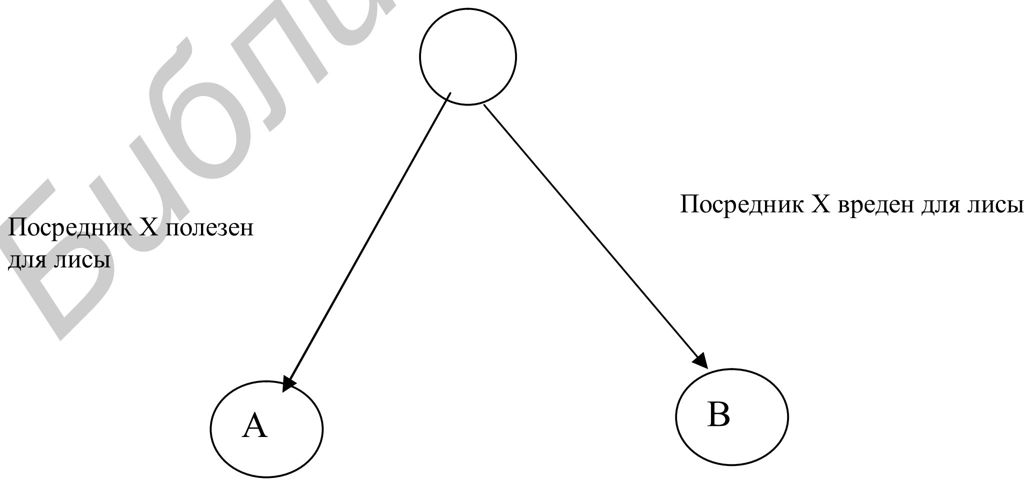
ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии представлены теоретические и алгоритмические аспекты построения машин вывода в неклассических логических системах. Дано обоснование введения неклассических логик. Рассмотрена проблема формализации понятия математического доказательства в классических и неклассических логических системах. Особый интерес, с нашей точки зрения, представляет проблема логических парадоксов и их объяснение. Вне поля зрения остался практический аспект применения рассмотренных формализаций. Вместе с тем уже нечеткие логики дают массу примеров практического применения. Так, рассмотрим использование приближенных рассуждений в человеко-машинной решающей системе [27]. Основными механизмами поиска решений в таких системах являются порождение гипотез и построение дерева решения. Узлы дерева решения представляют контексты задачи (наборы формул, принятых в качестве гипотез при движении по дереву к данному узлу). Задача машины состоит в отбраковке «неправдоподобных» узлов. Проиллюстрируем сказанное.

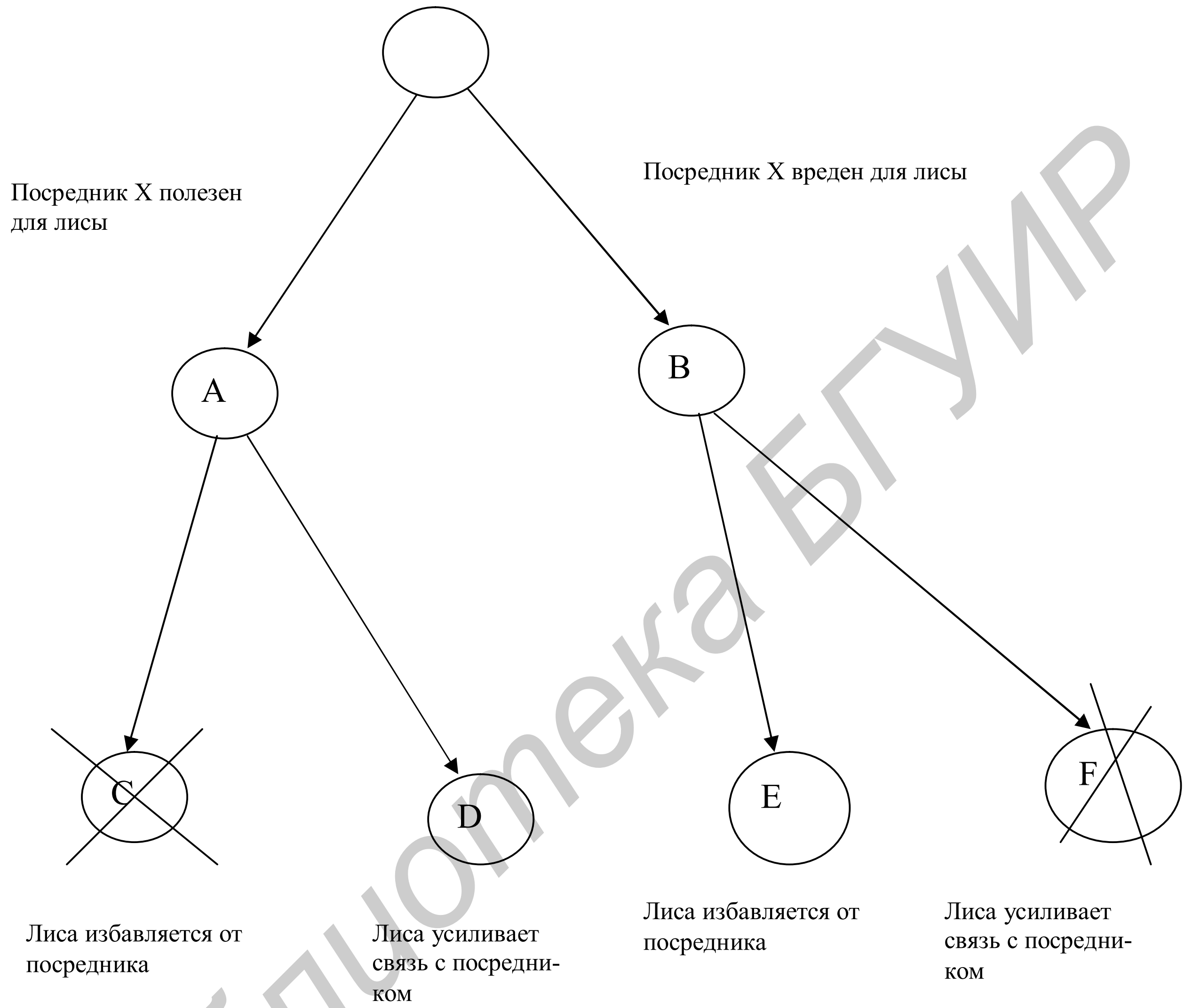
Пример. Почему лиса берет в пасть пучок травы, заплывает на середину реки и отпускает пучок по течению?

Сначала сформулируем готовый ответ. Ищем посредника между лисой и пучком травы. Этот посредник удаляется вместе с пучком. Значит, лисе он нежелателен. От него лисе вред. Вывод – посредник – насекомые.

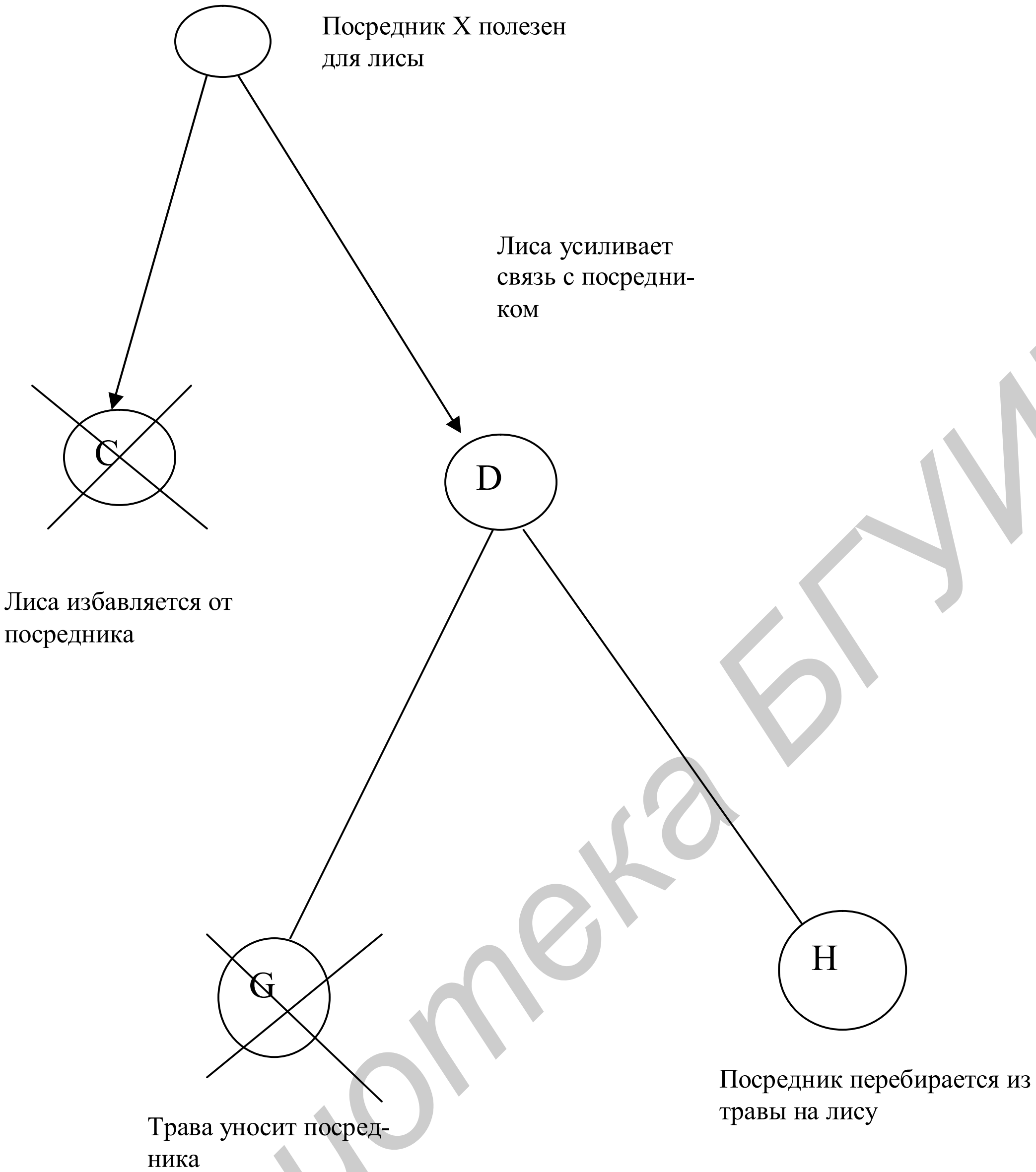
Важным моментом в решении этой и других задач является использование **гипотез**. Строится дерево гипотез, которое помогает найти решение. Дерево гипотез – важнейший механизм поиска, позволяющий приблизиться к ответу. Обратимся снова к примеру. Начнем строить такое дерево, например, следующим образом:



Сделанные выше предположения логичны: все подчиняется действию закона единства и борьбы (противоположностей). Далее можно нарастить это дерево, используя новую гипотезу.



Теперь мы видим пользу дерева – вершины C и F нелогичны (противоречивы). Поэтому мы блокируем эти вершины. Рассмотрим вершину D. Она выглядит достаточно подозрительно. В самом деле, посредник полезен, лиса стремится усилить с ним связь, избавляясь при этом от пучка травы. Разовьем этот путь в дереве.



В траве обитают живые существа, которые, спасаясь от воды, перебираются на лису. Таких живых существ, кроме насекомых, нам не известно. Мы должны заблокировать вершину H.

Итак, мы видим, что путем построения дерева гипотез можно существенно раскрыть суть явления или задачи. Этот механизм следует взять в употребление и в интеллектуальных системах он действительно широко используется. Но опять возникает проблема, как оценивать вершины с точки зрения их перспективности или бесперспективности. Этой цели уже служит та или иная математическая теория. В частности, можно использовать механизм Саати, механизм решения логических систем уравнений с неопределенностями и др. В каждом узле дерева гипотез имеется набор гипотез и следствий из них, приведший в эту вершину. Так, в вершине H этот набор гипотез такой:

а) α – посредник полезен для лисы (0,8);
б) β – лиса усиливает связь с посредником (0,9);
в) γ – посредник перебирается с травы на лису (?);
г) ε – в траве нет полезных посредников (0,8).

Здесь в скобках указаны меры доверия к формулам (составляются экспертами). Между этими формулами имеются логические зависимости. Запишем эти зависимости вместе с исходными данными:

$$
\begin{aligned}
&\alpha \to \beta,\\
&\beta \to \alpha,\\
&\varepsilon \to \bar{\gamma},\\
&\gamma \to \beta,\\
&\gamma \to \bar{\varepsilon},\\
&\bar{\gamma} \to \bar{\beta},\\
&\alpha,\\
&\beta,\\
&\varepsilon.
\end{aligned}
$$

В интересах простоты не использовали меры неопределенности (это отдельная задача). Приняли просто, что если мера неопределенности больше 0.5, то формула считается истинной, а если меньше либо равна 0.5, то формула считается ложной. Нетрудно видеть, что полученная система противоречива.

Итак, дерево гипотез основано на порождении предположений. В каждом узле дерева «накапливаются» предположения, полученные по ходу движения в этот узел. Предположения могут быть более менее правдоподобными. Мы блокируем узел и запрещаем движение из него, если множество гипотез несовместно. Для этой цели нужно строить связи между гипотезами (отношения следствия) и решать систему с неопределенностями. Кстати все полученные решения должны давать новые гипотезы

Систему с неопределенностями легко решить в каком-либо современном математическом пакете, например, в Excel – с помощью пакета Поиск Решения.

Рассмотренный пример использования неклассических логик в системе автоматизации решения задач, разумеется, не единственный вариант их применения. Имеются сведения об управлении на основе аппарата нечетких логик техническими устройствами, такими как стиральные машины, транспортные средства и др. Рассмотренные модели могут широко использоваться для решения задач проектирования, диагностики, управления, объяснения и пр. Многие сложные задачи комбинаторной и дискретной математики могут быть представлены с помощью неклассических логических моделей.

Весьма интересно применение логики Рейтера для решения задач технического конструирования. Действительно, логика Рейтера манипулирует теоремами и гипотезами. Теоремы определяют ту часть системы, которую изменять нельзя. Гипотезы характеризуют варианты реализации изменяемых частей системы. Разработчик формирует цель – получить систему с заданными свойствами. Следовательно, если цель выводима в некой экспликации данной логики Рейтера, то эта экспликация и дает техническое решение. Как нам представляется, логика Рейтера может найти существенное применение в системах решения поисковых и научно-изобретательских задач, так что эту логику следует серьезно рассматривать как подходящий научный базис под такого рода проблемы.

Системы динамической логики позволяют решать задачи синтеза управляющих алгоритмов в технических системах. Они вполне могут применяться в робототехнике, системах производственного планирования, теории расписаний и других областях.

Возможность использовать нечеткую логику для решения экстремальных комбинаторных задач составляет значимое теоретико-прикладное направление.

Таким образом, данное пособие развивает аппарат математической логики применительно к реализации машин вывода для неклассических логических систем.

Основная проблема создания машины вывода в логическом исчислении связана с решением задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ. В силу тезиса Р. Сушко эта задача актуальна в полной мере и для неклассических логических исчислений. Она является центральной не только в логике высказываний, но и в логике предикатов, поскольку все методы резолюционного типа так или иначе (пусть и в скрытой форме) решают задачу ВЫПОЛНИМОСТЬ. Центральная проблема всех существующих методов решения ВЫП состоит в порождении лишних резольвент. Однако NP-полная природа этой задачи может приводить к таким ситуациям, когда все резольвенты являются необходимыми, но число их растет экспоненциально от размеров задачи. Следовательно, практическая эффективность прикладных систем математической логики, включая систему Пролог, напрямую зависит от того, насколько эффективны методы решения ВЫП. В связи с этим указанный в пособии подход может дать приемлемые результаты для систем логических дизъюнктов, содержащих малое число выполняющих интерпретаций. Этот метод вполне может дополнять метод групповых резолюций, представленный в пособии [7]. Свои замечания автор просит сообщить по электронному адресу: **ovgerman@tut.by**.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпенко, А. С. Логики Лукасевича и простые числа / А. С. Карпенко. – М. : Наука, 2000. – 318 с.

2. Яблонский, С. В. Введение в дискретную математику / В. Яблонский. – М. : Наука, 1979. – 272 с.

3. Васильев, Н. А. Воображаемая логика: избр. тр. / Н. А. Васильев. – М. : Наука. 1989. – 256 с.

4. Френкель, А. А. Основания теории множеств / А. А. Френкель, И. Бар-хиллел. – М. : Мир, 1966. – 554 с.

5. Герман, О. В. Получение выводов в противоречивых системах / О. В. Герман // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – №5. – С. 29–41.

6. Клини, К. С. Введение в метаматематику / К. С. Клини. – М. : Иностранная литература, 1957. – 528 с.

7. Герман, О. В. Введение в теорию экспертных систем и обработку знаний / О. В. Герман. – Минск : Дизайн-Про, 1995. – 256 с.

8. Гэри, М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М. : Мир, 1982. – 600 с.

9. Новиков, П. С. Элементы математической логики / П. С. Новиков. – М. : Наука, 1973. – 400 с.

10. Чень, Ч. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем / Ч. Чень, Р. Ли. – М. : Наука, 1983. – 358 с.

11. Дюбуа, Д. Теория возможностей / Д. Дюбуа, А. Прад. – М. : Радио и связь, 1990. – 288 с.

12. Герман, О. В. Экспертные системы: учеб.-метод. пособие / О. В. Герман. – Минск : БГУИР, 2008. – 91 с.

13. Герман, О. В. Система вывода для нечеткой логики на основе многозначных исчислений Лукасевича / О. В. Герман, И. Г. Блохина, Ю. О. Герман // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. – 2010.– №6. – С. 35–38.

14. Orlowska, E. Mechanical reasoning in fuzzy logics / E. Orlowska, S. Wierzchon. – Warsaw : Polish Academy of Sciences, 1984 – 62 L.

15. Герман, О. В. Логическое исчисление, использующее нечеткие формулы / О. В. Герман, А. А. Линник // Вестник БНТУ. – 2005. – №5. – С. 55–58.

16. Розоноэр, Л. И. О выявлении противоречий в формальных теориях / Л. И. Розоноэр // Автоматика и телемеханика. – 1980. – №6, 7. – С. 27–38.

17. Бочвар, Д. А. К вопросу о парадоксах математической логики и теории множеств / Д. А. Бочвар // Математический сборник. – 1944. – №15(57). – С. 369–384.

18. Герман, Ю. О. Эффективный в среднем алгоритм для задачи о покрытии с приложением к нечеткой классификации и нечеткому выводу / Ю. О. Герман, А. Р. Самко, О. В. Герман // Труды БГУИР. – 2009. – №7(49) – С. 93–99.

19. Герман, Ю. О. Машина вывода для противоречивых логических систем: дис. на соискание акад. степени магистра наук. – Минск : БГУИР, 2009. – 70 с.

20. Герман. О. В. Об одной задаче синтеза поведения интеллектуального робота / О. В. Герман, Д. В. Семерюк // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 2. – С. 15–25.

21. Герман, О. В. Синтез управляющего алгоритма в системе продукционных правил с временным параметром / О. В. Герман, Д. В. Занько // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №5. – С. 41–52.

22. Рассева, Е. Математика математики / Е. Рассева, Р. Сикорский. – М. : Наука, 1972. – 592 с.

23. Бохманн, Д. Двоичные динамические системы / Д. Бохманн, Х. Постхоф. – М. : Энергоатомиздат, 1986. – 400 с.

24. Гиндикин, С. Г. Алгебра логики в задачах / С. Г. Гиндикин. – М. : Наука, 1972. – 286 с.

25. Ивлев, Ю. В. Содержательная семантика модальной логики / Ю. В. Ивлев. – М. : МГУ, 1985. – 168 с.

26. Заде, Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. Заде // Новое в зарубежном мире. Сер. Математика. – М. : Мир, 1976. – 165 с.

27. Герман, О. В. Развиваем интеллект: практ. тренинг / О. В. Герман, Р. Я. Денисюк, Н. В. Кузьмина. – Минск : ДизайнПРО, 1998. – 156 с.

Учебное издание

Герман Олег Витольдович

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *Е. Н. Батурчик*
Корректор *А. В. Бас*

Подписано в печать Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. Уч.-изд. л. 7,4. Тираж 100 экз. Заказ 812.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6