УДК 517.977.58

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

О. И. Костюкова,
доктор физ.-мат. наук, профессор
Институт математики Национальной академии наук Беларуси, г. Минск
Н. М. Федорцова,
главный инженер проекта
Конструкторско-технический центр Белорусской железной дороги, г. Минск

Рассматривается однопараметрическая линейно-квадратичная задача оптимального управления с особыми участками. Исследуются свойства решений данной задачи в окрестности нерегулярного параметра. Показано, что в нерегулярном случае при достаточно малых возмущениях параметра может измениться структура решения задачи. Приведены условия, позволяющие определить структуру решения задачи при возмущенном значении параметра, используя решение невозмущенной задачи.

Ключевые слова *— оптимальное управление, параметрическая оптимизация, возмущенные задачи, линейно-квадратичные задачи, особые участки.*

Введение

В процессе изучения многих физических, химических, экономических и других закономерностей часто возникают задачи с параметрами, решение которых позволяет исследовать соответствующий процесс в зависимости от значений параметра. В настоящее время, среди прочих, областью активных исследований являются параметрические задачи оптимального управления, интерес к которым достаточно велик со стороны промышленности.

Несмотря на большую распространенность параметрических задач, научные исследования, как правило, проводятся в регулярных случаях [1–5]. Условия нерегулярности в настоящее время мало исследованы, поскольку процесс их исследования сопряжен с трудностями, связанными с изменением структуры решения задачи (т. е. количества точек переключения и особых участков).

Цель настоящей работы — провести исследование свойств решений линейно-квадратичной задачи оптимального управления с особыми участками в окрестности нерегулярного параметра.

Постановка задачи

В классе измеримых функций $u(t)$, $t \in T = [0,\ t_*]$, рассмотрим семейство параметрических задач оптимального управления $OC(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{E}(\alpha_0)$:

$$OC(\alpha): \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{t_*} \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{D}\mathbf{x}(t)\mathrm{d}t + \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}(t_*) \to \min; \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(\alpha); \\ \mathbf{H}\mathbf{x}(t_*) = \mathbf{g}, \quad |u(t)| \le 1, \quad t \in T, \end{cases} \qquad (1)$$

где α — параметр семейства; $\mathrm{E}(\alpha_0) = [\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta]$, α_0 — фиксированное число, $\delta > 0$ — достаточно малое число; $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ — n-вектор состояния; $\mathbf{D} \in R^{n\times n}$ $(\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \geq 0)$, $\mathbf{A} \in R^{n\times n}$; $\mathbf{H} \in R^{m\times n}$, $\mathbf{c} \in R^n$, $\mathbf{b} \in R^n$, $\mathbf{g} \in R^m$ — заданные матрицы и векторы; $u = u(t)$ — скалярное управление; $\mathbf{x}_0(\alpha) \in R^n$ — заданная достаточно гладкая функция параметра α; $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{b} \neq 0$.

Предположение 1. Выполняются следующие условия:

$$\mathrm{rank}(\mathbf{Hb}, \mathbf{HAb}, \ldots, \mathbf{HA}^{n-1}\mathbf{b}) = m,$$

$$\mathbf{g} \in \operatorname{int}\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x}(t_*),\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t),$$
$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(\alpha_0),\ |u(t)| \le 1,\ t \in T\}.$$

Понятие допустимого $u_\alpha(\cdot)$ и оптимального $u_\alpha^0(\cdot)$ управлений и соответствующих им траекторий $\mathbf{x}_\alpha(\cdot)$, $\mathbf{x}_\alpha^0(\cdot)$ при фиксированном значении параметра α вводятся стандартно [6]. Результаты из работы [7] позволяют утверждать, что задача (1) имеет решение, если существуют допустимые управления.

Требуется найти решения возмущенных задач $OC(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{E}(\alpha_0)$, и описать их свойства, используя известное решение невозмущенной задачи $OC(\alpha_0)$.

Условия оптимальности. Структура и определяющие элементы

Используя результаты из работы [6], можно доказать *принцип максимума*.

Пусть выполняется предположение 1 и $\alpha \in \mathrm{E}(\alpha_0)$. Тогда для оптимальности допустимых управления $u_\alpha^0(\cdot)$ и траектории $\mathbf{x}_\alpha^0(\cdot)$ необходимо и достаточно существование такого m-вектора $\mathbf{y}(\alpha)$, что вдоль решения $\boldsymbol{\psi}_\alpha^0(t)$, $t \in T$, сопряженной системы

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}_\alpha^0(t),\quad \boldsymbol{\psi}(t_*) = \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}(\alpha) - \mathbf{c} \tag{2}$$

выполняются соотношения

$$\boldsymbol{\psi}_\alpha^{0\mathrm{T}}(t)\mathbf{b}u_\alpha^0(t) = \max_{|u|\le 1}\boldsymbol{\psi}_\alpha^{0\mathrm{T}}(t)\mathbf{b}u,\ t \in T. \tag{3}$$

Рассмотрим оптимальное управление $u_\alpha^0(\cdot)$ и соответствующую ему траекторию $\mathbf{x}_\alpha^0(\cdot)$ задачи (1), а также вектор $\mathbf{y}(\alpha)$, удовлетворяющий (2), (3). Найдем соответствующее им решение $\boldsymbol{\psi}_\alpha^0(t)$, $t \in T$, сопряженной системы (2) и построим функцию коуправления

$$\Delta_\alpha(t) = \boldsymbol{\psi}_\alpha^{0\mathrm{T}}(t)\mathbf{b},\ t \in T. \tag{4}$$

В общем случае функция (4) имеет изолированные нули, а также существуют особые участки, где она обращается тождественно в нуль:

$$\Delta_\alpha(t) \equiv 0,\ t \in [\tau_i(\alpha), \tau^i(\alpha)] \subset T, \tau_i(\alpha) < \tau^i(\alpha), i = \overline{1, p(\alpha)}.$$

Здесь $p(\alpha)$ — количество отрезков $[\tau_i(\alpha), \tau^i(\alpha)]$, где функция коуправления обращается тождественно в нуль. Далее без ограничения общности будем считать, что $\tau_1(\alpha) > 0$, $\tau^{p(\alpha)}(\alpha) < t_*$.

Из принципа максимума следует, что вне особых участков управление $u_\alpha(\cdot)$ принимает граничные значения ± 1, а на особых участках лежит в диапазоне от -1 до $+1$.

Обозначим через $t_{ij}(\alpha)$, $j = \overline{1, s_i(\alpha)}$, $i = \overline{0, p(\alpha)}$ (здесь и далее считаем, что множество индексов $j = \overline{s, k}$ пусто, если $k < s$), изолированные нули функции коуправления, которые упорядочим следующим образом:

$$t_{ij}(\alpha) < t_{ij+1}(\alpha),\ j = \overline{1, s_i(\alpha) - 1},\ i = \overline{0, p(\alpha)},$$
$$0 \le t_{01}(\alpha),\ t_{p(\alpha)s_{p(\alpha)}(\alpha)}(\alpha) \le t_*;$$
$$\tau^i(\alpha) < t_{i1}(\alpha),\ i = \overline{1, p(\alpha)},$$
$$t_{is_i(\alpha)}(\alpha) < \tau_{i+1}(\alpha),\ i = \overline{0, p(\alpha) - 1}.$$

Известно [8], что в общем случае может иметь место соотношение $s_0(\alpha) + s_1(\alpha) + \ldots + s_{p(\alpha)}(\alpha) + p(\alpha) = \infty$, однако в данной работе будем считать, что выполняется следующее предположение.

Предположение 2. Верны соотношения $p(\alpha) < \infty$, $s_i(\alpha) < \infty$, $i = \overline{0, p(\alpha)}$.

Отметим, что если ограничения задачи $OC(\alpha)$ удовлетворяют предположению 1 и $p(\alpha) \ne 0$, то можно показать, что существует единственный вектор $\mathbf{y}(\alpha)$, удовлетворяющий (2), (3). Далее будем считать, что $p(\alpha) \ge 1$. Случай $p(\alpha) = 0$ (когда оптимальное управление — релейное) исследуется по аналогии с работой [9].

Определение 1. Значение параметра α и оптимальное управление $u_\alpha^0(\cdot)$ будем называть регулярными, если выполняются следующие условия:

1) $\Delta_\alpha(0) \ne 0$, $\Delta_\alpha(t_*) \ne 0$;

2) $\partial\Delta_\alpha(\tau)/\partial t \ne 0$, $\tau \in \{t_{ij}(\alpha),\ j = \overline{1, s_i(\alpha)},\ i = \overline{0, p(\alpha)}\}$;

3.1) $|u_\alpha^0(t)| < 1$, $t \in (\tau_i(\alpha), \tau^i(\alpha))$, $i = \overline{1, p(\alpha)}$;

3.2) $|u_\alpha^0(\tau_i(\alpha) + 0)| < 1$, $|u_\alpha^0(\tau^i(\alpha) - 0)| < 1$, $i = \overline{1, p(\alpha)}$.

Положим $P(\alpha) = \{0, 1, \ldots, p(\alpha)\}$,

$$l_i(\alpha) = u_\alpha^0(\tau^i(\alpha) + 0),\ i \in P(\alpha),\ \boldsymbol{\varphi}(\alpha) := \boldsymbol{\psi}_\alpha^0(0).$$

Рассмотрим совокупности параметров

$$S(\alpha) = \{p(\alpha),\ l_i(\alpha),\ s_i(\alpha),\ i \in P(\alpha)\},$$
$$\boldsymbol{\theta}(\alpha) = (t_{ij}(\alpha),\ j = \overline{1, s_i(\alpha)},\ i \in P(\alpha),$$
$$\tau_i(\alpha),\ \tau^i(\alpha),\ i = \overline{1, p(\alpha)};\ \boldsymbol{\varphi}(\alpha);\ \mathbf{y}(\alpha)).$$

Определение 2. Множества $S(\alpha)$ и $\boldsymbol{\theta}(\alpha)$ назовем структурой и определяющими элементами задачи $OC(\alpha)$ соответственно.

Далее будет показано, что по определенным множествам $S(\alpha)$ и $\boldsymbol{\theta}(\alpha)$ можно однозначно восстановить управление $u_\alpha^0(\cdot)$ задачи $OC(\alpha)$ и проверить его оптимальность. Таким образом, задача построения решений возмущенных задач $OC(\alpha)$ сводится к построению конечномерных наборов данных $S(\alpha)$ и $\boldsymbol{\theta}(\alpha)$.

Свойства решений возмущенных задач $OC(\alpha)$ в окрестности регулярного параметра

Рассмотрим совокупность параметров (далее — структура) $S = \{p, l_i, s_i, i \in P\}$, где $p \ge 1$, $P = \{0, \ldots, p\}$; $|l_i| = 1$, $s_i \ge 0$, $i \in P$; p и s_i, $i \in P$ — целые числа.

Используя структуру S, введем $\left(\sum_{i=0}^{p} s_i + 2p + n + m\right)$-вектор параметров $\boldsymbol{\theta} = (t_{ij},\ j = \overline{1, s_i},\ i \in P,$ $\tau_i,\ \tau^i,\ i = \overline{1,p};\ \boldsymbol{\varphi};\ \mathbf{y}), \boldsymbol{\varphi} \in R^n, \mathbf{y} \in R^m$, таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$0 \le t_{01} < t_{02} < \ldots < t_{0s_0} < \tau_1;$$

$$\tau^p < t_{p1} < t_{p2} < \ldots < t_{ps_p} \le t_*;$$

$$\tau^i < t_{ij} < t_{ij+1} < \tau_{i+1},\ j = \overline{1, s_i - 1},\ i = \overline{1, p-1}.$$

Введем обозначения

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O}_{n\times n} \\ \mathbf{D} & -\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \in R^{2n\times 2n},\ \mathbf{A}_* = \mathbf{A}_0 + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \in R^{2n\times 2n},$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{O}_{m\times n} \\ \mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix} \in R^{(m+n)\times 2n},$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0}_n \end{pmatrix} \in R^{2n\times 1},\ \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \in R^{2n\times 1},$$

$$\mathbf{q}^{\mathrm{T}} = -\frac{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_0^2}{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_0\boldsymbol{\gamma}} \in R^{1\times 2n},\ \boldsymbol{\mu}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} - \mathbf{c} \end{pmatrix} \in R^{(m+n)\times 1}.$$

Обозначим через $\mathbf{z}(S, \boldsymbol{\theta}, \alpha|t)$, $t \in T$, траекторию системы

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{cases} \mathbf{A}_0\mathbf{z} + \boldsymbol{\gamma}(-1)^j l_i,\ t \in [t_{ij}, t_{ij+1}[,\ j = \overline{0, s_i},\ i \in P, \\ \mathbf{A}_*\mathbf{z},\ t \in \bigcup\limits_{i=1}^{p} [\tau_i, \tau^i[, \end{cases}$$

$$\mathbf{z}(S, \boldsymbol{\theta}, \alpha\,|\,0) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0(\alpha) \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

$$t_{i0} = \tau^i,\ t_{is_i+1} = \tau_{i+1},\ i \in P,\ \tau^0 = 0,\ \tau_{p+1} = t_*.$$

Введем в рассмотрение $\left(m + n + 2p + \sum_{i=0}^{p} s_i\right)$-вектор-функцию

$$\boldsymbol{\Psi}(S, \boldsymbol{\theta}, \alpha) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{z}(S, \boldsymbol{\theta}, \alpha\,|\,t_*) - \boldsymbol{\mu}(\mathbf{y}) \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}(S, \boldsymbol{\theta}, \alpha\,|\,t_{ij}),\ j \in V_i,\ i \in P \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

где $V_0 = \{1, \ldots, s_0 + 1\}$, $V_i = \{0, \ldots, s_i + 1\}$, $i = \overline{1, p-1}$, $V_p = \{0, \ldots, s_p\}$.

Подчеркнем, что вид вектора $\boldsymbol{\theta}$ и вектор-функции (6), а также их размерности задаются параметрами l_i, s_i, $i \in P$ и p, которые определяются структурой S и считаются известными.

Пусть α_0 — регулярное значение параметра. В работе [10] была сформулирована и доказана следующая теорема, описывающая свойства решений $u_\alpha^0(\cdot)$ задач $OC(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{E}(\alpha_0)$, в окрестности параметра α_0.

Теорема 1. Пусть выполняются предположения 1, 2. Предположим, что задача $OC(\alpha_0)$ имеет оптимальное регулярное управление $u_{\alpha_0}^0(\cdot)$ со структурой

$$S(\alpha_0) = S^0 = \left\{p(\alpha_0) = p^0,\ l_i(\alpha_0) = l_i^0,\right.$$
$$\left. s_i(\alpha_0) = s_i^0,\ i \in P(\alpha_0) = P^0\right\} \qquad (7)$$

и определяющими элементами

$$\boldsymbol{\theta}(\alpha_0) = \boldsymbol{\theta}^0 = (t_{ij}(\alpha_0) = t_{ij}^0,\ j = \overline{1, s_i^0},\ i \in P^0,$$
$$\tau_i(\alpha_0) = \tau_i^0,\ \tau^i(\alpha_0) = \tau^{i0},\ i = \overline{1, p^0};\ \boldsymbol{\varphi}(\alpha_0);\ \mathbf{y}(\alpha_0)). \qquad (8)$$

Тогда при $\alpha \in \mathrm{E}(\alpha_0)$:

1) решения $u_\alpha^0(\cdot)$ задач $OC(\alpha)$ имеют постоянную структуру $S(\alpha) = S^*$:

$$S^* = S(\alpha_0) = \{p^* := p(\alpha_0),\ l_i^* := l_i(\alpha_0),$$
$$s_i^* := s_i(\alpha_0),\ i \in P^* := P(\alpha_0)\};$$

2) существует единственная непрерывно дифференцируемая вектор-функция

$$\boldsymbol{\theta}^*(\alpha) = (t_{ij}(\alpha),\ j = \overline{1, s_i^*},\ i \in P^*,$$
$$\tau_i(\alpha),\ \tau^i(\alpha),\ i = \overline{1, p^*};\ \boldsymbol{\varphi}(\alpha);\ \mathbf{y}(\alpha)), \qquad (9)$$

удовлетворяющая соотношениям

$$\boldsymbol{\Psi}(S^*, \boldsymbol{\theta}^*(\alpha), \alpha) = 0,\ \alpha \in \mathrm{E}(\alpha_0),\ \boldsymbol{\theta}^*(\alpha_0) = \bar{\boldsymbol{\theta}}^*, \qquad (10)$$

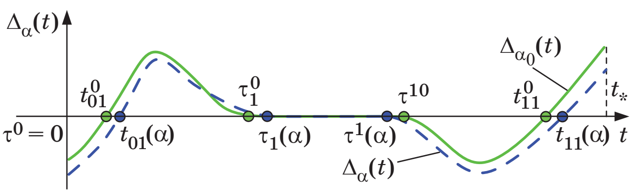
где $\bar{\boldsymbol{\theta}}^* = \boldsymbol{\theta}^0$;

3) оптимальное управление $u_\alpha^0(\cdot)$ задачи $OC(\alpha)$ находится по правилу

$$u_\alpha^0(t) = (-1)^j l_i^*,\ t \in [t_{ij}(\alpha), t_{ij+1}(\alpha)[,$$
$$j = \overline{0, s_i^*},\ i \in P^*,\ u_\alpha^0(t) = \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}(S^*, \boldsymbol{\theta}^*(\alpha), \alpha\,|\,t),$$
$$t \in \bigcup_{i=1}^{p^*} [\tau_i(\alpha), \tau^i(\alpha)[, \qquad (11)$$

где $t_{i0}(\alpha) \equiv \tau^i(\alpha)$, $t_{is_i^*+1}(\alpha) \equiv \tau_{i+1}(\alpha)$, $i \in P^*$, $\tau^0(\alpha) \equiv 0$, $\tau_{p^*+1}(\alpha) \equiv t_*$, а $\mathbf{z}(S^*, \boldsymbol{\theta}^*(\alpha), \alpha|t)$, $t \in T$ — решение системы (5).

В регулярном случае при достаточно малых возмущениях параметра α_0 характер поведения функций $\Delta_\alpha(t)$, $t \in T$, $\alpha \in \mathrm{E}(\alpha_0)$ (рис. 1, пунктирная



■ ***Рис. 1.*** Поведение функции коуправления при возмущении регулярного значения параметра α_0

линия) не меняется по отношению к характеру поведения функции $\Delta_{\alpha_0}(t)$, $t \in T$ (рис. 1, сплошная линия). Задачи $OC(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{E}(\alpha_0)$, имеют ту же структуру, что и задача $OC(\alpha_0)$, но отличные от θ^0 векторы определяющих элементов $\theta(\alpha)$.

Свойства решений возмущенных задач $OC(\alpha)$ в окрестности нерегулярного параметра

Пусть для фиксированного значения параметра α_0 известны структура (7) и определяющие элементы (8) задачи $OC(\alpha_0)$. В данном разделе исследуем свойства решений $u^0_\alpha(\cdot)$ задач $OC(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{E}(\alpha_0)$, в окрестности нерегулярного параметра α_0. Для определенности будем рассматривать только правостороннюю окрестность $\mathrm{E}^{+}(\alpha_0)$ точки α_0. Левосторонняя окрестность исследуется аналогичным образом.

Исследования проводятся при следующих предположениях:

1) при $\alpha = \alpha_0$ нарушается только одно из условий регулярности, приведенных в определении 1, остальные условия регулярности выполняются;

2) при $\alpha = \alpha_0$ для точки $\tilde t \in T$, где нарушаются условия регулярности, справедливы указанные ниже предположения:

если $\tilde t \in [\tau_{i_0}(\alpha), \tau^{i_0}(\alpha)]$, где $1 \le i_0 \le p(\alpha)$, то:

- при $\tilde t \ne \tau_{i_0}(\alpha) \vee \tau^{i_0}(\alpha)$ из $|u^0_\alpha(\tilde t)| = 1$ следует, что $\partial^2 u^0_\alpha(\tilde t)/\partial t^2 \ne 0$;
- при $\tilde t = \tau_{i_0}(\alpha)$ из $|u^0_\alpha(\tau_{i_0}(\alpha)+0)| = 1$ следует, что $\partial u^0_\alpha(\tau_{i_0}(\alpha)+0)/\partial t \ne 0$;
- при $\tilde t = \tau^{i_0}(\alpha)$ из $|u^0_\alpha(\tau^{i_0}(\alpha)-0)| = 1$ следует, что $\partial u^0_\alpha(\tau^{i_0}(\alpha)-0)/\partial t \ne 0$;

если $\tilde t \in [\tau^{i_0}(\alpha), \tau_{i_0+1}(\alpha)]$, где $0 \le i_0 \le p(\alpha)$, то:

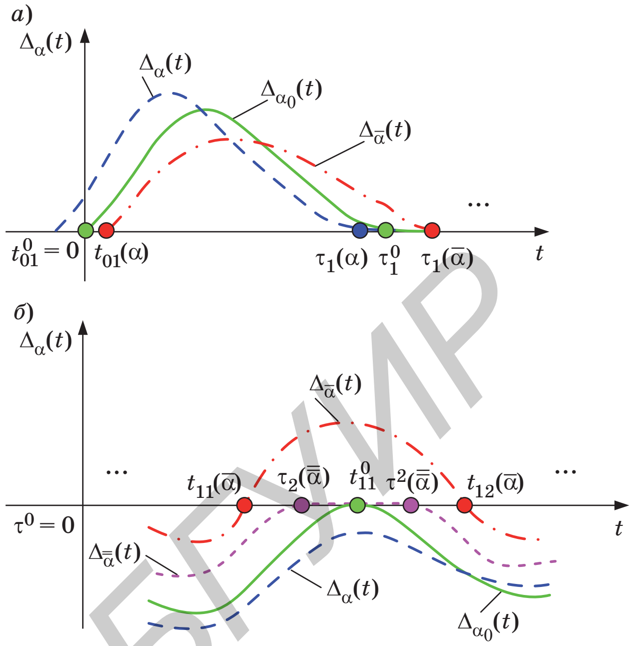
- при $\tilde t \ne 0 \vee t_*$ из $\Delta_\alpha(\tilde t) = 0$, $\partial\Delta_\alpha(\tilde t)/\partial t = 0$ следует, что $\partial^2\Delta_\alpha(\tilde t)/\partial t^2 \ne 0$;
- при $\tilde t = 0 \vee t_*$ из $\Delta_\alpha(\tilde t) = 0$ следует, что $\partial\Delta_\alpha(\tilde t)/\partial t \ne 0$.

Случай нарушения условия регулярности 1

Рассмотрим случай, когда при $\alpha = \alpha_0$ условие регулярности 1 нарушается в начальной точке $\tilde t = t^0_{01} = 0$ временного интервала: $\Delta_{\alpha_0}(0) = 0$ (рис. 2, *а*, сплошная линия). Случай $\Delta_{\alpha_0}(t_*) = 0$ рассматривается аналогично.

При достаточно малых возмущениях параметра α_0 может реализоваться одна из следующих ситуаций.

I. При $\alpha \in \mathrm{E}^{+}(\alpha_0) \backslash \alpha_0$ структура $S(\alpha) = S^{\mathrm{I}}$ задач $OC(\alpha)$ изменится по отношению к структуре S^0 (7) задачи $OC(\alpha_0)$, поскольку граничная точка $\tilde t = t^0_{01} = t_{01}(\alpha_0) = 0$, в которой нарушилось условие регулярности, выйдет за границу интервала



■ *Рис. 2*. Поведение функции коуправления при возмущении нерегулярного значения параметра α_0: *а* — в окрестности точки $t^0_{01} = 0$; *б* — в окрестности точки $\tilde t$

управления, не породив новой точки переключения управления (рис. 2, *а*, пунктирная линия). Новая структура будет иметь следующий вид:

$$S^{\mathrm{I}} = \{p^{\mathrm{I}},\ l^{\mathrm{I}}_i,\ s^{\mathrm{I}}_i,\ i \in P^{\mathrm{I}}\}, \tag{12}$$
$$p^{\mathrm{I}} = p^0,\ P^{\mathrm{I}} = P^0,\ l^{\mathrm{I}}_i = l^0_i,\ i \in P^{\mathrm{I}},$$
$$s^{\mathrm{I}}_0 = s^0_0 - 1,\ \ s^{\mathrm{I}}_i = s^0_i,\ i = \overline{1, p^{\mathrm{I}}}.$$

II. При $\bar\alpha \in \mathrm{E}^{+}(\alpha_0) \diagdown \alpha_0$ структура $S(\bar\alpha) = S^{\mathrm{II}}$ задач $OC(\bar\alpha)$ изменится по отношению к структуре S^0 задачи $OC(\alpha_0)$, поскольку граничная точка $\tilde t = t^0_{01} = 0$, в которой нарушилось условие регулярности, породит новую точку переключения управления — изолированный нуль функции коуправления (рис. 2, *а*, штрихпунктирная линия). Новая структура будет выглядеть следующим образом:

$$S^{\mathrm{II}} = \{p^{\mathrm{II}}, l^{\mathrm{II}}_i, s^{\mathrm{II}}_i, i \in P^{\mathrm{II}}\},$$
$$p^{\mathrm{II}} = p^0,\ P^{\mathrm{II}} = P^0,\ l^{\mathrm{II}}_0 = -l^0_0,\ l^{\mathrm{II}}_i = l^0_i,\ i = \overline{1, p^{\mathrm{II}}},$$
$$s^{\mathrm{II}}_i = s^0_i,\ i \in P^{\mathrm{II}}.$$

Надо определить, какая из ситуаций — I или II — будет иметь место при возмущении параметра α_0. Для этого по имеющейся в данный момент информации, используя момент $\tilde t = 0$ и структуру S^{I} (12), подсчитаем вектор

$$\mathbf{Z} = \left(\frac{\partial \mathbf{z}(S^{\mathrm{I}}, \theta^{\mathrm{I}0}, \alpha_0|\tilde t)}{\partial \theta^{\mathrm{I}}} \frac{d\theta^{\mathrm{I}}(\alpha_0)}{d\alpha} + \frac{\partial \mathbf{z}(S^{\mathrm{I}}, \theta^{\mathrm{I}0}, \alpha_0|\tilde t)}{\partial \alpha} \right). \tag{13}$$

Здесь $\mathbf{z}(S^{\mathrm{I}}, \theta^{\mathrm{I}}, \alpha|t)$ — решение системы (5),

$$\theta^{\mathrm{I}} = (t_{ij},\ j = \overline{1, s_i^{\mathrm{I}}},\ i \in P^{\mathrm{I}},\ \tau_i,\ \tau^i,\ i = \overline{1, p^{\mathrm{I}}};\ \varphi;\ \mathbf{y}),$$

$$\varphi \in R^n,\ \mathbf{y} \in R^m, \qquad (14)$$

вектор-функция

$$\theta^{\mathrm{I}}(\alpha) = \Big(t_{ij}^{\mathrm{I}}(\alpha),\ j = \overline{1, s_i^{\mathrm{I}}},\ i \in P^{\mathrm{I}},$$
$$\tau_i^{\mathrm{I}}(\alpha),\ \tau^{\mathrm{I}i}(\alpha),\ i = \overline{1, p^{\mathrm{I}}};\ \varphi^{\mathrm{I}}(\alpha);\ \mathbf{y}^{\mathrm{I}}(\alpha)\Big) \qquad (15)$$

сформирована с использованием структуры S^{I} и удовлетворяет соотношениям

$$\Psi(S^{\mathrm{I}}, \theta^{\mathrm{I}}(\alpha), \alpha) = 0,\ \ \alpha \in \mathrm{E}(\alpha_0),\ \ \theta^{\mathrm{I}}(\alpha_0 + 0) = \theta^{\mathrm{I}0}, \qquad (16)$$

$$\theta^{\mathrm{I}0} = \Big(t_{0j}^0,\ j = \overline{2, s_0^0},\ t_{ij}^0,\ j = \overline{1, s_i^0},\ i = \overline{1, p^0},$$
$$\tau_i^0,\ \tau^{i0},\ i = \overline{1, p^0};\ \varphi(\alpha_0);\ \mathbf{y}(\alpha_0)\Big)$$

— вектор, построенный по компонентам вектора θ^0 (8) определяющих элементов задачи $OC(\alpha_0)$.

Следующая теорема описывает свойства решений $u_\alpha^0(\cdot)$ задач $OC(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{E}^+(\alpha_0)\backslash\alpha_0$, в окрестности нерегулярного значения параметра α_0.

Теорема 2. Пусть выполняются предположения 1, 2. Предположим, что для задачи $OC(\alpha_0)$ со структурой $S(\alpha_0)$ (7) и определяющими элементами $\theta(\alpha_0)$ (8) нарушается условие регулярности 1: $t_{01}(\alpha_0) = 0$, и число $\nu := u_{\alpha_0}^0(+0)\beta^{\mathrm{T}}\mathbf{Z} \neq 0$. Тогда при $\alpha \in \mathrm{E}^+(\alpha_0)\backslash\alpha_0$:

1) задачи $OC(\alpha)$ имеют постоянную структуру $S(\alpha) = S^*$, которая при $\nu > 0$ имеет вид (случай I)

$$S^* = \{p^* := p^{\mathrm{I}},\ l_i^* := l_i^{\mathrm{I}},\ s_i^* := s_i^{\mathrm{I}},\ i \in P^* := P^{\mathrm{I}}\},$$

а при $\nu < 0$ имеет вид (случай II)

$$S^* = \{p^* := p^{\mathrm{II}},\ l_i^* := l_i^{\mathrm{II}},\ s_i^* := s_i^{\mathrm{II}},\ i \in P^* := P^{\mathrm{II}}\};$$

2) существует единственная непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\theta^*(\alpha)$ (9), удовлетворяющая соотношениям (10), где $\bar{\theta}^* = \theta^{\mathrm{I}0}$ при $\nu > 0$ и $\bar{\theta}^* = \theta^0$ при $\nu < 0$;

3) оптимальное управление $u_\alpha^0(\cdot)$ задачи $OC(\alpha)$ находится по правилу (11).

Для доказательства теоремы в каждом из случаев — I и II — применяется классическая теорема о неявных функциях, поскольку $\Psi(S^*, \bar{\theta}^*, \alpha_0) = 0$, $\det(\partial\Psi(S^*, \bar{\theta}^*, \alpha_0) / \partial\theta^*) \neq 0$, где вектор параметров

$$\theta^* = \Big(t_{ij},\ j = \overline{1, s_i^*},\ i \in P^*,\ \tau_i,\ \tau^i,\ i = \overline{1, p^*};\ \varphi;\ \mathbf{y}\Big),$$

$$\varphi \in R^n,\ \mathbf{y} \in R^m$$

сформирован с использованием структуры S^*.

Случай нарушения условия регулярности 2

Рассмотрим случай, когда при $\alpha = \alpha_0$ условие регулярности 2 нарушается в точке $\tilde{t} = t_{kr}^0 : \Delta_{\alpha_0}(t_{kr}^0) = \partial\Delta_{\alpha_0}(t_{kr}^0) / \partial t = 0$, $t_{kr}^0 \in (\tau^{k0}, \tau_{k+1}^0) \in T$, $r \in \{1, \ldots, s_k^0\}$, $k \in P^0$ (рис. 2, *б*, сплошная линия, $k = r = 1$).

При возмущении α_0 может реализоваться одна из следующих ситуаций.

I. При $\alpha \in \mathrm{E}^+(\alpha_0)\backslash\alpha_0$ структура $S(\alpha) = S^{\mathrm{I}}$ задач $OC(\alpha)$ изменится по отношению к структуре S^0 (7) задачи $OC(\alpha_0)$, поскольку нуль коуправления $\tilde{t} = t_{kr}^0$ не породит новой точки переключения управления (рис. 2, *б*, крупнопунктирная линия). Новая структура будет выглядеть следующим образом:

$$S^{\mathrm{I}} = \{p^{\mathrm{I}},\ l_i^{\mathrm{I}},\ s_i^{\mathrm{I}},\ i \in P^{\mathrm{I}}\}, \qquad (17)$$

$$p^{\mathrm{I}} = p^0,\ P^{\mathrm{I}} = P^0,\ \ l_i^{\mathrm{I}} = l_i^0,\ \ i \in P^{\mathrm{I}},$$

$$s_i^{\mathrm{I}} = s_i^0,\ \ i \in P^{\mathrm{I}} \setminus k,\ \ s_k^{\mathrm{I}} = s_k^0 - 1.$$

II. При $\bar{\alpha} \in \mathrm{E}^+(\alpha_0) \setminus \alpha_0$ структура $S(\bar{\alpha}) = S^{\mathrm{II}}$ задач $OC(\bar{\alpha})$ изменится по отношению к структуре S^0 задачи $OC(\alpha_0)$, поскольку нуль коуправления $\tilde{t} = t_{kr}^0$ породит две новые точки переключения управления — изолированные нули функции коуправления (рис. 2, *б*, штрихпунктирная линия). Новая структура будет выглядеть следующим образом:

$$S^{\mathrm{II}} = \{p^{\mathrm{II}},\ l_i^{\mathrm{II}},\ s_i^{\mathrm{II}},\ i \in P^{\mathrm{II}}\},$$

$$p^{\mathrm{II}} = p^0,\ P^{\mathrm{II}} = P^0,\ \ l_i^{\mathrm{II}} = l_i^0,\ \ i \in P^{\mathrm{II}},$$

$$s_i^{\mathrm{II}} = s_i^0,\ \ i \in P^{\mathrm{I}} \setminus k,\ \ s_k^{\mathrm{II}} = s_k^0 + 1.$$

III. При $\bar{\bar{\alpha}} \in \mathrm{E}^+(\alpha_0) \setminus \alpha_0$ структура $S(\bar{\bar{\alpha}}) = S^{\mathrm{III}}$ задач $OC(\bar{\bar{\alpha}})$ изменится по отношению к структуре S^0 задачи $OC(\alpha_0)$, поскольку нуль коуправления $\tilde{t} = t_{kr}^0$ породит отрезок, на котором функция коуправления обращается тождественно в нуль (рис. 2, *б*, мелкопунктирная линия). Новая структура будет выглядеть следующим образом:

$$S^{\mathrm{III}} = \{p^{\mathrm{III}},\ l_i^{\mathrm{III}},\ s_i^{\mathrm{III}},\ i \in P^{\mathrm{III}}\},$$

$$p^{\mathrm{III}} = p^0 + 1,\ \ P^{\mathrm{III}} = P^0 \cup p^{\mathrm{III}},\ \ l_k^{\mathrm{III}} = l_k^0,$$

$$l_{k+1}^{\mathrm{III}} = u_{\alpha_0}^0(\tilde{t} + 0),\ \ s_k^{\mathrm{III}} = r - 1,\ \ s_{k+1}^{\mathrm{III}} = s_k^0 - r,$$

$$l_i^{\mathrm{III}} = l_i^0,\ \ s_i^{\mathrm{III}} = s_i^0,\ \ i \in \{0, 1, \ldots, k-1\},\ \ l_i^{\mathrm{III}} = l_{i-1}^0,$$

$$s_i^{\mathrm{III}} = s_{i-1}^0,\ \ i \in \{k+2, \ldots, p^{\mathrm{III}}\}.$$

Для того чтобы определить, какая из упомянутых ситуаций будет иметь место, подсчитаем вектор $\mathbf{Z}$ по правилам (13)—(16), используя структуру S^{I} (17), момент $\tilde{t} = t_{kr}^0$ и вектор

$$\theta^{\mathrm{I}0} = \Big(t_{ij}^0,\ j = \overline{1, s_i^0},\ i = \overline{0, k-1},\ t_{kj}^0,$$

$$j \in \{1, \dots, s_k^0\} \setminus r, t_{ij}^0, j = \overline{1, s_i^0}, i = \overline{k+1, p^0},$$

$$\tau_i^0, \tau^{i0}, i = \overline{1, p^0};\ \boldsymbol{\varphi}(\alpha_0);\ \mathbf{y}(\alpha_0)\Big).$$

Обозначим

$$\xi := \frac{|\partial^2 \Delta_{\alpha_0}(\tilde{t}) / \partial t^2|}{2\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{b}} > 0,\ \ \nu := \operatorname{sign}\left(\frac{\partial^2 \Delta_{\alpha_0}(\tilde{t})}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}.$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть выполняются предположения 1, 2. Предположим, что задача $OC(\alpha_0)$ имеет оптимальное нерегулярное управление $u_{\alpha_0}^0(\cdot)$ со структурой $S(\alpha_0)$ (7) и определяющими элементами $\theta(\alpha_0)$ (8), и для нее нарушается условие регулярности 2: $\partial \Delta_{\alpha_0}(t_{kr}^0) / \partial t = 0$, и числа $\nu \neq 0$, $\xi \neq 1$. Тогда при $\alpha \in \mathrm{E}^+(\alpha_0) \setminus \alpha_0$:

1) задачи $OC(\alpha)$ имеют постоянную структуру $S(\alpha) = S^*$, которая:

— при $\nu > 0$ имеет вид (случай I)

$$S^* = \{p^* := p^{\mathrm{I}}, l_i^* := l_i^{\mathrm{I}}, s_i^* := s_i^{\mathrm{I}}, i \in P^* := P^{\mathrm{I}}\};$$

— при $\nu < 0$, $\xi > 1$ имеет вид (случай II)

$$S^* = \{p^* := p^{\mathrm{II}}, l_i^* := l_i^{\mathrm{II}}, s_i^* := s_i^{\mathrm{II}}, i \in P^* := P^{\mathrm{II}}\};$$

— при $\nu < 0$, $0 < \xi < 1$ имеет вид (случай III)

$$S^* = \{p^* := p^{\mathrm{III}}, l_i^* := l_i^{\mathrm{III}}, s_i^* := s_i^{\mathrm{III}}, i \in P^* := P^{\mathrm{III}}\};$$

2) существует единственная непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\theta^*(\alpha)$ (9), удовлетворяющая соотношениям (10), где $\bar{\theta}^* = \theta^{\mathrm{I}0}$ при $\nu > 0$; $\bar{\theta}^* = \theta^{\mathrm{II}0}$ при $\nu < 0$, $\xi > 1$ и $\bar{\theta}^* = \theta^{\mathrm{III}0}$ при $\nu < 0$, $0 < \xi < 1$;

$$\theta^{\mathrm{II}0} = \theta^{\mathrm{II}}(\alpha_0) = \Big(t_{ij}^0, j = \overline{1, s_i^0}, i = \overline{0, k-1}, t_{kj}^0,$$

$$j = \overline{1, r}, t_{kj}^0, j = \overline{r, s_k^0}, t_{ij}^0, j = \overline{1, s_i^0},$$

$$i = \overline{k+1, p^0}, \tau_i^0, \tau^{i0}, i = \overline{1, p^0}; \boldsymbol{\varphi}(\alpha_0); \mathbf{y}(\alpha_0)\Big),$$

$$\theta^{\mathrm{III}0} = \theta^{\mathrm{III}}(\alpha_0) = \Big(t_{ij}^0, j = \overline{1, s_i^0}, i = \overline{0, k-1}, t_{kj}^0,$$

$$j = \overline{1, r-1}, t_{kj}^0, j = \overline{r+1, s_k^0}, t_{ij}^0, j = \overline{1, s_i^0}, i = \overline{k+1, p^0},$$

$$\tau_i^0, \tau^{i0}, i = \overline{1, k}, \tilde{t}, \tilde{t}, \tau_i^0, \tau^{i0}, i = \overline{k+1, p^0};\ \boldsymbol{\varphi}(\alpha_0);\ \mathbf{y}(\alpha_0)\Big);$$

3) оптимальное управление $u_\alpha^0(\cdot)$ задачи $OC(\alpha)$ находится по правилу (11).

В случае I для доказательства существования функции $\theta^*(\alpha)$, удовлетворяющей соотношениям (10) с $\bar{\theta}^* = \theta^{\mathrm{I}0}$, используется классическая теорема о неявных функциях. Неравенство $\nu > 0$ позволяет доказать, что для управления $u_\alpha^0(\cdot)$, построенного согласно (11), выполняются условия принципа максимума.

В случае II матрица Якоби уравнений (10) при $\theta = \theta^{\mathrm{II}0}$ является вырожденной. Для доказательства существования функции $\theta^*(\alpha)$, удовлетворяющей соотношениям (10) с $\bar{\theta}^* = \theta^{\mathrm{II}0}$, в векторе θ^* делается замена переменных $t_{k\,r+1} \to t_{kr} + \Delta\tau$, и в уравнениях (10) равенство $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}(S^*, \theta^*(\alpha)|t_{k\,r+1}) = 0$ заменяется равенством $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{z}(S^*, \theta^*(\alpha)|t_{kr} + \Delta\tau) - \mathbf{z}(S^*, \theta^*(\alpha)|t_{kr}))/\Delta\tau = 0$. Доказывается, что для новой системы уравнений и нового вектора параметров применима теорема о неявных функциях, из которой с учетом сделанных эквивалентных замен следует существование требуемой функции $\theta^*(\alpha)$. Неравенство $\nu < 0$ позволяет доказать, что компоненты $t_{kr}(\alpha)$, $t_{k\,r+1}(\alpha)$ вектор-функции $\theta^*(\alpha)$ удовлетворяют неравенству $t_{kr}(\alpha) < t_{k\,r+1}(\alpha)$. Неравенство $\xi > 1$ позволяет доказать, что вдоль управления $u_\alpha^0(\cdot)$, построенного по правилам (11), выполняются условия принципа максимума.

В случае III схема доказательства теоремы аналогична случаю II. Для доказательства существования функции $\theta^*(\alpha)$, удовлетворяющей соотношениям (10) с $\bar{\theta}^* = \theta^{\mathrm{III}0}$, в векторе θ^* делается замена переменных $\tau^k \to \tau_k + \Delta\tau$, и в уравнениях (10) равенство $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}(S^*, \theta^*(\alpha)|\tau^k) = 0$ заменяется равенством $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{z}(S^*, \theta^*(\alpha)|\tau_k + \Delta\tau) - \mathbf{z}(S^*, \theta^*(\alpha)|\tau_k))/\Delta\tau = 0$. Для новой системы уравнений и нового вектора параметров применима теорема о неявных функциях, из которой с учетом сделанных эквивалентных замен следует существование требуемой функции $\theta^*(\alpha)$. Неравенство $\nu < 0$ позволяет доказать, что компоненты $\tau_k(\alpha)$, $\tau^k(\alpha)$ вектор-функции $\theta^*(\alpha)$ удовлетворяют неравенству $\tau_k(\alpha) < \tau^k(\alpha)$. Неравенство $\xi < 1$ позволяет доказать, что вдоль управления $u_\alpha^0(\cdot)$, построенного по правилам (11), выполняются условия принципа максимума.

Отметим, что в отличие от других случаев нарушения условий регулярности, в рассматриваемом случае существует три альтернативных варианта поведения функции коуправления при возмущении параметра α_0.

Случай нарушения условия регулярности 3.1

Рассмотрим случай, когда при $\alpha = \alpha_0$ условие регулярности 3.1 нарушается в точке $\tilde{t} \in (\tau_k^0, \tau^{k0})$. Для определенности будем считать, что $u_{\alpha_0}^0(\tilde{t}) = 1$ (рис. 3, *а*, *б*, сплошные линии). Случай $u_{\alpha_0}^0(\tilde{t}) = -1$ рассматривается аналогично.

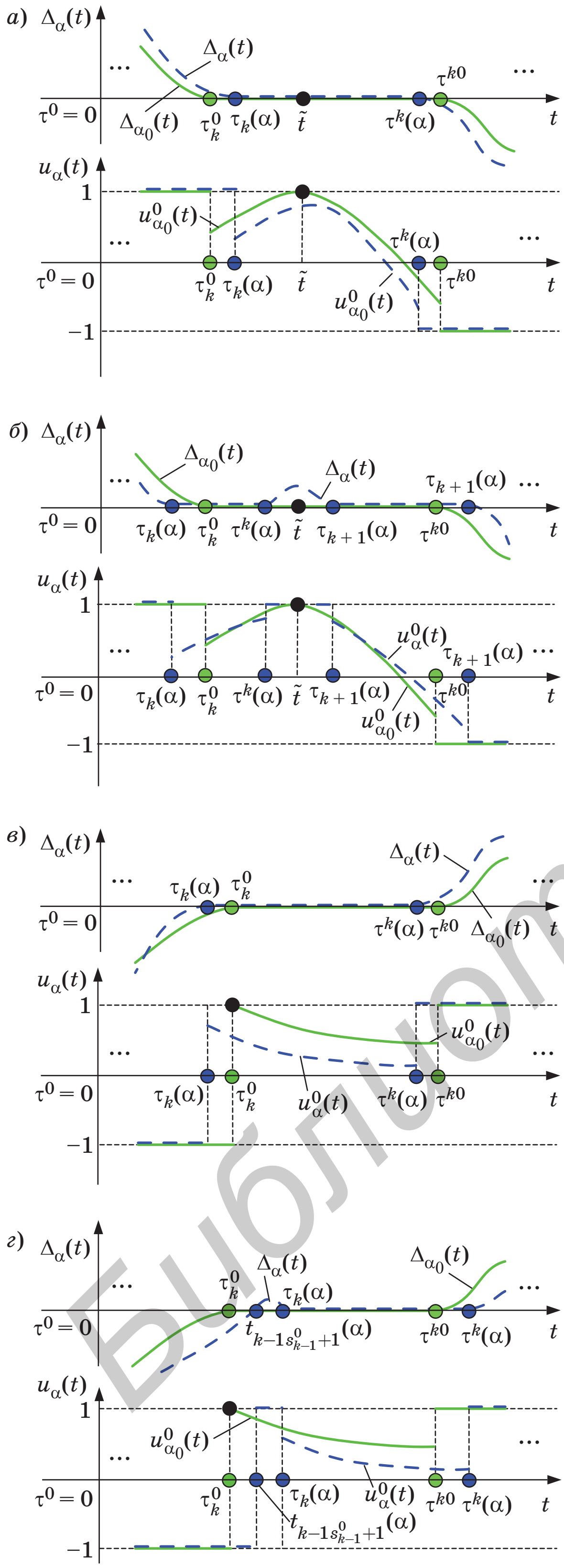
Возможна одна из следующих ситуаций.

I. При $\alpha \in \mathrm{E}^+(\alpha_0)\setminus\alpha_0$ структура $S(\alpha) = S^{\mathrm{I}}$ задач $OC(\alpha)$ не изменится по отношению к структуре S^0 (7) задачи $OC(\alpha_0)$ (рис. 3, *а*, пунктирные линии):

$$S^{\mathrm{I}} = \{p^{\mathrm{I}}, l_i^{\mathrm{I}}, s_i^{\mathrm{I}}, i \in P^{\mathrm{I}}\}, \tag{18}$$

$$p^{\mathrm{I}} = p^0, l_i^{\mathrm{I}} = l_i^0, s_i^{\mathrm{I}} = s_i^0, i \in P^{\mathrm{I}} = P^0.$$

II. При $\alpha \in \mathrm{E}^+(\alpha_0)\setminus\alpha_0$ структура $S(\alpha) = S^{\mathrm{II}}$ задач $OC(\alpha)$ изменится по отношению к структуре S^0



■ ***Рис. 3.*** Поведение функций коуправления и управления при возмущении нерегулярного значения параметра α_0: *а*, *б* — в окрестности точки $\tilde{t}$; *в*, *г* — в окрестности точки τ_k^0

задачи $OC(\alpha_0)$ (рис. 3, *б*, пунктирные линии), поскольку особый участок $[\tau_k^0, \tau^{k0}]$ распадается на два: $[\tau_k(\alpha), \tau^k(\alpha)]$ и $[\tau_{k+1}(\alpha), \tau^{k+1}(\alpha)]$, $\tau_k(\alpha_0+0)=\tau_k^0$, $\tau^{k+1}(\alpha_0+0)=\tau^{k0}$, $\tau^k(\alpha_0+0)=\tau_{k+1}(\alpha_0+0)=\tilde{t}$. Новая структура будет выглядеть следующим образом:

$$S^{\mathrm{II}}=\{p^{\mathrm{II}}, l_i^{\mathrm{II}}, s_i^{\mathrm{II}}, i\in P^{\mathrm{II}}\},$$

$$p^{\mathrm{II}}=p^0,\ P^{\mathrm{II}}=P^0\cup p^{\mathrm{II}},\ l_i^{\mathrm{II}}=l_i^0,\ s_i^{\mathrm{II}}=s_i^0,$$

$$i\in\{0,1,\ldots,k-1\},\ s_k^{\mathrm{II}}=0,\ l_k^{\mathrm{II}}=1,$$

$$l_i^{\mathrm{II}}=l_{i-1}^0,\ s_i^{\mathrm{II}}=s_{i-1}^0,\ i\in\{k+1,\ldots,p^{\mathrm{II}}\}.$$

Определим вектор $\mathbf{Z}$ по правилам (13)—(16), используя структуру S^{I} (18), момент $\tilde{t}\in(\tau_k^0, \tau^{k0})$ и вектор $\theta^{\mathrm{I}0}=\theta^0$.

Как и в предыдущих случаях, приведем теорему, описывающую свойства решений $u_\alpha^0(\cdot)$ задач $OC(\alpha)$, $\alpha\in\mathrm{E}^+(\alpha_0)\backslash\alpha_0$, в окрестности нерегулярного значения параметра α_0.

Теорема 4. Пусть выполняются предположения 1, 2. Предположим, что для задачи $OC(\alpha_0)$ со структурой $S(\alpha_0)$ (7) и определяющими элементами $\theta(\alpha_0)$ (8) нарушается условие регулярности 3.1: $u^0_{\alpha_0}(\tilde{t})=1$, $\tilde{t}\in(\tau_k^0, \tau^{k0})$, и число $\nu := \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}\neq 0$. Тогда при $\alpha\in\mathrm{E}^+(\alpha_0)\backslash\alpha_0$:

1) задачи $OC(\alpha)$ имеют постоянную структуру $S(\alpha)=S^*$, которая при $\nu<0$ имеет вид (случай I)

$$S^*=\{p^*:=p^{\mathrm{I}}, l_i^*:=l_i^{\mathrm{I}}, s_i^*:=s_i^{\mathrm{I}}, i\in P^*:=P^{\mathrm{I}}\},$$

а при $\nu>0$ имеет вид (случай II)

$$S^*=\{p^*:=p^{\mathrm{II}}, l_i^*:=l_i^{\mathrm{II}}, s_i^*:=s_i^{\mathrm{II}}, i\in P^*:=P^{\mathrm{II}}\};$$

2) существует единственная непрерывная вектор-функция $\theta^*(\alpha)$ (9), удовлетворяющая соотношениям (10), где $\bar{\theta}^*=\theta^0$ при $\nu<0$ и $\bar{\theta}^*=\theta^{\mathrm{II}0}$ при $\nu>0$:

$$\theta^{\mathrm{II}0}=\theta^{\mathrm{II}}(\alpha_0)=\Big(t_{ij}^0,\ j=\overline{1, s_i^0},\ i\in P^0,\ \tau_i^0, \tau^{i0},\ i=\overline{1, k-1},$$

$$\tau_k^0, \tilde{t}, \tilde{t}, \tau^{k0}, \tau_i^0, \tau^{i0},\ i=\overline{k+1, p^0};\ \varphi(\alpha_0);\ \mathbf{y}(\alpha_0)\Big),$$

а в случае II — еще и соотношению

$$\tau_{k+1}(\alpha)=\tau^k(\alpha)+\sqrt{\frac{1}{\varsigma}}\sqrt{\alpha-\alpha_0}+O\Big(\sqrt{\alpha-\alpha_0}\Big),$$

$$\varsigma=-\frac{1}{24}\frac{\partial^2 u^0_{\alpha_0}(\tilde{t})}{\partial t^2}\frac{1}{\nu}>0, \qquad (19)$$

при этом в случае I функция $\theta^*(\alpha)$ является дифференцируемой;

3) оптимальное управление $u_\alpha^0(\cdot)$ задачи $OC(\alpha)$ находится по правилу (11).

Случай I теоремы 4 доказывается по аналогии со случаями I теорем 2 и 3.

В рассматриваемой ситуации нарушения условий регулярности в случае II существует много вектор-функций $\theta^*(\alpha)$, удовлетворяющих соотношениям (10), где $\bar{\theta}^* = \theta^{\text{II}0}$. Доказывается, что среди них существует только одна, компоненты которой удовлетворяют условию (19). Показывается, что именно эта вектор-функция является вектором определяющих элементов задач $OC(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{E}^+(\alpha_0)\backslash\alpha_0$. Из разложения (19) видно, что вектор-функция $\theta^*(\alpha)$ является недифференцируемой в точке $\alpha = \alpha_0 + 0$.

Случай нарушения условия регулярности 3.2

Рассмотрим случай, когда при $\alpha = \alpha_0$ условие регулярности 3.2 нарушается в точке $\tilde{t} = \tau_k^0 + 0$ и $u_{\alpha_0}^0(\tilde{t}) = 1$ (рис. 3, *в*, *г*, сплошные линии). Случаи нарушения условия регулярности 3.2 в точке $\tilde{t} = \tau^{0k} - 0$ и (или) $u_{\alpha_0}^0(\tilde{t}) = -1$ рассматриваются аналогично.

Можно показать, что в рассматриваемой ситуации может выполняться лишь равенство $u_{\alpha_0}^0(\tau_k^0 - 0) = -u_{\alpha_0}^0(\tau_k^0 + 0)$, равенство $u_{\alpha_0}^0(\tau_k^0 - 0) = u_{\alpha_0}^0(\tau_k^0 + 0)$ не может иметь места.

При достаточно малых возмущениях параметра α_0 возможна одна из следующих ситуаций.

I. При $\alpha \in \mathrm{E}^+(\alpha_0)\backslash\alpha_0$ структура $S(\alpha) = S^{\text{I}}$ задач $OC(\alpha)$ не изменится по отношению к структуре S^0 (7) задачи $OC(\alpha_0)$ (рис. 3, *в*, пунктирные линии):

$$S^{\text{I}} = \{p^{\text{I}}, l_i^{\text{I}}, s_i^{\text{I}}, i \in P^{\text{I}}\}, \qquad (20)$$

$$p^{\text{I}} = p^0, l_i^{\text{I}} = l_i^0, s_i^{\text{I}} = s_i^0, i \in P^{\text{I}} = P^0.$$

II. При $\alpha \in \mathrm{E}^+(\alpha_0)\backslash\alpha_0$ структура $S(\alpha) = S^{\text{II}}$ задач $OC(\alpha)$ изменится по отношению к структуре S^0 задачи $OC(\alpha_0)$, поскольку точка $\tilde{t} = \tau_k^0$ породит новую точку переключения управления $t_{k-1\, s_{k-1}^0+1}(\alpha) \in \left(\tau^{k-1}(\alpha), \tau_k(\alpha)\right)$ — изолированный нуль функции коуправления (рис. 3, *г*, пунктирные линии). Новая структура будет выглядеть следующим образом:

$$S^{\text{II}} = \{p^{\text{II}}, l_i^{\text{II}}, s_i^{\text{II}}, i \in P^{\text{II}}\},$$

$$p^{\text{II}} = p^0, P^{\text{II}} = P^0,\ l_i^{\text{II}} = l_i^0, i \in P^{\text{II}},$$

$$s_i^{\text{II}} = s_i^0, i \in P^{\text{II}} \setminus \{\tilde{i} - 1\},\ s_{\tilde{i}-1}^{\text{II}} = s_{\tilde{i}-1}^0 + 1.$$

Для того чтобы определить, какая из ситуаций будет иметь место при возмущении параметра, подсчитаем вектор $\mathbf{Z}$ по правилам (13)—(16), используя структуру S^{I} (20), момент $\tilde{t} = \tau_k^0 + 0$ и вектор $\theta^{\text{I}0} = \theta^0$. Доказана теорема 4.

Теорема 5. Пусть выполняются предположения 1, 2. Предположим, что для задачи $OC(\alpha_0)$ со структурой $S(\alpha_0)$ (7) и определяющими элементами $\theta(\alpha_0)$ (8) нарушается условие регулярности 3.2: $u_{\alpha_0}^0(\tau_k^0 + 0) = 1$, и число $\nu := \mathbf{q}^{\text{T}}\mathbf{Z} \neq 0$. Тогда при $\alpha \in \mathrm{E}^+(\alpha_0)\backslash\alpha_0$:

1) задачи $OC(\alpha)$ имеют постоянную структуру $S(\alpha) = S^*$, которая при $\nu < 0$ имеет вид (случай I)

$$S^* = \{p^* := p^{\text{I}}, l_i^* := l_i^{\text{I}}, s_i^* := s_i^{\text{I}}, i \in P^* := P^{\text{I}}\},$$

а при $\nu > 0$ имеет вид (случай II)

$$S^* = \{p^* := p^{\text{II}}, l_i^* := l_i^{\text{II}}, s_i^* := s_i^{\text{II}}, i \in P^* := P^{\text{II}}\};$$

2) существует непрерывно дифференцируемая (в случае I — единственная) вектор-функция $\theta^*(\alpha)$ (9), удовлетворяющая соотношениям (10), где $\bar{\theta}^* = \theta^0$ при $\nu < 0$ и $\bar{\theta}^* = \theta^{\text{II}0}$ при $\nu > 0$:

$$\theta^{\text{II}0} = \theta^{\text{II}}(\alpha_0) = \Big(t_{ij}^0,\ j = \overline{1, s_i^0},\ i = \overline{0, k-1},\ \tau_k^0,\ t_{ij}^0,$$

$$j = \overline{1, s_i^0},\ i = \overline{k, p^0},\ \tau_i^0, \tau^{i0},\ i = \overline{1, p^0};\ \boldsymbol{\varphi}(\alpha_0);\ \mathbf{y}(\alpha_0)\Big);$$

3) оптимальное управление $u_\alpha^0(\cdot)$ задачи $OC(\alpha)$ находится по правилу (11).

Схема доказательства теоремы 5 аналогична схеме доказательства теоремы 4. Здесь также в случае II существует много вектор-функций $\theta^*(\alpha)$, удовлетворяющих соотношениям (10), где $\bar{\theta}^* = \theta^{\text{II}0}$, но только одна из них удовлетворяет условию $t_{k-1\, s_{k-1}^0+1}(\alpha) < \tau_k(\alpha)$, и именно эта вектор-функция является вектором определяющих элементов задач $OC(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{E}^+(\alpha_0)\backslash\alpha_0$.

Отметим, что в каждом случае нерегулярности число ν (вектор $\mathbf{Z}$), а также число ξ в случае нерегулярности 2 можно найти, не решая возмущенные задачи, а используя только известное решение невозмущенной задачи и вектор $d\mathbf{x}_0(\alpha_0 + 0)/d\alpha$.

Приведенные в работе теоремы дают возможность исследовать зависимость решений задачи (1) от значений весового коэффициента α, выступающего в роли параметра. Теоремы предоставляют полную информацию о поведении решений в окрестности нерегулярного значения параметра и позволяют описать их дифференциальные свойства, а в случае отсутствия дифференцируемости дают асимптотические разложения. Дифференциальные свойства и асимптотические разложения, в свою очередь, позволяют оценить изменения в решениях при малых вариациях параметра α.

По аналогии с работой [10] на основе теорем 1–5 можно сформулировать алгоритм, позволяющий быстро строить решения возмущенных задач (1) для всех возможных значений параметра α при условии, что известно решение невозмущенной задачи.

Заключение

В работе рассмотрена линейно-квадратичная задача оптимального управления с особыми участками. Исследована зависимость решения задачи от нерегулярного значения параметра. Получены правила, позволяющие определить структуру решения возмущенной задачи при известном решении невозмущенной задачи.

Литература

1. **Malanowski K.** Solutions Differentiability of Parametric Optimal Control for Elliptic Equations // 20th Conf. on System Modelling and Optimization, July 23–27, 2001, Trier, Germany. P. 271–285.
2. **Felgenhauer U.** Lipschitz stability of broken extremals in bang-bang control problems // Lecture Notes in Computer Science. 2008. P. 317–325.
3. **Banks H. T., Dediu S., Nguyen H. K.** Sensitivity of Dynamical Systems to Parameters in a Convex Subset of a Topological Vector Space // Mathematical Biosciences and Engineering. 2007. Vol. 4. N 3. P. 403–430.
4. **Izmailov A. F.** Solution sensitivity for Karush-Kuhn-Tucker systems with non-unique Lagrange multipliers // Optimization. 2010. Vol. 59. Iss. 5. P. 747–775.
5. **Понтрягин Л. С.** и др. Математическая теория оптимальных процессов / Под общ. ред. Н. Х. Розова и др. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
6. **Ли Э. Б., Маркус Л. М.** Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972. – 576 с.
7. **Костюкова О. И., Курдина М. А.** Исследование решений параметрических задач оптимального управления с особыми участками // Computer Modelling and New Technologies. 2006. Vol. 10. N 2. P. 57–66.
8. **Malanowski K., Maurer H.** Sensitivity analysis of optimal control problems subject to higher order state constraints // Annals of Operations Research. 2001. Vol. 101 (Operation with Perturbations II). P. 43–73.
9. **Борисов В. Ф., Зеликин М. И.** Режимы с учащающимися переключениями в задаче оптимального по быстродействию управления роботом // Прикладная математика и механика. 1988. Т. 52. № 6. С. 934–946.
10. **Костюкова О. И.** Параметрическая выпуклая задача оптимального управления линейной системой // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 200–213.