DOI: 10.15643/libartrus-2016.2.3

Переусложненность современной математики: философско-методологический анализ

© Н. В. Михайлова

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Беларусь, 220013 г. Минск, ул. Петруся Бровки, 6.

Email: michailova_mshrc@mail.ru

В статье анализируются и выявляются новые философские аспекты в проблеме обоснования современной математики, согласно которым к концу прошлого века точнейшая из наук испытала новые потрясения, связанные с кризисом переусложненности математических теорий. В контексте обоснования математики, философский вывод состоит в том, что с методологической точки зрения, для общего вывода о том, развивается современная математика или нет, как раз отсутствие кризиса должно оцениваться более негативно, чем ее слишком длительное беспроблемное состояние. Свершившимся фактом стало то, что одним из самых серьезных революционных технических изобретений прошедшего века, оказавшим огромное влияние на математику, можно считать компьютер. В таком развитии прогресса современной математики, точнее, в ее инструментальных технологиях выявляются новые философские проблемы – это роль компьютеров и новые стандарты математического мышления. Кроме того, с развитием современной математики приходится наблюдать появление все более сложных и объемных доказательств, теряющих свое неоспоримое методологическое преимущество – обозримость, и, следовательно, убедительность. В рамках философии математики эта проблема пока еще не обсуждалась, возможно, потому, что по этой теме не высказались ведущие математики. После этого мы вправе ожидать методологически важного периода уточнения «деталей», который может придать самому процессу обоснования математики философскую завершенность, так как кризис переусложненности в математике – это не «системный кризис», несущий потенциальную опасность разрушения всего математического знания.

Ключевые слова: *обоснование математики, кризис переусложненности, компьютерное доказательство, философия математики, уточнение деталей, прогресс в развитии математики.*

1. Введение

Современные философские взгляды на источники математического знания в контексте математического познания, опирающегося на методологически сложное онтологическое единство знаковых конструкций, вполне естественно обусловили плюралистические, на первый взгляд, несовместимые точки зрения на будущее математики. В связи с этим, как отмечает философ математики В. Я. Перминов: «Вопрос о возможности полного обоснования математики остается до сих пор нерешенным и большая доля неопределенности идет здесь от неопределенности философских установок» [1, с. 443]. Актуальность проблемы обоснования математических теорий определяется внутридисциплинарными факторами, прежде всего необходимостью осмысления механизмов, обеспечивающих целостность математического знания в условиях нарастающего разнообразия путей его приращения, например, в области компьютерной математики. Практическая востребованность такого рода философского анализа обусловлена значимостью методологического обеспечения современных междисциплинарных исследований, включая совершенствование используемого в них математического аппарата.

В главе «Куда идет математика?» хорошо известной и популярной монографии «Математика. Утрата определенности» американский математик Морис Клайн писал: «Прогресс математики представляет собой цепочку великих интуитивных озарений, впоследствии получавших обоснования, которые возникают не за один прием, а путем последовательных поправок, долженствующих исправить различного рода ошибки и упущения, вводимых до тех пор, пока доказательство не достигнет приемлемого для своего времени уровня строгости» [2, с. 540]. Примем это высказывание в качестве тезиса в необходимую защиту строгости в математике. Известно, что тезис и антитезис обладают, в пределах «философских точек отсчета», относительной равнозначностью. С точки зрения полноценной аргументации, есть смысл доводить каждую философско-математическую позицию до максимально выраженной. В качестве антитезиса можно сослаться на столь же убедительное мнение профессиональных математиков, согласно которому «строгомания» постепенно превращается веру, в которой есть элементы «мифологии», поскольку, кто читает эти доказательства, если они достаточно сложны.

Можно говорить о наличии кризиса сообщества математиков в реализации их подходов к науке, а также с точки зрения проблем философии математического образования. Слово «кризис», что в переводе с греческого означает «переломный момент», можно интерпретировать как неустойчивое положение. Но, есть ли кризис математики как науки? Может быть, кризиса вовсе нет, а хорошие работы в наиболее перспективных областях современной математики стали делать математики-исследователи, методологически ориентированные на другие подходы, например, выходцы из компьютерных наук? Эти философско-методологические вопросы непосредственно связаны, прежде всего, с проблемой обоснования современной математики.

2. Сущность кризиса переусложненности математики

В связи с этими проблемами обратим внимание на интересную философскую работу начала XXI века английского математика Брайана Дэвиса со знакомым названием «Куда идет математика?». В ней выявляются новые философские аспекты в проблеме обоснования современной математики, согласно которым к концу прошлого века точнейшая из наук испытала потрясения, способные принципиально изменить характер полученных в ней результатов. Напомним, что логические прозрения Курта Геделя привели в 30-е годы XX века к первому кризису обоснования математики прошлого века, связанному с программой формализма. Например, известный математик Герман Вейль писал об открытии Геделя как о кризисе, который «постоянно подтачивал энтузиазм и решимость», с которой он занимался своими исследованиями. Прослеживая эволюцию математики и математического мышления на протяжении прошлого века, можно выявить еще одну важную философско-методологическую проблему обоснования современной математики, связанную с усложняющейся «алгебраической формализацией» современного языка математики. Это по существу тоже проявление кризиса, ведущего к определенной усложненности функционирования абстрактной математики. Мнение об определенных кризисных тенденциях или методологических проблемах развития математики разделяют профессиональные математики.

Так, следуя анализу Брайана Дэвиса, начиная с 70-х годов XX века, в современной математике произошли еще два кризиса, столь же непредсказуемые, как и кризис, вызванный работой Геделя. «Оба они, – считает Дэвис, – связаны с проблемой переусложненности: доказательства стали настолько длинными и сложными, что ни один ученый не взял бы на себя смелость однозначно подтвердить или оспорить их правильность» [3, с. 1351]. В литературе по философии математики эта проблема пока еще не обсуждалась, возможно потому, что по этой теме не высказались ведущие математики. Второй кризис относится к математическим доказательствам, методологически проводимым с использованием компьютерных технологий, в правомерности которых некоторые выдающиеся математики сомневались. Соответствующая философская проблема формулируется следующим образом: можно ли считать «математически легитимным» такое доказательство, которое выполнено на компьютере? Общепризнано, что одним из самых серьезных революционных технических изобретений прошедшего века, оказавшим огромное влияние на математику, можно считать компьютер. Поэтому в таком развитии прогресса математики, точнее, в новых инструментальных технологиях основные проблемы – это компьютеры и математическое мышление. Если философски акцентировать эти мировоззренчески значимые проблемы, то по существу они сводятся к новой философско-методологической проблеме «доверия к компьютерам». Появление мощных компьютеров не только изменило лицо всей цивилизации, но и породило сомнение в надежной методологической обоснованности машинных способов доказательства математических теорем, поскольку объемы вычислений и затрат времени некоторых математических утверждений стали превышать человеческие возможности.

В частности, речь идет, например, об хорошо известном доказательстве теоремы четырех красок, выполненном с помощью компьютерной программы К. Аппелем и В. Хакеном. Заметим, что непонятно также, почему столь существенна математическая проверка, выполненная человеком, ведь главное – что сделано. В прошлом проверку осуществляли математики, в частности, потому что не было другой альтернативы. С одной стороны, разнообразие подходов к обоснованию математики можно аргументировать тем, что современная математика изучает такие конструкции, отношение которых к реальному миру, по меньшей мере, довольно проблематично. Даже в тех работах по теоретической и прикладной математике, где, используя терминологию, взятую из реальности, доказывают математически строгие теоремы о чем-то внешне похожем на реальность, на самом деле от реальности «бесконечно далеки». С другой стороны, есть определенная опасность того, что математика может быть в итоге низведена к своеобразной интеллектуальной игре, происходящей в некотором специфическом «искусственном мире». Здесь необходимо сослаться на мнение специалиста в этой области А. Н. Кочергина: «Убедительность доказательства – это свидетельство понимания математики как человеческой деятельности. Обозримость же – это возможности обозреть (проверить) доказательство во всей его полноте. Обозримость конкретизирует убедительность, связывая процесс доказательства с его субъектом» [4, с. 67]. Рассматривая в контексте постнеклассической математики философские аспекты критериев убедительности компьютерного доказательства, следует уточнить само понятие «компьютерное доказательство», разделяя «инструмент», позволяющий осуществить доказательство, относя к нему программу, а также компьютер, и полученный с помощью этого инструмента «результат доказательства», к которому относится текст доказательства.

Компьютерное доказательство можно представить в виде триады: «программа – компьютер – результат». Философский анализ выявляет причины, которые не позволяют считать любое компьютерное доказательство убедительным, несмотря на веру в то, что оно является идеалом формального доказательства. Во-первых, эта вера основывается на надежности работы современного компьютера, в работе которого случаются сбои и который может содержать ошибки в программном обеспечении. Во-вторых, хотя компьютерная программа формального доказательства пишется в соответствии с законами формальной логики, в нее тоже могут вкрасться ошибки. Следует специально подчеркнуть, что компьютерные доказательства применяются как для получения новых результатов, так и для численной проверки уже сделанных теоретических доказательств. Но при использовании компьютерных доказательств его аргументация уже не подчиняется традиционным рациональным критериям. Кроме того, как утверждает философ математики В. В. Целищев: «Ясно, что эпистемические характеристики компьютерных доказательств сильно отличаются от характеристик обычного человеческого доказательства, заключающегося в постижении математической необходимости» [5, с. 61]. Доказанные с помощью компьютера математические теоремы по существу включают иногда такую комбинаторную сложность, которая практически не имеет никакого отношения к тому, как на самом деле реально мыслит человек. Поэтому философский вопрос об убедительности методологии компьютерных доказательств математических утверждений в равной мере соотносится с по-прежнему актуальным вопросом об убедительности, условно говоря, «ручного доказательства», сделанного самим математиком.

Если рассматривать математику как созидательный процесс, то ее можно уподобить «архитектуре», как это делала группа Бурбаки. Тогда ее кризисы можно интерпретировать как кризисы человеческой мысли, когда архитекторы науки осознали, что невозможно построить многокилометровое сооружение и поэтому нет смысла обсуждать, какими свойствами устойчивости оно бы обладало. Но нельзя и абсолютизировать эту ситуацию, так как вычислительная математика решает пока только те задачи, которые может решить, а не те, решение которых, в первую очередь, требуется. В результате кризис современной вычислительной математики может углубиться, что вызвано ее неспособностью решать большой объем текущих актуальных задач, необходимых для конкретных приложений. Безусловно, сама констатация кризиса и даже выявление его причин проблемы не решает, но в контексте единства математики, в идеологии компьютерной математики, так или иначе, находит применение многое из уже имеющегося аппарата классической и неклассической математики. По поводу второго кризиса, связанного с применением компьютера в доказательстве теорем, можно сказать, что никакой ясности в эту проблему внести пока не удалось, поскольку нет еще реальных компьютерных технологий доказательства корректности компьютерных программ. По поводу третьего кризиса, относящегося к возрастанию сложности математических доказательств, с точки зрения обоснования математики можно сказать, что он должен быть воспринят как очередной вызов к обоснованию надежности математических рассуждений. Поэтому найти на него адекватный философско-методологический ответ вряд ли будет возможно без придания философии математики нового концептуального импульса.

Третий кризис переусложненности в определенном смысле для математиков наиболее серьезный из всех, так как связан с излишней сложностью современных математических доказательств, длина которых стала зачастую немыслимой. Как подтверждает В. А. Успенский: «Современная математика имеет сложное строение, постепенно становящееся необозримым.

Доказательства некоторых теорем оказываются столь громоздкими, что проверка их требует чрезвычайно большого желания, терпения и времени. О владении специальными знаниями нечего и говорить: не только придумывание, но и проверка доказательств ряда теорем доступна лишь узкому кругу посвященных» [6, с. 449]. Например, доказательства некоторых знаменитых математических проблем, благодаря традиционной программе аргументации, признающей лишь исключительно строгие теоремы, напрямую связаны с проблемой обозримости доказательства. Рецензенты, анализирующие правильность полученных доказательств, все чаще встречаются с математическими статьями, в которых аргументы образуют настолько протяженную цепь доказательств, что они оказываются не в состоянии проследить за всеми ее существенными деталями. Важнейшим фактором, влияющим на убедительность математического доказательства, является его обозримость, то есть возможность его мысленного схватывания целиком. Но с бурным развитием современной математики и появлением все более сложных и длинных доказательств, они теряют свое методологическое достоинство – свойство убедительности.

Почему математическое доказательство в усложненных областях современной математики должно быть обозримым? Оно должно быть обозримым, если мы хотим использовать его как основание для согласия в дальнейших суждениях. Однако, говоря о необозримых процедурах, даже специалисты оставляют в стороне ряд вопросов методологического характера о связи убедительности и обозримости, относящихся к трудностям практической осуществимости необозримых доказательств. Следует учесть также следующее философское возражение: обозримость математического доказательства, как репрезентация понимания математического рассуждения, вообще говоря, не только не гарантирует его убедительности, но даже ничего методологически существенно нового не говорит об убедительности переусложненного доказательства, так как последнее не является «самодостаточным фактором» и, в частности, зависит от выбранного направления в обосновании математики. Как утверждает А. Н. Кочергин: «Если убедительность – это в известной мере осуществимость доказательства как целого, завершенного, но в котором особо выделены исходный и заключающий его пункты, то обозримость – это осуществимость доказательства в каждом пункте сцепления доказательства без того, чтобы выявить противоречия в целостном, нарушить осуществимость доказательства как целого» [7, с. 75]. Двойственность этих важных понятий проявляется в том, что убедительность отчасти отражает «обозримость целого», а обозримость можно в определенном смысле интерпретировать как «убедительность частей», составляющих математическое доказательство.

Заметим, что решение сложной математической проблемы или задачи, сформулированной в нескольких предложениях, может занимать тысячи страниц математического текста. Как в таком случае оно может быть полностью понято и осмыслено отдельно взятым профессиональным математиком, пусть даже самой высочайшей квалификации? Открытие конструктивных путей выхода из упомянутых кризисов означает, что, например, проблеме обоснования математики изначально присуща не только разрушительная тенденция развития, но также созидательная тенденция, без которой невозможно объяснить возникновение нового. Выход из кризисного этапа можно считать конструктивным, если, например, система обоснования математики приобретает качественно новое философское состояние с более высоким методологическим уровнем организации, чем до кризиса. Слово «кризис» принято понимать, как нечто отрицательное, свидетельствующее о слабости какой-то позиции. Например, как поясняет математик А. А. Зыков, «…философствующие математики… при всем разнообразии их идейных позиций, в основном сходились на том, что выход из кризиса надо искать в наложении ограничений на математическое творчество… и на использование логики в математических доказательствах…» [8, с. 108]. Но, если у профессиональных математиков спросить являются ли выявленные самими математиками и философами математики кризисы показателем «нездорового состояния» математического знания, то ответ, скорее всего, будет – нет, поскольку любые кризисы являются вполне закономерной особенностью развития математического знания в контексте проблемы обоснования математики.

Например, в случае доказательства Великой теоремы Ферма, представленной английским математиком Эндрю Уайлсом, менее десятой части специалистов по теории чисел полностью понимали его рассуждения. Несмотря на лаконичность представленного текста, содержавшего около 200 страниц, для его тщательного анализа во всех деталях понадобилось бы уже не менее 1000 страниц, тем не менее, все сочли, что доказательство все же правильное. Те математики, которые не смогли до конца понять все тонкости доказательства, приняли его потому, что доказательство признали другие, а именно, те специалисты, которые все поняли, шаг за шагом проследили весь ход доказательства и проверили каждую деталь. Еще более ярким примером может служить доказательство классификации простых конечных групп, полученное в начале 80-х годов XX столетия, которое общим объемом занимает примерно 15 тысяч журнальных страниц. Простые группы, то есть группы с тривиальными нормальными подгруппами, представляют особый математический интерес, так как являются «строительными блоками» для всех конечных групп. В результате многолетних усилий была создана технически сложная классификационная теория. Все конечные простые группы описаны и классифицированы. Эта классификация была проделана объединенными усилиями более ста математиков и опубликована на страницах различных научных журналов примерно в 500 статьях. Следует отметить, что математики до сих пор работают над упрощением этого необозримого доказательства, надеясь прояснить методологические вопросы, касающиеся простых групп.

Американский математик Дэниел Горенстейн, сыгравший решающую роль в завершении доказательства этой грандиозной теоремы, разрабатывает классификационное доказательство второго поколения. По этому поводу он сказал: «Если наша работа увенчается успехом, то доказательство второго поколения составит лишь одну пятую первого и приобретет во столько же раз большую идейную ясность» [9, с. 74]. Однако по любым математическим стандартам доказательство в 3000 страниц все равно будет слишком длинным и необозримым. Заметим, что хотя применение этой классификации за пределами математики пока еще не столь значительно, в современной математике этот результат уже нашел применения в разных областях. Это один из наиболее ярких примеров современной проблемы переусложненности математических доказательств без использования компьютера. Хотя он с большим трудом выдерживает идеал локальной обозримости, у него есть проблемы в связи с другими критериями убедительности, а именно, с проблемой понимания и простотой. Кроме того, при чрезмерном возрастании объема доказательства расплывается представление о самом доказательстве. Возрастающая сложность современной науки приводит к определенной привлекательности системного анализа внутренних проблем математических теорий по сравнению с традиционными задачами, предлагаемыми естественными науками. Но пока новые идеи обоснования математики не вышли из стадии гипотезы, хотя сам ход эволюции современного математического знания не дает оснований полагать, что ситуация не изменится по мере его развития.

3. Заключение

Кризис в современной математике – это не «системный кризис», который несет потенциальную опасность разрушения всего математического знания. Но, даже ощущая этот кризис, во-первых, нельзя априори поставить под сомнение математическую деятельность в новых областях математики, а во-вторых, системный подход явился одним из тех методологических направлений современной философии науки, становление которого, было связано с преодолением кризиса, охватившего все научное познание на протяжении XX века. Что касается конкретных современных математических теорий, то как справедливо отмечает философ математики Л. Б. Султанова: «В целом же вся рационализация по отношению к одному конкретному доказательству представляет собой мыслительный творческий процесс, который можно охарактеризовать как многослойный. Таким образом, можно утверждать, что математическое обоснование как одна из главных процедур математического познания, обладает свойством многослойности» [10, с. 248]. Можно также предположить, что преодоление кризиса в математике гипотетически возможно за счет синтеза философских направлений обоснования современной математики. Однако при этом возникают философские вопросы о пределах синтеза и о научной результативности совместимости этих направлений.

Поэтому необходимо выработать целостный взгляд на проблему обоснования в математике на основе философско-методологического синтеза. Но решающее слово по поводу кризисов переусложненности математики должны сказать сами профессиональные математики, после чего может наступить методологически важный период уточнения деталей, придающей самому процессу обоснования математики философскую завершенность. С методологической точки зрения для общей оценки того, развивается ли математика или не развивается, как раз отсутствие кризисов является более подозрительным, чем ее слишком длительное «благополучное состояние».

Поскольку математика продолжает развиваться, и ее результаты по-прежнему имеют широчайшее применения в науке и реализуются на практике, то доверие к ним не было подорвано. Это способствовало появлению новых позитивных оценок уже свершившихся негативных фактов в проблеме обоснования, например, знаменитого теоретико-множественного кризиса в математике. Как считает английский математик Ян Стюарт, сделавший прогноз будущего математической науки до 2050 года: «Критерием здесь должно являться одно – надежность результатов. До тех пор пока соблюдается это условие, вычисления, произведенные машиной, будут столь же убедительны, что и произведенные человеком» [11, с. 43]. В конечном итоге это может привести к самому значительному прогрессу в развитии математики, в результате которого математика освобождается от ограничений связи с реальными моделями. Кризис в современной математике также показывает, что процесс математического познания не может быть завершен.

Литература

1. Перминов В. Я. Метафизика и основания математики // *Метафизика. Век XXI. Альманах.* М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, **2011.** Вып. 4.: Метафизика и математика. С. 441–461.
2. Клайн М. *Математика. Утрата определенности. Изд. 2-е.* М.: РИМИС, **2007.** 640 с.
3. Davies B. Whither mathematics? // *Notices of the American Mathematical Society.* **2005.** Vol. 52. No. 11. P. 1350–1356.
4. Кочергин А. Н. Математика и искусственный интеллект // *Проблемы онто-гносеологического обоснования математических и естественных наук.* Курск: КГУ, **2009.** №2. С. 60–69.

5. Целищев В. В. Убедительность доказательства и рациональность мышления // *Философия науки.* **2006.** №3. С. 49–64.
6. Успенский В. А. *Апология математики: сборник статей.* СПб.: Амфора, **2011.** 554 с.
7. Кочергин А. Н. Машинное доказательство теорем как нетрадиционная исследовательская программа в математике // *Исследовательские программы в современной науке.* Новосибирск: Наука, **1987.** С. 70–89.
8. Зыков А. А. *Логико-философское введение в высшую математику.* Одесса: Астропринт, **2008.** 120 с.
9. Горенстейн Д. Грандиозная теорема // *В мире науки.* **1986.** №2. С. 62–74.
10. Султанова Л. Б. Интуиция и эвристика в математике // *Российский гуманитарный журнал.* **2013.** Т. 2. №3. С. 237–250.
11. Стюарт Я. Математика 2050 года // *Будущее науки в XXI веке. Следующие пятьдесят лет.* М.: АСТ, **2011.** С. 37–46.

Поступила в редакцию 23.01.2016 г.

DOI: 10.15643/libartrus-2016.2.3

Philosophical and methodological crisis of excessive complexity of contemporary mathematical theories

© N. V. Mikhailova

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
6 P. Browka St., 220013 Minsk, Belarus.

Email: michailova_mshrc@mail.ru

The paper is devoted to the analysis and identification of new philosophical aspects of the problem of justification of modern mathematics according to which to the end of the 20th century the most exact of sciences had experienced new shocks associated with the crisis of excessive complexity of the mathematical theories. In the context of justification of mathematics philosophical conclusion consists in the fact that from a methodological point of view for general assessment of whether mathematics is developed or not just the lack of crises is more negative phenomenon than its too long trouble-free state. Accomplished fact is that a computer can be regarded as one of the serious revolutionary technological inventions of the last century, which has had a huge influence on mathematics. In this development of progress of contemporary mathematics, more precisely, in its instrumental technologies the new philosophical problems are revealed – this is the role of computers and the new standards of mathematical thinking. In addition, with the development of contemporary mathematics and the emergence of increasingly complicated and long proofs, they lose their methodological advantage – the property of visibility and convincingness. Within the philosophy of mathematics this problem has not been discussed yet, possibly because the leading mathematicians haven't expressed their opinions on the subject. After that, we can wait for a methodologically important period clarifying details, which can make the process itself foundations of mathematics philosophical consummation as the crisis complexity; in mathematics it is not a "systemic crisis" carrying the potential danger of the destruction of all mathematical knowledge.

Keywords: *justification of mathematics, crisis of excessive complexity, computer proof, philosophy of mathematics, clarifying details, progress in the development of mathematics.*

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at edit@libartrus.com if you need translation of the article.

Please, cite the article: Mikhailova N. V. Philosophical and methodological crisis of excessive complexityof contemporary mathematical theories // *Liberal Arts in Russia.* **2016.** Vol. 5. No. 2. Pp. 122–130.

References

1. Perminov V. Y. *Metaphysics. Century XXI. Almanac.* M.: BINOM. Knowledge laboratory, **2011.** Issue 4. Pp. 441–461.
2. Cline M. *Mathematics. The loss of certainty*. 2nd ed. M.: RIMIS, **2007.**
3. Davies B. *Notices of the American Mathematical Society.* **2005.** Vol. 52. No. 11. Pp. 1350–1356.
4. Kochergin A. N. *Problems of ontognoseological substantiations of mathematics and natural sciences*. Kursk: KSU, **2009.** No. 2. Pp. 60–69.
5. Tselishchev V. V. *Philosophy of Science.* **2006.** No. 3. Pp. 49–64.
6. Uspensky V. A. *Apology of mathematics: collection of articles*. SPb.: Amfora, **2011.**
7. Kochergin A. N. *Research programs in the contemporary science*. Novosibirsk: Nauka, **1987.** Pp. 70–89.
8. Zykov A. A. *Logical-philosophical introduction to higher mathematics.* Odessa: Astroprint, **2008.**
9. Gorenstein D. *In the world of science.* **1986.** No. 2. Pp. 62–74.
10. Sultanova L. B. *Liberal Arts in Russia.* **2013.** Vol. 2. No. 3. Pp. 237–250.
11. Stuart J. *The future of science in the XXI century. Following fifty years.* M.: AST, **2011.** Pp. 37–46.

Received 23.01.2016.