К МОДЕЛИРОВАНИЮ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМ

БЕРЕЖНОВ Д.Е., МИНЧЕНКО Л.И., СИРОТКО С.И.

Минск, БГУИР

Задачи двухуровневого программирования возникают при моделировании иерархических систем в телекомуникациях и других областях. Верхний и нижний уровни принимают решения, преследуя свои цели и используя свои ресурсы. Первым принимает решение верхний уровень, нижний в ответ принимает свое решение, которое может быть направлено как на поддержку решения верхнего уровня, так и в известной мере не совпадать с ним. Задача заключается в нахождении решения, приводящего к достижению глобальной цели.

Математически так называемая оптимистическая постановка задачи двухуровневого программирования заключается в минимизации функции $F(x,y)$ на множестве решений некоторой другой задачи – задачи нижнего уровня

$$f(x,y) \to \min_{y}, \; y \in K(x) = \{y \in R^m \mid h_i(x,y) \le 0 \;\; i \in I = \{1,\dots,s\}\}$$

при дополнительных ограничениях

$$x \in X = \{x \in R^n \big| g_j(x \le 0 \quad j \in J = \{1,\dots,p\},$$

где $F(x,y)$, $f(x,y)$, $g_j(x)$, $h_i(x,y)$ полагаются непрерывно дифференцируемыми.

Несмотря на внешнюю простоту постановки, решение такого рода задач является весьма трудной проблемой [1]. Одним из подходов к их решению является переход к эквивалентной одноуровневой задаче:

$$\begin{aligned} &F(x,y) \to \min, \\ &g_j(x) \le 0 \quad j \in J, \; (x,y) \le \varphi(x), \; h_i(x,y) \le 0 \;\; i \in I, \end{aligned} \tag{BLP}$$

где $\varphi(x) = \min\{f(x,y) \mid y \in K(x)\}$ – функция оптимального значения задачи нижнего уровня.

Трудность решения задачи (BLP) в такой постановке определяется наличием в ограничениях негладкой невыпуклой функции $\varphi(x)$. Способ преодоления данной трудности предложен в работе [2], где введено понятие частичной устойчивости. Задача (BLP) называется частично устойчивой *(partial calmn)* в точке (x^0, y^0), дающей локально оптимальное решение, если найдется $\mu > 0$ такое, что данная точка является локальным оптимальным решением задачи

$$F(x, y) + \mu(f(x, y) - \varphi(x)) \to \min,\ x \in X,\ y \in K(x).$$

Таким образом, при наличии частичной устойчивости задача (BLP) может быть приведена к задаче, в которой невыпуклое негладкое ограничение перенесено в целевую функцию. В работе [2] доказано, что частично устойчивой является задача (BLP) с линейными по x и y функциями $f(x, y),\ h_i(x, y)$. Используя понятие R-регулярности многозначных отображений [3], в нашей работе получено обобщение данного результата. В частности, справедлива следующая

Теорема. Пусть $f(x, y) = \langle \xi^0, y \rangle + \alpha_0(x),\quad h_i(x, y) = \langle \xi^i, y \rangle + \alpha_i(x) \quad i = 1, ..., s$. Тогда задача (BLP) частично устойчива в любой точке (x^0, y^0), дающей оптимальное решение. Если дополнительно функция $F(x, y)$ липшицева на открытом множестве, содержащем $grK \cap (X \times R^m)$, то задача (BLP) глобально частично устойчива, то есть (x^0, y^0) будет глобальным решением задачи

$F(x, y) + \mu(f(x, y) - \varphi(x)) \to \min,\ x \in X,\ y \in K(x).$

Литература

[1] Dempe S., Foudations of Bilevel programming. – Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2002.

[2] Ye J.J., Zhu D.// SIAM J. Optimiz. Vol. 20, 2010, pp. 1885–1905.

[3] Minchenko L.I., Tarakanov A.N. // Optimization Vol. 64, 2015, pp. 389–407.