Н.В. Михайлова
(Минск)

МЕТАПРОГРАММА ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И ЕЕ ЦЕННОСТЬ КАК ИНСТРУМЕНТА ПОЗНАНИЯ

Математика, с помощью своих инструментов интеллектуального порядка, является формой выражения важнейших закономерностей хорошо развитых естественнонаучных теорий. Поэтому наибольшая инструментальная ценность математики в развитии познания состоит в том, что на ее абстрактном языке выражается внутренняя организация и структура различных естественнонаучных теорий. В статье с помощью принципа системности проводится теоретический анализ новой метапрограммы обоснования математики, лежащей в основе современных концепций развития математики.

* * *

Системный подход в области философско-методологического обоснования представляет собой реализацию целостного подхода к проблеме обоснования в условиях сложнейшей и многообразной дифференцированности современного математического знания, для выявления путей философско-методологического синтеза программ обоснования математики и осмысления их неизбежной взаимной дополнительности. Соответственно, под «принципом системности» в проблемном поле обоснования математики понимаются новые идеи, концепции и теории, удовлетворяющие некоторой философской парадигме, которые в своей совокупности и взаимосвязи позволяют раскрыть методологическую целостность математического знания и способствуют реальному развитию современной математики на данном этапе развития науки.

Различные современные методологии научного мышления по-своему тяготеют к рационализму. Их объединяет общая цель – строго придерживаться рационалистических принципов науки, хотя то, что, например, современная физика называет действительностью, – это не всегда действительность, а скорее, тот или иной миф о действительности. Постгёделевская философия математики сменила философско-мировоззренческие акценты в программах обоснования современной математики, поскольку в них наиболее востребованным становится системный подход в контексте критического рационализма, а последний, в отличие от рационализма, допускает существование неразрешимых математических проблем, на что реально указывает современная математическая практика. Системный подход к программе обоснования математики видоизменяет наши взгляды на проблему целостности обоснования. Если раньше целостные представления о программе обоснования математики складывались на основе внешних взаимодействий конкурирующих программ обоснования, то современный этап на основе системного подхода дополняет изучение целостности анализом, связанным с проникновением во внутреннее результирующее пересечение действующих направлений обоснования современной математики.

Математика – это не сочинительство в том смысле, что у профессионалов-математиков нет свободы поэтов или прорицателей, поскольку они должны открывать, считает Поппер, а не изобретать математические законы. В вопросе о том, изобретаются или открываются математические истины, трудно прийти к общему решению, хотя большинство математиков склоняются к открытию. Концепция Поппера в таком контексте оказывается очень удобной. Эта концепция позволяет математикам следовать своей естественной установке. Например, известный математик Ю.И. Манин говорит о теории множеств как об особом мире, «который обладает некоторой реальностью и внутренней жизнью, мало зависящей от формализмов, призванных его описывать»[1]. Но такого рода профессионально-эмоциональные характеристики можно дать и многим другим содержательным математическим теориям.

Согласно Попперу, его «третий мир» содержит не только истинные, но также гипотетические и ошибочные теории, а также открытые проблемы. Поэтому в множественности миров есть одна гносеологическая трудность, относящаяся к вопросу о единстве и целостности современной математики. С одной стороны, внутренняя непротиворечивость формальной системы требует существования некоего «возможного мира» с единственным ограничением: чтобы все его интерпретированные теоремы были истинны с точки зрения математики и логики нашего мира. С другой стороны, непротиворечивость с внешним миром требует того, чтобы теоремы были истинны и в реальном мире. Если мы хотим, чтобы математика во всех «воображаемых мирах» была такая же, как и в нашем мире, то тогда разница между двумя типами непротиворечивости формальных систем, теоремы которой интерпретируются как математические суждения, должна исчезнуть.

Такая общеметодологическая ориентация находит подобного рода проявления и в философско-методологической проблеме обоснования современной математики, поскольку развитие теоретического познания и теоретического мышления неотделимо от математики. Возрастающая сложность современной науки и ее приложений приводит к определенной привлекательности внутренних проблем теоретической математики по сравнению с традиционными задачами, предлагаемыми естественными науками. В современной математике непосредственно взаимодействуют две сферы: сфера творческой деятельности, открытий, содержательных

[1] Манин Ю.И. Доказуемое и недоказуемое. М.: Советское радио, 1979. С. 108.

приложений и сфера теоретической рефлексии математики, в которой ведутся поиски логических отношений и аксиоматических представлений процессов математического абстрагирования.

Например, предметом интенсивных исследований в первой половине XX века стали банаховы пространства, открытые выдающимся польским математиком Стефаном Банахом в начале 20-х годов. Его работы в области функционального анализа впервые выявили успех синтеза алгебраического и геометрического подхода к разнообразным задачам линейного анализа, рассмотренных в общем случае линейных функциональных пространств. Вначале казалось, что математическая теория Банаха является формализмом, который вызывал определенное скептическое отношение, несмотря на изобилие ранее неизвестных нетривиальных теорем, полученных с ее помощью. Но в наше время ее можно рассматривать, как изумительный образец научной интуиции, который объединил усилия многих математиков, работающих в огромной области вещественного, комплексного и функционального анализа. Общая теория линейных операторов в банаховом пространстве, изданная Банахом под названием «Теория линейных операций», стала очень популярной математической теорией в качестве важнейшего математического инструмента современного анализа и все еще проявляет свою эффективность в качестве эффективного научного метода.

Польский математик Гуго Штейнгауз в своем выступлении, посвященном памяти Стефана Банаха, говорил: «Его заграничные конкуренты по теории линейных операторов трактовали пространство слишком обобщенно, вследствие чего получали только банальные результаты, либо слишком много основывали на этих пространствах, сводя сферу их применения к немногочисленным и искусственным примерам, – гений Банаха проявился в нахождении золотой середины»[2]. Причина его успеха заключается в том, что банахово пространство стало универсальной методологической концепцией, на основе которой появляются все новые математические работы в области функционального анализа. Затем интерес к этому, ставшему уже классическим, разделу линейного функционального анализа упал, поскольку накопившиеся нерешаемые трудные проблемы, поставленные классиками, ограничивали применение этой теории к другим разделам математики. Вновь пробудившийся интерес к этой абстрактной области математики связан с решением ряда труднейших проблем теории банаховых пространств.

Развитие этого раздела функционального анализа стимулировалось искусным построением весьма неожиданных контрпримеров, часто в довольно «исхоженных» и традиционных областях математики. Согласно известной в теории множеств теореме Бернштейна, называемой также

[2] Штейнгауз Г. Математика – посредник между духом и материей. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. С. 326.

теоремой Кантора-Бернштейна и теоремой Шрёдера-Бернштейна, два множества, каждое из которых равномощно подмножеству другого множества, равномощны. Проблема Шрёдера-Бернштейна для банаховых пространств, являющаяся аналогом указанной теоремы, получила довольно неожиданное решение. Проблема Шрёдера-Бернштейна формулируется следующим образом: будут ли два банаховых пространства, каждое из которых изоморфно подпространству другого пространства, изоморфны между собой? В это было трудно сначала поверить, но Тиммоти Гоуэрс построил примеры неизоморфных банаховых пространств, удовлетворяющих условию Шрёдера-Бернштейна для банаховых пространств. К сожалению, интуиция здесь была бессильна.

Цели рационального исследования не единственные цели, включающие сохранение математической свободы и многое другое. Например, гениальное открытие Эвариста Галуа, создавшего теорию групп, состояло в том, что он поставил структуру прежде объекта и новаторски определил объект исходя из математической структуры. «Он вызвал к жизни новый математический дух, доказав, что при исследовании корней алгебраического уравнения надо прежде всего приступать не к вычислению этих корней, а к исследованию существующих между ними отношений, для того, чтобы узнать, имеем ли мы средства для их вычисления»[3]. Такие мировоззренческие изыскания – это характерная особенность духовной жизни различных форм математического сознания на определенных стадиях его интеллектуального развития.

Математики высокого уровня интуитивно чувствуют некую духовную метрику, объединяющую идеи пространства мышления, что позволяет им перекидывать мостки между разными разделами математики. Речь идет о «чувстве математической близости» теорий или их программ обоснования. Философия математики в целом, как и сама математика, является реакцией на единство в русле целостности духовных и материальных ценностей. Наиболее точно это единство описано Г.В.Ф. Гегелем, но не в его переходной триаде «тезис – антитезис – синтез», декларирующей снятие противоречия, а в его системной триаде философии «наука логики – философия духа – философия природы», которая способствовала выработке новой идеологии тринитарного формализма, используемой в новой концепции обоснования математики.

Следует отметить, что с системной триадой философии Гегеля методологически хорошо сочетается философский подход К. Поппера, который, фиксируя недостаточность мира физических сущностей и мира духовных состояний, развил концепцию третьего мира, куда он отнес науку и культуру. Согласно Попперу, логика науки должна быть не логикой открытия, а логикой роста научного знания. Косвенным

---

[3] Лошак Ж. Геометризация физики. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. С. 181.

подтверждением связи системной триады философии и математики является то, что, видимо, не случайно польский математик Г. Штейнгауз свои глубокие философские размышления о природе математики объединил в сборнике статей под многозначительным названием «Математика – посредник между духом и материей». Интерес к системной триаде связан также с представлением о метрике пространств математического мышления, которое сформировалось в связи с проблемой искусственного интеллекта. Заметим, что современная математика является сетью взаимосвязанных результатов из разных областей научного знания. Иногда близость теорем в математике проявляется в том, что одну из них легко доказать, пользуясь идеей доказательства другой.

Иногда две математические идеи из разных областей близки между собой, потому что они в чем-то конструктивно аналогичны. Уникальность и универсальность такого рода математических идей по своей природе существенно отличается от того, с чем обычно приходится сталкиваться в области искусства и техники. Как утверждает Р. Пенроуз, «я не могу отделаться от ощущения, что в случае математики вера в некоторое высшее вечное существование – по крайней мере, для наиболее глубоких математических конструкций, – имеет под собой гораздо больше оснований, чем в других областях человеческой деятельности»[4]. Уместно также заметить, что слово «близкий» в математике имеет много содержательных аналогов. Общую концепцию тринитарной методологии можно использовать при углублении философии математики, опирающейся на современные представления о природе математического знания, которые раскрывают различные аспекты математической реальности, не выявляя при этом никаких существенных противоречий.

В результате в последние годы выявилась устойчивая тенденция считать программами обоснования современной математики лишь наиболее глобальные исследовательские направления, такие как формализм, интуиционизм и платонизм, оставив за ними уже исторически устоявшиеся в философии математики названия. Возможно, что эти виды философско-методологического исследования процедуры обоснования лучше было бы обозначить как «метапрограмма», поскольку дифференцирующих возможностей понятия «программа» иногда не хватает для различения основных методологических подходов, используемых в создающихся математических теориях. Можно, например, сказать, что «метапрограмма обоснования метаматематики» – это системное представление о взаимосвязях между программами обоснования. Оно включает в себя: принятие общей философской идеи обоснования, согласованной с ответом на вопрос о сущности математики; признание некоторых методологических принципов в качестве критериев

---

[4] Пенроуз Р. Новый ум короля: о компьютерах, мышлении и законах физики. М.: Едиториал УРСС, 2003. С. 89.

обоснования; принятие общего круга проблем, подлежащих исследованию в рамках выбранных программ обоснования.

Что в таком контексте можно сказать о ценности математики как инструмента познания? Следует учитывать, во-первых, исторический характер предмета математики и, во-вторых, итоги взаимодействия математики как с помощью внутренних, так и внешних оснований. В современных определениях математики «через себя» выделяется то, что это наука об абстрактных структурах и об абстрактных операциях над математическими объектами достаточно общей природы, законах их развития и функционирования, а также взаимосвязях между ними. Кроме того, математика, с помощью своих инструментов интеллектуального порядка, является формой выражения важнейших закономерностей хорошо развитых естественнонаучных теорий. Поэтому наибольшая инструментальная ценность математики в развитии познания состоит в том, что на ее абстрактном языке выражается внутренняя организация естественнонаучных знаний, среди которых ведущими являются физические, и проводится теоретический анализ в наиболее развитых областях науки.

В философской литературе по проблеме обоснования математики, кроме таких известных направлений, наиболее важных для исследования обоснования современной математики, как платонизм, формализм и интуиционизм, следует упомянуть и другие известные направления – натурализм, номинализм, реализм, структурализм, дедуктивизм, фаллибилизм, эмпиризм и другие подходы. Они подробно проанализированы в монографии Габриэле Лолли «Философия математики: наследие двадцатого столетия»[5]. Знакомство с этими направлениями по обоснованию математики полезно для того, чтобы знать, что думали в свое время те, кто размышлял о философии математики, и на какие вопросы они искали ответы. Но именно из-за их исторической обусловленности почти все они, за исключением отдельных «неопределенно-общих» направлений в философии математики, остались в прошлом, так как для математики не существует вечных философий. Примером направления, которое относится к «неопределенно-общему», является реализм, так как он не углубляется в специфические особенности философии математики. О других направлениях можно сказать, что они выбирают некоторую значимую характеристику или один единственный характерный аспект, который лишь частично раскрывает особенности математики.

Одним из требований, предъявляемых философами к системной классификации, наряду с упорядоченностью и периодичностью, является структурированность. Философские проблемы структурализма, как

---

[5] Лолли Г. Философия математики: наследие двадцатого столетия. Нижний Новгород: Изд-во НГУ им. Н.И. Лобачевского, 2012. 299 с.

направления математики XX столетия, согласно которому законы, процессы и структуры существуют как зависящие от целого части, заслуживают отдельного рассмотрения. Но следует отметить, что структурализм как философское направление, считающее, что математика есть изучение структур, является самым простым из всех рассматриваемых и слишком «прямолинейным». Современную математику нельзя рассматривать только как каталог всевозможных структур, поскольку как тогда интерпретировать невычислимые закономерности? Не вдаваясь в эту философско-методологическую проблематику, обратим только внимание на мнение влиятельной группы математиков, объединившейся под именем Бурбаки, которая считает, что математика говорит не о специфических математических объектах, а о структурах. С точки зрения Бурбаки, весь «математический мир» представляет собой иерархию структур на множествах. Они начинаются с наиболее простых структур, как структура группы, и заканчиваются наиболее сложными структурами.

Французский математик Рене Том считает, что одним из важнейших философских утверждений, на которые должна опираться современная математика, является утверждение о существовании математических структур независимо от человеческого разума. Это положение он объясняет тем, что старые надежды бурбакистов – показать, как математические структуры естественно вытекают из иерархии множеств, их подмножеств и их комбинаций – это, безусловно, химера. Поэтому нельзя ни по каким разумным причинам отказаться от мысли, что важные математические структуры существуют во внешнем мире, и их огромное многообразие находит единственное оправдание в реальности. Если же математика – это не более чем игра ума, то как тогда объяснить неоспоримые ее успехи в описании действительности? Сама группа Бурбаки уклонялась от ответа на этот вопрос, заявляя о своей некомпетентности.

Многие математики, физики и философы приняли новую парадигму о существовании пределов постижения мира, однако если эти границы истинные, то наука будет достаточно полной и в рамках этих границ. Их «примеру смирения» последовали и другие науки, осознавая при этом, что, хотя ограничения и пределы возможностей логики не влияют на ход событий в реальном мире, они могут определять то, что претендует на статус обоснованных интерпретаций этих событий. Сами математики убеждены в том, что любые принципиальные математические результаты, в том числе полученные Кантором, с необходимостью имеют отношение к свойствам физической реальности. Поиски решения проблемы обоснования математики на уровне философских обобщений нуждаются в философской рефлексии над эволюцией взглядов на сущность природы математики. Мы размышляем над смыслом системы аксиом и правил вывода, способных приводить к математическим истинам, не выводимым из этих заданных изначально правил и аксиом. Среди различных известных интерпретаций рефлексии можно выделить «философскую рефлексию», на долю которой приходится понимание общей проблемы рефлексивной деятельности сознания как механизма систематизации. Философская рефлексия своими системами категорий и принципов универсализирует разные способы деятельности сознания, их средства и результаты.

Принципы математического мышления связаны не только со свойствами нашего сознания, но и проявляют себя в законах внешнего мира. Поэтому не удивительно, что сфера надежности математики определяется через выявление онтологических оснований математического мышления. Но, как справедливо отмечает наиболее авторитетный философ математики В.Я. Перминов, «онтологическая истинность математических суждений, при всей своей важности для математики, сама по себе недостаточна для понимания статуса аксиом»[6]. В отличие от других областей математического знания арифметика и логика представляют собой универсальную онтологию, фиксирующую принципы предметности, независимые от каких-либо их региональных особенностей.

Органическая связь математики с онтологией вытекает из того мировоззренческого обстоятельства, что только онтологические представления могут дать систему стабильных и общезначимых смыслов, лежащих в основе предметного содержания суждений. Нельзя понять сущностной природы математики как науки, если не уяснить того, что математические структуры имеют онтологический, а не эмпирический характер, поэтому невозможно исключить математический платонизм из программ обоснования математики. Многообразие направлений развития современной математики, начинающееся с классической теории чисел и заканчивающееся квантовыми вычислениями, вызывает некоторый дискомфорт и несоразмерность подходов к проблеме обоснования конкретных разделов математики, например, на основе различных конструктивистских направлений интуиционистской программы.

При формировании естественного подхода к проблеме обоснования математики необходимо, следуя В.Я. Перминову, прежде всего опираться на «онтологическое ядро» современной математики. Поскольку, как бы ни изменялась «математическая реальность» и какие бы новые математические понятия и образы ни пришлось изобретать для ее описания, математические теории, которые составляют ее основу, не могут исчезнуть или измениться, так как эта часть математики зависит лишь от категориального видения мира. Трудность в том, что, в связи с развитием многозначных логик, нестандартного анализа и нечетких множеств, не говоря уже о переходе математики на вероятностный язык, философы математики, столкнувшись с «онтологической неточностью», стремились

[6] Перминов В.Я. Философия и основания математики. М.: Прогресс-Традиция, 2001. С. 231.

описывать ее точно. Возросшая потребность в средствах методологического обеспечения математических исследований в контексте единства современной математики в значительной мере обусловлена усилением взаимодействия, взаимозависимости и взаимопроникновения различных областей математической деятельности.

Реальная проблема обоснования математики гораздо сложнее и тоньше, чем набивший оскомину вопрос о математической реальности. Для ее методологического анализа надо использовать не только общефилософские, но и общематематические категории, имеющие общетеоретический характер в концептуальных системах философии. Эта специфика общенаучных категорий служит основой проникновения философии в математическое познание. Философско-методологический подход предполагает уход от дихотомии «внутренне – внешнее» в обосновании и способствует выходу в «третье пространство» при формировании новой структуры программы обоснования математики.

Естественнонаучные понятия обладают одним существенным признаком, отличающим их от философских категорий, а именно: они допускают методологическое уточнение специфическими средствами математических теорий. Поэтому, хотя сами математические доказательства являются основными объектами изучения математического рассуждения, для понимания указанных проблем нельзя отказываться от анализа смысла теорем, так как их различия можно интерпретировать в терминах различных свойств и структур. Фундаментальной ошибкой относительно природы математики является представление о том, что математическое знание более определенно, чем какая-либо другая форма знания. Такая ошибка не оставляет другого выбора в теории доказательств, кроме как считать ее частью математики.

Заложенные в современную математику априорные концепции могут стать надежным путеводителем направлений обоснования математики, а не становиться барьером между ними. Такая самоорганизация математических теорий становится в контексте обоснования предпочтительнее внешней организации. При определенном философском взгляде на математическую реальность направления обоснования математики выглядят не только антагонистичными, а в терминах системного подхода вполне соизмеримыми и нуждающимися друг в друге. Этот философско-методологический подход к проблеме обоснования математических теорий реализован в монографии автора «Философско-методологический анализ проблемы обоснования современной математики»[7]. Поскольку абсолютная полнота недостижима, то от современной математики, при условии сохранения ее достаточной строгости и точности, требуется лишь сохранять единство и целостность

---

[7] Михайлова Н.В. Философско-методологический анализ проблемы обоснования современной математики: монография. Минск: МГВРК, 2013. 551 с.

математического знания, опираясь на онтологическую истинность его исходных положений. При таком подходе синтез направлений обоснования современной математики в рамках метапрограммы обоснования может быть осуществлен в условиях особого дифференцированного взгляда на работающие программы обоснования, находящиеся в отношении дополнительности.