Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра информационных технологий автоматизированных систем

В. С. Муха, К. С. Корчиц

Анализ многомерных данных

Лабораторный практикум

для студентов специальности I-53 01 02

"Автоматизированные системы обработки информации"

всех форм обучения

Минск 2005

УДК 517.2+519.2 (075.6)
ББК 22.161.6+22.171я73
М 92

Р е ц е н з е н т:
доктор технических наук, профессор В.К. Конопелько

Муха В.С.

М 92 Анализ многомерных данных: Лабораторный практикум для студ. спец. I-53 01 02 "Автоматизированные системы обработки информации"/ В.С. Муха, К.С. Корчиц. – Мн.: БГУИР, 2005. – 56 с.: ил.
ISBN–985–444–804–5

Лабораторный практикум содержит описания четырех лабораторных работ по курсу «Анализ многомерных данных» с вариантами индивидуальных заданий. Работы ориентированы на использование современной системы программирования Matlab, имеющей широкие возможности для работы с многомерными данными и графического отображения данных.

УДК 517.2+519.2 (075.6)
ББК 22.161.6+22.171я73

ISBN–985–444–804–5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лабораторная работа № 1. МНОГОМЕРНЫЕ МАТРИЦЫ

1.1. Цель работы

Изучение основных положений теории многомерных матриц на основе системы Matlab и интегрированного в нее пакета программ "Анализ многомерных данных" (АМД).

1.2. Теоретические положения

1.2.1. Определение многомерной матрицы. Симметричные многомерные матрицы

Многомерной (p-мерной) $(n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p)$-матрицей A называется система чисел или переменных $a_{i_1,i_2,\ldots,i_p}$, $i_\alpha = \overline{1,n_\alpha}$, $\alpha = \overline{1,p}$, расположенных в точках p-мерного пространства, определяемого координатами $i_1,i_2,\ldots,i_p$.

Обозначается p-мерная матрица следующим образом:

$$A = (a_{i_1,\ldots,i_p}),\ i_\alpha = \overline{1,n_\alpha},\ \alpha = \overline{1,p}. \tag{1.1}$$

Совокупность индексов $(i_1,i_2,\ldots,i_p)$ многомерной матрицы A будем называть мультииндексом и обозначать одним символом $i = (i_1,i_2,\ldots,i_p)$. Тогда вместо обозначения (1.1) можно применять следующее обозначение многомерной матрицы A:

$$A = (a_i).$$

Если $n_1 = n_2 = \ldots = n_p = n$, то матрица называется гиперквадратной или p-мерной матрицей n-го порядка.

Многомерная матрица A называется симметричной относительно двух своих индексов i_α, i_β, если каждые два ее элемента, получающиеся один из другого перестановкой этих индексов, одинаковы, то есть если

$$a_{i_1,\ldots,i_\alpha,\ldots,i_\beta,\ldots,i_p} = a_{i_1,\ldots,i_\beta,\ldots,i_\alpha,\ldots,i_p}.$$

Многомерная матрица называется симметричной относительно нескольких индексов, если она симметрична относительно любой пары из них.

Многомерная матрица называется симметричной, если она симметрична относительно всех своих индексов.

1.2.2. Подстановки и транспонирование многомерных матриц

Пусть A – p-мерная матрица (1.1). Новая матрица

$$A^T = (a^T_{i_1, i_2, \ldots, i_p}),$$

элементы которой связаны с элементами матрицы (1.1) соотношениями

$$a^T_{i_1, i_2, \ldots, i_p} = a_{i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2} \ldots, i_{\alpha_p}}, \tag{1.2}$$

где $i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_p}$ – какая-нибудь перестановка индексов $i_1, i_2, \ldots, i_p$, называется транспонированной относительно матрицы A соответственно подстановке

$$T_1 = \begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, & i_p \\ i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, & i_{\alpha_p} \end{pmatrix}.$$

Подстановкой (или перестановкой) называется взаимно однозначное отображение (биекция) множества индексов $i_1, i_2, \ldots, i_p$ на себя. Это отображение ставит в соответствие множеству индексов $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ множество индексов $(i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_p})$, так что

$$(i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_p}) = T(i_1, i_2, \ldots, i_p).$$

Если T_1 и T_2 – две подстановки на одном и том же множестве индексов $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$,

$$T_1 = \begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, & i_p \\ i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, & i_{\alpha_p} \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_3} \\ i_{\beta_1}, i_{\beta_2}, \ldots, i_{\beta_p} \end{pmatrix},$$

где $(i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_p})$, $(i_{\beta_1}, i_{\beta_2}, \ldots, i_{\beta_p})$ – некоторые перестановки множества $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$, то подстановка T_3, действующая согласно выражению

$$(i_{\beta_1}, i_{\beta_2}, \ldots, i_{\beta_p}) = T_2(T_1(i_1, i_2, \ldots, i_p)),$$

называется суперпозицией или композицией подстановок T_1 и T_2 и обозначается

$$T_3 = T_1 * T_2 .$$

Можно выделить несколько типов подстановок.

Тождественной подстановкой на p индексах называется подстановка вида

$$E_p = E = \begin{pmatrix} i_1, i_2, ..., i_p \\ i_1, i_2, ..., i_p \end{pmatrix}.$$

Обратной подстановкой для подстановки T называется подстановка T^{-1}, удовлетворяющая равенству

$$T * T^{-1} = T^{-1} * T = E .$$

Подстановкой типа «вперед» называется подстановка вида

$$B_{p,r} = \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & ... & ,i_{p-r}, & i_{p-r+1}, & ... & ,i_p \\ i_{r+1}, & i_{r+2}, & ... & ,i_p & ,i_1, & ... & ,i_r \end{pmatrix}, \ p \geq r ,$$

в которой нижняя строка формируется из верхней переносом r левых индексов вправо (вперед).

Подстановкой типа «назад» называется подстановка вида

$$H_{p,r} = \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & ... & ,i_r, & i_{r+1}, & ... & ,i_p \\ i_{p-r+1}, & i_{p-r+2}, & ... & ,i_p, & i_1, & ... & ,i_{p-r} \end{pmatrix}, \ p \geq r ,$$

в которой нижняя строка формируется из верхней переносом r правых индексов влево (назад).

Ясно, что $B_{p,r} * H_{p,r} = H_{p,r} * B_{p,r} = E_p$, то есть подстановки $B_{p,r}$ и $H_{p,r}$ взаимно обратные:

$$B_{p,r} = H_{p,r}^{-1}, \quad H_{p,r} = B_{p,r}^{-1} .$$

Подстановкой типа «вперед-назад» называется подстановка вида

$$B_r H_s = \begin{pmatrix} i_1, & ... & ,i_r, & ... & ,i_{p-s+1}, & ... & ,i_p \\ i_{p-s+1}, & ... & ,i_p, & ... & ,i_1, & ... & ,i_r \end{pmatrix}, \ p \geq r + s ,$$

в которой нижняя строка формируется из верхней переносом r левых индексов вправо (вперед) и s правых индексов влево (назад).

Пример записи некоторых подстановок.

$$B_{5,2} = \begin{pmatrix} i, j, k, l, m \\ k, l, m, i, j \end{pmatrix},\ H_{5,2} = \begin{pmatrix} i, j, k, l, m \\ l, m, i, j, k \end{pmatrix},\ B_2 H_1 = \begin{pmatrix} i, j, k, l, m \\ m, k, l, i, j \end{pmatrix}.$$

Повторное транспонирование многомерной матрицы можно заменить ее однократным транспонированием соответственно некоторой новой подстановке, то есть

$$(A^{T_1})^{T_2} = A^{T_3},$$

где

$$T_3 = T_1 * T_2.$$

В пакете АМД имеются программы для формирования приведенных выше типовых подстановок (**E_p, B_p_r, H_p_r**).

1.2.3. Операции над многомерными матрицами

Рассмотрим операцию умножения многомерных матриц.

Пусть A – p-мерная матрица n-го порядка,

$$A = (a_{i_1, i_2, \dots, i_p}),\ i_\alpha = \overline{1, n},\ \alpha = \overline{1, p}, \tag{1.3}$$

B – q-мерная матрица n-го порядка,

$$B = (b_{j_1, j_2, \dots, j_q}),\ j_\alpha = \overline{1, n},\ \alpha = \overline{1, q}. \tag{1.4}$$

Разобьем мультииндексы $i = (i_1, i_2, \dots, i_p)$, $j = (j_1, j_2, \dots, j_q)$ этих матриц на составляющие мультииндексы следующим образом:

$$i = (i_1, i_2, \dots, i_p) = (l, s, c),$$

$$j = (j_1, j_2, \dots, j_q) = (c, s, m),$$

где

$$l = (l_1, l_2, \dots, l_\kappa),$$

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_\lambda),$$

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_\mu),$$

$$m = (m_1, m_2, \dots, m_\nu)$$

и

$$\kappa + \lambda + \mu = p\,,$$

$$\lambda + \mu + \nu = q\,.$$

Тогда наши матрицы A и B (1.3) и (1.4) можно записать в виде

$$A = (a_{l,s,c}),$$

$$B = (b_{c,s,m}),$$

где каждый из индексов мультииндексов l, s, c, m пробегает значения от 1 до n.

Матрица

$$D = (d_{l,s,m}),$$

элементы которой определяются выражением

$$d_{l,s,m} = \sum_{c} a_{l,s,c} b_{c,s,m}\,,$$

называется (λ,μ)-свернутым произведением матриц A и B. Обозначается (λ,μ)-свернутое произведение как ${}^{\lambda,\mu}(AB)$. Таким образом,

$$D = {}^{\lambda,\mu}(AB) = (\sum_{c} a_{l,s,c} b_{c,s,m}) = (d_{l,s,m}).$$

Пакет программ АМД имеет программы для расчета как $(0,\mu)$-свернутого, так и (λ,μ)-свернутого произведения многомерных матриц (**pk_m_n1, pk_m_n2, plm1, plm2**).

1.2.4. Многомерные единичные и обратные матрицы

Матрица $E(\lambda,\mu)$, удовлетворяющая равенству

$${}^{\lambda,\mu}(AE(\lambda,\mu)) = {}^{\lambda,\mu}(E(\lambda,\mu)A) = A,$$

где A – p-мерная матрица n-го порядка (1.3), называется (λ,μ)-единичной матрицей. Из определения (λ,μ)-единичной матрицы следует, что это $(\lambda + 2\mu)$-мерная матрица n-го порядка. Ее элементы определяются формулой

$$E(\lambda,\mu) = (e_{c,s,m}) = \left(\begin{cases} 1, & \text{если } \ c = m, \\ 0, & \text{если } \ c \neq m \end{cases} \right),$$

где мультииндексы $m=(m_1,m_2,...,m_\mu)$ и $c=(c_1,c_2,...,c_\mu)$ содержат по μ индексов.

Рассмотрим многомерно-матричное уравнение

$$^{\lambda,\mu}(AX)=E(\lambda,\mu), \tag{1.5}$$

где $A=(a_{l,s,c})$ – произвольная p-мерная матрица n-го порядка, $l=(l_1,l_2,...,l_\mu)$, $s=(s_1,s_2,...,s_\lambda)$, $c=(c_1,c_2,...,c_\mu)$, $m=(m_1,m_2,...,m_\mu)$, $p=\lambda+2\mu$, $E(\lambda,\mu)$ – ($\tau=\lambda+2\mu$)-мерная (λ,μ)-единичная матрица n-го порядка, $X=(x_{c,s,m})$ – неизвестная ($\tau=\lambda+2\mu$)-мерная матрица n-го порядка.

Матрица $X=(x_{c,s,m})$, удовлетворяющая уравнению (1.5), называется правой (λ,μ)-обратной к матрице A и обозначается $A^{-1}(\lambda,\mu)$. Аналогично, матрица $X=(x_{c,s,m})$, удовлетворяющая уравнению

$$^{\lambda,\mu}(XA)=E(\lambda,\mu),$$

называется левой (λ,μ)-обратной к матрице A. Можно показать, что левая и правая (λ,μ)-обратные к A матрицы n-го порядка совпадают. Они обе обозначаются как $A^{-1}(\lambda,\mu)$.

Пакет научных программ АМД имеет средства для формирования $(0,\mu)$-единичных многомерных матриц (**E0m, E0m1**), обращения многомерных матриц (**inv2, inv4, invm**), решения многомерно-матричного линейного алгебраического уравнения (**mmslau**).

1.2.5. Многомерные массивы в Matlab

Многомерные массивы характеризуются размерностью более двух. Под размерностью массивов понимается число измерений в пространственном представлении массивов, а под размером – произведение числа элементов в каждой размерности массива. Произвольный элемент многомерного массива задается указанием имени массива и индексов в круглых скобках за именем, разделенных запятыми. Например, произвольный элемент трехмерного массива задается как M(i,j,k), где i – номер строки, j – номер столбца, k – номер страницы. Этот элемент можно вывести, а можно присвоить ему определенное значение: M(i,j,k)=4.

Для увеличения размерности массива служит оператор : (двоеточие). Продемонстрируем эту возможность на примере. Пусть у нас задан исходный двухмерный массив M размером 3×3. Для превращения этого массива в трехмерный к нему добавляются новые страницы так, как показано в следующем m-файле-сценарии. Имеется также возможность удаления отдельной страницы путем присваивания ей пустого массива [].

```
%добавление и удаление страниц многомерного массива
M=[1,2,3;4,5,6;7,8,9] % определен двухмерный массив
M(:,:,2)=[10,11,12;13,14,15;16,17,18]; % к двухмерному массиву добавлена
% вторая страница
M
M(:,:,1)=[] % у трехмерного массива удалена первая страница
```

В результате выполнения этого файла на экран выводится следующее:

```
M =
    1    2    3
    4    5    6
    7    8    9

M(:,:,1) =
    1    2    3
    4    5    6
    7    8    9


M(:,:,2) =
   10   11   12
   13   14   15
```

```
   16    17    18

M =

   10    11    12
   13    14    15
   16    17    18
```

Путем добавления к массиву M новой 2-й страницы мы получили трехмерный массив размером $3\times3\times2$. Затем мы удалили из полученного трехмерного массива первую страницу, в результате чего опять получили двухмерный массив, но состоящий из второй страницы.

Из приведенного примера видно, что многомерный массив выводится на экран в виде двухмерных массивов, то есть в виде отдельных страниц.

Для транспонирования многомерных массивов в Matlab имеются функции **permute** и **ipermute**. Функция **permute(A,ORDER)** транспонирует p-мерный массив A в соответствии с вектором перестановок ORDER. Элементы вектора перестановок – числа от 1 до p. Функция **ipermute(A,ORDER)** делает то же, но в обратном порядке. Необходимо отметить, что определению (1.2) транспонирования многомерных матриц соответствует функция **ipermute**. Если ORDER и ORDER1 – две взаимно-обратные перестановки (подстановки), то применение функции **permute(A,ORDER)** и **ipermute(A,ORDER1)** дает один и тот же результат. Последовательное применение **B=permute(A,ORDER)** и **C=ipermute(B,ORDER)** дает результат C=A. Применение этих функций иллюстрируется работой следующего m-файла-сценария.

```
% транспонирование многомерной матрицы
 M=[1,2,3;4,5,6;7,8,9];
 M(:,:,2)=[10,11,12;13,14,15;16,17,18];
 M
 ORDER=[2,3,1];
 ORDER1=[3,1,2]; % перестановка, обратная к ORDER
```

```
B=ipermute(M,ORDER)
B1=permute(M,ORDER1)
D=permute(B,ORDER)
```

В результате выполнения этой программы на экран выводится следующее:

```
M(:,:,1) =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9

M(:,:,2) =
    10    11    12
    13    14    15
    16    17    18

B(:,:,1) =
     1     4     7
    10    13    16

B(:,:,2) =
     2     5     8
    11    14    17

B(:,:,3) =
     3     6     9
    12    15    18


B1(:,:,1) =
     1     4     7
    10    13    16
```

B1(:,:,2) =

2 5 8

11 14 17

B1(:,:,3) =

3 6 9

12 15 18

D(:,:,1) =

1 2 3

4 5 6

7 8 9

D(:,:,2) =

10 11 12

13 14 15

16 17 18

Мы видим, что массивы M и D равны, равны также массивы B и B1.

1.3. Порядок выполнения работы

1. Сформировать p-мерную матрицу A n-го порядка и q-мерную матрицу B n-го порядка.
2. Получить матрицу A^T, транспонированную относительно A соответственно подстановке T.
3. Получить матрицу D, равную (λ,μ)-свернутому произведению матриц A и B.
4. Сформировать (λ,μ)-единичную матрицу $E(\lambda,\mu)$ n-го порядка и найти произведение

$$F={}^{\lambda,\mu}(E(\lambda,\mu)B).$$

Указание. Необходимые параметры взять из табл. 1.1 в соответствии с номером варианта задания и кодом подгруппы (а или б).

Таблица 1.1

Номер варианта задания	Размерность p матрицы A	Перестановка T	Размерность q матрицы B	Порядок n матриц A и B	λ	μ
1а	4	4,1,2,3	4	2	0	1
2а	4	3,4,1,2	4	3	0	2
3а	4	2,3,4,1	4	4	0	3
4а	4	1,2,4,3	4	2	0	4
5а	4	2,1,3,4	4	3	1	1
6а	4	2,1,4,3	4	4	1	2
7а	4	1,3,2,4	4	2	1	3
8а	4	4,2,3,1	4	3	2	0
9а	4	3,2,1,4	4	4	2	1
10а	4	1,4,3,2	4	2	2	2
11а	4	3,4,2,1	4	3	3	0
12а	4	4,3,1,2	4	4	3	1
13а	4	3,1,2,4	4	2	4	0
14а	4	1,3,4,2	3	3	0	0
15а	4	1,4,2,3	3	4	0	1
1б	4	4,1,3,2	3	2	0	2
2б	4	2,3,1,4	3	3	0	3
3б	4	2,4,1,3	3	4	1	0
4б	4	2,4,3,1	3	2	1	1

Окончание табл. 1.1

Номер варианта задания	Размерность p матрицы A	Перестановка T	Размерность q матрицы B	Порядок n матриц A и B	λ	μ
5б	4	3,1,4,2	3	3	1	2
6б	4	3,2,4,1	3	4	1	3
7б	4	4,2,1,3	3	2	2	0
8б	4	4,3,2,1	3	3	2	1
9б	4	4,1,2,3	3	4	3	0
10б	4	1,2,4,3	3	2	3	1
11б	3	1,3,2	4	3	0	1
12б	3	2,1,3	4	4	0	2
13б	3	2,3,1	4	2	0	3
14б	3	3,1,2	4	3	1	1
15б	3	3,2,1	4	4	1	2

1.4. Контрольные вопросы

1. Определение многомерной матрицы.
2. Определение транспонированной многомерной матрицы.
3. Что такое подстановка?
4. Определение суперпозиции подстановок.
5. Формула повторного транспонирования многомерной матрицы.
6. Определение (λ, μ)-свернутого произведения многомерных матриц.
7. Определение (λ, μ)-единичной матрицы.

Лабораторная работа № 2. МНОГОМЕРНО-МАТРИЧНЫЕ ПОЛИНОМЫ

2.1. Цель работы

1. Изучение полиномов многих переменных на основе системы Matlab и интегрированного в нее пакета программ "Анализ многомерных данных".

2.2. Теоретические положения

2.2.1. Классические полиномы многих переменных

Рассмотрим классическую форму представления скалярного полинома y многих переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, или, иначе, скалярного полинома y векторной переменной $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ с целочисленными неотрицательными компонентами назовем мультииндексом и обозначим $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$. Скалярная функция n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ вида

$$\varphi_\alpha(x) = c_\alpha x^\alpha = c_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \; |\alpha| = 0,1,2,... , \tag{2.1}$$

называется одночленом n переменных степени $|\alpha|$. Скалярная функция вида

$$g_k(x) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha \tag{2.2}$$

называется однородным полиномом степени k векторной переменной x. Скалярная функция вида

$$y(x) = \sum_{k=0}^{m} g_k(x) \tag{2.3}$$

называется полиномом степени m векторной переменной x. Таким образом, полином степени m векторной переменной x представляет собой сумму однородных полиномов (2.2) или сумму одночленов вида (2.1) со степенями от 0 до m:

$$y(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} c_\alpha x^\alpha . \tag{2.4}$$

Например, классическое представление скалярного полинома второй степени трех переменных x_1, x_2, x_3 имеет вид

$$y = c_{0,0,0} + c_{1,0,0} x_1 + c_{0,2,0} x_2 + c_{0,0,3} x_3 +$$

$$+ c_{2,0,0} x_1^2 + c_{0,2,0} x_2^2 + c_{0,0,2} x_3^2 + c_{1,1,0} x_1 x_2 + c_{1,0,1} x_1 x_3 + c_{0,1,1} x_2 x_3 . \tag{2.5}$$

Если ввести здесь однородные полиномы степеней 0, 1, 2

$$g_0(x) = c_{0,0,0},$$

$$g_1(x) = c_{1,0,0} x_1 + c_{0,2,0} x_2 + c_{0,0,3} x_3,$$

$$g_2(x) = c_{2,0,0} x_1^2 + c_{0,2,0} x_2^2 + c_{0,0,2} x_3^2 + c_{1,1,0} x_1 x_2 + c_{1,0,1} x_1 x_3 + c_{0,1,1} x_2 x_3,$$

то этот полином будет иметь вид

$$y = g_0(x) + g_1(x) + g_2(x).$$

Важно знать, сколько одночленов содержит однородный полином степени k n переменных (2.2) и полином n переменных степени m (2.4). Очевидно, что эти полиномы имеют столько же коэффициентов. Однородный полином степени k n переменных (2.2) содержит

$$\mu(k,n) = C_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

одночленов (коэффициентов). Полином n переменных степени m (2.4) содержит

$$M(m,n) = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}.$$

одночленов (коэффициентов). Ясно, что

$$M(m,n) = \sum_{k=0}^{m} \mu(k,n).$$

В частности, для полинома второй степени трех переменных (2.5) имеем

$$\mu(0,3) = C_2^0 = C_2^2 = 1,$$

$$\mu(1,3) = C_3^1 = 3,$$

$$\mu(2,3) = C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6\,,$$

$$M(2,3) = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 10\,.$$

Для сравнения, число коэффициентов полинома 2-й степени четырех переменных будет равно

$$M(2,4) = \frac{6!}{2!4!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 15\,.$$

Неудобство работы с полиномами многих переменных в классической форме (2.4) состоит в плохой формализованности выражения. Плохая формализованность заключается в том, что порядковый номер коэффициента c_α в сумме (2.4) не совпадает с его «официальным номером» $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Для преодоления этих трудностей необходимо иметь способ упорядочивания мультииндексных номеров $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ как для фиксированного числа $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = \mu(k,n)$, так и для всех $|\alpha| = \overline{0, M(m,n)}$. Наиболее часто применяется так называемое лексикографическое упорядочивание, определение которого также плохо формализовано. Из названия такого упорядочивания следует, что оно рассчитано на лексикографические способности человека и выполняется вручную. При отсутствии компьютерного алгоритма упорядочивания для однозначного определения полинома многих переменных (2.4) необходимо задавать не его коэффициенты c_α, а таблицу соответствий порядковых номеров коэффициентов значениям коэффициентов и значениям их мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

В пакете АМД имеется программа **polm_cl** расчета значений классического скалярного полинома многих переменных вида (2.4) по его классическим коэффициентам c_α.

2.2.2. Многомерно-матричные полиномы

Пусть y – p-мерная матрица,

$$y=(y_{i_1,i_2,\dots,i_p}),\quad i_1=\overline{1,m_1},\dots,\quad i_p=\overline{1,m_p},$$

а x – q-мерная матрица,

$$x=(x_{j_1,j_2,\dots,j_q}),\quad j_1=\overline{1,n_1},\dots,\quad j_q=\overline{1,n_q}.$$

Однородный p-мерно-матричный полином k-й степени q-мерно-матричной переменной x имеет следующее представление [1,2]:

$$y={}^{0,kq}(c_k x^k), \tag{2.6}$$

где x^k – $(0,0)$-свернутая k-я степень матрицы x, $c_k=(c_{\alpha,\beta})$ – $(p+kq)$-мерная матрица коэффициентов. Мультииндекс α этой матрицы содержит p индексов. Мультииндекс β состоит из k мультииндексов, каждый из которых содержит q индексов. Матрица c_k должна быть симметричной при $k\ge 2$ относительно k своих последних мультииндексов.

Произвольный p-мерно-матричный полином m-й степени q-мерно-матричной переменной x является суммой однородных полиномов (2.6):

$$y=\sum_{k=0}^{m}{}^{0,kq}(c_k x^k), \tag{2.7}$$

где по определению принято $x^0=1$.

Если в (2.7) $p=0,q=0$, то мы имеем известный скалярный полином скалярной переменной x:

$$y=\sum_{k=0}^{m}c_k x^k=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots+c_mx^m. \tag{2.8}$$

При $p=0,q=1$ получаем скалярный полином y векторной переменной $x=(x_1,x_2,\dots,x_{n_1})$:

$$y=\sum_{k=0}^{m}{}^{0,k}(c_k x^k), \tag{2.9}$$

где c_k – k-мерные симметричные при $k \geq 2$ матрицы n_1-го порядка. В частности, при $m = 1$ имеем полином 1-й степени

$$y = c_0 + {}^{0,1}(c_1 x), \tag{2.10}$$

где c_0 – скаляр, $c_1 = \left(c_i^{(1)}\right)$, $i = \overline{1, n_1}$, – одномерная матрица n_1-го порядка. Скалярный полином второй степени векторной переменной имеет вид

$$y = c_0 + {}^{0,1}(c_1 x) + {}^{0,2}(c_2 x^2),$$

где $c_2 = \left(c_{i,j}^{(2)}\right)$, $i, j = \overline{1, n_1}$, – двухмерная матрица n_1-го порядка, c_0, c_1 – те же, что и в (2.10).

При $p = 1$, $q = 1$ имеем векторный полином $y = (y_1, y_2, ..., y_{m_1})$ векторной переменной $x = (x_1, x_2, ..., x_{n_1})$:

$$y = \sum_{k=0}^{m} {}^{0,k}(b_k x^k),$$

где b_k – $(k+1)$-мерные симметричные при $k \geq 2$ относительно своих k последних индексов матрицы. В частности, при $m = 1$ получим векторный полином 1-й степени векторной переменной

$$y = b_0 + {}^{0,1}(b_1 x), \tag{2.11}$$

где $b_0 = \left(b_i^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, m_1}$, – одномерная матрица m_1-го порядка, $b_1 = \left(b_{i,j}^{(1)}\right)$, $i = \overline{1, m_1}$, $j = \overline{1, n_1}$, – двухмерная $(m_1 \times n_1)$-матрица. Векторный полином 2-й степени векторной переменной имеет вид

$$y = b_0 + {}^{0,1}(b_1 x) + {}^{0,2}(b_2 x^2),$$

где b_0 и b_1 те же, что и в (6), а $b_2 = \left(b_{i,j,k}^{(2)}\right)$ – трехмерная $(m_1 \times n_1 \times n_1)$-матрица, симметричная относительно индексов j, k.

2.2.3. Схема Горнера для многомерно-матричного полинома

Для расчета скалярного полинома скалярной переменной (2.8) известна схема Горнера [3], при использовании которой уменьшается алгоритмическая сложность и повышается точность расчетов. В связи с этим представляется целесообразной разработка такой же схемы для скалярного полинома векторной переменной (2.9) или вообще для многомерно-матричного полинома (2.7). Получим схему Горнера сразу для многомерно-матричного полинома (2.7). Для этого запишем его в развернутой форме

$$y(x) = c_0 + {}^{0,q}(c_1 x) + {}^{0,2q}(c_2 x^2) + \ldots + {}^{0,(m-1)q}(c_{m-1} x^{m-1}) + {}^{0,mq}(c_m x^m) \qquad (2.12)$$

и представим в виде $y(x) =$

$$= {}^{0,0}\Big(\big(b_1 + {}^{0,q}(b_2 x) + \ldots + {}^{0,(m-2)q}(b_{m-1} x^{m-2}) + {}^{0,(m-1)q}(b_m x^{m-1})\big)\big(x - x^{(0)}\big)\Big) + b_0 .$$

(2.13)

Раскроем скобки в (2.13). Для иллюстрации выполним это для отдельного слагаемого в (2.13)

$${}^{0,0}\Big({}^{0,(m-2)q}(b_{m-1} x^{m-2})(x - x^{(0)})\Big) =$$

$$= {}^{0,0}\Big({}^{0,(m-2)q}(b_{m-1} x^{m-2})x\Big) + {}^{0,0}\Big({}^{0,(m-2)q}(b_{m-1} x^{m-2})x^{(0)}\Big) =$$

$$= {}^{0,(m-2)q}\Big(b_{m-1} x^{m-1}\Big) + {}^{0,(m-2)q}\Big(b_{m-1}\ {}^{0,0}(x^{m-2} x^{(0)})\Big). \qquad (2.14)$$

Учитывая симметричность матрицы b_{m-1} относительно последних мультииндексов, можно показать (см. приложение), что

$${}^{0,(m-2)q}\Big(b_{m-1}\ {}^{0,0}(x^{m-2} x^{(0)})\Big) = {}^{0,(m-2)q}\Big(b_{m-1}\ {}^{0,0}(x^{(0)} x^{m-2})\Big) =$$

$$= {}^{0,(m-1)q}\Big({}^{0,q}(b_{m-1} x^{(0)}) x^{m-2}\Big),$$

и вместо (2.14) получим

$${}^{0,0}\Big({}^{0,(m-2)q}(b_{m-1} x^{m-2})(x - x^{(0)})\Big) =$$

$$= {}^{0,(m-2)q}\Big(b_{m-1} x^{m-1}\Big) + {}^{0,(m-1)q}\Big({}^{0,q}(b_{m-1} x^{(0)}) x^{m-2}\Big).$$

Этот результат позволяет нам после раскрытия скобок в (2.13) приравнять коэффициенты полиномов (2.12) и (2.13). В итоге получим соотношения

$$c_m = b_m,$$

$$c_{m-1} = -{}^{0,q}(b_m x^{(0)}) + b_{m-1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$c_j = -{}^{0,q}(b_{j+1} x^{(0)}) + b_j,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$c_0 = -{}^{0,q}(b_1 x^{(0)}) + b_0.$$

Отсюда получаем алгоритм

$$b_m = c_m,$$

$$b_j = c_j + {}^{0,q}(b_{j+1} x^{(0)}),\ j = m-1, m-2, \dots, 0.$$

Если учесть, что в конце расчетов по данному алгоритму мы получаем коэффициент b_0 и что $y(x^{(0)}) = b_0$, то становится ясно, что мы получили алгоритм расчета значения многомерно-матричного полинома (2.7) в точке $x^{(0)}$. Ввиду произвольности $x^{(0)}$ верхний индекс в обозначении этой точки можно опустить. В итоге получаем следующий алгоритм расчета значения полинома (2.7) в любой точке x:

$$b_m = c_m,$$

$$b_j = c_j + {}^{0,q}(b_{j+1} x),\ j = m-1, m-2, \dots, 0,$$

$$y(x) = b_0.$$

Это и есть схема Горнера для многомерно-матричного полинома (2.7).

Схема Горнера реализована в пакете программ «Анализ многомерных данных» для расчета значений скалярного полинома векторной переменной произвольной степени.

Заметим, что в программе **polm_cl** пакета программ АМД используется следующий алгоритм расчета значений классического скалярного полинома многих переменных: сначала с помощью программы **coef_p** рассчитываются коэффициенты c_k скалярного многомерно-матричного полинома векторной переменной (2.9) по коэффициентам c_α классического полинома (2.4), а затем вычисляется значение полинома по схеме Горнера.

2.3. Порядок выполнения работы

Запрограммировать расчет скалярного полинома ($p = 0$) векторной переменной ($q = 1$) по выражению (2.4) в случае двух переменных ($n = 2$). Варианты заданий для номеров бригад и кодов подгрупп (а или б) приведены в табл. 2.1. Вывести в одно графическое окно трехмерный и контурный графики полинома (с помощью функции **meshc**).

Указание. Исходный полином задать в классическом виде (2.4), выбрав коэффициенты c_α и степени $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ его переменных самостоятельно, а его многомерно-матричные коэффициенты сформировать с помощью программы **coef_p**.

2.4. Контрольные вопросы

1. Что такое классический скалярный полином векторной переменной?
2. Что такое многомерно-матричный полином многомерно-матричной переменной?
3. Что такое контурные графики для функции двух переменных?
4. Какой вид имеют контурные графики для полинома 1-й степени, 2-й степени, 3-й степени двух переменных?
5. Какой вид имеют корни полинома 2-й степени, 3-й степени одной и двух переменных?

Таблица 2.1

№ варианта	Степень полинома k	№ варианта	Степень полинома k	№ варианта	Степень полинома k
1а	3	11а	3	6б	3
2а	2	12а	4	7б	2
3а	3	13а	3	8б	3
4а	4	14а	2	9б	4
5а	5	15а	3	10б	3
6а	2	1б	4	11б	2
7а	3	2б	3	12б	3
8а	4	3б	2	13б	4
9а	3	4б	3	14б	3
10а	2	5б	4	15б	5

Лабораторная работа № 3. МНОГОМЕРНО-МАТРИЧНЫЕ ЭКСПОНЕНТЫ

3.1. Цель работы

Изучение многомерно-матричных экспонент на основе системы Matlab и интегрированного в нее пакета программ "Анализ многомерных данных".

3.2. Теоретические положения

3.2.1. Скалярная экспонента

Обычная (скалярная) экспонента связана с решением линейного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = by$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Как известно, решение этого уравнения может быть представлено следующим сходящимся всюду рядом Тейлора по степеням $\overset{\circ}{x} = x - x_0$:

$$y(x) = y_0\left(1 + b\overset{\circ}{x} + \frac{1}{2!}(b\overset{\circ}{x})^2 + \frac{1}{3!}(b\overset{\circ}{x})^3 + \ldots\right). \tag{3.1}$$

Множитель при y_0 здесь представляет собой ряд Тейлора для функции $z(x) = \exp(b\overset{\circ}{x})$,

$$\exp(b\overset{\circ}{x}) = 1 + b\overset{\circ}{x} + \frac{1}{2!}(b\overset{\circ}{x})^2 + \frac{1}{3!}(b\overset{\circ}{x})^3 + \ldots, \tag{3.2}$$

которая называется экспонентой аргумента $b\overset{\circ}{x}$. Решение (3.1) выражается через экспоненту:

$$y(x) = y_0 \exp(b\overset{\circ}{x}). \tag{3.3}$$

3.2.2. Многомерно-матричная (λ,μ)-экспонента, общая теория

Пусть Y – p-мерная матрица,

$$Y = (y_{i_1,i_2,\dots,i_p}),\quad i_1 = \overline{1,m_1},\dots,\quad i_p = \overline{1,m_p}\,, \tag{3.4}$$

а X – q-мерная матрица n-го порядка,

$$X = (x_{j_1,j_2,\dots,j_q}),\quad j_1 = \overline{1,n_1},\dots,\quad j_q = \overline{1,n_q}\,. \tag{3.5}$$

Рассмотрим многомерно-матричное линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dY}{dX} = {}^{\lambda,\mu}(BY) \tag{3.6}$$

с начальным условием $Y(X_0) = Y_0$, где Y – p-мерная матрица вида (3.4), X – q-мерная матрица вида (3.5), B – $(q+\lambda+2\mu)$-мерная матрица соответствующих размеров (матрица коэффициентов), $\lambda+\mu \le p$. Будем искать решение уравнения (3.6) в виде ряда Тейлора

$$Y(X) = Y_0 + {}^{0,q}(A_1 \overset{\circ}{X}) + \frac{1}{2!}{}^{0,2q}(A_2 \overset{\circ}{X}{}^2) + \frac{1}{3!}{}^{0,3q}(A_3 \overset{\circ}{X}{}^3) + \dots\ , \tag{3.7}$$

где $\overset{\circ}{X} = X - X_0$, A_i, $i = 1,2\dots$, – $(p+iq)$-мерные матрицы коэффициентов, симметричные при $q>0$ и $i \ge 2$ относительно i своих последних q-мультииндексов. Дифференцирование ряда (3.7) почленно с учетом симметричности матриц $A_2, A_3,\dots$ приводит к ряду

$$\frac{dY}{dX} = A_1 + {}^{0,q}(A_2 \overset{\circ}{X}) + \frac{1}{2!}{}^{0,2q}(A_3 \overset{\circ}{X}{}^2) + \dots\ . \tag{3.8}$$

Подставив выражение (3.7) в правую часть уравнения (3.6), получим

$${}^{\lambda,\mu}(BY) = {}^{\lambda,\mu}(BY_0) + {}^{\lambda,\mu}(B\,{}^{0,q}(A_1 \overset{\circ}{X})) + \frac{1}{2!}{}^{\lambda,\mu}(B\,{}^{0,2q}(A_2 \overset{\circ}{X}{}^2)) +$$

$$+ \frac{1}{3!}{}^{\lambda,\mu}(B\,{}^{0,3q}(A_3 \overset{\circ}{X}{}^3)) + \dots,$$

или, так как $\lambda+\mu \le p$,

$$^{\lambda,\mu}(BY) = {}^{\lambda,\mu}(BY_0) + {}^{0,q}({}^{\lambda,\mu}(BA_1)\overset{\circ}{X}) + \frac{1}{2!}{}^{0,2q}({}^{\lambda,\mu}(BA_2)\overset{\circ}{X}{}^2) +$$

$$+\frac{1}{3!}{}^{0,3q}({}^{\lambda,\mu}(BA_3)\overset{\circ}{X}{}^3) + \ldots . \qquad (3.9)$$

Приравняем ряды (3.8) и (3.9) в соответствии с уравнением (3.6). Получим

$$A_1 = {}^{\lambda,\mu}(BY_0),$$
$$A_2 = {}^{\lambda,\mu}(BA_1),$$
$$A_3 = {}^{\lambda,\mu}(BA_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_k = {}^{\lambda,\mu}(BA_{k-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

или

$$\begin{aligned} &A_1 = {}^{\lambda,\mu}(BY_0), \\ &A_2 = {}^{\lambda,\mu}({}^{\lambda,\mu}(B^2)Y_0), \\ &A_3 = {}^{\lambda,\mu}({}^{\lambda,\mu}(B^3)Y_0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &A_k = {}^{\lambda,\mu}({}^{\lambda,\mu}(B^k)Y_0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Подставив матрицы (3.10) в ряд (3.7), получим решение уравнения (3.6) в виде

$$Y(X) = Y_0 + {}^{0,q}({}^{\lambda,\mu}(BY_0)\overset{\circ}{X}) + \frac{1}{2!}{}^{0,2q}({}^{\lambda,\mu}({}^{\lambda,\mu}(B^2)Y_0)\overset{\circ}{X}{}^2) +$$

$$+\frac{1}{3!}{}^{0,3q}({}^{\lambda,\mu}({}^{\lambda,\mu}(B^3)Y_0)\overset{\circ}{X}{}^3) + \ldots \, . \qquad (3.11)$$

Так как ряд (3.11) аналогичен ряду Тейлора (3.1) для функции $y(x) = y_0 e^{b\overset{\circ}{x}}$, то можно сказать, что решение уравнения (3.6) выражается через многомерно-матричную (λ, μ)-экспоненту аргумента ${}^{0,q}(B\overset{\circ}{X})$ и записать решение (3.11) в символическом виде

$$Y(X) = {}^{\lambda,\mu}\exp({}^{0,q}(B\overset{\circ}{X}))Y_0 . \qquad (3.12)$$

Отметим, что матрица B в уравнении (3.6) должна быть такой, чтобы обеспечивалась симметричность ($p+iq$)-мерных матриц A_i (3.10) ряда (3.7) относительно i своих последних q-мультииндексов. Условия, которым должна удовлетворять матрица B, называются условиями полной интегрируемости дифференциального уравнения. Анализ условий полной интегрируемости дифференциального уравнения (3.6) в его общем виде представляется сложной задачей. Поэтому целесообразно рассмотреть его частные случаи, которые тем не менее смогут удовлетворить многим запросам практики.

3.2.3. Многомерно-матричная (λ,μ)-экспонента аргумента $B\overset{\circ}{t}$

Можно сразу сказать, что при $q=0$, т.е. когда независимая переменная X – скаляр, $(\lambda+2\mu)$-мерная матрица коэффициентов B может быть произвольной. Действительно, в этом случае в матрицах A_i q-мультииндексы отсутствуют. Обозначим $X=t$, т.е. будем решать уравнение

$$\frac{dY(t)}{dt} = {}^{\lambda,\mu}(BY(t)), \quad Y(t_0)=Y_0. \tag{3.13}$$

Напомним, что должно выполняться условие $\lambda+\mu\le p$.

При $q=0$ решение (3.11) можно переписать в виде

$$Y(t)=Y_0+{}^{\lambda,\mu}((B\overset{\circ}{t})Y_0)+\frac{1}{2!}{}^{\lambda,\mu}({}^{\lambda,\mu}(B\overset{\circ}{t})^2Y_0)+\frac{1}{3!}{}^{\lambda,\mu}({}^{\lambda,\mu}(B\overset{\circ}{t})^3Y_0)+\ldots$$

или в виде

$$Y(t)={}^{\lambda,\mu}[(E(\lambda,\mu)+(B\overset{\circ}{t})+\frac{1}{2!}{}^{\lambda,\mu}(B\overset{\circ}{t})^2+\frac{1}{3!}{}^{\lambda,\mu}(B\overset{\circ}{t})^3+\ldots)Y_0]. \tag{3.14}$$

Выражение в круглых скобках в (3.14), по аналогии с выражением в скобках в (3.1), назовем (λ,μ)-экспонентой аргумента $B\overset{\circ}{t}$ и обозначим ${}^{\lambda,\mu}\exp(B\overset{\circ}{t})$:

$${}^{\lambda,\mu}\exp(B\overset{\circ}{t})=E(\lambda,\mu)+(B\overset{\circ}{t})+\frac{1}{2!}{}^{\lambda,\mu}(B\overset{\circ}{t})^2+\frac{1}{3!}{}^{\lambda,\mu}(B\overset{\circ}{t})^3+\ldots\,. \tag{3.15}$$

С использованием (λ,μ)-экспоненты решение (3.14) уравнения (3.13) запишется в виде следующего математического выражения:

$$Y(t)={}^{\lambda,\mu}({}^{\lambda,\mu}\exp(B\overset{\circ}{t})Y_0)\,. \qquad (3.16)$$

При $\lambda=0,\ \mu=1$ матрица $B\overset{\circ}{t}$ двухмерная, и выражение (3.15) представляет собой известную из литературы матричную экспоненту:

$${}^{0,1}\exp(B\overset{\circ}{t})=E(0,1)+(B\overset{\circ}{t})+\frac{1}{2!}{}^{0,1}(B\overset{\circ}{t})^2+\frac{1}{3!}{}^{0,1}(B\overset{\circ}{t})^3+\ldots\,. \qquad (3.17)$$

3.2.4. Многомерно-матричная $(0,p)$-экспонента аргумента ${}^{0,q}(B^T\overset{\circ}{X})$

Рассмотрим случай уравнения (3.6), когда $\lambda=0$. В этом случае B – ($q+2\mu$)-мерная матрица,

$$B=(b_{i_\mu j_q k_\mu})\,,$$

где мультииндексы $i_\mu,\ j_q,\ k_\mu$ содержат $\mu,\ q,\ \mu$ индексов соответственно, $\mu\le p$, и уравнение (3.6) принимает вид

$$\frac{dY}{dX}={}^{0,\mu}(BY)\,,\quad Y(X_0)=Y_0\,. \qquad (3.18)$$

Получим условие полной интегрируемости этого уравнения. Для этого раскроем матрицу A_2 в (3.10), положив $\lambda=0$ и опустив индексы в обозначениях A_2 и Y_0. Получим

$$A={}^{0,\mu}({}^{0,\mu}(B^2)Y)=\Big(\sum_{s_\mu}\sum_{\nu_\mu}B_{i_\mu,j_q,\nu_\mu}B_{\nu_\mu,k_q,s_\mu}Y_{s_\mu,t_{p-\mu}}\Big)=\Big(A_{i_\mu,j_q,k_q,t_{p-\mu}}\Big). \qquad (3.19)$$

Матрица A должна быть симметричной относительно двух последних мультииндексов, содержащих по q индексов. По виду элементов матрицы A можно заключить, что указанную симметричность *за счет выбора матрицы* B можно обеспечить лишь при $\mu=p$, так как в этом случае последний мультииндекс $t_{p-\mu}$ матрицы A исчезает, и мультииндексы j_q,k_q поддаются регулировке. Кроме того, при $q=0$ мультииндексы j_q,k_q исчезают, так что исчезает понятие симметричности относительно этих мультииндексов. Случай $q=0$ входит в рассмотренный выше. Рассмотрим теперь случай уравнения (3.18), когда $q > 0$, $\mu = p$. В этом случае B – $(q+2p)$-мерная матрица,

$$B = (b_{i_p j_q k_p}),$$

где мультииндексы i_p, j_q, k_p содержат p, q, p индексов соответственно, и уравнение (3.18) принимает вид

$$\frac{dY}{dX} = {}^{0,p}(BY), \quad Y(X_0) = Y_0. \tag{3.20}$$

Получим условие полной интегрируемости этого уравнения. Для этого раскроем матрицу A_2 в (3.10), положив $\lambda = 0$, $\mu = p$ и опустив индексы в обозначениях A_2 и Y_0. Получим

$$A = {}^{0,p}({}^{0,p}(B^2)Y) = \Big(\sum_{s_p} \sum_{\nu_p} B_{i_p, j_q, \nu_p} B_{\nu_p, k_q, s_p} Y_{s_p} \Big) = \Big(A_{i_\mu, j_q, k_q} \Big).$$

Для симметричности матрицы A относительно последних мультииндексов j_q, k_q необходимо выполнение условия

$$\sum_{\nu_p} B_{i_p, j_q, \nu_p} B_{\nu_p, k_q, s_p} = \sum_{\nu_p} B_{i_p, k_q, \nu_p} B_{\nu_p, j_q, s_p}, \tag{3.21}$$

которое можно записать в виде

$${}^{0,p}(B^{(j_q)} B^{(k_q)}) = {}^{0,p}(B^{(k_q)} B^{(j_q)}), \tag{3.22}$$

где рассматриваются $2p$-мерные матрицы $B^{(j_q)}$, $B^{(k_q)}$,

$$B^{(j_q)} = \Big(B^{(j_q)}_{i_p, \nu_p} \Big) = \Big(B_{i_p, j_q, \nu_p} \Big).$$

Итак, равенства (3.21) или (3.22) являются условиями полной интегрируемости уравнения (3.20). Раскрывая матрицы $A_3, A_4, \ldots$ в (3.10), обнаружим, что равенство (3.21) обеспечивает необходимую симметричность и этих матриц. Например, для матрицы A_3 получим

$$A = {}^{0,p}({}^{0,p}(B^3)Y) = \left(\sum_{s_p} \sum_{\mu_p} \sum_{\nu_p} B_{i_p, j_q, \nu_p} B_{\nu_p, k_q, \mu_p} B_{\mu_p, l_q, s_p} Y_{s_p} \right) =$$

$$= \left(A_{i_p, j_q, k_q, l_q} \right). \tag{3.23}$$

Видно, что условие (3.21) обеспечивает симметричность матрицы A (3.23) относительно любой перестановки мультииндексов j_q, k_q, l_q.

Решение уравнения в этом случае будет иметь вид

$$Y(X) = Y_0 + {}^{0,q}({}^{0,p}(BY_0)\overset{\circ}{X}) + \frac{1}{2!}{}^{0,2q}({}^{0,p}({}^{0,p}(B^2)Y_0)\overset{\circ}{X^2}) +$$

$$+\frac{1}{3!}{}^{0,3q}({}^{0,p}({}^{0,p}(B^3)Y_0)\overset{\circ}{X^3}) + \ldots \quad . \tag{3.24}$$

Представим это решение в виде

$$Y(X) = {}^{0,p}\left[\left(E(0,p) + {}^{0,q}(B^T\overset{\circ}{X}) + \frac{1}{2!}{}^{0,p}({}^{0,q}(B^T\overset{\circ}{X}))^2 + \frac{1}{3!}{}^{0,p}({}^{0,q}(B^T\overset{\circ}{X}))^3 + \ldots\right)Y_0\right], \tag{3.25}$$

где B^T – матрица B, транспонированная некоторым образом. Почленное сравнение рядов (3.24) и (3.25) показывает, что подстановка T, в соответствии с которой транспонируется матрица B, имеет вид

$$T = (E_p, B_{p+q,p}).$$

Множитель при Y_0 в выражении (3.25) представляет собой многомерно-матричную $(0,p)$-экспоненту аргумента ${}^{0,q}(B^T\overset{\circ}{X})$:

$${}^{0,p}\exp({}^{0,q}(B^T\overset{\circ}{X})) =$$

$$= E(0,p) + {}^{0,q}(B^T\overset{\circ}{X}) + \frac{1}{2!}{}^{0,p}({}^{0,q}(B^T\overset{\circ}{X}))^2 + \frac{1}{3!}{}^{0,p}({}^{0,q}(B^T\overset{\circ}{X}))^3 + \ldots \tag{3.26}$$

Теперь можно записать решение (3.25) уравнения (3.20) в виде математической формулы

$$Y(X) = {}^{0,p}[{}^{0,p}\exp({}^{0,q}(B^T\overset{\circ}{X}))Y_0]. \tag{3.27}$$

3.2.5. Многомерно-матричная $(0,1)$-экспонента аргумента ${}^{0,1}(B^T \overset{\circ}{X})$

Рассмотрим теперь уравнение (3.20) в ситуации, когда $p = q = 1$, т.е. когда X – одномерная матрица n-го порядка, а Y – одномерная матрица m-го порядка. В этой ситуации мы имеем уравнение

$$\frac{dY(X)}{dX} = {}^{0,1}(BY), \quad Y(X_0) = Y_0, \tag{3.28}$$

где B – трехмерная матрица $B = (B_{i,j,k})$ размером $m \times n \times m$. Подобные уравнения изучаются в функциональном анализе без привлечения понятия многомерной матрицы. Решение уравнения (3.28) запишем на основании выражения (3.27):

$$Y(X) = {}^{0,1}({}^{0,1}\exp({}^{0,1}(B^T \overset{\circ}{X}))Y_0), \tag{3.29}$$

где

$${}^{0,1}\exp({}^{0,1}(B^T \overset{\circ}{X})) =$$

$$= E(0,1) + {}^{0,1}(B^T \overset{\circ}{X}) + \frac{1}{2!}{}^{0,1}({}^{0,1}(B^T \overset{\circ}{X}))^2 + \frac{1}{3!}{}^{0,1}({}^{0,1}(B^T \overset{\circ}{X}))^3 + \dots .$$

Условие полной интегрируемости уравнения (3.28) также получим как частный случай условий (3.21), (3.22). В данном случае мультииндексы в выражении (3.21) состоят из одного индекса, и мы получаем условие

$$\sum_{\nu} B_{i,k,\nu} B_{\nu,j,l} = \sum_{\nu} B_{i,j,\nu} B_{\nu,k,l}\ , \tag{3.30}$$

которое можно записать в виде

$${}^{0,1}(B^{(j)} B^{(k)}) = {}^{0,1}(B^{(k)} B^{(j)}) \ \ \forall\ j,k = \overline{1,n}, \tag{3.31}$$

где рассматриваются двухмерные матрицы $B^{(j)}$, $B^{(k)}$,

$$B^{(j)} = (\ B^{(j)}_{i,\nu}\ ) = (\ B_{i,j,\nu}\ ),\ B^{(k)} = (\ B^{(k)}_{i,\nu}\ ) = (\ B_{i,k,\nu}\ ).$$

Равенства (3.30) или (3.31) являются условиями полной интегрируемости уравнения (3.28). Проанализируем их более подробно. Условия (3.31) представляют собой систему c_n^2 матричных уравнений или $c_n^2 m^2$ скалярных уравнений. Неизвестные в этой системе – это элементы матрицы B, которых всего nm^2. Число уравнений может быть меньшим (при $n=2$) равным (при $n=3$) или большим (при $n>3$) числа неизвестных. Рассмотрим эти случаи.

3.2.5.1. При $n=2$ имеем две матрицы $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, и условия полной интегрируемости состоят из одного матричного уравнения

$$^{0,1}(B^{(1)}B^{(2)}) = {}^{0,1}(B^{(2)}B^{(1)}). \qquad (3.32)$$

Число уравнений в этом случае равно m^2, а число неизвестных равно $2m^2$. Это значит, что мы можем попытаться выбрать m^2 элементов матрицы B произвольно, а другие m^2 элементов определить из условия полной интегрируемости (3.32). Самый простой вариант – это выбрать матрицу $B^{(1)}$ диагональной,

$$B^{(1)} = cE(0,1),$$

где $E(0,1)$ – $(0,1)$-единичная матрица m-го порядка (обычная двухмерная единичная матрица). Тогда вместо (3.32) получим

$$^{0,1}(cE(0,1)B^{(2)}) = {}^{0,1}(B^{(2)}cE(0,1)),$$

т.е. тождество $B^{(2)} = B^{(2)}$. Это значит, что матрицу $B^{(2)}$ можно взять произвольной.

Приведем конкретный пример выбора матрицы B при $m=2$, $n=2$. Если матрицы $B^{(1)} = (b_{i,j}^{(1)})$, $B^{(2)} = (b_{i,j}^{(2)})$, $i, j = 1,2$, выбрать в виде

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} b_{1,1}^{(1)} & b_{1,2}^{(1)} \\ b_{2,1}^{(1)} & b_{2,2}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad B^{(2)} = \begin{pmatrix} b_{1,1}^{(2)} & b_{1,2}^{(2)} \\ b_{2,1}^{(2)} & b_{2,2}^{(2)} \end{pmatrix},$$

то матрица B в (3.28) будет выглядеть следующим образом:

$$B = \begin{array}{c} \\ (1) \\ (2) \end{array} \!\! \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1,1) & (2,1) & (1,2) & (2,2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} c & b_{1,1}^{(2)} & 0 & b_{1,2}^{(2)} \\ 0 & b_{2,1}^{(2)} & c & b_{2,2}^{(2)} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Строки матрицы B соответствуют значениям первого индекса, проставленным перед матрицей, а столбцы соответствуют значениям второго и третьего индексов, проставленным над матрицей.

Приведем еще один алгоритм выбора матрицы B при $m=2$, $n=2$ таким образом, чтобы обеспечивались условия полной интегрируемости в условиях более свободного распоряжения элементами матрицы B.

1. Выбираем произвольно элементы $a_{1,1}^{(1)}, a_{2,2}^{(1)}, a_{2,1}^{(1)}, a_{2,1}^{(2)}$ и коэффициент $k \in R$.
2. Вычисляем элементы
$$a_{1,2}^{(1)} = -k\, a_{2,1}^{(1)},$$
$$a_{1,2}^{(2)} = -k\, a_{2,1}^{(2)}.$$
3. Выбираем произвольно элемент $a_{2,2}^{(2)}$.
4. Вычисляем элемент
$$a_{1,1}^{(2)} = a_{2,2}^{(2)} + \frac{(a_{1,1}^{(1)} - a_{2,2}^{(1)})a_{2,1}^{(2)}}{a_{2,1}^{(1)}}.$$
5. Выводим матрицы $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, произведения $B^{(1)}\,B^{(2)}$ и $B^{(2)}\,B^{(1)}$.

Если коэффициент k в п. 1 выбрать из условия
$$k > \frac{(a_{1,1}^{(1)} - a_{2,2}^{(1)})^2}{4(a_{2,1}^{(1)})^2},$$
то будет обеспечиваться колебательный характер процесса $Y(X)$.

3.2.5.2. При $n=3$ имеем три матрицы $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, $B^{(3)}$ и условия полной интегрируемости состоят из трех матричных уравнений
$$^{0,1}(B^{(1)}B^{(2)}) = {}^{0,1}(B^{(2)}B^{(1)}),$$
$$^{0,1}(B^{(1)}B^{(3)}) = {}^{0,1}(B^{(3)}B^{(1)}),$$
$$^{0,1}(B^{(2)}B^{(3)}) = {}^{0,1}(B^{(3)}B^{(2)}).$$
Этим матричным уравнениям можно удовлетворить, например, следующим образом. Выберем
$$B^{(1)} = c_1 E(0,1).$$

Тогда первые два из приведенных уравнений удовлетворяются при любых $B^{(2)}$, $B^{(3)}$. Однако матрицу $B^{(3)}$ нельзя брать произвольной, так как не будет удовлетворяться третье уравнение. Легко видеть, что при произвольной $B^{(2)}$ и

$$B^{(3)} = c_3 E(0,1)$$

будет удовлетворяться и третье уравнение.

Приведем пример выбора матрицы B при $m = 2$, $n = 3$. Если матрицы $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, $B^{(3)}$ выбрать в виде

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}, \quad B^{(2)} = \begin{bmatrix} b_{1,1}^{(2)} & b_{1,2}^{(2)} \\ b_{2,1}^{(2)} & b_{2,2}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad B^{(3)} = \begin{bmatrix} c_3 & 0 \\ 0 & c_3 \end{bmatrix},$$

то матрица B будет выглядеть следующим образом:

$$B = \begin{bmatrix} \overset{1,1,1}{c_1} & \overset{1,2,1}{b_{1,1}^{(2)}} & \overset{1,3,1}{c_3} & \overset{1,1,2}{0} & \overset{1,2,2}{b_{1,2}^{(2)}} & \overset{1,3,2}{0} \\ \overset{2,1,1}{0} & \overset{2,2,1}{b_{2,1}^{(2)}} & \overset{2,3,1}{0} & \overset{2,1,2}{c_1} & \overset{2,2,2}{b_{2,2}^{(2)}} & \overset{2,3,2}{c_3} \end{bmatrix}.$$

3.2.6. Многомерно-матричная $(0,0)$-экспонента аргумента ${}^{0,1}(B\overset{\circ}{X})$

Рассмотрим уравнение (3.20) в ситуации, когда $Y = y$ – скаляр ($p = 0$), а X – одномерная матрица (вектор) ($q = 1$). В этой ситуации мы имеем уравнение

$$\frac{dy(X)}{dX} = By, \quad y(X_0) = y_{0.} \tag{3.33}$$

где $B = (B_i)$ – одномерная матрица, и речь идет об отыскании скалярной функции $y = f(X)$ векторной переменной X. Данное уравнение интегрируемо при любой матрице B. Решение уравнения (3.33) получим из общего решения (3.27) подстановкой в него нужных значений параметров $p = 0$, $q = 1$:

$$y(X) = {}^{0,0}\exp({}^{0,1}(B\overset{\circ}{X}))\, y_0, \tag{3.34}$$

где

$${}^{0,0}\exp({}^{0,1}(B\overset{\circ}{X})) = 1 + {}^{0,1}(B\overset{\circ}{X}) + \frac{1}{2!}({}^{0,1}(B\overset{\circ}{X}))^2 + \frac{1}{3!}({}^{0,1}(B\overset{\circ}{X}))^3 + \dots \tag{3.35}$$

Последнее выражение (3.35) представляет собой $(0,0)$-экспоненту аргумента ${}^{0,1}(B\overset{\circ}{X})$. Поскольку ${}^{0,1}(B\overset{\circ}{X})$ – скаляр, то это обычная скалярная экспонента вида (3.2). Вместе с тем выражения (3.35) и (3.7) имеют разный смысл. Если выражение (3.7) представляет собой функцию одной переменной, то выражение (3.35) есть функция многих переменных.

3.3. Порядок выполнения работы

1. Запрограммировать расчет решения $Y(X)$ (3.12) многомерно-матричного дифференциального уравнения по исходным данным, приведенным в табл. 3.1. Для этого выписать из таблицы 3.1 требуемые параметры p, q, λ, μ и найти в описании работы выражения функции $Y(X)$ и экспоненты с данными параметрами (формулы (3.16), (3.27), (3.29) или (3.34)). Вывести двухмерный (при $q = 0$) или трехмерный и контурный графики (при $q = 1$, $n = 2$) полученных функций с помощью программы **meshc**. В случае $p \geq 1$ вывести график одного из элементов матрицы Y. В командное окно вывести также матрицу B и численные результаты, подтверждающие выполнение условий полной интегрируемости.

Указание. При расчете многомерно-матричной экспоненты использовать функцию Matlab **A=expm(C)**, которая вычисляет значение экспоненты от двухмерной матрицы C. Результат вычисления – двухмерная матрица **A.** Значения матрицы B выбрать самостоятельно, предусмотрев, если это необходимо, выполнение условий полной интегрируемости.

2. Запрограммировать расчет многомерно-матричной экспоненты (3.29) с $m = 2$, $n = 2$ и выбором элементов матрицы B по алгоритму, приведенному в п. 3.2.5.1. Вывести трехмерный и контурный графики элементов матрицы Y.

Таблица 3.1

№ варианта	Размерность q матрицы X	Порядок n матрицы X	Размерность p матрицы Y	Порядок m матрицы Y	λ	μ
1а	0	1	0	1	0	0
2а	0	1	1	2	0	1
3а	0	1	1	3	0	1
4а	0	1	1	2	0	0
5а	0	1	1	3	0	0
6а	0	1	1	2	1	0
7а	0	1	1	3	1	0
8а	0	1	1	2	0	0
9а	0	1	1	3	0	1
10а	0	1	1	2	1	0
11а	0	1	1	3	0	2
12а	0	1	1	2	2	0
13а	0	1	1	2	1	1
14а	1	2	0	1	0	0
15а	1	2	1	2	0	0
1б	1	2	1	3	0	0
2б	1	2	1	4	0	0
3б	1	2	1	2	0	1
4б	1	2	1	3	0	1
5б	1	2	1	4	0	1
6б	0	1	0	1	0	0
7б	0	1	1	2	0	1
8б	0	1	1	3	0	1
9б	0	1	1	2	0	0
10б	0	1	1	3	0	0

Окончание табл. 3.1

№ варианта	Размерность q матрицы X	Порядок n матрицы X	Размерность p матрицы Y	Порядок m матрицы Y	λ	μ
11б	0	1	1	2	1	0
12б	0	1	1	3	1	0
13б	0	1	1	4	0	0
14б	0	1	1	2	0	1
15б	0	1	1	4	1	0

3.4. Контрольные вопросы

1. Что такое контурные графики для функции двух переменных?
2. Что такое многомерно-матричная экспонента?
3. Какой вид имеют контурные графики для экспоненты ${}^{0,0}\exp({}^{0,1}(B\overset{\circ}{X}))$?
4. Какой вид имеют контурные графики для экспоненты ${}^{0,1}\exp({}^{0,1}(B^T\overset{\circ}{X}))$?

Лабораторная работа № 4. СЛУЧАЙНЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ МАТРИЦЫ

4.1. Цель работы

Изучение приемов работы с непрерывными и дискретными случайными многомерными матрицами на основе системы Matlab и интегрированного в нее пакета программ "Анализ многомерных данных".

4.2. Теоретические положения

4.2.1. Законы распределения случайных многомерных матриц

Определение. Случайной многомерной (p-мерной) $(n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p)$-матрицей $\overline{\xi}$ назовем организованную в виде многомерной матрицы совокупность $n = n_1 n_2 \cdots n_p$ случайных величин ξ_i, $i = (i_1, i_2, ..., i_p)$, заданных на вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$:

$$\overline{\xi} = (\xi_i), \ i = (i_1, i_2, ..., i_p), \ \ i_\alpha = \overline{1, n_\alpha}, \ \ \alpha = \overline{1, p}. \tag{4.1}$$

Определение. Функцией распределения случайной многомерной матрицы $\overline{\xi}$ (4.1) назовем совместную функцию распределения $n = n_1 n_2 \cdots n_p$ случайных величин ξ_i, $i = (i_1, i_2, ..., i_p)$:

$$F_{\xi}(\overline{x}) = P(\xi_i < x_i, \ i = (i_1, i_2, ..., i_p)),$$

где $\overline{x} = (x_i)$, $i = (i_1, i_2, ..., i_p)$ – p-мерная матрица аргументов функции распределения.

Определение. Случайная многомерная матрица $\overline{\xi}$ (4.1) называется непрерывной, если для нее существует неотрицательная функция $f_{\overline{\xi}}(\overline{x})$, удовлетворяющая равенству

$$F_{\overline{\xi}}(\overline{x}) = \int_{-\infty}^{x_{1,...,1}} \cdots \int_{-\infty}^{x_{n,...,n}} f_{\overline{\xi}}(\overline{z}) d\overline{z}.$$

Эта функция $f_{\overline{\xi}}(\overline{x})$ называется плотностью вероятности случайной многомерной матрицы $\overline{\xi}$.

Из данного определения вытекает, что

$$f_{\overline{\xi}}(\overline{x}) = \frac{\partial^{n^p}}{\partial x_{1,\ldots,1} \cdots \partial x_{n,\ldots,n}} F_{\overline{\xi}}(\overline{x}).$$

Все элементы случайной непрерывной многомерной матрицы являются случайными непрерывными величинами.

Определение. Случайная многомерная матрица $\overline{\xi}$ (4.1) называется дискретной, если все ее элементы являются случайными дискретными величинами. Случайные дискретные многомерные матрицы рассматриваются в разделе 4.2.4 данной работы.

4.2.2. Моменты случайных многомерных матриц

Определение. Начальным моментом m-го порядка случайной многомерной матрицы $\overline{\xi}$ (4.1) называется математическое ожидание m-й $(0,0)$-свернутой степени матрицы $\overline{\xi}$:

$$\nu_{\overline{\xi}}^{(m)} = E(\overline{\xi}^{\,m}) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x}^{\,m} f_{\overline{\xi}}(\overline{x}) d\overline{x} = (\nu_{\overline{\xi}, i_1, i_2, \ldots, i_{\text{ь}p-1}, i_{\text{ь}p}}^{(m)}) =$$

$$= (E(\xi_{i_1,\ldots,i_p} \xi_{i_{p+1},\ldots,i_{2p}} \cdots \xi_{i_{(\text{ь}-1)p+1},\ldots,i_{\text{ь}p}})),\ i_\alpha, i_{p+\alpha}, \ldots, i_{(m-1)p+\alpha} = \overline{1, n_\alpha},\ \alpha = \overline{1, p}. \quad (4.2)$$

Начальный момент первого порядка называется средним значением или математическим ожиданием случайной многомерной матрицы $\overline{\xi}$:

$$\nu_{\overline{\xi}}^{(1)} = E(\overline{\xi}) = \overline{a}_{\overline{\xi}} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x} f_{\overline{\xi}}(\overline{x}) d\overline{x} = (a_{\overline{\xi}, i_1, i_2, \ldots, i_p}).$$

Математическое ожидание случайной многомерной матрицы $\overline{\xi}$ обладает свойствами, аналогичными свойствам математического ожидания скалярной случайной величины. Так, если

$$\overline{\eta} = {}^{\lambda,\mu}(B\overline{\xi}),$$

где B – матрица коэффициентов, то

$$\overline{a}_\eta = E(\overline{\eta}) = {}^{\lambda,\mu}(BE(\overline{\xi})) = {}^{\lambda,\mu}(B\overline{a}_{\overline{\xi}}). \quad (4.3)$$

Действительно, по определению (λ,μ)-свернутого произведения и свойству математического ожидания суммы получим

$$E(\overline{\eta}) = E(\sum_{c} b_{l,s,c}\xi_{c,s,m}) = (\sum_{c} b_{l,s,c}a_{\xi,c,s,m}) =^{\lambda,\mu} (B\overline{a}_{\xi}).$$

Определение. Центральным моментом m-го порядка случайной матрицы $\overline{\xi}$ (4.1) называется математическое ожидание m-й $(0,0)$-свернутой степени матрицы $\overset{\circ}{\overline{\xi}} = \overline{\xi} - \nu^{(1)}_{\overline{\xi}}$:

$$\mu^{(m)}_{\overline{\xi}} = E(\overset{\circ}{\overline{\xi}}{}^{m}) = \int_{-\infty}^{\infty} (\overline{x} - \nu^{(1)}_{\overline{\xi}})^{m} f_{\overline{\xi}}(\overline{x})d\overline{x} = (\mu^{(m)}_{\overline{\xi},i_1,i_2,\ldots,i_{mp}}) =$$

$$= \left(E\left((\xi_{i_1,\ldots,i_p} - \nu^{(1)}_{\overline{\xi},i_1,\ldots,i_p})(\xi_{i_{p+1},\ldots,i_{2p}} - \nu^{(1)}_{\overline{\xi},i_{p+1},\ldots,i_{2p}})\cdots(\xi_{i_{(k-1)p},\ldots,i_{kp}} - \nu^{(1)}_{\overline{\xi},i_{(m-1)p+1},\ldots,i_{mp}})\right)\right),$$

$$i_{\alpha}, i_{p+\alpha}, \ldots, i_{(m-1)p+\alpha} = \overline{1, n_{\alpha}},\ \alpha = \overline{1, p}. \tag{4.4}$$

Из приведенных выше определений видно, что момент m-го порядка p-мерной матрицы является mp-мерной матрицей вида

$$\nu^{(m)}_{\overline{\xi}} = (\nu^{(m)}_{\overline{\xi},i_1,i_2,\ldots,i_k}) \text{ или } \mu^{(m)}_{\overline{\xi}} = (\mu^{(m)}_{\overline{\xi},i_1,i_2,\ldots,i_k}),$$

симметричной относительно своих p-мультииндексов $i = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$.

Центральный момент второго порядка называется ковариационной матрицей случайной многомерной матрицы $\overline{\xi}$:

$$\mu^{(2)}_{\overline{\xi}} = E(\overset{\circ}{\overline{\xi}}{}^{2}) = \overline{d}_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} (\overline{x} - \overline{a}_{\overline{\xi}})^{2} f_{\overline{\xi}}(\overline{x})d\overline{x} = (d_{\xi,i_1,i_2,\ldots,i_{2p-1},i_{2p}}). \tag{4.5}$$

Понятно, что ковариационная матрица $d_{\overline{\xi}}$ случайной p-мерной матрицы $\overline{\xi}$ – это $2p$-мерная матрица вида

$$d_{\overline{\xi}} = (d_{\overline{\xi},i,j}),$$

симметричная относительно своих p-мультииндексов $i = (i_1, i_2, \ldots, i_p)$ и $j = (j_1, j_2, \ldots, j_p)$. Ковариационная матрица случайной многомерной матрицы $\overline{\xi}$

имеет следующее свойство. Если случайная q-мерная матрица $\overline{\eta}$ определяется равенством

$$\overline{\eta} = {}^{0,p}(B\overline{\xi}),$$

где B – $(p+q)$-мерная матрица коэффициентов, то

$$d_{\overline{\eta}} = E(\overset{\circ}{\overline{\eta}}{}^2) = {}^{0,p}(B\ {}^{0,p}(d_{\overline{\xi}} B^{B_p})). \tag{4.6}$$

Действительно, поскольку $\overset{\circ}{\overline{\eta}} = {}^{0,p}(B\overset{\circ}{\overline{\xi}})$, то

$$d_{\overline{\eta}} = E(\overset{\circ}{\overline{\eta}}{}^2) = E({}^{0,0}({}^{0,p}(B\overset{\circ}{\overline{\xi}})\ {}^{0,p}(B\overset{\circ}{\overline{\xi}}))) = E({}^{0,0}({}^{0,p}(B\overset{\circ}{\overline{\xi}})\ {}^{0,p}(\overset{\circ}{\overline{\xi}} B^{B_p}))) =$$

$$= E({}^{0,p}(B\ {}^{0,0}(\overset{\circ}{\overline{\xi}}\ {}^{0,p}(\overset{\circ}{\overline{\xi}} B^{B_p})))) = E({}^{0,p}(B\,{}^{0,p}({}^{0,0}(\overset{\circ}{\overline{\xi}}\overset{\circ}{\overline{\xi}})B^{B_p}))) =$$

$$= {}^{0,p}(B\,{}^{0,p}(E({}^{0,0}(\overset{\circ}{\overline{\xi}}\overset{\circ}{\overline{\xi}}))B^{B_p})) = {}^{0,p}(B\,{}^{0,p}(d_{\overline{\xi}} B^{B_p})).$$

Определение. Случайная p-мерная матрица n-го порядка $\overline{\xi}$, плотность вероятности которой определяется выражением

$$f_{\overline{\xi}}(\overline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n^p}\,|\,d_{\overline{\xi}}\,|}}\exp(-\frac{1}{2}\ {}^{0,2p}(d_{\overline{\xi}}^{-1}(\overline{x}-\overline{a}_{\overline{\xi}})^2)), \tag{4.7}$$

называется гауссовской или нормальной случайной многомерной матрицей. В приведенном выражении $\overline{a}_{\overline{\xi}}$, $d_{\overline{\xi}}$ – параметры гауссовского многомерно-матричного распределения, причем $\overline{a}_{\overline{\xi}} = \nu_{\overline{\xi}}^{(1)}$ – математическое ожидание или начальный момент первого порядка, $d_{\overline{\xi}} = \mu_{\overline{\xi}}^{(2)}$ – ковариационная матрица или центральный момент второго порядка, $d_{\overline{\xi}}^{-1}$ – матрица, $(0,p)$-обратная к $d_{\overline{\xi}}$, $|\,d_{\overline{\xi}}\,|$ – определитель матрицы $d_{\overline{\xi}}$, под которым понимается определитель матрицы, $(0,p)$-ассоциированной с матрицей $d_{\overline{\xi}}$.

4.2.3. Связь между начальными и центральными моментами случайных многомерных матриц

По начальным моментам случайной многомерной матрицы $\bar{\xi}$ (4.1) до порядка m включительно можно получить центральные моменты до порядка m и наоборот. Однако общую формулу связи, как в одномерном случае [7], записать трудно, поэтому рассмотрим лишь частные случаи. Поскольку

$$\mu_{\bar{\xi}}^{(2)} = E((\bar{\xi} - \nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^2) = E(\bar{\xi}^2 - \bar{\xi}\nu_{\bar{\xi}}^{(1)} - \nu_{\bar{\xi}}^{(1)}\bar{\xi} + (\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^2),$$

то

$$\mu_{\bar{\xi}}^{(2)} = \nu_{\bar{\xi}}^{(2)} - (\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^2, \tag{4.8}$$

$$\nu_{\bar{\xi}}^{(2)} = \mu_{\bar{\xi}}^{(2)} + (\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^2. \tag{4.9}$$

Раскроем теперь выражение для центрального момента третьего порядка,

$$\mu_{\bar{\xi}}^{(3)} = E((\bar{\xi} - \nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^3) = E(\bar{\xi}^3 - \bar{\xi}\nu_{\bar{\xi}}^{(1)}\bar{\xi} - \nu_{\bar{\xi}}^{(1)}\bar{\xi}^2 + (\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^2\bar{\xi} -$$

$$- \bar{\xi}^2\nu_{\bar{\xi}}^{(1)} + \bar{\xi}(\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^2 + \nu_{\bar{\xi}}^{(1)}\bar{\xi}\nu_{\bar{\xi}}^{(1)} - (\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^3).$$

Отсюда получаем, что

$$\mu_{\bar{\xi}}^{(3)} = \nu_{\bar{\xi}}^{(3)} - \nu_{\bar{\xi}}^{(2)}\nu_{\bar{\xi}}^{(1)} - (\nu_{\bar{\xi}}^{(2)}\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^{(E_p, H_{2p,p})} - (\nu_{\bar{\xi}}^{(2)}\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^{B_{3p,p}} + 2(\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^3, \tag{4.10}$$

$$\nu_{\bar{\xi}}^{(3)} = \mu_{\bar{\xi}}^{(3)} + \mu_{\bar{\xi}}^{(2)}\nu_{\bar{\xi}}^{(1)} + (\mu_{\bar{\xi}}^{(2)}\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^{(E_p, H_{2p,p})} + (\mu_{\bar{\xi}}^{(2)}\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^{B_{3p,p}} + (\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^3. \tag{4.11}$$

Аналогично можно получить формулы для моментов 4-го порядка:

$$\nu_{\bar{\xi}}^{(4)} = \mu_{\bar{\xi}}^{(4)} + (\mu_{\bar{\xi}}^{(3)}\nu_{\bar{\xi}}^{(1)}) +$$

$$+ (\mu_{\bar{\xi}}^{(3)}\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^{B_{4p,p}} + (\mu_{\bar{\xi}}^{(3)}\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^{(E_p, B_{3p,p})} + (\mu_{\bar{\xi}}^{(3)}\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^{(E_{2p}, B_{2p,p})} + \mu_{\bar{\xi}}^{(2)}(\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^2 +$$

$$+ (\mu_{\bar{\xi}}^{(2)}(\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^2)^{B_{4p,2p}} + (\mu_{\bar{\xi}}^{(2)}(\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^2)^{(B_{3p,p}, E_p)} + (\mu_{\bar{\xi}}^{(2)}(\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^2)^{(E_p, B_{3p,2p},)} +$$

$$+ (\mu_{\bar{\xi}}^{(2)}(\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^2)^{(B_{3p,p}, E_p)*(E_{2p}, B_{2p,p})} + (\mu_{\bar{\xi}}^{(2)}(\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^2)^{(E_p, B_{2p,p}, E_p)} + (\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^4, \quad 4.12)$$

$$\mu_{\bar{\xi}}^{(4)} = \nu_{\bar{\xi}}^{(4)} - (\nu_{\bar{\xi}}^{(3)}\nu_{\bar{\xi}}^{(1)}) -$$

$$-(\nu_{\bar{\xi}}^{(3)}\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^{B_{4p,p}}-(\nu_{\bar{\xi}}^{(3)}\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^{(E_p,B_{3p,p})}-(\nu_{\bar{\xi}}^{(3)}\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^{(E_{2p},B_{2p,p})}+\nu_{\bar{\xi}}^{(2)}(\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^2+$$

$$+(\nu_{\bar{\xi}}^{(2)}(\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^2)^{B_{4p,2p}}+(\nu_{\bar{\xi}}^{(2)}(\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^2)^{(B_{3p,p},E_p)}+(\nu_{\bar{\xi}}^{(2)}(\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^2)^{(E_p,B_{3p,2p},)}+$$

$$+(\nu_{\bar{\xi}}^{(2)}(\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^2)^{(B_{3p,p},E_p)*(E_{2p},B_{2p,p})}+(\nu_{\bar{\xi}}^{(2)}(\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^2)^{(E_p,B_{2p,p},E_p)}-3(\nu_{\bar{\xi}}^{(1)})^4. \quad (4.13)$$

Если $\bar{\xi}$ – случайный вектор, то в полученных формулах следует положить $p=1$. Нижние строки подстановок транспонирования матриц в этом случае имеют вид: $T1=(E_1,B_{2,1})=(1,3,2)$, $T2=B_{3,1}=(2,3,1)$, $S1=B_{4,1}=(2,3,4,1)$, $S2=B_{4,2}=(3,4,1,2)$, $S3=(B_{3,1},E_1)=(2,3,1,4)$, $S4=(E_1,B_{3,1})=(1,3,4,2)$, $S5=$ $=(E_2,B_{2,1})=(1,2,4,3)$, $S6=(E_1,B_{3,2})=(1,4,2,3)$, $S7=(B_{3,1},E_1,)*(E_2,B_{2,1})=$ $=(2,4,1,3)$, $S8=(E_1,B_{2,1},E_1)=(1,3,2,4)$. Верхние строки подстановок $T1$, $T2$ имеют вид $(1,2,3)$, подстановок $S1-S8$ – вид $(1,2,3,4)$.

Расчеты по полученным формулам для случайного вектора $\bar{\xi}$ ($p=1$) реализованы в пакете программ «Анализ многомерных данных» (программы **mu_momn, nu_momn**).

4.2.4. Случайные дискретные многомерные матрицы

4.2.4.1. Случайный дискретный двухмерный вектор

Пусть $\bar{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$ – случайный дискретный двухмерный вектор (одномерная случайная матрица второго порядка). Такой вектор удобно описывать вероятностями возможных значений. Если обозначить x_{1,i_1}, $i_1=\overline{1,k_1}$, возможные значения компоненты ξ_1 и x_{2,i_2}, $i_2=\overline{1,k_2}$, возможные значения компоненты ξ_2, то распределение вероятностей случайного вектора $\bar{\xi}$ будет полностью определяться вероятностями $p_{i_1,i_2}=P(\xi_1=x_{1,i_1},\xi_2=x_{2,i_2})=$ $P(x_{1,i_1},x_{2,i_2})$. Эти вероятности образуют двухмерную матрицу вероятностей $P_{\bar{\xi}}=(p_{i_1,i_2})$, $i_1=\overline{1,k_1}$,

$i_2 = \overline{1,k_2}$, со свойством нормировки $\sum_{i_1=1}^{k_1}\sum_{i_2=1}^{k_2} p_{i_1,i_2} = 1$ [7]. Маргинальные распределения могут быть получены по формулам

$$P_{\xi_1} = (P(\xi_1 = x_{1,i_1})) = (P(x_{1,i_1})) = \sum_{i_2=1}^{k_2} p_{i_1,i_2} ,$$

$$P_{\xi_2} = (P(\xi_2 = x_{2,i_2})) = (P(x_{2,i_2})) = \sum_{i_1=1}^{k_1} p_{i_1,i_2} .$$

Индексированные векторы $\bar{y}_{i_1,i_2} = (x_{1,i_1}, x_{2,i_2})$, $i_1 = \overline{1,k_1}$, $i_2 = \overline{1,k_2}$, при различных комбинациях значений индексов i_1 и i_2 являются возможными значениями случайного вектора $\bar{\xi}$. Начальный момент m-го порядка случайного вектора $\bar{\xi}$ определяется формулой

$$\nu_{\bar{\xi}}^{(m)} = E(\bar{\xi}^{\,m}) = \sum_{i_1=1}^{k_1}\sum_{i_2=1}^{k_2} \bar{y}_{i_1,i_2}^{\,m}\, p_{i_1,i_2} ,\ m = 0,1,2,\ldots .$$

При определении начального момента мы воспользовались многомерно-матричными обозначениями и определили m-ю степень вектора как (0,0)-свернутую: $\bar{\xi}^{\,m} = {}^{0,0}\bar{\xi}^{\,m}$, $\bar{y}_{i_1,i_2}^{\,m} = {}^{0,0}\bar{y}_{i_1,i_2}^{\,m}$ [1, 2].

4.2.4.2. Случайный дискретный многомерный вектор

Обобщим полученные результаты на дискретный случайный n-мерный вектор $\bar{\xi} = (\xi_\nu)$, $\nu = \overline{1,n}$ (одномерную случайную матрицу n-го порядка). Пусть каждая ν-я компонента ξ_ν этого вектора может принимать значения x_{ν,i_ν}, $\nu = \overline{1,n}$, $i_\nu = \overline{1,k_\nu}$. Множество возможных значений компонент вектора $\bar{\xi}$ представляет собой двухмерную матрицу $\bar{x} = (x_{\nu,i_\nu})$, имеющую n строк различной длины. Отдельная строка матрицы $\bar{x}$ соответствует отдельной компоненте вектора $\bar{\xi}$ и содержит возможные значения этой компоненты. В компьютерных расчетах матрицу $\bar{x}$ удобно определять как $(n \times k_{\max})$-матрицу, $k_{\max} = \max_\nu(k_\nu)$, заполняя ее неиспользуемые элементы нулями. Зафиксировав в матрице

$\bar{x}=(x_{\nu,i_\nu})$ номер строки $\nu=\dot{\nu}$, мы получим $\dot{\nu}$-ю строку этой матрицы $\bar{x}_{\dot{\nu}}=(x_{\dot{\nu},i_\nu})$ (сечение ориентации $\dot{\nu}$). Пусть $Y=\times\prod_{\nu=1}^{n}\bar{x}_\nu=\times\prod_{\nu=1}^{n}(x_{\nu,i_\nu})$ – декартово произведение всех строк (сечений ориентации ν) матрицы $\bar{x}=(x_{\nu,i_\nu})$. Элементами множества Y являются индексированные векторы

$$\bar{y}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}=(x_{1,i_1},x_{2,i_2},\ldots,x_{n,i_n}),\ i_1=\overline{1,k_1},\ldots,\ i_n=\overline{1,k_n},$$

которые представляют собой возможные значения вектора $\bar{\xi}$. Распределение вероятностей случайного вектора $\bar{\xi}$ определяется вероятностями его возможных значений

$$p_{i_1,i_2,\ldots,i_n}=P(\bar{\xi}=\bar{y}_{i_1,i_2,\ldots,i_n})=P(\xi_1=x_{1,i_1},\xi_2=x_{2,i_2},\ldots,\xi_n=x_{n,i_n})=$$
$$=P(x_{1,i_1},x_{2,i_2},\ldots,x_{n,i_n}).$$

Эти вероятности образуют n-мерную матрицу вероятностей $P_{\bar{\xi}}=(p_{i_1,i_2,\ldots,i_n})$, $i_1=\overline{1,k_1}$, …, $i_n=\overline{1,k_n}$, со свойством нормировки $\sum_{i_1=1}^{k_1}\ldots\sum_{i_n=1}^{k_n}p_{i_1,i_2,\ldots,i_n}=1$. Начальный момент m-го порядка случайного вектора $\bar{\xi}$ определяется формулой

$$\nu_{\bar{\xi}}^{(m)}=E(\bar{\xi}^{\,m})=\sum_{i_1=1}^{k_1}\ldots\sum_{i_n=1}^{k_n}\bar{y}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}^{\,m}\,p_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\quad m=0,1,2,\ldots .$$

С использованием векторного индекса (мультииндекса) $i=(i_1,i_2,\ldots,i_n)=(i_\nu)$, $\nu=\overline{1,n}$, обозначения упрощаются:

$$p_{i_1,i_2,\ldots,i_n}=p_i=P(\bar{\xi}=\bar{y}_i)=P(\bar{y}_i),\ \sum_i P(\bar{y}_i)=1,$$

$$\nu_{\bar{\xi}}^{(m)}=E(\bar{\xi}^{\,m})=\sum_i\bar{y}_i^{\,m}p_i\ . \tag{4.14}$$

Центральный момент второго порядка (ковариационная матрица) случайного вектора $\bar{\xi}$ определяется выражением

$$\mu_{\bar{\xi}}^{(2)}=E((\bar{\xi}-E(\bar{\xi}))^2)=\nu_{\bar{\xi}}^{(2)}-\nu_{\bar{\xi}}^{(1)}\nu_{\bar{\xi}}^{(1)}. \tag{4.15}$$

4.2.4.3. Случайная дискретная многомерная матрица

Рассмотрим еще более общий случай, когда $\bar{\xi} = (\xi_{v_1, v_2, \dots, v_q})$, $v_1 = \overline{1, n_1}$, …, $v_q = \overline{1, n_q}$, – дискретная случайная q-мерная матрица. Каждый элемент $\xi_{v_1, v_2, \dots, v_q}$ матрицы $\bar{\xi}$ может принимать значения $x_{v_1, v_2, \dots, v_q, i_{v_1, v_2, \dots, v_q}}$, так что множество возможных значений элементов матрицы $\bar{\xi}$ представляет собой $(q+1)$-мерную матрицу $\bar{x} = (x_{v_1, v_2, \dots, v_q, i_{v_1, v_2, \dots, v_q}})$, $v_1 = \overline{1, n_1}$, …, $v_q = \overline{1, n_q}$, $i_{v_1, v_2, \dots, v_q} = \overline{1, k_{v_1, v_2, \dots, v_q}}$, сечение ориентации $(v_1, v_2, \dots, v_q)$ которой содержит $k_{v_1, v_2, \dots, v_q}$ элементов. В компьютерных расчетах матрицу $\bar{x}$ удобно определить как $(n_1 \times n_2 \times \dots \times n_q \times k_{\max})$-матрицу, $k_{\max} = \max\limits_{v_1, v_2, \dots, v_q} (k_{v_1, v_2, \dots, v_q})$, заполняя ее неиспользуемые элементы нулями. Введя q-мультииндекс $v = (v_1, v_2, \dots, v_q) = (v_\lambda)$, $\lambda = \overline{1, q}$, и индекс $i_v = i_{v_1, \dots, v_q}$, мы можем записать случайную q-мерную матрицу $\bar{\xi}$ в виде $\bar{\xi} = (\xi_v)$, $v \in \overline{1, n_1} \times \dots \times \overline{1, n_q}$, а множество возможных значений элементов матрицы $\bar{\xi}$ – в виде $\bar{x} = (x_{v, i_v})$, $v \in \overline{1, n_1} \times \dots \times \overline{1, n_q}$, $i_v = \overline{1, k_v}$. Числа k_v образуют q-мерную матрицу (k_v) предельных значений индексов i_v. Матрицу начальных значений индексов i_v, состоящую из единиц, обозначим (1_v), и для q-мерной матрицы (i_v) будем писать, что $(i_v) = \overline{(1_v), (k_v)}$. Зафиксировав в матрице $\bar{x} = (x_{v, i_v})$ значение $v = \dot{v}$, мы получим сечение ориентации $\dot{v}$ $\bar{x}_{\dot{v}} = (x_{\dot{v}, i_v})$. Пусть $Y = \times \prod\limits_{v} \bar{x}_v = \times \prod\limits_{v} (x_{v, i_v})$ – декартово произведение всех сечений ориентации v матрицы $\bar{x} = (x_{v, i_v})$. Элементами множества Y являются индексированные векторы

$$\bar{y}_{(i_v)} = \times \prod_{v} x_{v, i_v}, \qquad (4.16)$$

которые представляют собой возможные значения дискретной случайной q-мерной матрицы $\overline{\xi}$. Распределение вероятностей случайной матрицы $\overline{\xi}$ определяется вероятностями ее возможных значений

$$p_{(i_\nu)} = P(\overline{\xi} = \overline{y}_{(i_\nu)})$$

со свойством нормировки

$$\sum_{(i_\nu)=(1_\nu)}^{(k_\nu)} p_{(i_\nu)} = 1 .$$

Вероятности $p_{(i_\nu)}$ можно интерпретировать как элементы $(n = n_1 n_2 \cdots n_q)$-мерной матрицы размером $(k_{1,\ldots,1} \times \cdots \times k_{n_1,n_2,\ldots,n_q})$. Если обозначить $(i_\nu) = i$, $(1_\nu) = 1$, $(k_\nu) = k$, то мы увидим, что в многомерно-матричном случае сохраняются обозначения векторного случая, так что будут справедливы формулы для моментов (4.14), (4.15).

4.2.4.4. Пример

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим случайную дискретную двухмерную матрицу $\overline{\xi} = (\xi_{\nu_1,\nu_2})$, $\nu_1 = \overline{1,2}$, $\nu_2 = \overline{1,2}$:

$$\overline{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{1,2} \\ \xi_{2,1} & \xi_{2,2} \end{pmatrix}.$$

В данном случае мы имеем $q = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$. Зададим матрицу предельных значений индексов в виде

$$k = (k_{\nu_1,\nu_2}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Это значит, что элементы $\xi_{1,1}$, $\xi_{1,2}$, $\xi_{2,1}$, $\xi_{2,2}$ могут принимать 3, 1, 2 и 2 возможные значения соответственно. Матрица возможных значений элементов случайной матрицы $\overline{\xi}$ представляет собой трехмерную матрицу $\overline{x} = (x_{\nu_1,\nu_2,i_{\nu_1,\nu_2}})$, у которой $i_{1,1} = \overline{1,3}$, $i_{1,2} = 1$, $i_{2,1} = \overline{1,2}$, $i_{2,2} = \overline{1,2}$. Поскольку максимальное число возможных значений элементов $k_{\max} = 3$, то примем, что $i_{\nu_1,\nu_2} = \overline{1,3} \;\; \forall \nu_1, \nu_2$. Пусть

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \overset{(1,1,1)}{0} & \overset{(1,2,1)}{-1} & \overset{(1,1,2)}{1} & \overset{(1,2,2)}{-} & \overset{(1,1,3)}{2} & \overset{(1,2,3)}{-} \\ \overset{(2,1,1)}{-1} & \overset{(2,2,1)}{0} & \overset{(2,1,2)}{1} & \overset{(2,2,2)}{2} & \overset{(2,1,3)}{-} & \overset{(2,2,3)}{-} \end{pmatrix}.$$

Здесь и ниже над элементами матрицы в скобках указаны значения индексов. Знак «–» в матрице означает, что значение может быть любым, так как оно не будет участвовать в обработке. Для задания распределения вероятностей рассматриваемой случайной матрицы $\bar{\xi}$ необходимо определить четырехмерную $(3 \times 1 \times 2 \times 2)$-матрицу вероятностей $P(\bar{\xi} = \bar{y}_{i_{1,1}, i_{1,2}, i_{2,1}, i_{2,2}}) = \; = P(\bar{y}_{i_{1,1}, i_{1,2}, i_{2,1}, i_{2,2}})$ со свойством нормировки $\sum_{i_{1,1}=1}^{3} \sum_{i_{1,2}=1}^{1} \sum_{i_{2,1}=1}^{2} \sum_{i_{2,2}=1}^{2} P(\bar{y}_{i_{1,1}, i_{1,2}, i_{2,1}, i_{2,2}}) = 1$. Определим ее в виде

$$P = \begin{pmatrix} \overset{(1,1,1,1)}{0.10} & \overset{(1,1,2,1)}{0.07} & \overset{(1,1,1,2)}{0.08} & \overset{(1,1,2,2)}{0.09} \\ \overset{(2,1,1,1)}{0.08} & \overset{(2,1,2,1)}{0.06} & \overset{(2,1,1,2)}{0.07} & \overset{(2,1,2,2)}{0.05} \\ \overset{(3,1,1,1)}{0.08} & \overset{(3,1,2,1)}{0.10} & \overset{(3,1,1,2)}{0.12} & \overset{(3,1,2,2)}{0.10} \end{pmatrix}.$$

Каждому элементу этой матрицы соответствует возможное значение $\bar{y}$ матрицы $\bar{\xi}$. Например,

$$p_{3,1,2,1} = P(\xi_{1,1} = x_{1,1,3}, \xi_{1,2} = x_{1,2,1}, \xi_{2,1} = x_{2,1,2}, \xi_{2,2} = x_{2,2,1}) = P\left(\bar{\xi} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Все возможные значения матрицы $\bar{\xi}$ можно получить программным путем на основе формулы (4.16). В результате компьютерных расчетов по формулам (4.14), (4.15) были получены следующие значения моментов случайной матрицы $\bar{\xi}$:

$$\nu_{\bar{\xi}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.06 & -1.00 \\ -0.06 & 1.02 \end{pmatrix},$$

$$
\nu_{\bar{\xi}}^{(2)}=\begin{pmatrix}
\overset{(1,1,1,1)}{1.1236} & \overset{(1,1,2,1)}{-0.0636} & \overset{(1,1,1,2)}{-1.0600} & \overset{(1,1,2,2)}{1.0812}\\
\overset{(2,1,1,1)}{-0.0636} & \overset{(2,1,2,1)}{0.0036} & \overset{(2,1,1,2)}{0.0600} & \overset{(2,1,2,2)}{-0.0612}\\
\overset{(1,2,1,1)}{-1.0600} & \overset{(1,2,2,1)}{0.0600} & \overset{(1,2,1,2)}{1.0000} & \overset{(1,2,2,2)}{-1.0200}\\
\overset{(2,2,1,1)}{1.0812} & \overset{(2,2,2,1)}{-0.0612} & \overset{(2,2,1,2)}{-1.0200} & \overset{(2,2,2,2)}{1.0400}
\end{pmatrix},
$$

$$
\mu_{\bar{\xi}}^{(2)}=\begin{pmatrix}
\overset{(1,1,1,1)}{0.7364} & \overset{(1,1,2,1)}{0.0236} & \overset{(1,1,1,2)}{0} & \overset{(1,1,2,2)}{0.0388}\\
\overset{(2,1,1,1)}{0.0236} & \overset{(2,1,2,1)}{0.9964} & \overset{(2,1,1,2)}{0} & \overset{(2,1,2,2)}{0.0012}\\
\overset{(1,2,1,1)}{0} & \overset{(1,2,2,1)}{0} & \overset{(1,2,1,2)}{0} & \overset{(1,2,2,2)}{0}\\
\overset{(2,2,1,1)}{0.0388} & \overset{(2,2,2,1)}{0.0012} & \overset{(2,2,1,2)}{0} & \overset{(2,2,2,2)}{0.9996}
\end{pmatrix}.
$$

Правильность полученных результатов подтверждается ручными расчетами.

Ниже приведен m-файл-сценарий программы расчетов для данного примера.

```
% Расчет моментов случайной дискретной двухмерной матрицы
clc
clear
% Задание размера случайной матрицы
n1=2; n2=2;
% Задание числа возможных значений элементов случайной матрицы
k=[3 1; 2 2];
% Задание матрицы возможных значений элементов случайной матрицы
x=[0 -1; -1 0];
x(:,:,2)=[1 0; 1 2];
x(:,:,3)=[2 0; 0 0];
% Задание матрицы вероятностей возможных значений элементов
p(1,1,1,1)=0.1;  p(1,1,2,1)=0.07; p(1,1,1,2)=0.08; p(1,1,2,2)=0.09;
p(2,1,1,1)=0.08; p(2,1,2,1)=0.06; p(2,1,1,2)=0.07; p(2,1,2,2)=0.05;
p(3,1,1,1)=0.08; p(3,1,2,1)=0.10; p(3,1,1,2)=0.12; p(3,1,2,2)=0.10;
% Задание начальных значений для расчета матриц начальных моментов 1-го и
% 2-го порядков
nu_1=zeros(n1,n2);
```

```
nu_2=zeros(n1,n2,n1,n2);
% Формирование декартова произведения сечений матрицы возможных
% значений элементов случайной матрицы
  for i11=1:1:k(1,1); i(1,1)=i11;
    for i12=1:1:k(1,2); i(1,2)=i12;
      for i21=1:1:k(2,1); i(2,1)=i21;
        for i22=1:1:k(2,2); i(2,2)=i22;
% Формирование возможных значений случайной матрицы
           for nu1=1:1:2
             for nu2=1:1:2
               y(nu1,nu2)=x(nu1,nu2,i(nu1,nu2));
             end
           end
% Формирование квадратов возможных значений случайной матрицы
           for i1=1:1:2
             for i2=1:1:2
               for i3=1:1:2
                 for i4=1:1:2
                  y2(i1,i2,i3,i4)=x(i1,i2,i(i1,i2))*x(i3,i4,i(i3,i4));
                 end
               end
             end
           end
% Расчет начальных моментов 1-го и 2-го порядков
         nu_1=nu_1 + y*p(i11,i12,i21,i22);
         nu_2=nu_2+y2*p(i11,i12,i21,i22);
        end% for i22
      end% for i21
    end% for i12
  end% for i11
```

```
 nu_1
% Расчет произведения начальных моментов 1-го порядка
 for nu1=1:1:2
  for nu2=1:1:2
   for i3=1:1:2
    for i4=1:1:2
     nu_12(nu1,nu2,i3,i4)=nu_1(nu1,nu2)*nu_1(i3,i4);
    end
   end
  end
 end
 nu_12
% Расчет центрального момента 2-го порядка (ковариационной матрицы)
 mu_2=nu_2-nu_12;
 mu_2
```

4.3. Порядок выполнения работы

1. Рассчитайте математическое ожидание и ковариационную матрицу случайной многомерной дискретной матрицы. Параметры матрицы возьмите из табл. 4.1 в соответствии с номером бригады и кодом подгруппы (а или б). Числа возможных значений элементов матрицы и возможные значения выберите самостоятельно. Выберите самостоятельно также матрицу вероятностей возможных значений, удовлетворяющую условию нормировки.

2. Найдите распределение вероятностей одного из элементов случайной многомерной дискретной матрицы (маргинальное распределение), его математическое ожидание и дисперсию. Результаты сравните с результатами, полученными для всей матрицы.

Таблица 4.1

Номер варианта задания	Размерность q матрицы $\bar{\xi}$	Размер матрицы $\bar{\xi}$	Номер варианта задания	Размерность q матрицы $\bar{\xi}$	Размер матрицы $\bar{\xi}$
1	2	3	4	5	6
1а	1	4	1б	2	(2×2)
2а	2	(2×2)	2б	1	6
1	2	3	4	5	6
3а	1	5	3б	2	(3×2)
4а	2	(2×3)	4б	1	5
5а	1	4	5б	2	(2×3)
6а	2	(3×2)	6б	1	4
7а	1	5	7б	2	(2×2)
8а	2	(2×2)	8б	1	6
9а	1	6	9б	2	(2×3)
10а	2	(2×3)	10б	1	5
11а	1	7	11б	2	(2×2)
12а	2	(3×2)	12б	1	4
13а	1	8	13б	2	(3×2)
14а	2	(2×3)	14б	1	3
15а	1	7	15б	2	(2×3)

4.4. Контрольные вопросы

1. Дайте определение случайной многомерной матрицы.
2. Дайте определения начальных и центральных моментов случайной многомерной матрицы.
3. Запишите формулу для расчета центрального момента второго порядка случайной многомерной матрицы по ее начальным моментам.
4. Запишите формулу для расчета начального момента m-го порядка случайной дискретной многомерной матрицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муха В.С. Анализ многомерных данных: Монография. Мн.: Технопринт, 2004. – 368 с.
2. Муха В.С. Моделирование многомерных систем и процессов. Многомерно-матричный подход: Метод. пособие для аспирантов и науч. работников. – Мн.:БГУИР,1998. – 40 с.
3. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. – Киев: Наукова думка, 1972. – 175 с.
4. Калюжнин Л.А., Сущанский В.И. Преобразования и перестановки. – М.: Наука, 1979. – 112 с.
5. Муха В.С., Птичкин В.А. Введение в MATLAB: Метод. пособие для выполнения лаб. работ по курсам "Статистические методы обработки данных" и "Теория автоматического управления" для спец. 53 01 02 "Автоматизированные системы обработки информации". – Мн.: БГУИР, 2002. – 40 с.
6. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. MATLAB 5.0/5.3. Система символьной математики. – М.: Нолидж. – 1999. – 740 с.
7. Муха В.С. Теория вероятностей: Учеб. пособие для студентов технических специальностей высших учебных заведений. – Мн.: БГУИР, 2001. – 167 с.

Св. план 2005, поз. 38

Учебное издание

Муха Владимир Степанович
Корчиц Казимир Станиславович

АНАЛИЗ МНОГОМЕРНЫХ ДАННЫХ

Лабораторный практикум
для студентов специальности I-53 01 02
"Автоматизированные системы обработки информации"
всех форм обучения

Редактор Т.Н. Крюкова

Подписано в печать 13.04.2005.	Формат 60×84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».	Печать ризографическая.	Усл. печ. л. 3,37.
Уч.-изд. л. 2,0.	Тираж 100 экз.	Заказ 59.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
Лицензия на осуществление издательской деятельности №02330/0056964 от 01.04.2004.
Лицензия на осуществление полиграфической деятельности №02330/0133108 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6