Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра информационных технологий автоматизированных систем

В. С. Муха

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

*Рекомендовано УМО по образованию
в области информатики и радиоэлектроники для специальности 1-53 01 02
«Автоматизированные системы обработки информации»
в качестве учебно-методического пособия*

Минск БГУИР 2013

УДК 519.216(075)
ББК 22.171я7
М92

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра компьютерных технологий и систем
Белорусского государственного университета (протокол №12 от 26.03.2013 г.);

профессор кафедры математического моделирования и анализа данных
Белорусского государственного университета,
доктор физико-математических наук, профессор Е. Е. Жук

Муха, В. С.
М92 Случайные процессы : учеб.-метод. пособие / В. С. Муха. – Минск : БГУИР, 2013. – 188 с. : ил.
ISBN 978-985-488-967-2.

В пособии излагаются основы теории случайных процессов. Приводятся сведения из теории множеств, рассматриваются некоторые вопросы теории вероятностей. Даются основные определения теории случайных процессов. Рассматриваются различные классы случайных процессов с непрерывным и дискретным временем, непрерывными и дискретными значениями (состояниями). Изучаются свойства выборочных функций и динамические преобразования случайных процессов.

Пособие адресовано студентам технических специальностей высших учебных заведений.

УДК 519.216(075)
ББК 22.171я7

ISBN 978-985-488-967-2

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии излагаются основы теории случайных процессов. Предполагается, что читатель изучил теорию вероятностей в определенном объеме, например, в объеме пособия [15]. Вместе с тем в настоящее учебное пособие включен раздел «Некоторые вопросы теории вероятностей», который может быть полезен тому, у кого возникнет желание восполнить знания в этой области на несколько ином уровне.

Выбор заявленных тем для рассмотрения отражает специфику специальности, для которой предназначено пособие, и предпочтения автора. В издании представлен широкий набор классов случайных процессов: с непрерывным и дискретным временем, с непрерывными и дискретными состояниями, стационарные случайные процессы, марковские случайные процессы. Рассматриваются свойства выборочных функций, спектральная теория и динамические преобразования случайных процессов. Данный спектр вопросов представляется необходимым и достаточным для приобретения как требуемых компетенций, так и возможностей дальнейшего совершенствования в изучаемой области.

При изложении материала автор исходил из того, что усвоению подлежат не только факты и теоретические положения, но и доказательный инструментарий дисциплины (изложение материала сопровождается доказательствами). Однако в случаях, когда существующие доказательства, по мнению автора, оказываются громоздкими или выходящими по сложности за определенный уровень, предпочтение отдается изложению только фактического материала.

При написании пособия были использованы литературные источники, приведенные в списке литературы. Однако конкретные ссылки по отдельным вопросам в пособии приводятся не всегда.

Пособие предназначено для студентов технических специальностей высших учебных заведений. Оно может быть полезно также магистрантам, аспирантам и преподавателям.

1. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Операции над множествами

В основе теории вероятностей и, как следствие, теории случайных процессов лежит теория множеств. Приведем некоторые сведения из теории множеств и теории вероятностей, на которые нам придется в дальнейшем опираться. При изложении материала будем исходить из того, что читатель изучал курс теории вероятностей в определенном объеме с той или иной степенью строгости, например, в рамках учебного пособия [15].

Пусть A, B, C, …, A_i, $i = 1,2,\ldots$, – произвольные множества. Объединением множеств A_i называется множество B, каждый элемент которого $x \in B$ принадлежит хотя бы одному их множеств A_i. Объединение множеств обозначается следующим образом:

$$B = \bigcup_i A_i = A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots .$$

Объединение двух множеств $B = A_1 \bigcup A_2$ представлено на рис. 1.1.

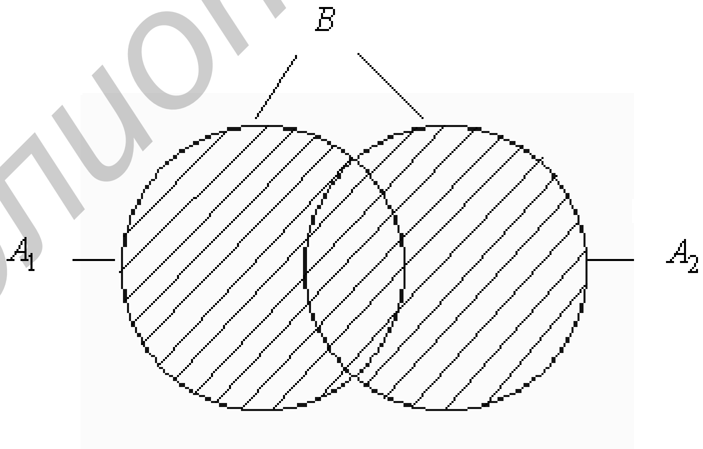

Рис. 1.1. Объединение двух множеств

Пересечением множеств A_i называется множество B, каждый элемент которого $x \in B$ принадлежат каждому из множеств A_i, $i = 1,2,\ldots$. Пересечение множеств обозначается следующим образом:

$$B = \bigcap_i A_i = A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots .$$

Пересечение двух множеств $C = A_1 \bigcup A_2$ представлено на рис. 1.2.

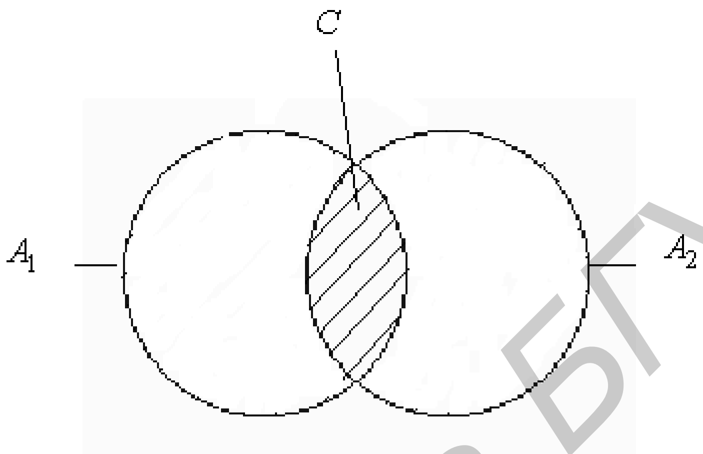

Рис. 1.2. Пересечение множеств

Операции объединения и пересечения множеств по своему определению коммутативны, т. е.

$$A_1 \bigcup A_2 = A_2 \bigcup A_1 , \; A_1 \bigcap A_2 = A_2 \bigcap A_1 ,$$

и ассоциативны:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Кроме того, они взаимно дистрибутивны:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Разностью множеств A и B называется множество $C = A \setminus B$, каждый элемент которого $x \in C$ принадлежит A и не принадлежит B (рис. 1.3).

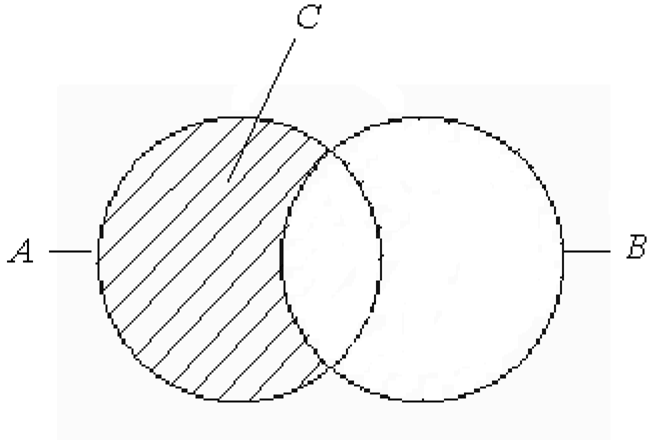

Рис. 1.3. Разность множеств A и B

Симметрической разностью множеств A и B называется объединение разностей множеств $A \setminus B$ и $B \setminus A$ (рис. 1.4). Обозначается симметрическая разность как $A \Delta B$ и по определению равна

$$C = A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A).$$

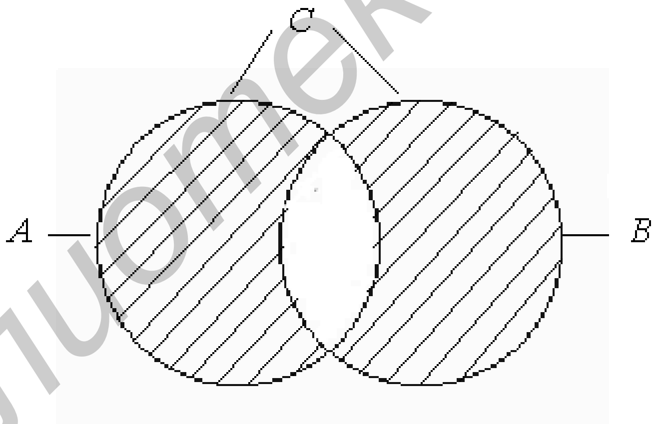

Рис. 1.4. Симметрическая разность множеств A и B

В теории вероятностей рассматриваются не произвольные множества, а подмножества некоторого фиксированного множества Ω, $A_i \subseteq \Omega$. В этом случае множество $C = \Omega \setminus A$ называется дополнением множества A (до множества Ω) и обозначается как $\overline{A}$, так что $\overline{A} = \Omega \setminus A$ (рис. 1.5).

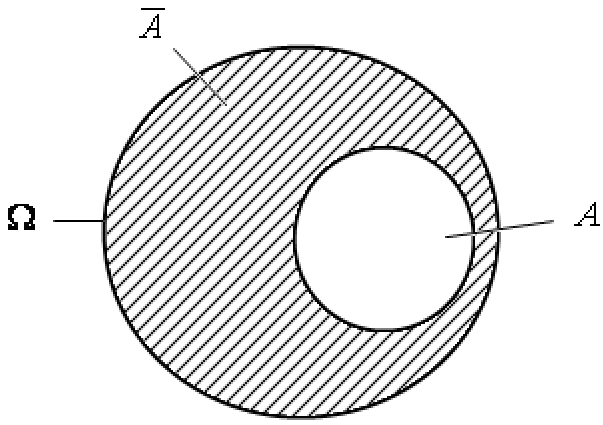

Рис. 1.5. Дополнение множества A до множества Ω

Для подмножеств некоторого множества Ω важную роль играет так называемый принцип двойственности, определяемый следующими соотношениями:

1. Дополнение объединения равно пересечению дополнений:

$$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i}. \qquad (1.1)$$

2. Дополнение пересечения равно объединению дополнений:

$$\overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}. \qquad (1.2)$$

Смысл принципа двойственности заключается в том, что из любой теоремы, относящейся к подмножествам фиксированного множества Ω, автоматически может быть получена другая, двойственная теорема, путем замены в исходной теореме всех рассматриваемых множеств их дополнениями, объединений – пересечениями, а пересечений – объединениями.

Приведем доказательство равенства (1.1). Пусть $X = \overline{\bigcup_i A_i}$. Это означает, что x не является элементом ни одного из дополнений $\overline{A_i}$, а потому $x \in \bigcap_i \overline{A_i}$. Пусть теперь $x \in \bigcap_i \overline{A_i}$, т. е. является элементом каждого из множеств $\overline{A_i}$. Тогда x не является элементом ни одного из A_i и их объединения $\bigcup_i A_i$. Значит, x

является элементом дополнения $\overline{\bigcup_i A_i}$. Равенство (1.1) доказано. Аналогично доказывается равенство (1.2) и другие равенства, относящиеся к множествам.

1.2. Мощность множества

Два множества A и B называются эквивалентными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Множество называется конечным, если содержит конечное число элементов. В противном случае оно называется бесконечным. Простейшим из бесконечных множеств является счетное множество. Множество называется счетным, если его элементам можно поставить в соответствие элементы множества натуральных чисел $N = \{1,2,\dots\}$, иначе говоря, можно пронумеровать натуральными числами.

Для характеристики количества элементов множества применяется понятие мощности множества. Мощность конечного множества определяется как количество его элементов. Счетное множество имеет бесконечную мощность. Существуют множества с большей, чем счетное множество мощностью. Такие множества называются несчетными. Примером несчетного множества является отрезок $[0,1]$ действительной прямой. Говорят, что множество $[0,1]$, а также любое эквивалентное ему множество имеет мощность континуума. Любое такое множество называется континуумом. Континуумом является, помимо отрезка $[0,1]$, вся действительная прямая, а также любой промежуток действительной прямой.

1.3. Упорядоченные множества. Точная верхняя грань множества

Множество M называется упорядоченным, если в нем задано отношение порядка, т. е. правило, позволяющее установить, какой элемент за каким следует. В упорядоченном множестве для двух его элементов $a, b \in M$ имеет смысл запись вида $a \le b$, что означает, что элемент a предшествует элементу b или что a не больше b. Примером упорядоченного множества является множество действительных чисел R с естественным порядком чисел в нем.

Пусть A – подмножество упорядоченного множества Ω. Верхней гранью подмножества $A \subseteq \Omega$ называется такой элемент $b \in \Omega$, что любой элемент $a \in A$ не превосходит $b \in \Omega$, $a \le b$. Если множество верхних граней подмножества A имеет наименьший элемент c, то c называется точной верхней гранью подмножества $A \subseteq \Omega$ и обозначается $\sup A$ или $\sup\limits_{a \in \Omega} a$ (от латинского supremum – наивысшее). Аналогично точная нижняя грань подмножества $A \subseteq \Omega$ – это наибольший из элементов $a \in \Omega$, за которым следуют все элементы A. Точная нижняя грань обозначается как $\inf A$ или $\inf\limits_{a \in \Omega} a$ (от латинского infimum – наинизшее).

Если точная верхняя грань подмножества $A \subseteq \Omega$ принадлежит A, то она называется максимумом подмножества A и обозначается $\max A$ или $\max\limits_{a \in A} a$. Если точная нижняя грань подмножества $A \subseteq \Omega$ принадлежит A, то она называется минимумом подмножества A и обозначается $\min A$ или $\min\limits_{a \in A} a$.

1.4. Системы множеств

Системой множеств или множеством множеств называется множество, элементы которого сами являются какими-либо множествами. Для теории вероятностей важны системы множеств, каждое из которых является подмножеством некоторого фиксированного множества Ω.

Итак, пусть Ω – произвольное множество. Непустая система U некоторых его подмножеств $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$, … называется кольцом множеств, если объединение и разность любых двух множеств этой системы также принадлежат этой системе, т. е. для любых $A \in U$ и $B \in U$ выполняются условия

$$A \bigcup B \in U, \; A \setminus B \in U.$$

Иначе говоря, кольцо – это система множеств, замкнутая относительно операций объединения и разности двух множеств. Легко показать, что кольцо – это система множеств, замкнутая также относительно операции пересечения любых двух множеств. Для этого достаточно воспользоваться формулой (см. рис. 1.2)

$$A \bigcap B = A \setminus (A \setminus B).$$

Если $A \in U$, $B \in U$, то по определению кольца $A \setminus B \in U$, $A \setminus (A \setminus B) \in U$, следовательно, и $A \bigcap B \in U$, что требовалось доказать. Таким образом, кольцо является системой, замкнутой относительно любой операции над двумя множествами системы, т. е. в результате выполнения любых операций над двумя множествами системы мы получим множества, не выходящие из этой системы. По индукции легко показать, что кольцо – это система, замкнутая относительно операций объединения и пересечения любого конечного числа множеств. Это значит, что если $A_i \in U$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то и

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in U, \; \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in U.$$

Если кольцо подмножеств $A_i \subseteq \Omega$ включает и Ω, то такая система называется алгеброй множеств.

Пример 1.1. Для любого непустого множества Ω система $U = \{\emptyset, \Omega\}$, состоящая из пустого множества $\emptyset$ и самого Ω, является алгеброй множеств.

В самом деле,

$$\Omega \bigcup \emptyset = \Omega \in U, \; \Omega \setminus \emptyset = \Omega \in U, \; \Omega \in U.$$

Пример 1.2. Система всех промежутков действительной прямой вида $[a, b)$ и конечных объединений таких непересекающихся промежутков является кольцом.

На рис. 1.6 изображены два подмножества A и B действительной прямой, представляющие собой конечные объединения непересекающихся промежутков вида $[a,b)$, а также их объединение $A\bigcup B$ и разность $B \setminus A$. Промежуток вида $[a,b)$ обозначен как $\rightarrow$. Видно, что множества $A\bigcup B$ и $B \setminus A$ также представляют собой конечные объединения непересекающихся промежутков вида $[a,b)$. Следовательно, определенная в примере 1.2 система множеств образует кольцо множеств. Эта система будет алгеброй, если допустить $a=-\infty$, $b=\infty$.

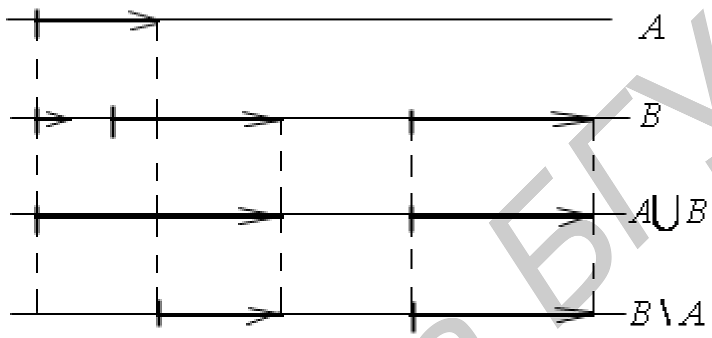

Рис. 1.6. Кольцо и алгебра множеств на действительной прямой

В ряде случаев приходится рассматривать объединения и пересечения не только конечного, но и счетного числа множеств. В этих случаях мы приходим к понятиям σ-кольца и σ-алгебры множеств (сигма-кольца и сигма-алгебры).

Непустая система F подмножеств $A_i \subseteq \Omega$ некоторого множества Ω называется σ-кольцом, если из того, что $A_i \in F$, $i=1,2,\ldots$, следует, что

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F,\ A_i \setminus A_j \in F \text{ при } i \neq j.$$

Можно показать, что σ-кольцо замкнуто также относительно операции пересечения счетного количества множеств, т. е.

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F.$$

Сигма-кольцо, включающее Ω, называется σ-алгеброй множеств $A_i \subseteq \Omega$.

Понятно, что σ-кольцо и σ-алгебра определяются для бесконечного множества Ω.

Пример 1.3. Совокупность всех подмножеств бесконечного множества Ω является σ-алгеброй.

Сигма-алгебра может быть построена на основе произвольно выбранной системы подмножеств некоторого множества. Подтверждается это следующей теоремой.

Теорема 1.1 (о минимальной σ-алгебре над системой множеств). Для любой непустой системы множеств U существует σ-алгебра $\sigma(U)$, содержащая U и содержащаяся в любой σ-алгебре, содержащей U. Эта σ-алгебра $\sigma(U)$ называется минимальной над системой U.

Доказательство. Рассмотрим объединение всех множеств $A_i \subseteq \Omega$, входящих в исходную систему множеств U,

$$X = \bigcup_{A_i \in U} A_i .$$

Совокупность всех подмножеств множества X является, как известно, σ-алгеброй (см. пример 1.3). Обозначим ее $\sigma(X)$. Пусть V – совокупность всех σ-алгебр R_i, содержащихся в $\sigma(X)$ и содержащих U. Пересечение $\bigcap_{R_i \in V} R_i$ и будет искомой σ-алгеброй $\sigma(U)$. Доказательство закончено.

Теорема 1.1 позволяет множества произвольной системы множеств U ($U = \{A_i \subseteq \Omega, i = 1,2,\ldots\}$) считать элементами σ-алгебры $\sigma(U)$.

В теории вероятностей рассматривается так называемая σ-алгебра борелевских множеств (борелевская σ-алгебра). Сигма-алгеброй борелевских множеств на действительной прямой называется минимальная сигма-алгебра над системой всех полуоткрытых промежутков (например промежутков вида $[a,b)$). Борелевскую σ-алгебру можно представить как совокупность множеств, полученных из указанных промежутков с помощью счетного числа операций объединения, пересечения и взятия разностей. Это весьма богатый класс множеств, заведомо достаточный для практических целей. Например, наряду с промежутками $[a,b)$ он содержит также одноточечные множества $\{a\}$ и множества $[a,b]$, $(a,b]$, (a,b) (a и b могут принимать также бесконечные значения). Элементы борелевской σ-алгебры называются борелевскими множествами.

В n-мерном действительном арифметическом пространстве R^n, элементами которого являются точки $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, также можно рассматривать борелевскую σ-алгебру. Множество точек $(x_1,x_2,...,x_n)$ в R^n, координаты которых удовлетворяют неравенствам $a_j \le x_j < b_j$, $j=\overline{1,n}$, называется полуоткрытым интервалом в R^n. Сигма-алгебра, минимальная над системой всех полуоткрытых интервалов в R^n, называется борелевской σ-алгеброй в R^n.

Иногда приходится рассматривать бесконечномерное действительное пространство R^∞, которое является множеством точек с бесконечным числом координат $x=(x_1,x_2,...)$. Полуоткрытый интервал в R^∞ представляет собой множество точек $x=(x_1,x_2,...)$, координаты которых удовлетворяют конечному числу неравенств $a_j \le x_j < b_j$, $j=\overline{1,n}$. Как и раньше, борелевской σ-алгеброй в R^∞ является σ-алгебра, минимальная над указанными интервалами.

Дадим также определение полукольца множеств. Равенство вида $A=\bigcup_i A_i$ называют разложением множества A, если множества A_i попарно не пересекаются.

Непустая система H множеств называется полукольцом, если из условий $A\in H$, $B\in H$ следует, что:

1) $A\bigcap B\in H$,

2) разность $A\setminus B$ допускает конечное разложение по множествам $A_i\in H$, т. е.

$$A\setminus B=\bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ A_i\in H.$$

Всякое кольцо является и полукольцом. Обратное не всегда верно.

Полукольцом (но не кольцом) является множество всевозможных промежутков вида $[a,b)$ числовой прямой, содержащихся в фиксированном множестве M, так как разность двух промежутков необязательно будет промежутком; она может оказаться объединением двух промежутков (рис. 1.7, промежуток вида $[a,b)$ обозначен как $\rightarrow$).

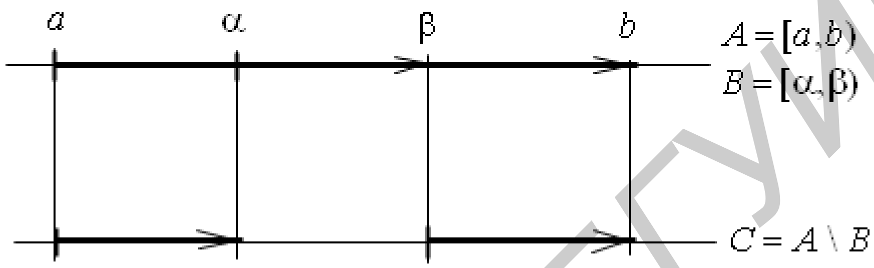

Рис. 1.7. Разность двух промежутков вида $[a,b)$

1.5. Функции множества

Функция, областью определения которой является система множеств, называется функцией множества. Пусть f – действительная функция множества, заданная на системе F множеств. Такая функция каждому множеству $A \in F$ ставит в соответствие действительное число.

Пример 1.4. Пусть F – множество всевозможных конечных промежутков A числовой прямой и f задается на F условием $f(A) = b - a$, где $b - a$ – длина промежутка A с концами в точках a и b. Такая функция есть действительная функция множества.

Функция f, заданная на системе F множеств, называется аддитивной функцией множества, если для любой конечной совокупности попарно непересекающихся множеств $A_i \in F$, объединение которых $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ также принадлежит системе F, имеет место равенство

$$f(A) = f(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} f(A_i).$$

Функция f, заданная на системе F множеств, называется счетно-аддитивной функцией множества, если для любой счетной совокупности попарно непересекающихся множеств $A_i \in F$, объединение которых $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ также принадлежит F, имеет место равенство

$$f(A) = f(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i).$$

В теории вероятностей аддитивной или счетно-аддитивной действительной функцией множества является вероятность.

1.6. Мера множества

Функцию μ, заданную на некоторой системе F множеств, называют мерой, если она неотрицательна, счетно-аддитивна и монотонна. Под монотонностью понимается следующее свойство: если $A \in F$, $B \in F$ и $A \subseteq B$, то $\mu(A) \le \mu(B)$. Мерой, в частности, будет функция множества, приведенная в примере 1.4 подразд. 1.5.

Если мера μ задана не на произвольной системе множеств, а на полукольце (или кольце), то в определении меры достаточно ограничиться требованием неотрицательности и аддитивности, так как в этом случае монотонность является их следствием.

Важной в теории меры является задача о продолжении меры, которая заключается в следующем. Пусть мера m задана на некоторой системе U множеств, которая содержится в более обширной системе V. Меру μ называют продолжением меры m с системы U на систему V, если μ задана на V и $\mu(A) = m(A)$ для каждого множества $A \in U$.

Задача о продолжении аналогична задаче, которая решается в геометрии при вычислении площадей фигур. Сначала вводится понятие площади прямоугольников, а затем оно распространяется (продолжается) на более сложные фигуры (например круг).

Если мера определена на кольце, то она может быть продолжена с сохранением всех свойств на σ-алгебру, причем единственным образом.

Известная мера Лебега является обобщением понятий длины, площади, объема. Линейная мера Лебега есть продолжение меры на действительной прямой – длины отрезка; плоская мера Лебега есть продолжение простейшей плоской меры – площади прямоугольника; объемная мера Лебега является продолжением элементарной объемной меры – объема прямоугольного параллелепипеда.

Остановимся кратко на линейной мере Лебега, когда каждому конечному полуоткрытому промежутку $A = [a, b)$ действительной прямой присваивается мера $\mu(A)$, равная длине промежутка

$$\mu(A) = b - a .$$

Как уже отмечалось, множество всех конечных промежутков вида $[a, b)$ является полукольцом, т. е. мы имеем функцию μ множества, заданную на полукольце. Можно показать, что она является счетно-аддитивной. В соответствии с общей теорией она может быть продолжена на σ-алгебру борелевских множеств. Это продолжение и называется линейной мерой Лебега. Таким образом, измеримыми по Лебегу оказываются не только полуоткрытые промежутки $[a, b)$, но и одноточечные множества $\{a\}$, и промежутки вида $[a, b]$, (a,b), $(a,b]$. Можно найти, что мера Лебега любого одноточечного множества $\{a\}$ равна нулю. Отсюда следует, что равна нулю и мера (длина) любого конечного или счетного множества точек. Так как множество рациональных чисел счетно, то его мера, а также мера любого его подмножества равна нулю. Мера любого из промежутков $[a,b)$, $[a,b]$, (a,b), $(a,b]$ равна $b-a$, т. е. равна его длине.

Вторым примером меры является вероятностная мера, изучаемая в теории вероятностей. В отличие от меры Лебега вероятностная мера одноточечного множества необязательно равна нулю.

Общим способом задания меры является задание ее с помощью так называемой функции распределения меры. Такой функцией является некоторая неубывающая непрерывная слева функция на прямой $F(x)$, равная мере μ промежутка $(-\infty, x)$:

$$F(x) = \mu(-\infty, x).$$

Функция распределения $F(x)$ порождает некоторую счетно-аддитивную меру

$$\mu_F(A) = F(b) - F(a),$$

заданную на полукольце всевозможных конечных полуоткрытых промежутков $A=[a,b)$. Продолжение этой меры называется мерой Лебега – Стилтьеса, порожденной функцией $F(x)$. Функции вида $F(x)=x$ отвечает обычная мера Лебега на прямой. В теории вероятностей функция $F(x)$ называется функцией распределения; она порождает вероятностную меру.

1.7. Измеримые функции

Понятие измеримой функции встречается в теории вероятностей. В частности, случайная величина определяется как измеримая функция. Поэтому сформулируем определение измеримой функции.

Пусть Ω – множество, в котором задана σ-аддитивная мера μ, определенная на σ-алгебре F_μ подмножеств из Ω, и $f(\omega)$, $\omega \in \Omega$, – действительная функция на Ω. Тогда каждому множеству $A \subset \Omega$ соответствует множество $A_f = f(A)$ на действительной прямой; при этом множество $A_f = f(A)$ называется образом множества $A \subset \Omega$, а множество $A = f^{-1}(A_f)$ – прообразом множества A_f. Действительная функция $f(\omega)$ на Ω называется μ-измеримой (измеримой относительно меры μ, просто измеримой), если прообраз A всякого борелевского множества A_f действительной прямой принадлежит σ-алгебре F_μ: $A = f^{-1}(A_f) \in F_\mu$.

Числовая функция, заданная на прямой, называется измеримой по Борелю (борелевской, B-измеримой), если прообраз каждого борелевского множества есть борелевское множество.

Отметим, что в определении измеримости по Борелю с борелевскими множествами необязательно связана какая-либо мера.

Измеримость – это свойство функции, как, например, непрерывность, однако гораздо более общее. Любая непрерывная функция является измеримой. Другим примером измеримой функции является функция, заданная на множестве [0,1] и принимающая следующие значения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ иррационально}, \\ 1, \text{ если } x \text{ рационально}. \end{cases}$$

Эта функция называется функцией Дирихле. Она является разрывной в каждой точке, но измерима.

Класс измеримых функций весьма широк. Все функции, встречающиеся в технических приложениях, можно считать измеримыми.

1.8. Абсолютно непрерывные функции

В теории вероятностей понятие абсолютно непрерывной функции встречается в связи с определением непрерывной случайной величины.

Прежде чем давать определение абсолютно непрерывной функции, приведем понятие покрытия множества. Система множеств $\{M_i\}$ называется покрытием множества X, если объединение множеств M_i совпадает с X: $\bigcup_i M_i = X$.

Покрытие множества может состоять из попарно непересекающихся множеств (когда $M_i \cap M_j = \emptyset$ при $i \neq j$).

Функция f, заданная на некотором промежутке $[a,b]$, называется абсолютно непрерывной на нем, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что, какова бы ни была конечная система попарно непересекающихся интервалов (a_i, b_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, с суммой длин, меньшей δ,

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta,$$

выполнено условие

$$\sum_{i=1}^{n} | f(b_i) - f(a_i) | < \varepsilon.$$

Из определения видно, что из малости суммы длин интервалов, покрывающих промежуток $[a,b]$, следует малость суммы приращений функции на этих интервалах.

Любая абсолютно непрерывная функция является непрерывной в обычном смысле (равномерно непрерывной). Обратное утверждение в общем случае неверно. Примером непрерывной, но не абсолютно непрерывной функции является так называемая «канторова лестница» [11].

Функция $f(x)$ является абсолютно непрерывной, если она может быть представлена в виде интеграла Лебега от некоторой функции $\varphi(x)$ [11]:

$$f(x) = \int_{a}^{x} \varphi(z) \mu(dz)$$

(см. подразд. 1.9).

1.9. Интеграл Лебега

В литературе по теории вероятностей можно встретить такие понятия, как интеграл Лебега, интеграл Лебега – Стилтьеса, интеграл Римана – Стилтьеса. Приведем краткую характеристику этих понятий. Подробно с ними можно ознакомиться в работе [11]. Начнем с понятия интеграла Римана, известного из курса высшей математики.

Интеграл Римана определяется как предел интегральных сумм Римана. Пусть действительная функция $f(x)$ определена на ограниченном промежутке $[a,b]$. Разобьем этот промежуток на n частичных промежутков точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b. \qquad (1.3)$$

Выберем в каждом из частичных промежутков по произвольной точке x_i' ($x_{i-1} \le x_i' \le x_i$) и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i')(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x_i .$$

Эта сумма называется интегральной суммой Римана. Если существует предел интегральной суммы Римана при стремлении к нулю длины наибольшего частичного интервала $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$ ($\max \Delta x_i \to 0$), то функция $f(x)$ называется интегрируемой в смысле Римана на промежутке $[a,b]$. Предел этой суммы

$$I = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

называется определенным интегралом Римана от $f(x)$ по промежутку $[a,b]$.

Функция $f(x)$, ограниченная на замкнутом промежутке $[a,b]$, интегрируема на нем в смысле Римана в том и только в том случае, если она непрерывна почти всюду на $[a,b]$. (Функция называется непрерывной почти всюду на $[a,b]$, если она непрерывна во всех точках $[a,b]$, за исключением, может быть, точек, составляющих множество нулевой меры Лебега).

Характерным в определении интеграла Римана является то, что при переходе к пределу контролируется условие $\max \Delta x_i \to 0$, т. е. точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ группируются по признаку их близости на оси x.

При построении интеграла Лебега точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (1.3) группируются по признаку близости значений функции $f(x)$ в этих точках. Обозначим

$$\lambda_i = y_i - y_{i-1},\ i = 1,2,\ldots,n,$$

и рассмотрим множества

$$X_i = \{x_i : y_{i-1} \le f(x) \le y_i\}$$

(см. рис. 1.8).

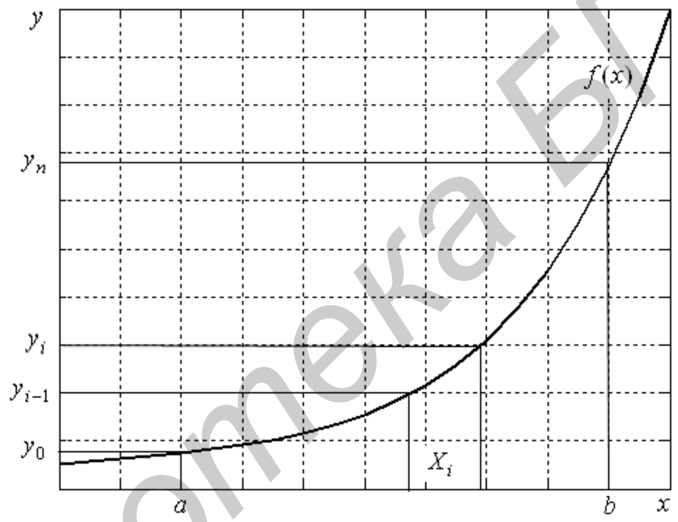

Рис. 1.8. Графическая иллюстрация к определению интеграла Лебега

Пусть множество $X = [a,b]$ имеет конечную меру (необязательно Лебега). Обозначим через $\mu(X_i)$ меру множества X_i и образуем интегральные суммы

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\mu(X_i), \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\mu(X_i). \tag{1.5}$$

Суммы (1.4) и (1.5) называются соответственно нижней и верхней интегральными суммами Лебега. Если эти суммы стремятся к одному и тому же пределу при стремлении наибольшей из разностей $\lambda_i = y_i - y_{i-1}$ к нулю, то функция $f(x)$ называется интегрируемой по Лебегу (суммируемой) на множестве $X=[a,b]$, а этот предел

$$I = \lim_{\max \lambda_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(X_i) = \int_a^b f(x)\mu(dx)$$

называется определенным интегралом Лебега от функции $f(x)$ по промежутку $[a,b]$.

Функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ по Лебегу, если она ограничена и измерима.

Связь между интегралами Римана и Лебега следующая. Если существует интеграл Римана на $[a,b]$, то существует и интеграл Лебега на $[a,b]$, и оба интеграла равны между собой. Иначе – для непрерывных почти всюду на $[a,b]$ функций интегралы Римана и Лебега совпадают.

Пример 1.5. Пусть μ – линейная мера Лебега, $X=[1,1]$. Возьмем функцию Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ на множестве } E' \text{ иррациональных чисел из } X, \\ 1 \text{ на множестве } E'' \text{ рациональных чисел из } X. \end{cases}$$

Эта функция разрывна в каждой точке, поэтому она не интегрируема по Риману. Однако $f(x)$, очевидно, измерима по Лебегу, и интеграл Лебега равен

$$\int_{[0,1]} f(x)\mu(dx) = \int_{E'} 0\mu(dx) + \int_{E''} 1\mu(dx) = 0 + 0 = 0.$$

Пример 1.6. Пусть функция $f(x)$ задана таблицей

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

и мера на множестве $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ задана условиями

$$\mu(x_i) = p_i,\ i = 1,2,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Такая мера является вероятностной. Ясно, что интеграл Римана от такой функции не имеет смысла. Интеграл Лебега может быть найден:

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i} f(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(x_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i .$$

В теории вероятностей интеграл Лебега используется для записи в единой форме понятия математического ожидания.

Если мера μ_F на промежутке $[a,b]$ является мерой Лебега – Стилтьеса, т. е. порождена монотонной функцией $F(x)$, то интеграл Лебега

$$\int_a^b f(x)\mu_F(dx),$$

взятый по мере μ_F, превращается в интеграл Лебега – Стилтьеса и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)F(dx). \tag{1.6}$$

Если $F(x)$ – функция скачков, то последний интеграл сводится к сумме

$$\int_a^b f(x)F(dx) = \sum_i f(x_i)h_i , \tag{1.7}$$

где x_i – точки разрывов (скачков) функции $F(x)$, а h_i – величины скачков в точках x_i.

Если $F(x)$ – абсолютно непрерывная функция, то интеграл Лебега – Стилтьеса (1.6) равен следующему интегралу по мере Лебега:

$$\int_a^b f(x)F(dx) = \int_a^b f(x)F'(x)\mu(dx), \tag{1.8}$$

где $F'(x)$ – производная функции $F(x)$.

Случаи (1.7) и (1.8) исчерпывают потребности приложений теории вероятностей, так как функции распределения $F(x)$ теории вероятностей – это обычно либо функции скачков, либо абсолютно непрерывные функции.

В теории вероятностей интеграл Лебега – Стилтьеса применяется в тех же целях, что и интеграл Лебега, но в случае, когда вероятностная мера задается функцией распределения $F(x)$.

Наконец, интеграл Римана – Стилтьеса определяется следующим образом. Пусть $F(x)$ – функция, аналогичная функции распределения меры, заданная на $[a,b]$, и $f(x)$ – произвольная функция на том же промежутке. Для разбиения (1.3) промежутка $[a,b]$ составим сумму Римана – Стилтьеса:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i')(F(x_i)-F(x_{i-1}))=\sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta F_i ,$$

где $x_{i-1}\le x_i'\le x_i$. Если при $\max(x_i - x_{i-1})\to 0$ эти суммы стремятся к некоторому пределу (не зависящему ни от способа дробления промежутка $[a,b]$, ни от выбора точек x_i' в каждом частичном промежутке $[x_{i-1},x_i]$), то этот предел называется интегралом Римана – Стилтьеса от функции $f(x)$ по функции $F(x)$ и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)dF(x)=\lim_{\max(x_i - x_{i-1})\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i')(F(x_i)-F(x_{i-1})).$$

Можно показать, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то ее интеграл Римана – Стилтьеса существует и совпадает с соответствующим интегралом Лебега – Стилтьеса. Отсюда следует, что интеграл Римана – Стилтьеса также представляется в виде суммы (1.7), если $F(x)$ – функция скачков, и в виде интеграла (1.8), если $F(x)$ – абсолютно непрерывная функция. Если при этом $F'(x)$ интегрируема по Риману, то интеграл (1.8) можно заменить интегралом по Риману:

$$\int_a^b f(x)F(dx)=\int_a^b f(x)dF(x)=\int_a^b f(x)F'(x)dx .$$

В математической литературе по теории вероятностей преимущественно используются интегралы Лебега или Лебега – Стилтьеса, с которыми не знакомы студенты технических вузов. Однако в технических приложениях, как следует из приведенного обзора, эти понятия можно заменить известными понятиями: интеграл Лебега – суммой для дискретных случайных величин или интегралом Римана для непрерывных случайных величин; интеграл Лебега – Стилтьеса – интегралом Римана – Стилтьеса, который тоже сводится либо к сумме, либо к интегралу Римана.

1.10. Элементарный исход, событие, вероятность

В современной теории вероятностей всегда предполагается существование некоторого множества Ω, которое называется множеством или пространством элементарных исходов. Чаще всего это абстрактное (не числовое) множество, например, множество шаров в урне, множество некоторых комбинаций элементов и т. д. Любой элемент ω множества Ω ($\omega \in \Omega$) называется элементарным исходом, элементарным событием или случаем. Любое подмножество $A \subseteq \Omega$ называется событием.

В каждой задаче выбирается свое множество Ω. Чаще всего элементом $\omega \in \Omega$ считают результат (исход) одного эксперимента. Например, если задача связана с подбрасыванием игральной кости, то элементарным исходом считается выпадение одного числа, так что $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. При подбрасывании двух игральных костей результатом эксперимента является появление двух чисел, и Ω представляет собой совокупность 36 пар чисел.

Считается, что подмножества A_1, A_2,… множества Ω образуют σ-алгебру F множеств (σ-алгебру событий). Если Ω – конечное множество, то рассматривается не σ-алгебра, а алгебра подмножеств Ω. Каждому множеству $A \in F$ ($A \subseteq \Omega$) ставится в соответствие вероятностная мера $P(A)$ (вероятность события A). Совокупность $\{\Omega, F, P\}$ называется вероятностным пространством.

Множества $A \in F$ называются измеримыми, так как им поставлена в соответствие вероятностная мера $P(A)$. Вероятностная мера является неотрицательной счетно-аддитивной функцией множества, определенной на F и подчиненной условию $P(\Omega)=1$ (см. подразд. 1.5). Вероятность P, заданную для каждого $A \in F$ ($A \subseteq \Omega$), называют распределением вероятности на F (или на Ω).

Необходимость привлечения σ-алгебры множеств объясняется тем, что это очень богатая система множеств. Она включает в себя любые множества, представляющие какой-либо практический интерес, в связи с чем нет опасности при выполнении операций над событиями прийти к событиям, которые не имеют никакой вероятности [10].

Приведем примеры построения вероятностной меры для некоторых множеств [10].

1. Множество Ω конечное, состоящее из k элементов: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_k\}$. Совокупность всех подмножеств A из Ω образует алгебру множеств, которая и принимается за F. Вероятностная мера $P(A)$ для каждого A назначается следующим образом. Берется конечное множество $\{p_1, p_2,\ldots,p_k\}$ неотрицательных чисел (вероятностей) с суммой $p_1+p_2+\ldots+p_k=1$. Каждому элементарному исходу ω_i приписывается вероятность p_i, т. е. $P(\omega_i)=p_i$. Если $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\ldots,\omega_{i_\lambda}\}$, то полагается

$$P(A)=P(\omega_{i_1})+P(\omega_{i_2})+\ldots+P(\omega_{i_\lambda}).$$

Элементарные исходы, входящие в A ($\omega_i \in A$), называются исходами, благоприятствующими событию A.

Если нет оснований отдавать предпочтение тому или иному элементарному исходу, то их вероятности принимаются равными $1/k$, где k – общее количество элементарных исходов в Ω. В этом случае вероятность события A определяется по формуле $P(A)=k_A/k$, где k_A – количество элементарных исходов, благоприятствующих событию A. Это так называемое классическое определение вероятности случайного события.

2. Ω – счетное множество: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots\}$. В этом случае в качестве F можно также рассматривать совокупность всех подмножеств множества Ω, которая является теперь σ-алгеброй. Здесь можно подобрать бесконечную последовательность неотрицательных чисел $\{p_i\}$, удовлетворяющих условию $p_1+p_2+\ldots=1$, положить $P(\omega_i)=p_i$ и вероятностную меру каждого множества A определить формулой

$$P(A)=\sum_{\omega_i\in A}P(\omega_i).$$

3. Предположим теперь, что Ω представляет собой несчетное множество, имеющее мощность континуума, например, действительная прямая. Здесь мы не можем приписывать вероятностную меру $P(\omega_i)$ каждому элементу множества Ω, как это было в случае конечного или счетного Ω, хотя бы потому, что нельзя удовлетворить условию $\sum\limits_{\omega_i\in\Omega}P(\omega_i)=1$ из-за неопределенности операции суммирования несчетного количества чисел. Так как событиями считаются те подмножества Ω, которые можно наблюдать в эксперименте, то естественно рассматривать множества вида $[a,b)=\{\omega: a\le\omega<b\}$ и им приписывать вероятность. Множество F_0 всевозможных конечных объединений полуоткрытых интервалов $[a,b)$ является алгеброй, но не σ-алгеброй, что недостаточно для построения полноценного вероятностного пространства. Однако на основании теоремы о минимальной σ-алгебре над системой F_0 (подразд. 1.4) все множества из F_0 можно считать элементами σ-алгебры $\sigma(F_0)$. На основании теории продолжения меры (раздел 1.6) любую вероятностную меру, заданную на системе F_0, можно продолжить на все множества из системы $\sigma(F_0)$. Таким образом, достаточно определить на множествах $A\in F_0$ любую неотрицательную счетно-аддитивную функцию множества $P(A)$, удовлетворяющую условию $P(\Omega)=1$. Такая функция однозначно определяется своими значениями для специальных промежутков $(-\infty,x)$ [10]:

$$F(x) = P((-\infty, x)).$$

Функцию $F(x) = P((-\infty, x))$ называют функцией распределения ω.

Способ задания вероятностной меры с помощью функции распределения в случае несчетного Ω является основным. Обычно поступают следующим образом. Выбирают некоторую функцию $F(x)$ из набора функций, хорошо изученных в теории вероятностей. Пригодность этой функции для решения поставленной задачи (адекватность) проверяют затем по экспериментальным данным методами математической статистики.

1.11. События и последовательности событий

Событие $\emptyset$ (пустое множество) называется невозможным, событие Ω – достоверным. Эти события имеют вероятности $P(\emptyset) = 0$ и $P(\Omega) = 1$. Событие A с вероятностью $P(A) = 0$ называется событием нулевой вероятности или множеством меры нуль, а событие A с $P(A) = 1$ – событием единичной вероятности. Из равенств $P(A) = 0$ или $P(A) = 1$ не следует, что A является невозможным или достоверным событием. Однако на практике невозможное событие и событие нулевой вероятности неразличимы. Действительно, рассмотрим событие C, состоящее в том, что монета после ее подбрасывания упадет на ребро. Это событие считается невозможным, то есть предполагается, что множество элементарных исходов $\Omega = \{A, B\}$, $C = \emptyset$, где A – выпадение герба, B – выпадение цифры, причем $P(A) = P(B) = 1/2$. Можно поступить и иначе: ввести элементарный исход C – падение монеты на ребро и приписать ему нулевую вероятность. Тогда $\Omega = \{A, B, C\}$, $C \neq \emptyset$, $P(A) = P(B) = 1/2$, $P(C) = 0$, событие C не есть невозможное, хотя ясно, что обе модели одинаково отражают реальное явление.

События A и B называются эквивалентными, если они отличаются друг от друга множеством меры нуль, то есть если событие $C=(A\bigcup B)\setminus(A\bigcap B)$ имеет нулевую вероятность (рис. 1.9, событие C заштриховано).

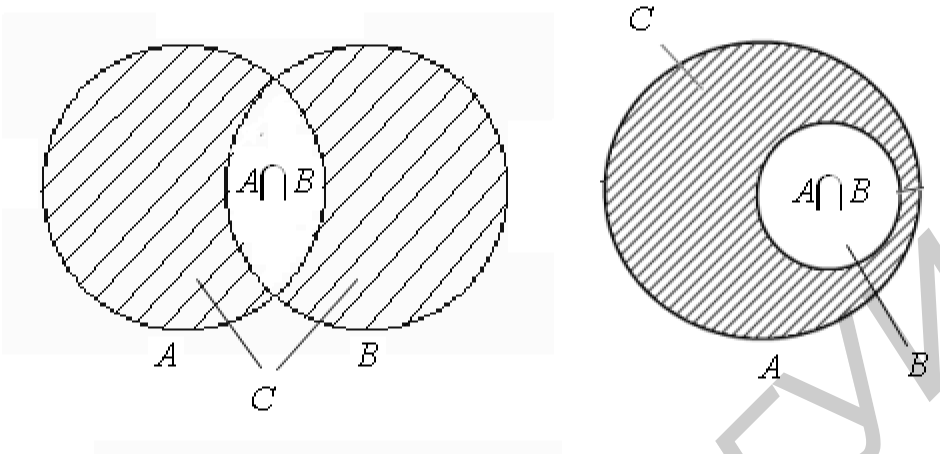

Рис. 1.9. К определению эквивалентных событий

Для эквивалентных событий справедливо равенство $P(A)=P(B)=P(A\bigcap B)$, откуда следует также, что $P(B/A)=P(A/B)=1$.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ – последовательность событий (множеств). Для этой последовательности можно ввести понятие предела. Верхним пределом последовательности событий при $n\to\infty$ называется событие

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\,, \tag{1.9}$$

суть которого заключается в том, что произойдет бесконечное число событий A_n. Нижним пределом последовательности событий называется событие

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\,, \tag{1.10}$$

суть которого состоит в том, что произойдут все события, начиная с некоторого номера. Если множества (1.9), (1.10) совпадают, то говорят, что последовательность имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} A_n=\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n\,.$$

Для монотонных последовательностей предел существует всегда. Если каждое предыдущее событие влечет за собой последующее, т. е. $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$, то

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n . \qquad (1.11)$$

Если же каждое последующее событие влечет за собой предыдущее, т. е. $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$, то

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n . \qquad (1.12)$$

Лемма Бореля – Кантелли утверждает, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ сходится, то

$$P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 0 .$$

Справедливы также следующие утверждения [20]: если монотонная последовательность имеет предел, то $P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$, т. е.

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

для неубывающей последовательности из (1.11) и

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

для невозрастающей последовательности из (1.12).

1.12. Случайные величины

При определении случайной величины предполагается существование некоторого вероятностного пространства $\{\Omega, F, P\}$.

Случайной величиной называется действительная измеримая функция $\xi(\omega)$, заданная на множестве элементарных исходов Ω.

Функция $\xi(\omega)$ каждому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ ставит в соответствие действительное число $x \in R^1$, которое называется возможным значением случайной величины $\xi(\omega)$.

Обозначим через F' σ-алгебру борелевских множеств на действительной прямой R^1. Из свойства измеримости функции $\xi(\omega)$ следует, что каждому множеству (событию) $A' \in F'$ соответствует прообраз $A \in \xi^{-1}(A')$ – множество из σ-алгебры F, что позволяет каждому множеству $A' \in F'$ приписать вероятность, равную вероятности его прообраза $A \in F$. Мы получаем, таким образом, новое вероятностное пространство $\{R^1, F', P'\}$, порожденное (индуцированное) случайной величиной $\xi(\omega)$.

Но на практике исходное вероятностное пространство $\{\Omega, F, P\}$ лишь подразумевается, так как обычно Ω неизвестно и элементарные исходы $\omega \in \Omega$ не наблюдаются. Наблюдаемыми являются лишь значения случайной величины. Поэтому вероятностная мера задается сразу на действительной прямой R^1 с помощью функции распределения вероятности. Случайная величина обозначается одним символом ξ, т. е. явная зависимость от элементарного исхода ω (случая) опускается.

Функцией распределения вероятности (функцией распределения) случайной величины ξ называется функция, задаваемая равенством

$$F_\xi(x) = P(\xi < x),$$

где $P(\xi < x)$ – вероятность события $\{\xi < x\}$. Если $F_\xi(x)$ дифференцируема, то ее производную

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x)$$

называют плотностью распределения вероятности (плотностью вероятности) случайной величины ξ.

Среди случайных величин выделяют дискретные, непрерывные и сингулярные случайные величины.

Случайная величина называется дискретной, если она может принимать лишь конечное или счетное множество значений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Функция распределения $F_\xi(x)$ дискретной случайной величины возрастает скачками в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$ и величина скачка в точке x_k равна

$$F_\xi(x_k + 0) - F_\xi(x_k) = p_k,$$

где p_k – вероятность того, что случайная величина примет значение x_k.

Производная функции распределения $F_\xi(x)$ дискретной случайной величины равна нулю всюду, за исключением точек роста $F_\xi(x)$, т. е. точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$ в которых $F_\xi(x)$ терпит разрыв. Точки роста функции $F_\xi(x)$ имеют ненулевую вероятностную меру.

Случайная величина называется абсолютно непрерывной, если ее функция распределения $F_\xi(x)$ абсолютно непрерывна (подразд. 1.8).

Случайная величина называется сингулярной (несобственной, особенной), если ее функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна, а производная $F'_\xi(x)$ равна нулю почти всюду. Такая функция возрастает лишь на множестве лебеговой меры нуль. Функция распределения сингулярной случайной величины также называется сингулярной. В литературе приводится лишь один пример функции распределения сингулярного типа – так называемая лестница Кантора (см. например [11]). Лестница Кантора – непрерывная, но не абсолютно непрерывная функция. Это специальным образом сконструированная функция, не имеющая практических приложений. В связи с этим можно считать, что сингулярный тип распределений в практических задачах не встречается.

Если функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ непрерывна в обычном смысле, то она может быть представлена в виде суммы абсолютно непрерывной и сингулярной составляющих [11]. Но так как сингулярная составляющая отсутствует в практических задачах, то можно считать, что при непрерывной $F_\xi(x)$ мы практически всегда имеем абсолютно непрерывную случайную величину. В дальнейшем абсолютно непрерывную случайную величину будем называть просто непрерывной.

Две случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве, называются эквивалентными, если они равны с вероятностью единица:

$$P(\xi = \eta) = 1,$$

или иначе:

$$P\{\omega : \xi(\omega) = \eta(\omega)\} = 1.$$

Эквивалентные случайные величины могут отличаться друг от друга лишь на множестве вероятностной меры нуль. С практической точки зрения это означает, что ξ и η могут иметь отличающиеся значения, но эти значения не появятся в экспериментах.

Если на одном и том же вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$ задано n случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, то отображение Ω в R^n, задаваемое функциями $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega)$, $\ldots$, $\xi_n(\omega)$, называется случайным вектором $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ или многомерной (векторной) случайной величиной. Отображение $\Omega \to R^n$ следует рассматривать как измеримое, в связи с чем каждому борелевскому множеству $B \in R^n$ может быть приписана вероятность $P(B)$. Для задания этой вероятности можно воспользоваться функцией распределения случайного вектора

$$F_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n), \tag{1.13}$$

равной вероятности попадания случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ в область, определенную неравенствами $\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n$. Функция распределения (1.13) однозначно задает вероятность каждого борелевского множества $B \in R^n$ (однозначно определяет распределение вероятностей в R^n).

Если существует смешанная производная

$$f_{\xi}(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 .. \partial x_n} F_{\xi}(x_1, x_2, ..., x_n),$$

то эту производную $f_{\xi}(x_1, x_2, ..., x_n)$ называют совместной плотностью вероятности случайных величин $\xi_1, \xi_2, ... \xi_n$.

1.13. Сходимость последовательностей случайных величин

Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ – последовательность случайных величин, определенных на одном и том же вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$, и ξ – некоторая случайная величина, определенная на том же вероятностном пространстве. Будем исследовать сходимость последовательности ξ_n к ξ при $n \to \infty$. В качестве предела ξ может рассматриваться неслучайная величина, чаще всего – нуль. Например, можно рассматривать сходимость к нулю последовательности ξ_n дискретных случайных величин со следующим законом распределения:

$$P(\xi_n = n) = \frac{1}{n^2},\ P(\xi_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Прежде чем изучать сходимость случайных последовательностей, напомним понятие сходимости неслучайной (числовой) последовательности.

Определение. Числовая последовательность $S_1, ..., S_n, ...$ сходится к пределу S при $n \to \infty$ (обозначается $S_n \underset{n \to \infty}{\to} S$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется условие $|S_n - S| < \varepsilon$. Необходимое и достаточное условие сходимости (критерий Коши сходимости числовой последовательности) заключается в следующем:

$$|S_n - S_m| \underset{n,m \to \infty}{\to} 0. \tag{1.14}$$

Последовательность S_n, удовлетворяющая условию (1.14), называется фундаментальной, или последовательностью Коши. В данной терминологии критерий

Коши можно сформулировать следующим образом: если S_n – фундаментальная последовательность в множестве действительных чисел, то она сходится.

Для случайной последовательности ξ_n разность $\xi_n - \xi$ является случайной величиной, и поэтому нельзя требовать выполнения условия $|\xi_n - \xi| < \varepsilon$ без некоторых дополнительных предположений. Это значит, что приведенное определение сходимости числовой последовательности не применимо для случайной последовательности. Для случайной последовательности используются иные понятия сходимости, такие, как сходимость по вероятности, с вероятностью единица, в среднем квадратичном.

Определение. Случайная последовательность ξ_n называется сходящейся по вероятности к некоторой случайной величине ξ, если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0. \qquad (1.15)$$

Сходимость по вероятности обозначается следующим образом:

$$\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{p}{\to}} \xi.$$

Если в этом определении перейти к противоположному событию, то сходимость по вероятности выразится следующим условием:

$$P(|\xi_n - \xi| \le \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

Условие (1.15) нужно понимать следующим образом: для любых вещественных чисел $\varepsilon > 0$ и $0 < \delta < 1$ существует номер $N(\varepsilon, \delta)$, такой, что для любого $n > N(\varepsilon, \delta)$ выполняется неравенство

$$P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) < \delta.$$

Случайная последовательность ξ_n называется фундаментальной по вероятности, если

$$P(|\xi_n - \xi_m| > \varepsilon) \underset{n,m\to\infty}{\to} 0. \qquad (1.16)$$

Можно показать [2], что условие (1.16) является необходимым и достаточным для сходимости последовательности ξ_n по вероятности, т. е. случайная последовательности ξ_n сходится к случайной величине ξ по вероятности тогда и только тогда, когда она фундаментальна по вероятности (критерий Коши).

Определение. Случайная последовательность ξ_n называется сходящейся с вероятностью единица, почти наверное или почти всюду к случайной величине ξ, если выполняется соотношение

$$P(\xi_n \underset{n\to\infty}{\to} \xi) = 1, \tag{1.17}$$

или иначе

$$P\{\omega : \xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\to} \xi(\omega)\} = 1.$$

Сходимость с вероятностью единица обозначается как

$$\xi_n \overset{п.н.}{\underset{n\to\infty}{\to}} \xi,$$

где п. н. означает «почти наверное». Теоретически это определение означает, что множество тех элементарных исходов $\omega \in \Omega$, для которых $\xi_n(\omega)$ сходится к $\xi(\omega)$, имеет вероятностную меру 1. Практически это означает сходимость каждой реализации последовательности ξ_n к реализации случайной величины ξ, поскольку реализации последовательности ξ_n, которые не сходятся к реализации величины ξ, имеют нулевую вероятность и не появляются в экспериментах.

Приведем также другие формы определения сходимости с вероятностью единица, а также необходимые и достаточные условия такой сходимости. Для этого отметим, что событие $\xi_n \underset{n\to\infty}{\to} \xi$ в определении (1.17) можно записать следующим образом [8]:

$$\xi_n \underset{n\to\infty}{\to} \xi = \bigcap_{q=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_{n,q},$$

где $A_{n,q}$ означает событие $|\xi_n - \xi| < 1/q$.

Легко видеть, что объединение по m производится по неубывающей последовательности событий, а пересечение по q – по невозрастающей. Тогда (подразд. 1.11)

$$p_0 = P(\xi_n \underset{n\to\infty}{\to} \xi) = \lim_{q\to\infty} \lim_{m\to\infty} P(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_{n,q}). \qquad (1.18)$$

Выражение (1.18) дает следующее определение сходимости с вероятностью единица: случайная последовательность ξ_n называется сходящейся с вероятностью единица, почти наверное или почти всюду к случайной величине ξ, если

$$\lim_{q\to\infty} \lim_{m\to\infty} P(\bigcap_{n=m}^{\infty} \{|\xi_n - \xi| < 1/q\}) = 1.$$

Далее, так как

$$P(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_{n,q}) = 1 - P(\bigcup_{n=m}^{\infty} \overline{A}_{n,q}),$$

где $\overline{A}_{n,q}$ означает событие $|\xi_n - \xi| \geq 1/q$, то

$$1 - p_0 = \lim_{q\to\infty} \lim_{m\to\infty} P(\bigcup_{n=m}^{\infty} \{|\xi_n - \xi| \geq 1/q\}).$$

Для сходимости ξ_n к ξ необходимо и достаточно, чтобы $1 - p_0 = 0$. Предел при $q \to \infty$ в последнем соотношении берется по неубывающей последовательности неотрицательных чисел. Этот предел равен нулю тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{m\to\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon \text{ хотя бы для одного } n \geq m) = 0. \qquad (1.19)$$

Это условие необходимо и достаточно для сходимости ξ_n к ξ с вероятностью единица. Если перейти в выражении (1.19) к противоположному событию, то его можно записать также в следующем виде:

$$\lim_{m\to\infty} P(|\xi_n - \xi| \leq \varepsilon \text{ для всех } n \geq m) = 1.$$

Случайная последовательность ξ_n называется фундаментальной с вероятностью единица, если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$\lim_{n,m\to\infty} P(\sup_{n\geq m}|\xi_n - \xi_m| \geq \varepsilon) = 0. \tag{1.20}$$

Случайная последовательность ξ_n сходится с вероятностью единица тогда и только тогда, когда она фундаментальна с вероятностью единица (критерий Коши).

Определение. Случайная последовательность ξ_n называется сходящейся в среднем квадратичном к случайной величине ξ, если выполняется условие

$$E((\xi_n - \xi)^2) \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{1.21}$$

Сходимость в среднем квадратичном обозначается как

$$\xi_n \overset{(2)}{\underset{n\to\infty}{\to}} \xi,$$

а предел в среднем квадратичном – следующим образом:

$$\xi = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, \xi_n.$$

Поскольку

$$E((\xi_n - \xi)^2) = E^2(\xi_n - \xi) + D(\xi_n - \xi),$$

то сходимость в среднем квадратичном означает сходимость к нулю математического ожидания и дисперсии отклонения $\xi_n - \xi$, т. е. средних характеристик, а не каждой реализации.

Случайная последовательность ξ_n называется фундаментальной в среднем квадратичном, если выполняется условие

$$E((\xi_n - \xi_m)^2) \underset{n,m\to\infty}{\to} 0.$$

Случайная последовательность ξ_n сходится в среднем квадратичном к случайной величине ξ тогда и только тогда, когда она фундаментальна в среднем квадратичном (критерий Коши).

Доказательство критерия сходимости Коши для всех типов сходимости можно найти в [2].

Между разными типами сходимости случайных последовательностей существуют соотношения, представленные на рис. 1.10. Из сходимости в среднем квадратичном следует сходимость по вероятности. Это видно из неравенства Чебышева:

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E((\xi_n - \xi)^2)}{\varepsilon^2}.$$

Взяв предел от обеих частей этого неравенства при $n \to \infty$ и учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} E((\xi_n - \xi)^2) = 0$, получим условие (1.21). Сходимость по вероятности следует также из сходимости с вероятностью единица. Это вытекает из условия (1.20), если учесть, что

$$\{|\xi_m - \xi| \geq \varepsilon\} \subseteq (\sup_{n \geq m} |\xi_n - \xi| \geq \varepsilon).$$

Однако из сходимости с вероятностью единица не следует сходимость в среднем квадратичном хотя бы потому, что последовательность ξ_n может не иметь момента второго порядка. Из сходимости в среднем квадратичном также не следует сходимость с вероятностью единица. Таким образом, сходимость по вероятности является слабейшей из рассмотренных трех типов сходимости.

Если последовательность ξ_n сходится в смысле каких-либо двух из трех указанных выше определений сходимости, то предельные случайные величины с вероятностью единица равны.

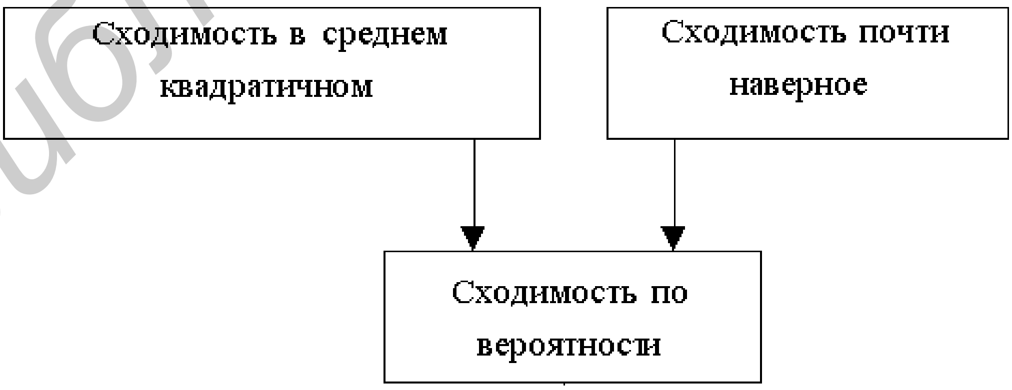

Рис. 1.10. Соотношения между разными типами сходимости случайных последовательностей

1.14. Свойства сходимости в среднем квадратичном

В данном разделе в дополнение к критерию Коши сходимости случайной последовательности в среднем квадратичном, сформулированному в подразд. 1.13, рассмотрим некоторые другие свойства сходимости в среднем квадратичном. Докажем сначала следующую теорему.

Теорема (о сходимости смешанного начального момента второго порядка двух сходящихся последовательностей). Если

$$\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{(2)}{\to}} \xi, \quad \eta_m \underset{m\to\infty}{\overset{(2)}{\to}} \eta$$

и $E(\xi^2)$, $E(\eta^2)$ – ограниченные величины, то

$$E(\xi_n \eta_m) = E(\xi\eta) \tag{1.22}$$

при $n,m \to \infty$ независимо друг от друга.

Для доказательства используем равенство

$$\xi_n \eta_m - \xi\eta = (\xi_n - \xi)(\eta_m - \eta) + (\xi_n - \xi)\eta + (\eta_m - \eta)\xi, \tag{1.23}$$

справедливость которого можно проверить раскрытием скобок в правой части. Возьмем математическое ожидание от обеих частей этого равенства и применим к каждому слагаемому правой части неравенство Шварца [15]: для произвольных случайных величин U и V справедливо неравенство

$$E(UV) \le E(U^2)E(V^2).$$

Получим

$$E^2((\xi_n - \xi)(\eta_m - \eta)) \le E((\xi_n - \xi)^2)E((\eta_m - \eta)^2) \underset{n,m}{\to} 0,$$

$$E^2((\xi_n - \xi)\eta) \le E((\xi_n - \xi)^2)E(\eta^2) \underset{n,m}{\to} 0,$$

$$E^2((\eta_m - \eta)\xi) \le E((\eta_m - \eta)^2)E(\xi^2) \underset{n,m}{\to} 0.$$

Сходимость правой части первого неравенства следует из сходимостей ξ_n и η_m к ξ и η соответственно, сходимость правой части второго неравенства – из сходимости ξ_n к ξ и конечности $E(\eta^2)$, сходимость правой части третьего неравенства – из сходимости η_m к η и конечности $E(\xi^2)$. Поэтому для равенства (1.23) получим

$$E(\xi_n\eta_m - \xi\eta) \underset{n,m\to\infty}{\to} 0.$$

Следствие 1 (о сходимости математического ожидания сходящейся последовательности). Если $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\xi_n = \xi$, $E(\xi^2) < \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} E(\xi_n) = E(\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\xi_n) = E(\xi).$$

Этот результат получим, если в формуле (1.22) предположим, что η_m принимает значение 1 с вероятностью 1.

Следствие 2 (о сходимости начального момента второго порядка сходящейся последовательности). Если $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\xi_n = \xi$ и $E(\xi^2) < \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} E(\xi_n^2) = E(\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\xi_n^2) = E(\xi^2).$$

Для получения этого результата достаточно в формуле (1.22) предположить, что ξ_n и η_m – одна и та же последовательность.

Содержательный смысл следствий 1 и 2 состоит в том, что операции E и l.i.m. перестановочны, т. е. их можно менять местами.

Получим теперь необходимые и достаточные условия сходимости в среднем квадратичном.

Определение. Случайная последовательность ξ_n называется фундаментальной в среднем квадратичном, если выполняется условие

$$E((\xi_n - \xi_m)^2) \to 0 \tag{1.24}$$

при независимом стремлении n и m к бесконечности.

Теорема (критерий Коши). Случайная последовательность ξ_n сходится в среднем квадратичном к ξ, если и только если она фундаментальна в среднем квадратичном.

Докажем только необходимость условия (1.24), т. е. докажем, что из (1.21) следует (1.24). Запишем сначала следующую цепочку равенств и неравенств:

$$(\xi_n-\xi_m)^2=((\xi_n-\xi)-(\xi_m-\xi))^2=$$
$$=(\xi_n-\xi)^2-2(\xi_n-\xi)(\xi_m-\xi)+(\xi_m-\xi)^2\le$$
$$\le(\xi_n-\xi)^2-2|\xi_n-\xi|\cdot|\xi_m-\xi|+(\xi_m-\xi)^2\le 2(\xi_n-\xi)^2+2(\xi_m-\xi)^2. \qquad (1.25)$$

Первое неравенство этой цепочки записано на основании неравенства

$$|\xi_n-\xi|\cdot|\xi_m-\xi|\ge-(\xi_n-\xi)(\xi_m-\xi),$$

а второе – на основании неравенства

$$2|\xi_n-\xi|\cdot|\xi_m-\xi|\le(\xi_n-\xi)^2+(\xi_m-\xi)^2.$$

Взяв математическое ожидание от обеих частей выражения (1.25), получим, что

$$E((\xi_n-\xi_m)^2)\le 2E((\xi_n-\xi)^2)+2E((\xi_m-\xi)^2).$$

На основании условия (1.21) сходимости в среднем квадратичном каждая составляющая правой части последнего неравенства сходится к нулю, значит, сходится к нулю и левая часть неравенства. Необходимость доказана.

Теорема (критерий Лоэва). Случайная последовательность ξ_n с конечным моментом второго порядка ($E(\xi^2)<\infty$) сходится в среднем квадратичном к ξ, если и только если

$$E(\xi_n\xi_m)\to\text{const}=C \qquad (1.26)$$

при стремлении n,m к бесконечности независимо друг от друга.

Достаточность (из выражения (1.26) следует выражение (1.24)) получим следующими преобразованиями:

$$E((\xi_n-\xi_m)^2)=E(\xi_n\xi_n)-E(\xi_n\xi_m)-E(\xi_m\xi_n)+E(\xi_m\xi_m)\underset{n,m\to\infty}{\to}0,$$

а необходимость (из (1.21) следует (1.26)) – по теореме о сходимости смешанного начального момента второго порядка (формула (1.22)):

$$E(\xi_n\xi_m)\underset{n,m\to\infty}{\to}E(\xi\xi)=E(\xi^2)=C<\infty.$$

2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

2.1. Определение случайного процесса. Классификация случайных процессов

В теории случайных процессов изучаются задачи построения и анализа математических моделей случайных явлений, развивающихся во времени. Как математический объект случайный процесс определяется следующим образом. Предполагается заданным некоторое вероятностное пространство $\{\Omega, F, P\}$.

Определение 2.1. Случайным процессом называется функция $\xi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in T$, которая для любого фиксированного $t \in T$ является измеримой функцией аргумента ω.

Аргумент t здесь понимается как время из некоторого промежутка времени T, а аргумент ω – элементарный исход (случай). При фиксированном $t = t_1$ мы получаем функцию случая $\xi(\omega, t_1)$, т. е. случайную величину, которая называется сечением процесса в момент времени t_1. Если зафиксировать случай $\omega = \omega_1$, то получим функцию времени $\xi(\omega_1, t)$, которая называется реализацией, траекторией или выборочной функцией случайного процесса.

На рис. 2.1 приведены три реализации (траектории) случайного процесса и его сечение в момент времени t_1. В качестве реализаций взяты графики температуры атмосферного воздуха на метеостанции Минск в феврале 1998, 1999, 2000 годов.

В связи с тем, что чаще всего множество Ω оказывается недоступным, т. е. элементарные исходы не наблюдаются, случайный процесс обозначается как функция только времени $\xi(t)$, а зависимость от ω подразумевается.

В некоторых случаях случайный процесс $\xi(\omega, t)$ может быть задан в виде явного аналитического выражения

$$\xi(\omega, t) = g(t, \mu_1, \mu_2, \ldots), \tag{2.1}$$

где $\{\mu_1, \mu_2, \ldots\}$ – конечное или счетное множество случайных величин $\mu_1(\omega)$, $\mu_2(\omega)$, …, т. е. функций от ω, и $g(\cdot)$ – некоторая функция. Такую форму представления случайного процесса будем называть параметрической. Изучение случайного процесса в параметрической форме сводится к изучению функции случайных величин, зависящей также от неслучайного аргумента t.

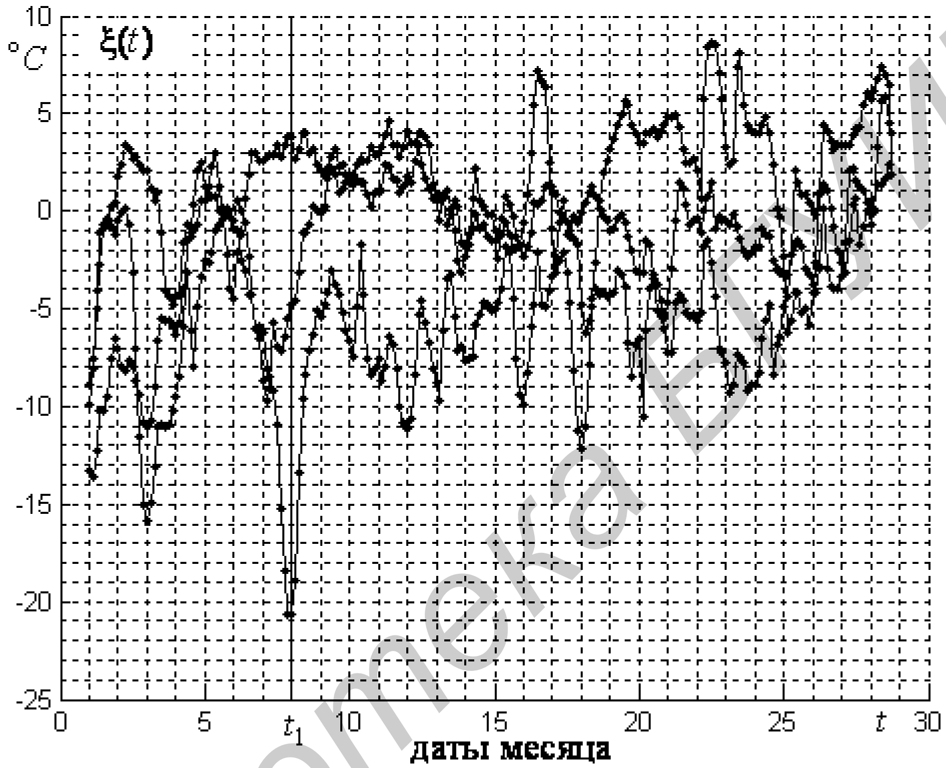

Рис. 2.1. Реализации случайного процесса общего типа (температуры атмосферного воздуха на метеостанции «Минск» в феврале 1998, 1999, 2000 годов)

Примером случайного процесса, заданного в параметрической форме, является так называемый веерный случайный процесс, определяемый формулой

$$\xi(t) = \alpha + \beta t, \tag{2.2}$$

где α и β – случайные величины.

Реализации этого процесса представляют собой прямые линии, имеющие случайные значения углового коэффициента и смещения по оси ординат (см. рис. 2.2).

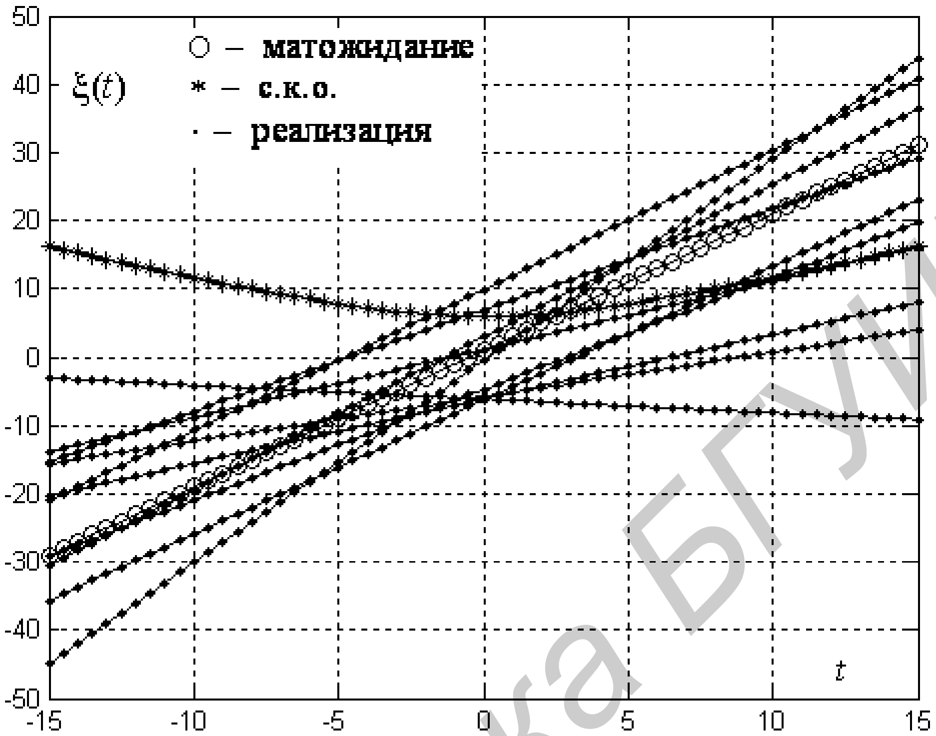

Рис. 2.2. Реализации, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение случайного процесса (2.2)

Назовем любое множество G дискретным, если оно конечное или счетное, и непрерывным, если оно несчетное.

Случайные процессы классифицируются по виду множеств T и G, где G – множество возможных значений случайного процесса. Эти множества могут быть непрерывными или дискретными, в связи с чем различают 4 класса случайных процессов.

1. T и G – непрерывные множества. Это процесс с непрерывным временем и непрерывным множеством значений или процесс общего типа. Пример реализаций такого процесса представлен на рис. 2.1.

2. T дискретно, G непрерывно. Это процесс с дискретным временем и непрерывным множеством значений или случайная последовательность. Пример реализации такого процесса представлен на рис. 2.3.

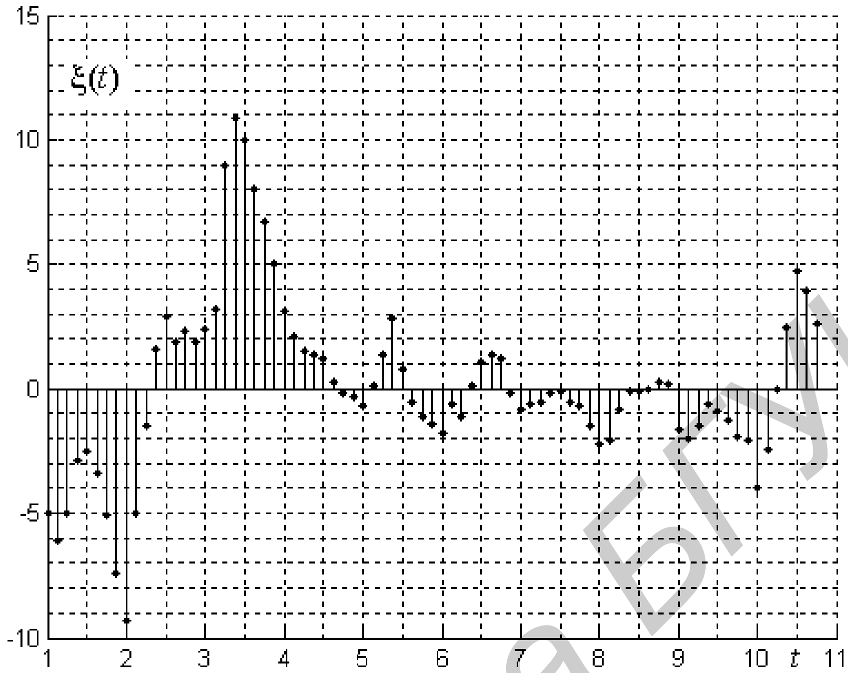

Рис. 2.3. Реализация случайной последовательности

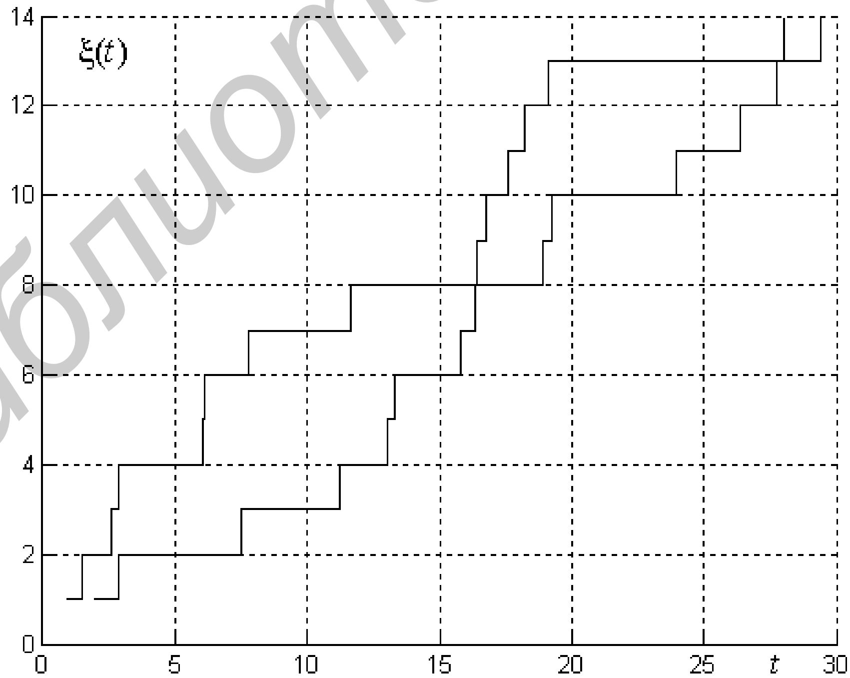

Рис. 2.4. Реализации дискретного случайного процесса

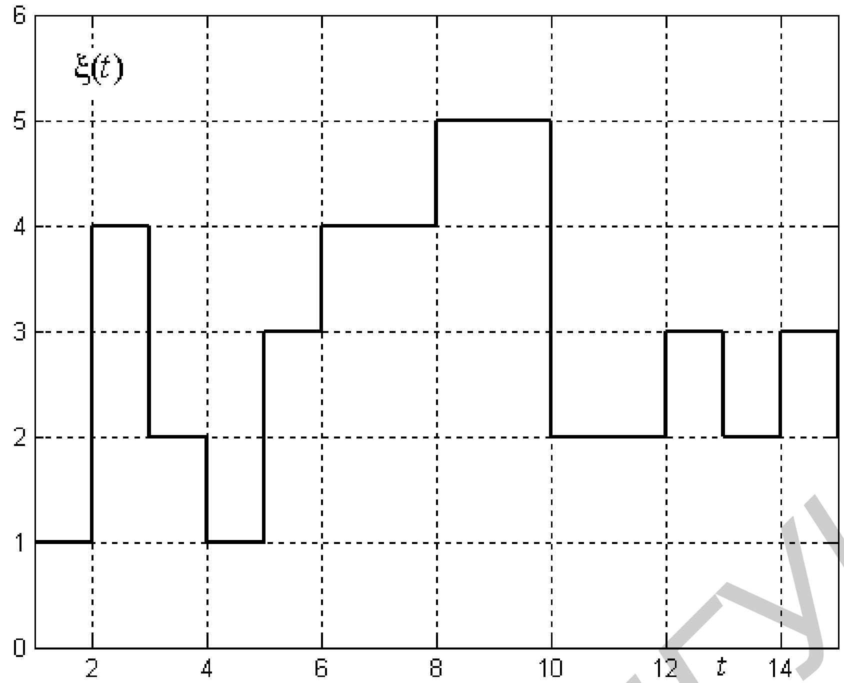

Рис. 2.5. Реализация дискретной случайной последовательности

3. T непрерывно, G дискретно. Это процесс с непрерывным временем и дискретным множеством значений или дискретный случайный процесс. Пример реализации такого процесса представлен на рис. 2.4.

4. T дискретно, G дискретно. Это процесс с дискретным временем и дискретным множеством значений или дискретная случайная последовательность. Пример реализации такого процесса представлен на рис. 2.5.

Случайные последовательности часто называют случайными временными рядами.

2.2. Конечномерные распределения случайного процесса

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ и зафиксируем n моментов времени $t_1,\ldots,t_n$. Мы получим n сечений процесса $\xi_1=\xi(t_1)$, $\xi_2=\xi(t_2)$,…, $\xi_n=\xi(t_n)$.

Конечномерной (n-мерной) функцией распределения случайного процесса $\xi(t)$ называется функция распределения случайного вектора $\overline{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, компоненты которого ξ_i являются сечениями процесса в моменты времени $t_1,...,t_n$:

$$F_{\xi}(x_1,...,x_n,t_1,...,t_n) = P(\xi(t_1) < x_1,...,\xi(t_n) < x_n). \tag{2.3}$$

Конечномерная функция распределения случайного процесса $\xi(t)$ является функцией $2n$ аргументов: n аргументов $x_1,...,x_n$ и n аргументов $t_1,...,t_n$. Она должна обладать свойствами симметрии и согласованности.

Свойство симметрии заключается в том, что любые два аргумента функции распределения x_i и x_j можно менять местами, поменяв при этом местами соответствующие аргументы t_i и t_j:

$$F_{\bar{\xi}}(x_1,...,x_i,...,x_j,...,x_n,t_1,...,t_i,...,t_j,...,t_n) =$$
$$= F_{\bar{\xi}}(x_1,...,x_j,...,x_i,...,x_n,t_1,...,t_j,...,t_i,...,t_n).$$

Для двухмерной функции распределения это свойство выражается равенством

$$F_{\bar{\xi}}(x_1,x_2,t_1,t_2) = F_{\bar{\xi}}(x_2,x_1,t_2,t_1).$$

Свойство согласованности выражается условием

$$\lim_{x_k \to \infty} F_{\bar{\xi}}(x_1,...,x_{k-1},x_k,x_{k+1},...,x_n,t_1,...,t_{k-1},t_k,t_{k+1},...,t_n) =$$
$$= F_{\bar{\xi}}(x_1,...,x_{k-1},x_{k+1},...,x_n,t_1,...,t_{k-1},t_{k+1},...,t_n),$$

т. е. если в n-мерной функции распределения аргумент x_k заменить на ∞, то мы получим $(n-1)$-мерную функцию распределения (этот аргумент исчезает из списка аргументов функции распределения вместе с соответствующим ему аргументом t_k).

Конечномерной (n-мерной) плотностью вероятности случайного процесса $\xi(t)$ называется смешанная производная n-го порядка от n-мерной функции распределения

$$f_{\xi}(x_1,...,x_n,t_1,...,t_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1,...,\partial x_n} F_{\xi}(x_1,...,x_n,t_1,...,t_n). \tag{2.4}$$

Конечномерную функцию распределения (2.3) или конечномерную плотность вероятности (2.4) называют конечномерным распределением случайного процесса.

Совокупность конечномерных распределений для любого конечного n и произвольных моментов времени $t_1,\dots,t_n$ называется семейством конечномерных распределений случайного процесса.

Случайный процесс наиболее полно описывается семейством конечномерных распределений. Так как это семейство бесконечное, то такое описание представляется чрезвычайно сложным. Выход состоит в том, что рассматриваются определенные классы случайных процессов. Например, можно рассматривать класс процессов, которые описываются семейством одномерных распределений $f_\xi(x,t)$, или, если все одномерные распределения совпадают, то одним одномерным распределением. Такой процесс будет обладать тривиальными свойствами и не слишком широкой областью применения. Второй класс процессов – процессы, описываемые семейством двухмерных распределений $f_\xi(x_1,x_2,t_1,t_2)$ для любых моментов времени t_1, t_2 из интересующего нас промежутка времени T. Этот класс процессов имеет более широкий спектр свойств и более широкое применение.

Если на одном и том же вероятностном пространстве $\{\Omega,F,P\}$ задано несколько случайных процессов $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, …, $\xi_n(t)$, то говорят, что задан многомерный (n-мерный) (или векторный) случайный процесс $\bar{\xi}(t)=(\xi_1(t),\xi_2(t),\dots,\xi_n(t))$, $t\in T$. Описанием векторного случайного процесса является семейство совместных конечномерных распределений сечений $\bar{\xi}(t_1)$, $\bar{\xi}(t_2)$, …, $\bar{\xi}(t_m)$. В частности, совместные двухмерные функция распределения и плотность вероятности двухмерного случайного процесса $\bar{\xi}(t)=(\xi_1(t),\xi_2(t))$ определяются естественным образом:

$$F_\xi(x_1,y_1,x_2,y_2,t_1,t_2)=P(\xi_1(t_1)<x_1,\xi_2(t_1)<y_1,\xi_1(t_2)<x_2,\xi_2(t_2)<y_2), \quad (2.5)$$

$$f_\xi(x_1,y_1,x_2,y_2,t_1,t_2)=\frac{\partial^4 F_\xi(x_1,y_1,x_2,y_2,t_1,t_2)}{\partial x_1\partial y_1\partial x_2\partial y_2}. \qquad (2.6)$$

Случайный процесс, содержащий действительную и мнимую части, т. е. случайный процесс вида

$$\xi(t)=\xi_1(t)+i\xi_2(t),$$

где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ – действительные случайные процессы, $i=\sqrt{-1}$, называется комплексным случайным процессом. Комплексно-сопряженный случайный процесс обозначается $\overline{\xi(t)}$, так что

$$\overline{\xi(t)}=\xi_1(t)-i\xi_2(t).$$

Комплексный случайный процесс можно считать двухмерным случайным процессом и описывать совместными распределениями действительной и мнимой частей, т. е. как двухмерный случайный процесс – функциями (2.5) или (2.6).

2.3. Математическое ожидание и дисперсия случайного процесса

Будем рассматривать случайные процессы, для которых существуют конечномерные плотности вероятности. К таким процессам относятся процессы с непрерывным множеством значений.

Математическим ожиданием $E(\xi(t))$ случайного процесса $\xi(t)$ называется функция $a_\xi(t)$, определяемая выражением

$$a_\xi(t)=E(\xi(t))=\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x,t)dx,$$

где $f_\xi(x,t)$ – одномерная плотность вероятности случайного процесса, $E(\cdot)$ – символ математического ожидания (усреднения). Для случайных процессов, заданных в параметрической форме (2.1), математическое ожидание определяется формулой

$$a_\xi(t)=E(\xi(t))=\int_{-\infty}^{\infty} g(t,\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n)f(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n)d\mu_1 d\mu_2\dots d\mu_n,$$

где $f(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)$ – совместная плотность вероятности случайных величин $\mu_1,\mu_2,...,\mu_n$.

Математическое ожидание характеризует тенденцию развития случайного процесса во времени.

На рис. 2.2 представлены реализации и математическое ожидание случайного процесса вида (2.2), где α и β – независимые случайные величины, распределенные по нормальным законам $N(a_\alpha,\sigma_\alpha^2)$, $N(a_\beta,\sigma_\beta^2)$ соответственно. Выражение математического ожидания этого случайного процесса имеет вид

$$a_\xi(t) = a_\alpha + a_\beta t.$$

Видно, что реализации этого случайного процесса имеют тенденцию к возрастанию, в связи с чем возрастающей является и функция математического ожидания.

Дисперсией $D(\xi(t))$ случайного процесса $\xi(t)$ называется математическое ожидание квадрата отклонения случайного процесса от его математического ожидания:

$$\sigma_\xi^2(t) = D(\xi(t)) = E((\xi(t) - a_\xi(t))^2) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - a_\xi(t))^2 f_\xi(x,t)dx,$$

где $f_\xi(x,t)$ – одномерная плотность вероятности случайного процесса, $D(\cdot)$ – символ дисперсии. Для случайных процессов, заданных в параметрической форме (2.1), дисперсия определяется формулой

$$\sigma_\xi^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty}(g(t,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n) - a_\xi(t))^2 f(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)d\mu_1 d\mu_2 ... d\mu_n,$$

где $f(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)$ – совместная плотность вероятности случайных величин $\mu_1,\mu_2,...,\mu_n$.

Дисперсия $\sigma_\xi^2(t)$ случайного процесса $\xi(t)$ является функцией времени, которая характеризует среднее отклонение реализаций процесса от его математического ожидания в любой момент времени t.

На рис. 2.2 изображена функция $\sigma_\xi(t)=\sqrt{\sigma_\xi^2(t)}$ – среднее квадратичное отклонение (с.к.о.) случайного процесса (2.2). Дисперсия этого случайного процесса определяется выражением

$$\sigma_\xi^2(t)=E((\overset{\circ}{\alpha}+\overset{\circ}{\beta}t)^2)=E((\overset{\circ}{\alpha})^2)+E(\overset{\circ}{\alpha}\overset{\circ}{\beta}t)+E((\overset{\circ}{\beta}t)^2)=\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2t^2,$$

где $\overset{\circ}{\alpha}$ и $\overset{\circ}{\beta}$ – центрированные случайные величины. Поскольку реализации имеют тенденцию при $t\to\infty$ все более отклоняться от функции математического ожидания, то с.к.о. случайного процесса является возрастающей функцией при $t\to\infty$.

2.4. Ковариационная функция случайного процесса

Пусть $\xi(t)$ – случайный процесс, и $\overset{\circ}{\xi}(t)=\xi(t)-E(\xi(t))$ – центрированный случайный процесс.

Ковариационной функцией $R_\xi(t_1,t_2)$ случайного процесса $\xi(t)$ называется коэффициент ковариации между сечениями случайного процесса в два момента времени t_1, t_2:

$$R_\xi(t_1,t_2)=\operatorname{cov}(\xi(t_1),\xi(t_2))=E(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)).$$

Ковариационная функция $R_\xi(t_1,t_2)$ комплексного случайного процесса $\xi(t)=\xi_1(t)+i\xi_2(t)$ определяется следующим образом:

$$R_\xi(t_1,t_2)=\operatorname{cov}(\xi(t_1),\xi(t_1))=E(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overline{\overset{\circ}{\xi}(t_2)}).$$

Для процессов, имеющих конечномерные плотности вероятности, ковариационная функция рассчитывается по формуле

$$R_\xi(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-a_\xi(t_1))(x_2-a_\xi(t_2))f_\xi(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2,$$

где $f_\xi(x_1,x_2,t_1,t_2)$ – двухмерная плотность вероятности случайного процесса.

Ковариационная функция является функцией двух аргументов t_1, t_2. Она характеризует силу линейной стохастической связи между двумя сечениями случайного процесса в моменты времени t_1, t_2.

Выберем n моментов времени $t_1, t_2, ..., t_n$. Квадратная матрица $R = (R_{i,j})$, $i, j = \overline{1, n}$, составленная из значений ковариационной функции $R_{i,j} = R_\xi(t_i, t_j)$, называется ковариационной матрицей случайного процесса $\xi(t)$.

На рис. 2.6 представлена ковариационная функция случайного процесса (2.2). Она определяется выражением

$$R_\xi(t_1, t_2) = E((\overset{\circ}{\alpha} + \overset{\circ}{\beta} t_1)(\overset{\circ}{\alpha} + \overset{\circ}{\beta} t_2)) = E((\overset{\circ}{\alpha})^2) + E(\overset{\circ}{\beta}{}^2 t_1 t_2) = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 t_1 t_2 .$$

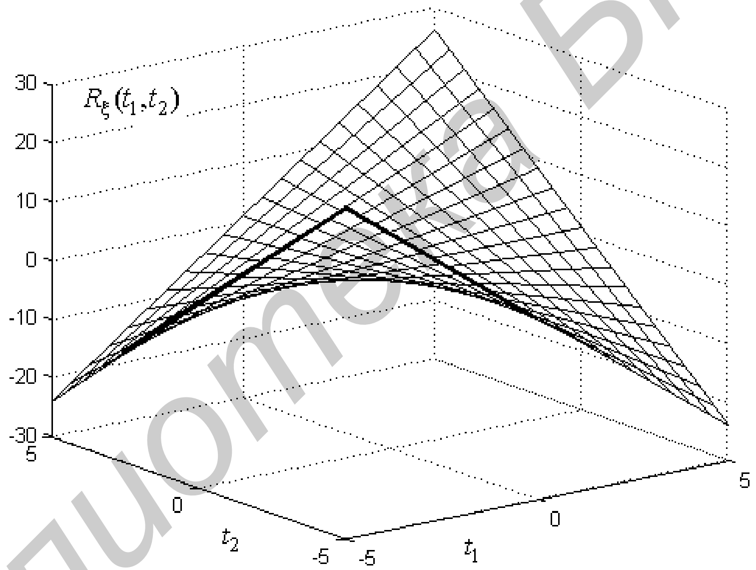

Рис. 2.6. Ковариационная функция случайного процесса (2.2)

Ковариационная функция любого случайного процесса имеет следующие свойства.

1. Ковариационная функция является симметричной функцией своих аргументов:

$$R_\xi(t_1, t_2) = R_\xi(t_2, t_1).$$

Действительно, имеем

$$R_\xi(t_1,t_2)=E(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2))=E(\overset{\circ}{\xi}(t_2)\overset{\circ}{\xi}(t_1))=R_\xi(t_2,t_1).$$

2. Дисперсия процесса в момент времени t определяется как значение ковариационной функции в точке (t,t):

$$D_\xi(t)=\sigma_\xi^2(t)=R_\xi(t,t).$$

Действительно,

$$R_\xi(t,t)=E(\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t))=E(\overset{\circ}{\xi}{}^2(t))=D(\xi(t))=\sigma_\xi^2(t).$$

3. Ковариационная функция подчиняется неравенству

$$R_\xi^2(t_1,t_2)\le R_\xi(t_1,t_1)R_\xi(t_2,t_2).$$

Это свойство является интерпретацией известного неравенства Шварца $E^2(uv)\le E(u^2)E(v^2)$ (подразд. 1.14), если выбрать в нем $u=\overset{\circ}{\xi}(t_1)$, $v=\overset{\circ}{\xi}(t_2)$.

4. Ковариационная функция является неотрицательно определенной функцией. Это свойство означает, что для любых моментов времени $t_1,t_2,...,t_n$ и любых действительных чисел $x_1,x_2,...,x_n$ выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_\xi(t_i,t_j)x_ix_j\ge 0.$$

Свойство доказывается путем следующих очевидных преобразований:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_\xi(t_i,t_j)x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E(\overset{\circ}{\xi}(t_i)\overset{\circ}{\xi}(t_j))x_ix_j=E((\sum_{i=1}^{n}\overset{\circ}{\xi}(t_i)x_i)^2)\ge 0.$$

Из свойства 1 ковариационной функции с очевидностью вытекает, что ковариационная матриц $R=(R_{i,j})$ является симметричной, т. е. $R_{j,i}=R_{i,j}$. Симметричная матрица совпадает со своей транспонированной матрицей: $R=R^T$.

Из свойства 4 ковариационной функции вытекает, что ковариационная матрица R является неотрицательно определенной, т. е. для любого вектора действительных чисел $X=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ выполняется соотношение

$$X^TRX\ge 0.$$

Из свойства 2 ковариационной функции следует, что на главной диагонали ковариационной матрицы R располагаются дисперсии случайного процесса в моменты времени $t_1, t_2, ..., t_n$.

Корреляционной функцией случайного процесса $\xi(t)$ называется коэффициент корреляции между сечениями процесса в моменты t_1, t_2, или, иначе, нормированная ковариационная функция:

$$r_\xi(t_1,t_2) = \frac{R_\xi(t_1,t_2)}{\sqrt{R_\xi(t_1,t_1)R_\xi(t_2,t_2)}}.$$

Свойства корреляционной функции автоматически вытекают из соответствующих свойств ковариационной функции:

1) $r_\xi(t_1,t_2) = r_\xi(t_2,t_1)$,

2) $r_\xi(t,t) = 1$,

3) $r_\xi^2(t_1,t_2) \le 1$,

4) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_\xi(t_i,t_j)x_i x_j \ge 0$.

2.5. Взаимная ковариационная функция случайных процессов

Функция, определяемая выражением

$$F_{\overline{\xi}}(x,y,t_1,t_2) = P(\xi_1(t_1) < x,\ \xi_2(t_2) < y),$$

где t_1, t_2 – два момента времени, называется двухмерной совместной функцией распределения случайных процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, или векторного случайного процесса $\overline{\xi}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$.

Двухмерной совместной плотностью вероятности случайных процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ называется смешанная производная второго порядка от совместной функции распределения:

$$f_{\bar{\xi}}(x,y,t_1,t_2)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{\bar{\xi}}(x,y,t_1,t_2).$$

Взаимной ковариационной функцией случайных процессов $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ называется коэффициент ковариации между сечениями $\xi_1(t_1)$, $\xi_2(t_2)$ этих процессов:

$$R_{\xi_1,\xi_2}(t_1,t_2)=\mathrm{cov}(\xi_1(t_1),\xi_2(t_2))=E(\overset{\circ}{\xi}_1(t_1)\overset{\circ}{\xi}_2(t_2))=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-a_{\xi_1}(t_1))(y_2-a_{\xi_2}(t_2))f_{\bar{\xi}}(x,y,t_1,t_2)dxdy.$$

Взаимная ковариационная функция характеризует силу линейной связи между сечениями двух процессов в два различных момента времени t_1, t_2. Она обладает следующим очевидным свойством:

$$R_{\xi_1,\xi_2}(t_1,t_2)=R_{\xi_2,\xi_1}(t_2,t_1).$$

2.6. Стационарный случайный процесс

Случайный процесс $\xi(t)$ называется стационарным в строгом или узком смысле, если его конечномерные распределения инвариантны к сдвигу по оси времени (не зависят от этого сдвига).

Для конечномерных функций распределения свойство инвариантности записывается в виде

$$F_{\xi}(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n)=F_{\xi}(x_1,\dots,x_n,t_1+s,\dots,t_n+s),$$

где s – некоторое число, характеризующее сдвиг по оси времени. Аналогичный вид имеет свойство инвариантности для конечномерных плотностей вероятности:

$$f_{\xi}(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n)=f_{\xi}(x_1,\dots,x_n,t_1+s,\dots,t_n+s). \qquad (2.7)$$

Плотность вероятности слева в равенстве (2.7) определяет свойства случайного процесса в моменты времени $t_1,\dots,t_n$, а справа – в сдвинутые по оси времени на величину s моменты времени $t_1+s,\ldots,t_n+s$. Равенство этих функций означает, что свойства процесса в моменты $t_1,\ldots,t_n$ такие же, как и в моменты $t_1+s,\ldots,t_n+s$, т. е. не меняются с течением времени. Таких процессов в природе не существует, но если рассматривать процесс на некотором конечном промежутке времени, то предположение стационарности может оказаться допустимым.

Теорема 2.1. Если случайный процесс $\xi(t)$ стационарен в узком смысле, то его математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а ковариационная функция $R_\xi(t_1,t_2)$ не зависит от t_1 и t_2 в отдельности, а зависит лишь от их разности $\tau=t_2-t_1$, т. е. является функцией не двух аргументов t_1, t_2, а одного аргумента $\tau=t_2-t_1$:

$$R_\xi(t_1,t_2)=R_\xi(t_2-t_1)=R_\xi(\tau).$$

Действительно, условие стационарности (2.7) для одномерной плотности вероятности имеет вид $f_\xi(x_1,t_1)=f_\xi(x_1,t_1+s)$. Так как это равенство выполняется для любого s, то, выбрав $s=-t_1$, получим

$$f_\xi(x_1,t_1)=f_\xi(x_1,t_1-t_1)=f_\xi(x_1,0)=f_\xi(x_1).$$

Мы видим, что одномерная плотность вероятности стационарного в узком смысле процесса не зависит от времени. Тогда для математического ожидания и дисперсии получим

$$a_\xi(t)=E(\xi(t))=\int_{-\infty}^{\infty}xf_\xi(x,t)dx=\int_{-\infty}^{\infty}xf_\xi(x)dx=a_\xi=\mathrm{const},$$

$$\sigma_\xi^2(t)=E(\overset{\circ}{\xi}{}^2(t))=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a_\xi)^2 f_\xi(x,t)dx=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2 f_\xi(x)dx=\sigma_\xi^2=\mathrm{const}.$$

Запишем теперь условие инвариантности (2.7) для двухмерной плотности вероятности:

$$f_\xi(x_1,x_2,t_1,t_2)=f_\xi(x_1,x_2,t_1+s,t_2+s).$$

Выбрав здесь $s=-t_1$, получим

$$f_\xi(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_\xi(x_1, x_2, t_1 - t_1, t_2 - t_1) = f_\xi(x_1, x_2, t_1 - t_1, \tau),\ \tau = t_2 - t_1.$$

Мы видим, что двухмерная плотность вероятности стационарного в узком смысле процесса не зависит от каждого из двух аргументов t_1, t_2 отдельно, а зависит лишь от их разности $\tau = t_2 - t_1$. Выражение для ковариационной функции такого процесса приобретает вид

$$R_\xi(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1 - a_\xi(t_1))(x_2 - a_\xi(t_2)) f_\xi(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1 - a_\xi)(x_2 - a_\xi) f_\xi(x_1, x_2, t_2 - t_1) dx_1 dx_2 = R_\xi(t_2 - t_1) = R_\xi(\tau).$$

Теорема 2.1 доказана.

Случайный процесс $\xi(t)$ называется стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а ковариационная функция зависит от разности своих аргументов.

Из доказанной выше теоремы следует, что из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле. Обратное утверждение в общем случае неверно. Обратное утверждение верно лишь в случае, когда процесс $\xi(t)$ является нормальным (гауссовским). Гауссовский случайный процесс определен в подразд. 2.7.

Свойства 1–4 ковариационной функции случайного процесса, приведенные в подразд. 2.4, применительно к стационарному случайному процессу приобретают следующую форму:

1) $R_\xi(\tau) = R_\xi(-\tau)$,

2) $D_\xi = \sigma_\xi^2 = R_\xi(0)$,

3) $R_\xi^2(\tau) \le R_\xi^2(0)$, или $\left|R_\xi(\tau)\right| \le R_\xi(0)$,

4) $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_\xi(t_i - t_j) x_i x_j \ge 0. \qquad (2.8)$$

Эти свойства с очевидностью вытекают из указанных соответствующих свойств ковариационной функции общего (нестационарного) случайного процесса при замене $\tau = t_2 - t_1$.

В практических приложениях стационарных случайных процессов чаще всего используются ковариационные функции следующего вида:

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}, \tag{2.9}$$

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 (1 + \alpha|\tau|) e^{-\alpha|\tau|}, \tag{2.10}$$

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 (1 + \alpha|\tau| + \frac{\alpha^2\tau^2}{3}) e^{-\alpha|\tau|}, \tag{2.11}$$

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha^2\tau^2}, \tag{2.12}$$

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos(\omega\tau). \tag{2.13}$$

Графики ковариационных функций (2.9) – (2.13) для одних и тех же значений параметров σ_ξ^2 и α представлены на рис. 2.7.

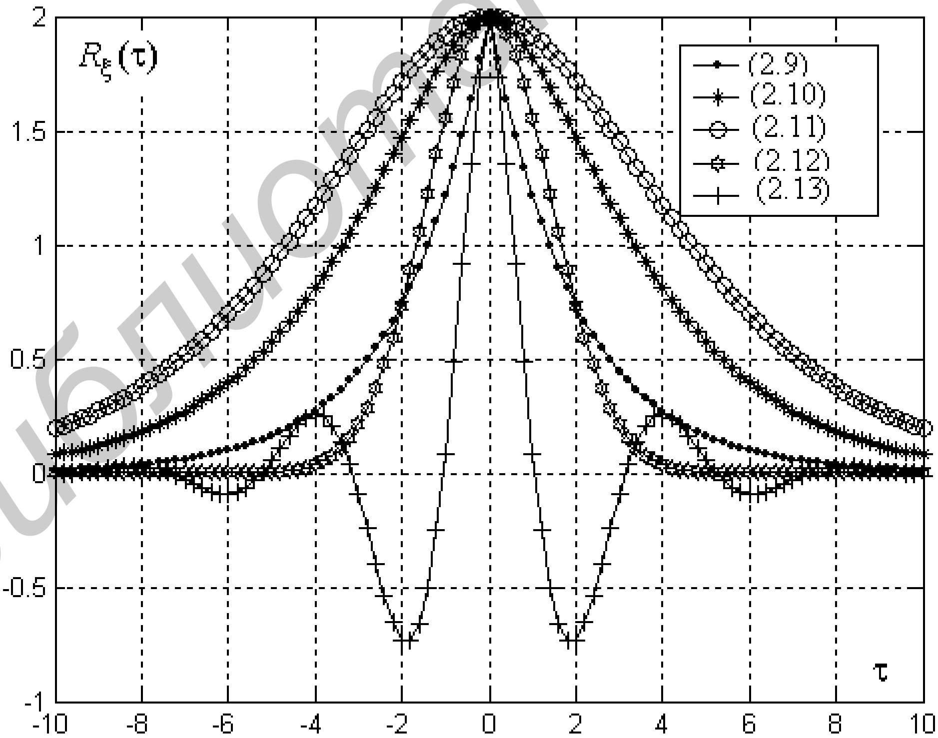

Рис. 2.7. Ковариационные функции (2.9) – (2.13)

стационарных случайных процессов

Корреляционная функция стационарного случайного процесса имеет следующие свойства:

1) $r_\xi(\tau) = r_\xi(-\tau)$,

2) $r_\xi(0) = 1$,

3) $|r_\xi(\tau)| \le 1$,

4) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_\xi(t_i - t_j)x_i x_j \ge 0$.

Для стационарного случайного процесса корреляционная функция $r_\xi(\tau)$ обычно убывает по модулю при увеличении τ. В связи с этим вводится понятие времени корреляции. Временем корреляции τ_k стационарного случайного процесса называется промежуток времени между двумя сечениями процесса, в течение которого корреляционная функция по модулю затухает до величины ε. Положительное число ε выбирается из набора чисел $0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}025$. Время корреляции отмечено на рис. 2.8 на примере корреляционной функции (2.9).

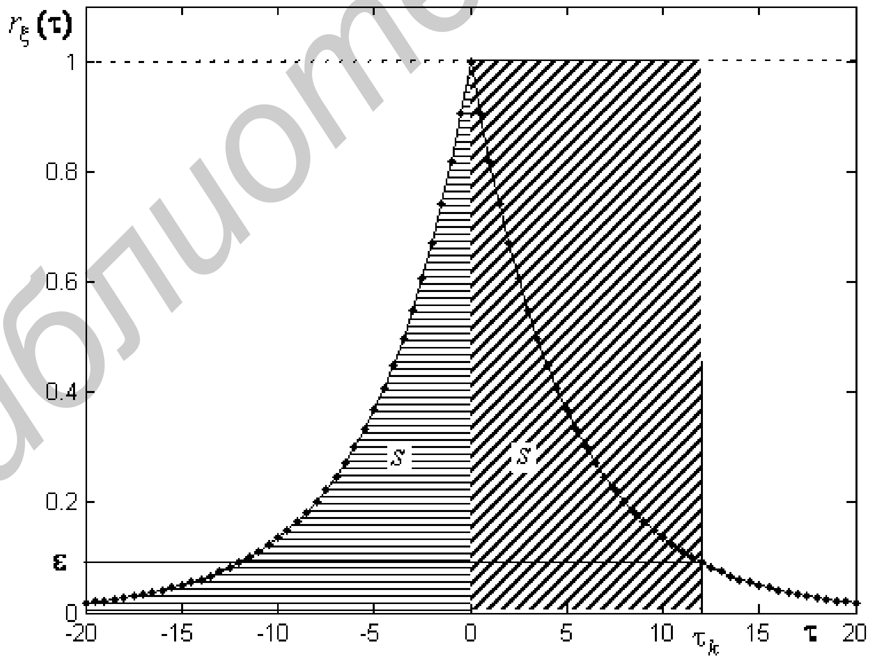

Рис. 2.8. Корреляционная функция (2.9)
и время корреляции случайного процесса

Исходя из этого определения время корреляции определяется как решение относительно τ уравнения

$$|r_\xi(\tau)| = \varepsilon.$$

Иногда время корреляции определяется соотношением

$$\tau_k = \int_0^{\infty} |r_\xi(\tau)|\, d\tau = \int_{-\infty}^{0} |r_\xi(\tau)|\, d\tau.$$

В этом случае время корреляции представляет собой длину основания прямоугольника единичной высоты, площадь которого равна площади под кривой корреляционной функции на действительной полуоси (рис. 2.8). Равные площади отмечены на рис. 2.8 символом s и разнонаправленной штриховкой.

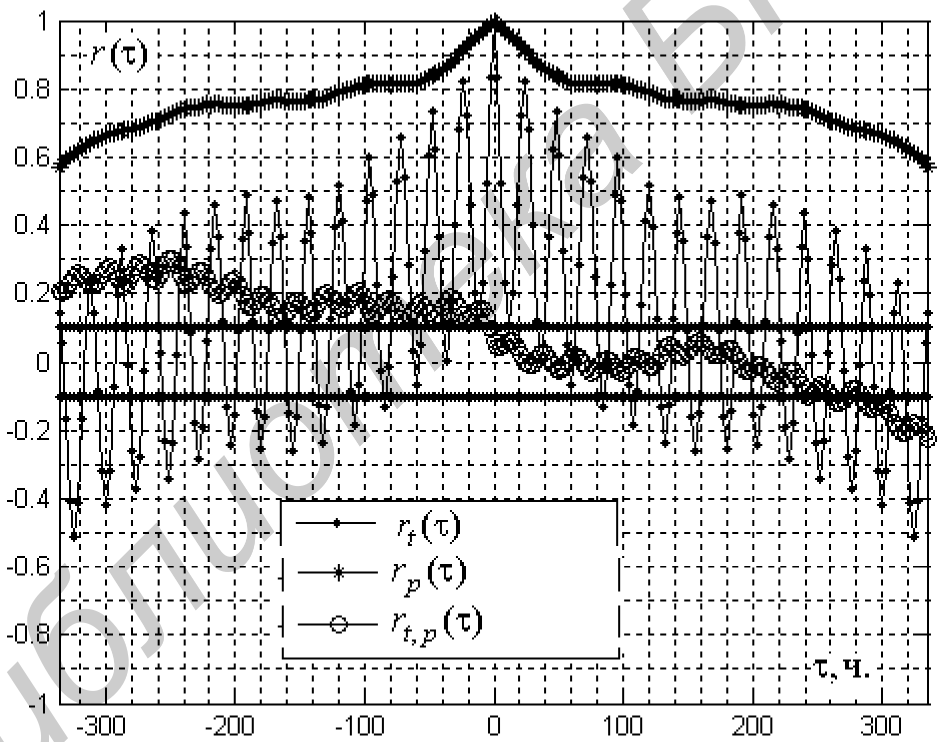

Рис. 2.9. Оценки корреляционных функций температуры воздуха ($r_t(\tau)$), атмосферного давления ($r_p(\tau)$) и их взаимной корреляционной функции $r_{t,p}(\tau)$ на метеостанции «Минск» в июне

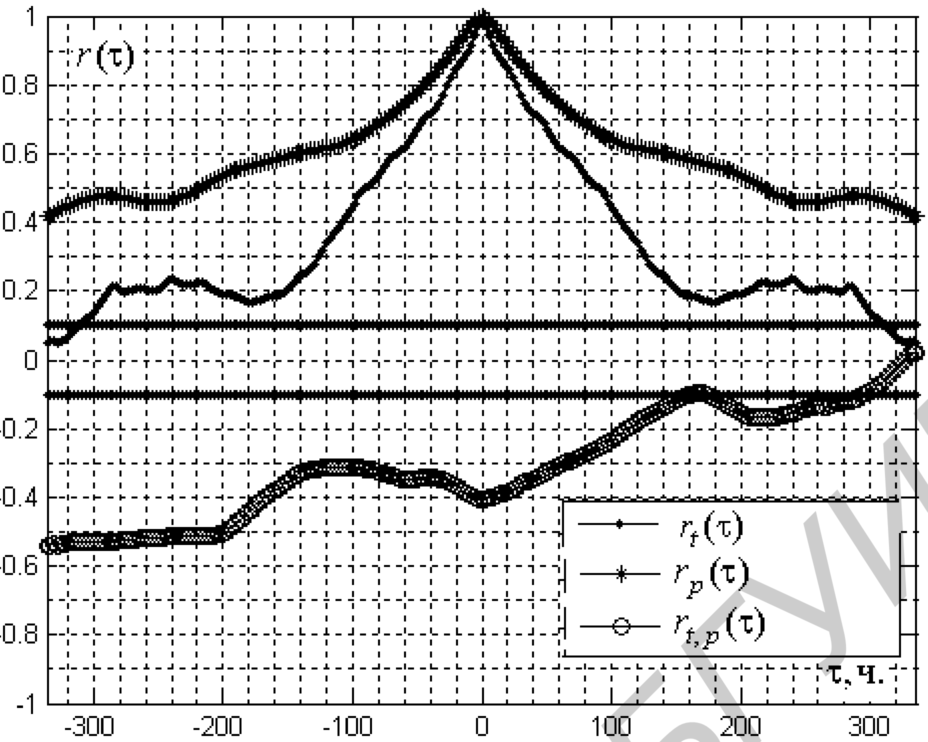

Рис. 2.10. Оценки корреляционных функций температуры воздуха ($r_t(\tau)$), атмосферного давления ($r_p(\tau)$) и их взаимной корреляционной функции $r_{t,p}(\tau)$ на метеостанции «Минск» в январе

На рис. 2.9 и 2.10 представлены графики оценок корреляционных и взаимных корреляционных функций температуры воздуха и атмосферного давления на метеостанции Минск в июне и декабре, полученные по фактическим метеорологическим данным за последние 10 лет. Видно, что корреляционная функция температуры в июне имеет сильную периодическую составляющую, обусловленную суточными колебаниями температуры. В декабре периодическая составляющая отсутствует. Видно также, что атмосферное давление является более сильно коррелированным случайным процессом по сравнению с температурой.

Пример 2.1. Является ли стационарным случайный процесс $\xi(t)$, заданный в параметрической форме:

$$\xi(t) = a\cos(\lambda t + \varphi), \tag{2.14}$$

где a и λ – фиксированные числа;

φ – случайная величина с равномерным распределением на $[-\pi, \pi]$?

Для ответа на этот вопрос найдем математическое ожидание и ковариационную функцию случайного процесса (2.14). Для математического ожидания получим

$$a_\xi(t) = E(\xi(t)) = E(a\cos(\lambda t + \varphi)) = a\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda t + \varphi)\frac{1}{2\pi}d\varphi = 0.$$

Ковариационную функцию будем искать как коэффициент ковариации сечений $\xi(t)$ и $\xi(t+\tau)$. Тогда ковариационная функция должна быть функцией аргументов t и τ. Получим

$$R_\xi(t,\tau) = E(\xi(t)\xi(t+\tau)) = E(a\cos(\lambda t + \varphi)a\cos(\lambda(t+\tau)+\varphi)) =$$

$$= a^2 E(\frac{1}{2}\cos((2t+\tau)\lambda + 2\varphi) + \frac{1}{2}\cos(\lambda\tau)) = \frac{a^2}{2}\cos(\lambda\tau),$$

поскольку

$$E(\frac{1}{2}\cos((2t+\tau)\lambda + 2\varphi)) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((2t+\tau)\lambda + 2\varphi)\frac{1}{2\pi}d\varphi = 0.$$

Видим, что математическое ожидание постоянно (равно нулю), а ковариационная функция зависит лишь от длины промежутка времени τ между сечениями. Следовательно, данный случайный процесс стационарен в широком смысле.

Для выяснения стационарности в узком смысле возьмем произвольный набор моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Тогда $\xi(t_i) = a\cos(\lambda t_i + \varphi)$, $i = 1,2,\ldots,n$. Возьмем теперь новый набор моментов времени $t_1+\tau, t_2+\tau, \ldots, t_n+\tau$, сдвинутый относительно первого на величину τ. В этом случае будем иметь сечения $\xi(t_i+\tau) = a\cos(\lambda t_i + \varphi_1)$, $i = 1,2,\ldots,n$, где $\varphi_1 = \varphi + \lambda\tau$. Так как случайная величина φ распределена равномерно на $[-\pi, \pi]$, то случайная величина $\varphi_1 = \varphi + \lambda\tau$ также распределена равномерно, но на другом интервале $[-\pi + \lambda\tau, \pi + \lambda\tau]$. Сравним распределения случайных величин $\xi(t_i)$ и $\xi(t_i+\tau)$. Каждая из этих функций отображает интервал длиной 2π (с равномерным распределением на нем) в интервал $[-1,1]$. Следовательно,

$$P(a\cos(\lambda t_i+\varphi)<x)=P(a\cos(\lambda t_i+\varphi_1)<x),$$

что означает равенство распределений случайных величин $\xi(t_i)$ и $\xi(t_i+\tau)$. Очевидно, что и совместное распределение случайных величин $\xi(t_1),\xi(t_2),\ldots,\xi(t_n)$ будет таким же, как и случайных величин $\xi(t_1+\tau),\xi(t_2+\tau),\ldots,\xi(t_n+\tau)$. Следовательно, случайный процесс (2.14) стационарен и в узком смысле.

2.7. Гауссовский (нормальный) случайный процесс

Случайный процесс $\xi(t)$ называется гауссовским (нормальным), если все его конечномерные распределения гауссовские, т. е. если его n-мерная плотность вероятности определяется выражением

$$f_\xi(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\,|R|}}\exp\left(-\frac{1}{2}(X-A)^T R^{-1}(X-A)\right),$$

где $A^T=(a_\xi(t_1),\ldots,a_\xi(t_n))$ – вектор математических ожиданий процесса в моменты $t_1,\ldots,t_n$; $X^T=(x_1,\ldots,x_n)$ – вектор-строка аргументов плотности вероятности, $R=(R_{i,j})$, $i,j=\overline{1,n}$, – ковариационная матрица процесса, $|R|$ – определитель ковариационной матрицы, R^{-1} – матрица, обратная к матрице R.

3. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

3.1. Процессы с ортогональными приращениями

Будем рассматривать комплексный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием, $E(\xi(t)) = 0$, и назовем случайную величину $\xi(t) - \xi(s)$ для $t \geq s$ приращением процесса на отрезке $[s, t]$. Будем считать, что для всех s и t выполняется условие

$$E(|\xi(t) - \xi(s)|^2) < \infty,$$

т. е. дисперсия приращения конечна.

Определение 3.1. Случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией приращения $\xi(t) - \xi(s)$ для всех t, s называется процессом с ортогональными приращениями, если для любых $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$

$$E(\xi(t_4) - \xi(t_3))(\overline{\xi(t_2)} - \overline{\xi(t_1)})) = 0. \tag{3.1}$$

Поскольку изучается процесс с нулевым математическим ожиданием, то математическое ожидание приращения такого процесса также равно нулю.

Если случайный процесс $\xi(t)$ вещественный, то условие (3.1) означает ортогональность приращений на непересекающихся промежутках времени. Поэтому вещественный случайный процесс, для которого выполняется условие (3.1), называется процессом с ортогональными приращениями.

Если η – произвольная случайная величина, то процессы $\xi(t) + \eta$ и $\xi(t)$ имеют одни и те же приращения. Это означает, что свойство ортогональности (3.1) сохраняется, если к исходному процессу с ортогональными приращениями добавить некоторую случайную величину. Мы можем, например, рассматривать случайный процесс $\xi(t) - \xi(t_0)$, принимающий значение 0 в любой фиксированный момент времени t_0 и имеющий ортогональные приращения.

При анализе случайных процессов с ортогональными приращениями большое значение имеет следующая функция:

$$F(t)=\begin{cases} E(|\xi(t)-\xi(t_0)|^2),\ t\ge t_0, \\ -E(|\xi(t)-\xi(t_0)|^2),\ t<t_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

где t_0 – заранее выбранное число.

В выражении (3.2) $E(|\xi(t)-\xi(t_0)|^2)$ – дисперсия приращения случайного процесса на отрезке $[t_0,t]$. Функция $F(t)$ (3.2) имеет следующие свойства.

1. Для всех $u\le t$

$$E(|\xi(t)-\xi(u)|^2)=D(\xi(t)-\xi(u))=F(t)-F(u). \tag{3.3}$$

Эта свойство показывает, как по известной функции $F(t)$ найти дисперсию приращения процесса на отрезке $[u,t]$.

Для доказательства формулы (3.3) выберем t_0 из условия $u<t_0<t$. Получим

$$E(|\xi(t)-\xi(u)|^2)=E(|(\xi(t)-\xi(t_0))-(\xi(u)-\xi(t_0))|^2)=$$

$$=E(|\xi(t)-\xi(t_0)|^2)-2E((\xi(t)-\xi(t_0))(\overline{\xi(u)}-\overline{\xi(t_0)}))+E(|\xi(u)-\xi(t_0)|^2).$$

Второе слагаемое в правой части этого равенства равно нулю в силу ортогональности приращений процесса $\xi(t)$, первое слагаемое есть $F(t)$, а третье слагаемое равно $(-F(t))$. Такой же вывод можно сделать при любом другом выборе момента времени t_0.

2. Функция $F(t)$ (3.2) – неубывающая по t, т. е. если $t\ge u$, то $\boldsymbol{F(t)\ge F(u)}$.

Это свойство следует из равенства (3.3) и того факта, что $E(|\xi(t)-\xi(u)|^2)\ge 0$.

3. Функция $F(t)$ определяет ковариационную функцию $R_\xi(s,u)$ процесса $\xi(t)-\xi(t_0)$:

$$R_{\xi}(s,u)=\begin{cases} F(\min(s,u)), & s>t_0,\, u>t_0, \\ -F(\max(s,u)), & s<t_0,\, u<t_0, \\ 0, & s\le t_0,\, u\ge t_0, \\ 0, & s\ge t_0,\, u\le t_0. \end{cases} \qquad (3.4)$$

Докажем равенство (3.4) только для случая $s>t_0,\, u>t_0$. Здесь возможны два варианта выбора t_0: $t_0<s<u$ и $t_0<u<s$. Пусть $t_0<s<u$. Тогда

$$R_{\xi}(s,u)=E(|\,\xi(s)-\xi(t_0)\,|\cdot|\,\overline{\xi(u)}-\overline{\xi(t_0)}\,|)=$$

$$=E(|\,\xi(s)-\xi(t_0)\,|\cdot|\,(\overline{\xi(u)}-\overline{\xi(s)})+(\overline{\xi(s)}-\overline{\xi(t_0)})\,|)=$$

$$=E(|\,\xi(s)-\xi(t_0)\,|\cdot|\,\overline{\xi(u)}-\overline{\xi(s)}\,|)+E(|\,\xi(s)-\xi(t_0)\,|^2)=F(s).$$

Если же $t_0<u<s$, то

$$R_{\xi}(s,u)=E(|\,\xi(s)-\xi(t_0)\,|\cdot|\,\xi(u)-\xi(t_0)\,|)=$$

$$=E(|\,(\xi(s)-\xi(u))+(\xi(u)-\xi(t_0))\,|\cdot|\,\overline{\xi(u)}-\overline{\xi(t_0)}\,|)=$$

$$=E(|\,\xi(s)-\xi(u)\,|\cdot|\,\overline{\xi(u)}-\overline{\xi(t_0)}\,|)+E(|\,\xi(u)-\xi(t_0)\,|^2)=F(u).$$

Таким образом, мы получили первую строку равенства (3.4). Аналогично доказываются остальные строки этого равенства.

3.2. Процессы со стационарными ортогональными приращениями

Определение 3.2. Случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией приращений на любых отрезках времени называется процессом со стационарными ортогональными приращениями, если он имеет ортогональные приращения и распределение приращения $\xi(t)-\xi(u)$ зависит не от каждого из аргументов t,u, а только от их разности $t-u$.

Стационарность приращений, в частности, означает, что дисперсия приращения (3.3) зависит только от разности $t-u$:

$$F(t)-F(u)=G(t-u),\; u\le t,$$

где $G(t-u)$ – некоторая функция одной переменной $v=t-u$. Эта функция удовлетворяет следующему условию: для всех положительных v и w

$$G(v)+G(w)=G(v+w). \qquad (3.5)$$

Действительно, выберем три момента времени так, что $t_1<t_2<t_3$ и обозначим $t_2-t_1=v$, $t_3-t_2=w$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} G(v)&=F(t_2)-F(t_1), \\ G(w)&=F(t_3)-F(t_2), \\ G(v+w)&=F(t_3)-F(t_1). \end{aligned} \qquad (3.6)$$

Сложив первые два из этих равенств, получим

$$G(v)+G(w)=F(t_3)-F(t_1).$$

Сравнивая последнее равенство с третьим из равенств (3.6), получим выражение (3.5).

Функциональное уравнение (3.5) является определением линейного оператора (линейной функции). Следовательно, единственным неотрицательным решением функционального уравнения (3.5) является линейная функция

$$G(t)=c^2t,$$

где c – константа.

Таким образом, в случае стационарности приращений случайного процесса $\xi(t)$ дисперсия его приращения определяется формулой

$$D(\xi(t)-\xi(u))=E(|\xi(t)-\xi(u)|^2)=c^2(t-u),$$

а для функции $F(t)$ (3.2) справедливо выражение

$$F(t)=c^2(t-t_0). \qquad (3.7)$$

Если подставить функцию $F(t)$ (3.7) в формулу (3.4), то получим следующее выражение для ковариационной функции процесса $\xi(t)-\xi(t_0)$ с ортогональными стационарными приращениями:

$$R_\xi(s,u)=\begin{cases} c^2(\min(s,u)-t_0), & s>t_0,\, u>t_0,\\ -c^2(\max(s,u)-t_0), & s<t_0,\, u<t_0,\\ 0, & s\le t_0,\, u\ge t_0,\\ 0, & s\ge t_0,\, u\le t_0. \end{cases} \qquad (3.8)$$

Если же $s>0$, $u>0$ и $t_0=0$, то ковариационная функция (3.8) преобразуется к виду

$$R_\xi(s,u)=c^2\min(s,u)=\begin{cases} c^2 s, & s<u,\\ c^2 u, & s\ge u.\end{cases}$$

3.3. Процессы Маркова с непрерывным множеством значений

Процессы Маркова с непрерывным множеством значений (состояний) имеют прямое отношение к процессам с некоррелированными приращениями. Поэтому рассмотрим сейчас этот класс процессов.

Определение 3.3. Случайный процесс $\xi(t)$ с непрерывным множеством значений называется марковским, если для любых моментов времени $t_1<t_2<\ldots<t_n$, где n – любое целое число, условная функция распределения

$$F(x_n,t_n/x_{n-1},t_{n-1},x_{n-2},t_{n-2},\ldots,x_1,t_1)=$$
$$=P(\xi(t_n)<x_n/\xi(t_{n-1})=x_{n-1},\ldots,\xi(t_1)=x_1)$$

для любых $x_1,x_2,\ldots,x_n$ удовлетворяет равенству

$$F(x_n,t_n/x_{n-1},t_{n-1},\ldots,x_1,t_1)=F(x_n,t_n/x_{n-1},t_{n-1}). \qquad (3.9)$$

Свойство (3.9) называется свойством марковости. Оно означает, что условная функция распределения, описывающая состояние системы в момент времени t_n, зависит только от значения процесса x_{n-1} в предыдущий момент времени t_{n-1} и не зависит от значений процесса в более ранние моменты времени.

В терминах условной плотности вероятности свойство марковости (3.9) записывается следующим образом:

$$f(x_n,t_n/x_{n-1},t_{n-1},\ldots,x_1,t_1)=f(x_n,t_n/x_{n-1},t_{n-1}). \qquad (3.10)$$

Функция $F(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1})$ в (3.9) называется функцией распределения перехода из одного состояния в другое для промежутка времени (t_{n-1}, t_n), а функция $f(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1})$ в (3.10) – плотностью вероятности перехода.

Как мы знаем (подразд. 2.2), полное описание случайного процесса $\xi(t)$ задается n-мерной функцией распределения $F(x_1,...,x_n,t_1,...,t_n)$ или n-мерной плотностью вероятности $f(x_1,...,x_n,t_1,...,t_n)$. В связи с этим справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Процесс Маркова с непрерывным множеством значений полностью определяется функцией распределения перехода $F(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1})$ и функцией распределения $F(x_1, t_1)$ в начальный момент времени t_1, причем

$$F(x_1,...,x_n,t_1,...,t_n) = F(x_1,t_1)\prod_{i=2}^{n} F(x_i, t_i / x_{i-1}, t_{i-1}).$$

В терминах плотностей вероятности эта теорема формулируется следующим образом. Процесс Маркова с непрерывным множеством значений полностью определяется плотностью вероятности перехода $f(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1})$ и плотностью вероятности $f(x_1, t_1)$ в начальный момент времени t_1, причем

$$f(x_1,...,x_n,t_1,...,t_n) = f(x_1,t_1)\prod_{i=2}^{n} f(x_i, t_i / x_{i-1}, t_{i-1}). \qquad (3.11)$$

Поскольку описание процесса n-мерной плотностью вероятности более приемлемо для практики, то докажем только равенство (3.11). По теореме умножения для непрерывных случайных величин получим

$$f(x_1,...,x_n,t_1,...,t_n) = f(x_1,...,x_{n-1},t_1,...,t_{n-1})\, f(x_n, t_n / x_{n-1},...,x_1,t_{n-1},...,t_1).$$

Учитывая свойство марковости (3.10), будем иметь

$$f(x_1,...,x_n,t_1,...,t_n) = f(x_1,...,x_{n-1},t_1,...,t_{n-1})\, f(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}). \qquad (3.12)$$

Снова раскрывая в последнем выражении плотность вероятности $f(x_1,...,x_{n-1},t_1,...,t_{n-1})$ по теореме умножения,

$$f(x_1,...,x_{n-1},t_1,...,t_{n-1}) = f(x_1,...,x_{n-2},t_1,...,t_{n-2})\, f(x_{n-1}, t_{n-1} / x_{n-2},...,x_1,t_{n-2},...,t_1),$$

и учитывая свойство марковости, вместо (3.12) получим

$$f(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)=$$

$$= f(x_n,t_n / x_{n-1},t_{n-1})\, f(x_{n-1},t_{n-1} / x_{n-2},t_{n-2})\, f(x_1,\ldots,x_{n-2},t_1,\ldots,t_{n-2}).$$

Продолжая этот процесс, мы придем к выражению (3.11).

Приведем еще одно свойство процессов Маркова. Если $t_1 < t_2 < t_3$, то

$$f(x_3,t_3 / x_1,t_1)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_3,t_3 / x_2,t_2)\, f(x_2,t_2 / x_1,t_1)dx_2 .$$

Это уравнение называется уравнением Чепмена – Колмогорова для непрерывных случайных величин и получается применением формулы полной вероятности для непрерывных случайных величин. Приведенная формула определяет плотность вероятности перехода для промежутка времени (t_1,t_3) по известным плотностям вероятности перехода для меньших промежутков времени (t_1,t_2) и (t_2,t_3).

3.4. Процессы с независимыми приращениями

Определение 3.4. Случайный процесс $\xi(t)$, приращения которого

$$z_1=\xi(t_1),\; z_2=\xi(t_2)-\xi(t_1),\; \ldots,\; z_n=\xi(t_n)-\xi(t_{n-1}) \tag{3.13}$$

для непересекающихся промежутков времени $t_1, t_2-t_1,\ldots,t_n-t_{n-1}$ взаимно независимы, называется процессом с независимыми приращениями.

Определение 3.5. Случайный процесс $\xi(t)$ с независимыми приращениями в случае, когда распределение приращения $\xi(t)-\xi(s)$ зависит только от разности $t-s$, называется процессом с независимыми стационарными приращениями.

Из определения 3.4 ясно, что при $E(\xi(t))=0$ и $E(|\xi(t)|^2)<\infty$ приращения процесса будут некоррелированными. В этих условиях процессы с независимыми приращениями образуют подкласс в классе процессов с некоррелированными приращениями, и для них справедливы результаты подразд. 3.1, 3.2.

Обозначим плотности вероятности приращений $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (3.13) как $f_{z_1}(v_1), f_{z_2}(v_2), \ldots, f_{z_n}(v_n)$ соответственно, а n-мерную плотность вероятности процесса $\xi(t)$ как $f_\xi(x_1, .., x_n)$, не показывая явно зависимость от $t_1, \ldots, t_n$.

Теорема 3.2. Случайный процесс $\xi(t)$ с независимыми приращениями полностью определяется распределениями приращений (3.13), причем

$$f_\xi(x_1, \ldots, x_n) = f_{z_1}(x_1) \prod_{i=2}^{n} f_{z_i}(x_i - x_{i-1}). \tag{3.14}$$

Для доказательства обозначим $\xi(t_i) = \xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда вместо (3.13) можно записать

$$z_1 = \xi_1,\ z_2 = \xi_2 - \xi_1,\ \ldots,\ z_n = \xi_n - \xi_{n-1}. \tag{3.15}$$

Отсюда находим, что

$$\xi_1 = z_1,\ \xi_2 = z_2 + z_1,\ \ldots,\ \xi_n = z_{n+1} + z_n. \tag{3.16}$$

Пусть $f_\xi(x_1, \ldots, x_n)$ совместная плотность вероятности случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$, а $f_z(y_1, \ldots, y_n)$ – совместная плотность вероятности приращений $z_1, \ldots, z_n$. В силу независимости приращений

$$f_z(y_1, \ldots, y_n) = f_{z_1}(y_1) f_{z_2}(y_2) \ldots f_{z_n}(y_n). \tag{3.17}$$

Мы имеем задачу преобразования случайных величин: по известной плотности вероятности $f_z(y_1, \ldots, y_n)$ (3.17) и преобразованию (3.16) найти плотность вероятности $f_\xi(x_1, \ldots, x_n)$. При решении этой задачи используется якобиан обратного преобразования (3.15), который равен

$$J = \left| \frac{\partial z_i}{\partial \xi_j} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

В соответствии с теорией функций случайных величин (см. например [15]) получаем

$$f_z(x_1,...,x_n) = f_{z_1}(x_1) f_{z_2}(x_2 - x_1)... f_{z_n}(x_n - x_{n-1}).$$

Теорема 3.3. Случайный процесс $\xi(t)$ с независимыми приращениями является процессом Маркова, плотность вероятности перехода которого совпадает с плотностью вероятности соответствующего приращения:

$$f_\xi(x_n / x_{n-1}) = f_{z_n}(x_n - x_{n-1}). \tag{3.18}$$

Докажем эту теорему. Поскольку для любой n-мерной плотности вероятности

$$f_\xi(x_n / x_1,...,x_{n-1}) = \frac{f_\xi(x_1,...,x_n)}{f_\xi(x_1,...,x_{n-1})},$$

то, раскрывая числитель и знаменатель по формуле (3.14), получаем

$$f_\xi(x_n / x_1,...,x_{n-1}) = f_{z_n}(x_n - x_{n-1}),$$

где $f_{z_n}(x_n - x_{n-1})$ – плотность вероятности приращения $z_n = \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$. Так как $f_{z_n}(x_n - x_{n-1})$ зависит лишь от x_n и x_{n-1}, то последнее равенство возможно только тогда, когда $f_\xi(x_n / x_1,...,x_{n-1}) = f_\xi(x_n / x_{n-1})$, т. е. когда выполняется равенство (3.18).

3.5. Винеровский процесс

Траекторию винеровского процесса или процесса броуновского движения можно представить себе как функцию времени, показывающую изменение одной из координат маленькой частицы, погруженной в жидкость (броуновской частицы). Название винеровского процесс получил в силу того, что его строгий математический анализ был выполнен Н. Винером.

Броуновское движение можно описать следующим образом. Пусть $x(t)$ – одна из координат частицы с начальными условиями, выбранными так, что $x(0) = 0$. Движение частицы в жидкости есть результат многих столкновений с молекулами жидкости. Поэтому в соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятностей разумно считать, что распределение этой координаты нормальное. Естественно также считать, что свойства распределения в интервале $(t, t+\tau)$ такие же, как и в интервале $(s, s+\tau)$, и трение при движении отсутствует. В связи с этим винеровский процесс можно задать аксиоматически следующим образом.

Определение 3.6 Случайный процесс $\xi(t)$ называется винеровским процессом, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) $\xi(0)=0$;

2) $\xi(t)$ – нормальный (гауссовский) случайный процесс;

3) $E(\xi(t))=0$ для всех $t \geq 0$;

4) процесс $\xi(t)$ имеет независимые стационарные приращения.

Выясним другие свойства винеровского процесса, вытекающие из данного определения.

Поскольку это нормальный процесс, то он полностью характеризуется математическим ожиданием и ковариационной функцией, причем, согласно определению, математическое ожидание равно нулю, а ковариационная функция определяется так же, как для процесса с независимыми стационарными приращениями, т. е. имеет вид

$$R_\xi(s,u) = c^2 \min(s,u) = \begin{cases} c^2 s & \text{при } s < u, \\ c^2 u & \text{при } s \geq u. \end{cases} \tag{3.19}$$

Отсюда получаем, что ковариационная матрица винеровского процесса имеет вид

$$R = c^2 \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & . & . & . & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & . & . & . & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & . & . & . & t_3 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ t_1 & t_2 & t_3 & . & . & . & t_n \end{bmatrix}, \tag{3.20}$$

а дисперсия определяется формулой

$$D(\xi(t)) = \sigma_\xi^2(t) = c^2 t\,.$$

В силу нормальности винеровского процесса его n-мерная плотность вероятности имеет вид (2.12). При $n=1$ из (2.12) получаем для момента времени t_k одномерную плотность вероятности:

$$f_\xi(x_k, t_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi c^2 t_k}} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2c^2 t_k} \right).$$

При $n=2$ и моментов времени t_{k-1}, t_k ковариационная матрица (3.20) будет иметь вид

$$R = c^2 \begin{bmatrix} t_{k-1} & t_{k-1} \\ t_{k-1} & t_k \end{bmatrix},$$

ее определитель $|R|$ равен

$$|R| = c^4 t_{k-1}(t_k - t_{k-1})\,,$$

и двухмерную плотность вероятности можно привести к виду

$$f_\xi(x_{k-1}, x_k, t_{k-1}, t_k) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 c^4 t_{k-1}(t_k - t_{k-1})}} \exp\left(-\frac{t_k x_{k-1}^2 - 2t_{k-1} x_{k-1} x_k + t_{k-1} x_k^2}{2c^2 t_{k-1}(t_k - t_{k-1})} \right). \qquad (3.21)$$

Найдем также плотность вероятности $f_{z_k}(y)$ приращения $z_k = \xi(t_k) - \xi(t_{k-1})$. По формуле плотности вероятности суммы двух случайных величин получим

$$f_{z_k}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x_{k-1}, y + x_{k-1}, t_{k-1}, t_k)\, dx_{k-1}\,.$$

Подставим сюда плотность вероятности (3.21) и выполним определенные преобразования. В результате будем иметь

$$f_{z_k}(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 c^4 t_{k-1}(t_k - t_{k-1})}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t_k x_{k-1}^2 - 2t_{k-1}x_{k-1}(y + x_{k-1}) + t_{k-1}(y + x_{k-1})^2}{2c^2 t_{k-1}(t_k - t_{k-1})}\right) dx_{k-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2c^2(t_k - t_{k-1})}} \exp\left(-\frac{y^2}{2c^2(t_k - t_{k-1})}\right) \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{2\pi c^2 t_{k-1}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x_{k-1}^2}{2c^2 t_{k-1}}\right) dx_{k-1} .$$

Поскольку в последнем выражении по свойству нормировки для гауссовской плотности вероятности имеем равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi c^2 t_{k-1}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x_{k-1}^2}{2c^2 t_{k-1}}\right) dx_{k-1} = 1,$$

то плотность вероятности приращения определяется формулой

$$f_{z_k}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi c^2(t_k - t_{k-1})}} exp\left(-\frac{y^2}{2c^2(t_k - t_{k-1})}\right). \tag{3.22}$$

Винеровский процесс как процесс с независимыми приращениями является марковским процессом с плотностью вероятности перехода

$$f_\xi(x_k, t_k / x_{k-1}, t_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi c^2(t_k - t_{k-1})}} \exp\left(-\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2c^2(t_k - t_{k-1})}\right). \tag{3.23}$$

Это следует из теоремы 3.3 и формулы (3.21).

Наконец, n-мерная плотность вероятности (2.12) согласно теореме 3.2 может быть представлена в виде произведения (3.14) с использованием плотности вероятности приращения (3.22).

Винеровский процесс находит применение при построении математических моделей процессов, протекающих в системах управления при случайных воздействиях [18].

4. СВОЙСТВА ВЫБОРОЧНЫХ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Факты непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости реализации $x(t)$ случайного процесса $\xi(t)$ чаще всего бывают неизвестными, так что возникает необходимость их выяснения по вероятностным характеристикам процесса. В данном разделе мы познакомимся с этими вопросами.

4.1. Непрерывность случайного процесса

Определение 4.1. Случайный процесс $\xi(t)$ называется непрерывным в среднем квадратичном в точке t, если приращение процесса $\xi(t+h)-\xi(t)$ сходится к нулю в среднем квадратичном при $h \to 0$, т. е. если выполняется условие

$$E((\xi(t+h)-\xi(t))^2) \underset{h\to 0}{\to} 0 \cdot \tag{4.1}$$

Если соотношение (4.1) выполняется для всех $a \le t \le b$, то случайный процесс $\xi(t)$ называется непрерывным в среднем квадратичном на $[a,b]$.

Определение (4.1) можно записать в виде

$$\underset{h\to 0}{\text{l.i.m.}}\, \xi(t+h) = \xi(t) \cdot$$

О непрерывности случайного процесса в среднем квадратичном можно судить по его вероятностным характеристикам.

Теорема 4.1. Случайный процесс $\xi(t)$ с конечным моментом второго порядка ($E(\xi^2(t)) < \infty$) непрерывен в среднем квадратичном в точке $a \le t \le b$ тогда и только тогда, когда его функция математического ожидания $a_\xi(t) = E(\xi(t))$ непрерывна в точке $a \le t \le b$ и ковариационная функция $R_\xi(t_1,t_2)$ непрерывна в точке $(t,t) \in [a,b]\times[a,b]$ (на диагонали области определения).

Докажем достаточность этих условий, т. е. докажем, что если $a_\xi(t)$ непрерывна в точке t и $R_\xi(t_1,t_2)$ непрерывна в точке $t_1 = t_2 = t$, то выполняется условие (4.1). Рассмотрим математическое ожидание квадрата приращения процесса:

$$E((\xi(t+h)-\xi(t))^2)=D(\xi(t+h)-\xi(t))+E^2(\xi(t+h)-\xi(t))=$$

$$=D(\xi(t+h))+D(\xi(t))-2\operatorname{cov}(\xi(t+h),\xi(t))+(a_\xi(t+h)-a_\xi(t))^2=$$

$$=R_\xi(t+h,t+h)+R_\xi(t,t)-2R_\xi(t+h,t)+(a_\xi(t+h)-a_\xi(t))^2, \qquad (4.2)$$

где символом D обозначена дисперсия.

Из последнего выражения видно, что при выполнении условий теоремы правая часть выражения (4.2) сходится к нулю при $h\to 0$, т. е. $E((\xi(t+h)-\xi(t))^2)\underset{h\to 0}{\to}0$, что требовалось доказать.

Докажем теперь необходимость, т. е. если выполняется условие (4.1), то $a_\xi(t)$ непрерывна в точке t, а $R_\xi(t_1,t_2)$ непрерывна в точке $t_1=t_2=t$. Будем исходить из выражения (4.2). В этом выражении

$$R_\xi(t+h,t+h)-2R_\xi(t+h,t)+R_\xi(t,t)\ge 0.$$

Это следует из свойства неотрицательной определенности ковариационной функции

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_\xi(t_i,t_j)z_i z_j\ge 0$$

при $n=2$, $z_1=1$, $z_2=-1$, $t_1=t$, $t_2=t+h$. Таким образом, правая часть выражения (4.2) является суммой двух неотрицательных величин. Если левая часть равенства сходится к нулю при $h\to 0$, то каждый член правой части также сходится к нулю. В частности,

$$(a_\xi(t+h)-a_\xi(t))^2\underset{h\to 0}{\to}0,$$

что означает непрерывность математического ожидания $a_\xi(t)$ в точке t. Для доказательства непрерывности ковариационной функции запишем следующее равенство:

$$R_\xi(t+h,t+k)-R_\xi(t,t)=E((\xi(t+h)-\xi(t))(\xi(t+k)-\xi(t)))+$$

$$+E((\xi(t+h)-\xi(t))\xi(t))+E((\xi(t+k)-\xi(t))\xi(t)),$$

выполнимость которого можно проверить непосредственным расчетом правой части. Из него по неравенству Шварца получим

$$R_\xi(t+h,t+k)-R_\xi(t,t)\le\sqrt{E((\xi(t+h)-\xi(t))^2)}+\sqrt{E((\xi(t+k)-\xi(t))^2)}+$$

$$+\sqrt{E((\xi(t+h)-\xi(t))^2)}\sqrt{E(\xi^2(t))}+\sqrt{E((\xi(t+k)-\xi(t))^2)}\sqrt{E(\xi^2(t))}.$$

Если имеет место сходимость (4.1) и $E(\xi^2(t))<\infty$, то каждое слагаемое правой части последнего неравенства сходится к нулю при $h,k\to 0$. Тогда

$$R_\xi(t+h,t+k)-R_\xi(t,t)\underset{h,k\to 0}{\to}0,$$

что означает непрерывность ковариационной функции $R_\xi(t_1,t_2)$ в точке $t_1=t_2=t$. Доказательство теоремы 4.1 окончено.

Итак, для непрерывности случайного процесса в среднем квадратичном его ковариационная функция $R_\xi(t_1,t_2)$ должна непрерывной в каждой точке диагонали $t_1=t_2,\ t_1,t_2\in[a,b]$. Справедливо следующее утверждение. Если ковариационная функция $R_\xi(t_1,t_2)$ непрерывна в каждой точке диагонали $t_1=t_2$, то она непрерывна всюду. Чтобы доказать сказанное, предположим, что $R_\xi(t_1,t_2)$ непрерывна в точках (t_1,t_1) и (t_2,t_2). Тогда на основании теоремы 4.1 $\overset{\circ}{\xi}(t_1+h)$ и $\overset{\circ}{\xi}(t_2+k)$ сходятся в среднем квадратичном к $\overset{\circ}{\xi}(t_1)$ и $\overset{\circ}{\xi}(t_2)$ соответственно, когда $h,k\to 0$. По свойству сходимости в среднем квадратичном (п. 1.14) будем иметь

$$E(\overset{\circ}{\xi}(t_1+h)\overset{\circ}{\xi}(t_2+k))\underset{h,k\to 0}{\to}E(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)),$$

или

$$R_\xi(t_1+h,t_2+k)\underset{h,k\to 0}{\to}R_\xi(t_1,t_2).$$

Последнее условие означает непрерывность ковариационной функции в любой точке (t_1,t_2).

Теорема 4.2. Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с конечным моментом второго порядка непрерывен в среднем квадратичном тогда и только тогда, когда его ковариационная функция $R_\xi(\tau)$ непрерывна в точке $\tau = 0$.

Действительно, для стационарного случайного процесса $a_\xi(t) = \text{const}$, т. е. математическое ожидание непрерывно в любой точке, а непрерывность ковариационной функции $R_\xi(t_1, t_2)$ при $t_1 = t_2 = t$ превращается в непрерывность функции $R_\xi(\tau) = R_\xi(t_2 - t_1)$ при $\tau = t_2 - t_1 = 0$.

Как следствие из общего случая получаем также, что если ковариационная функция $R_\xi(\tau)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ непрерывна при $\tau = 0$, то она непрерывна и при любом τ.

Определение 4.2. Случайный процесс $\xi(t)$ называется непрерывным с вероятностью единица в точке t, если $\xi(t+h)$ сходится к $\xi(t)$ с вероятностью единица при $h \to 0$, т. е. если

$$P(\xi(t+h) \underset{h \to 0}{\to} \xi(t)) = 1\cdot$$

Случайный процесс $\xi(t)$, для которого

$$P\{\omega : \xi(\omega, t) \text{ непрерывны для всех } a \le t \le b\} = 1,$$

называется процессом, выборочные функции которого с вероятностью единица непрерывны на $[a, b]$. Ясно, что этот процесс эквивалентен процессу, непрерывному с вероятностью единица при каждом фиксированном $a \le t \le b$, но не тождественен ему.

Отметим, что непрерывность случайного процесса в среднем квадратичном не означает его непрерывности с вероятностью единица, и наоборот.

Приведем два достаточных условия непрерывности стационарного случайного процесса [8].

1. Если для стационарного случайного процесса $\xi(t)$ выполняется условие

$$R_\xi(0) - R_\xi(h) \le k\,|\,h\,|^{1+r},$$

где $r \le 2$ и k – некоторая положительная константа, то существует непрерывный с вероятностью единица случайный процесс $\eta(t)$, эквивалентный случайному процессу $\xi(t)$.

2. Если ковариационная функция $R_\xi(\tau)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ имеет вторую производную $R''_\xi(\tau)$ в точке $\tau = 0$, то существует эквивалентный $\xi(t)$ случайный процесс $\eta(t)$, выборочные функции которого с вероятностью единица непрерывны на любом конечном промежутке.

Пример 4.1. Непрерывны ли выборочные функции винеровского процесса, определенного в подразд. 3.5?

Решение. Для винеровского процесса имеем

$$E((\xi(t+h) - \xi(t))^2) = c^2 h \underset{h \to 0}{\to} 0,$$

следовательно, он непрерывен в среднем квадратичном при любом $t \ge 0$ непосредственно по определению (4.1). Кроме того, ковариационная функция винеровского процесса (3.19) непрерывна на диагонали (s, s), так что и по теореме 4.1 получаем, что винеровский процесс непрерывен в среднем квадратичном.

Пример 4.2. Является ли непрерывным в среднем квадратичном случайный процесс с ковариационной функцией $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}$?

Решение. Поскольку ковариационная функция $R_\xi(\tau)$ непрерывна в точке $\tau = 0$, то по теореме о непрерывности в среднем квадратичном стационарного случайного процесса делаем вывод, что случайный процесс с данной ковариационной функцией непрерывен в среднем квадратичном.

4.2. Дифференцируемость случайного процесса

Определение 4.3. Случайный процесс $\xi(t)$ с конечным моментом второго порядка называется дифференцируемым в среднем квадратичном в точке t, если величина $\dfrac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}$ сходится к некоторому пределу $\xi'(t)$ в среднем квадратичном, т. е.

$$E\left(\left(\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}-\xi'(t)\right)^2\right)\underset{h\to 0}{\to} 0. \qquad (4.3)$$

Предел $\xi'(t)$ называется производной в среднем квадратичном случайного процесса $\xi(t)$ в точке t.

Случайный процесс, дифференцируемый в среднем квадратичном в каждой точке t некоторого отрезка $[a,b]$, называется дифференцируемым в среднем квадратичном на $[a,b]$.

О дифференцируемости случайного процесса в среднем квадратичном можно судить по его математическому ожиданию и ковариационной функции.

Теорема 4.3. Случайный процесс $\xi(t)$ с конечным моментом второго порядка дифференцируем в среднем квадратичном в точке t тогда и только когда, когда его функция математического ожидания $a_\xi(t)$ дифференцируема в точке t и в точке $(t_1=t_2=t)$ существует смешанная производная второго порядка $\dfrac{\partial^2 R_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$ ковариационной функции $R_\xi(t_1,t_2)$.

Докажем достаточность: если существуют

$$\frac{\partial^2 R_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \text{ при } t_1=t_2=t \text{ и } a'_\xi(t) \text{ в точке } t, \qquad (4.4)$$

то выполняется условие (4.3). Имеем

$$E\left(\left(\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}-\frac{\xi(t+k)-\xi(t)}{k}\right)^2\right)=$$

$$=E\left(\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\cdot\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\right)-2E\left(\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\cdot\frac{\xi(t+k)-\xi(t)}{k}\right)+$$

$$+E\left(\frac{\xi(t+k)-\xi(t)}{k}\cdot\frac{\xi(t+k)-\xi(t)}{k}\right). \qquad (4.5)$$

Рассмотрим каждое слагаемое в правой части этого выражения, например, второе. Получим

$$E\left(\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\cdot\frac{\xi(t+k)-\xi(t)}{k}\right)=\operatorname{cov}\left(\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h},\frac{\xi(t+k)-\xi(t)}{k}\right)+$$

$$+E\left(\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\right)E\left(\frac{\xi(t+k)-\xi(t)}{k}\right)=$$

$$=\frac{R_\xi(t+h,t+h)-R_\xi(t+h,t)-R_\xi(t,t+k)+R_\xi(t,t)}{hk}+$$

$$+\frac{a_\xi(t+h)-a_\xi(t)}{h}\cdot\frac{a_\xi(t+k)-a_\xi(t)}{k}.$$

Взяв здесь предел от обеих частей при $h,k\to 0$ и учитывая существование производных (4.4), найдем

$$\lim_{h,k\to 0}E\left(\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\cdot\frac{\xi(t+k)-\xi(t)}{k}\right)=\left.\frac{\partial^2 R_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}\right|_{t_1=t_2=t}+\left(\frac{da_\xi(t)}{dt}\right)^2. \quad (4.6)$$

Выполнив аналогичные преобразования с первым и третьим слагаемыми в правой части равенства (4.5), убеждаемся, что в пределе при $h,k\to 0$ они также будут равны правой части равенства (4.6), и все три слагаемых в сумме составят нуль. Таким образом,

$$E\left(\left(\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}-\frac{\xi(t+k)-\xi(t)}{k}\right)^2\right)\underset{h,k\to 0}{\to}0,$$

т. е. выполняется критерий Коши сходимости в среднем квадратичном (4.3).

Докажем необходимость (из (4.3) следует (4.4)). Если выполняется условие (4.3), то по критерию Лоэва (подразд. 1.14) предел левой части равенства (4.6) конечен. В силу этого конечен предел и правой части этого равенства, т. е. производные (4.4) существуют. Теорема 4.3 доказана.

Определение 4.4. Случайный процесс $\xi(t)$ называется дифференцируемым с вероятностью единица в точке t, если случайная величина

$$\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}$$

сходится с вероятностью единица при $h \to 0$ к некоторому пределу $\xi'(t)$. Этот предел называется производной с вероятностью единица случайного процесса $\xi(t)$ в точке t.

Если случайный процесс $\xi(t)$ дифференцируем с вероятностью единица в каждой точке $t \in [a,b]$, то такой процесс называется дифференцируемым с вероятностью единица на $[a,b]$.

Определение 4.2 задает дифференцируемый с вероятностью единица на $[a,b]$ случайный процесс с точностью до эквивалентного случайного процесса.

Некоторые критерии дифференцируемости с вероятностью единица случайного процесса можно найти в [8].

Пример 4.3. Дифференцируем ли в среднем квадратичном винеровский случайный процесс, определенный в подразд. 3.5?

Решение. Для ответа воспользуемся теоремой 4.3. Так как винеровский процесс имеет ковариационную функцию вида (3.19), то ее частная производная по первому аргументу t_1 будет равна

$$\frac{\partial R_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1} = \begin{cases} c^2, \text{ если } t_1 < t_2, \\ 0, \text{ если } t_1 \ge t_2. \end{cases}$$

Мы видим, что эта производная имеет скачок при $t_1 = t_2$, следовательно, смешанная производная второго порядка не существует при $t_1 = t_2$. Итак, винеровский случайный процесс не дифференцируем в среднем квадратичном.

4.3. Дифференцируемость стационарного случайного процесса

Теорема 4.4. Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с конечным моментом второго порядка дифференцируем в среднем квадратичном тогда и только тогда, когда существует вторая производная его ковариационной функции в нуле, т. е. существует

$$\frac{d^2}{d\tau^2} R_\xi(\tau)\Big|_{\tau=0}.$$

Действительно, так как процесс стационарный, то $a_\xi(t) = c = const$, т. е. математическое ожидание дифференцируемо в любой точке t. Ковариационная функция стационарного случайного процесса обладает свойством $R_\xi(t_1, t_2) = R_\xi(t_2 - t_1) = R_\xi(\tau)$, $\tau = t_2 - t_1$. В таком случае

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_\xi(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_\xi(t_2 - t_1) = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial}{\partial t_2} R_\xi(\tau)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial R_\xi(\tau)}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t_2}\right) = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial R_\xi(\tau)}{\partial \tau}\right) = -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} R_\xi(\tau),$$

и условие существования смешанной производной второго порядка на диагонали для нестационарного случайного процесса сводится к условию существования производной второго порядка в нуле для стационарного случайного процесса.

Пример 4.4. Дифференцируем ли в среднем квадратичном случайный процесс с ковариационной функцией вида $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}$?

Решение. Для ответа воспользуемся теоремой 4.4. Перепишем ковариационную функцию в виде

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|} = \begin{cases} \sigma_\xi^2 e^{-\alpha\tau}, \tau \ge 0, \\ \sigma_\xi^2 e^{\alpha\tau}, \tau < 0. \end{cases}$$

Дифференцирование дает

$$R'_\xi(\tau) = \begin{cases} -\alpha\sigma_\xi^2 e^{-\alpha\tau}, \tau \ge 0, \\ \alpha\sigma_\xi^2 e^{\alpha\tau}, \tau < 0. \end{cases}$$

Ковариационная функция и ее производная представлены на рис. 4.1. Мы видим, что производная $R'_\xi(\tau)$ в точке $\tau = 0$ имеем разрыв первого рода, следовательно, вторая производная $R''(\tau)\big|_{\tau=0}$ в этой точке не существует, и такой процесс не дифференцируем в среднем квадратичном.

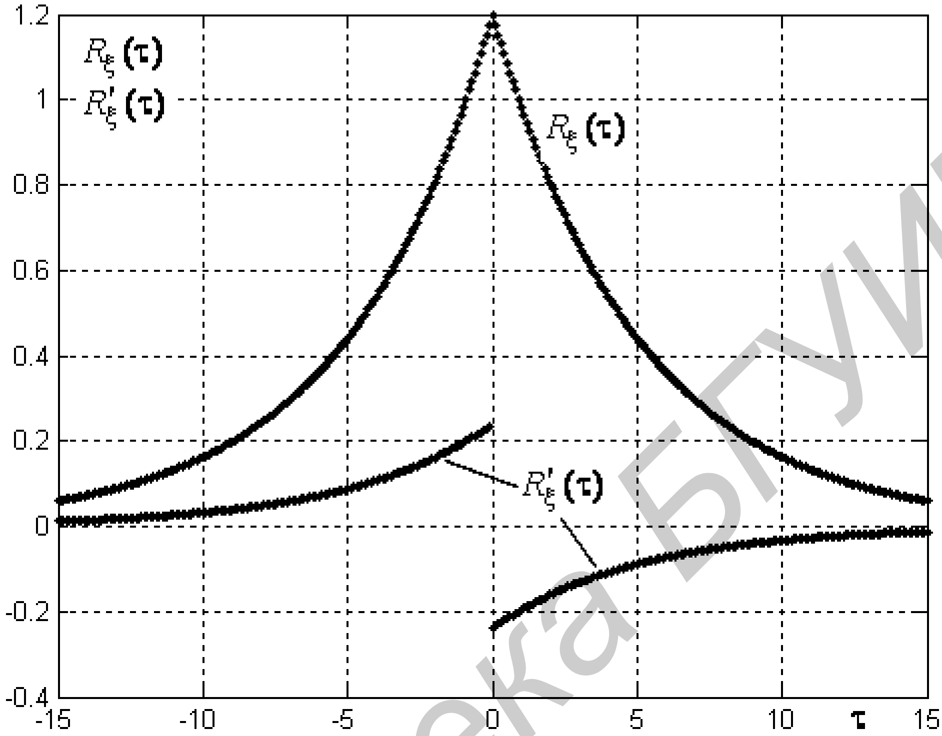

Рис. 4.1. Ковариационная функция (2.9) и ее производная

Пример 4.5. Дифференцируем ли в среднем квадратичном стационарный случайный процесс с ковариационной функцией вида

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2(1+\alpha|\tau|)e^{-\alpha|\tau|}? \tag{4.7}$$

Решение. Для решения воспользуемся теоремой 4.4. Перепишем ковариационную функцию в виде

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2(1+\alpha|\tau|)e^{-\alpha|\tau|} = \begin{cases} \sigma_\xi^2(1+\alpha\tau)e^{-\alpha\tau}, \tau \ge 0, \\ \sigma_\xi^2(1-\alpha\tau)e^{\alpha\tau}, \tau < 0. \end{cases}$$

Дифференцируя дважды эту функцию, получим

$$R'_\xi(\tau) = \begin{cases} -\alpha^2\sigma_\xi^2 \tau e^{-\alpha\tau}, \ \tau \geq 0, \\ -\alpha^2\sigma_\xi^2 \tau e^{\alpha\tau}, \tau < 0. \end{cases}$$

$$R''_\xi(\tau) = \begin{cases} -\alpha^2\sigma_\xi^2 (1-\alpha\tau) e^{-\alpha\tau}, \ \tau \geq 0, \\ -\alpha^2\sigma_\xi^2 (1+\alpha\tau) e^{\alpha\tau}, \tau < 0, \end{cases} = -\alpha^2\sigma_\xi^2(1-\alpha\,|\,\tau\,|)e^{-\alpha|\tau|}.$$

Мы видим, что вторая производная $R''(\tau)$ в точке $\tau = 0$ существует и равна $-\alpha^2\sigma_\xi^2$. Следовательно, случайный процесс с такой ковариационной функцией дифференцируем в среднем квадратичном. Ковариационная функция (4.7) изображена на рис. 4.2, а ее производные – на рис. 4.3.

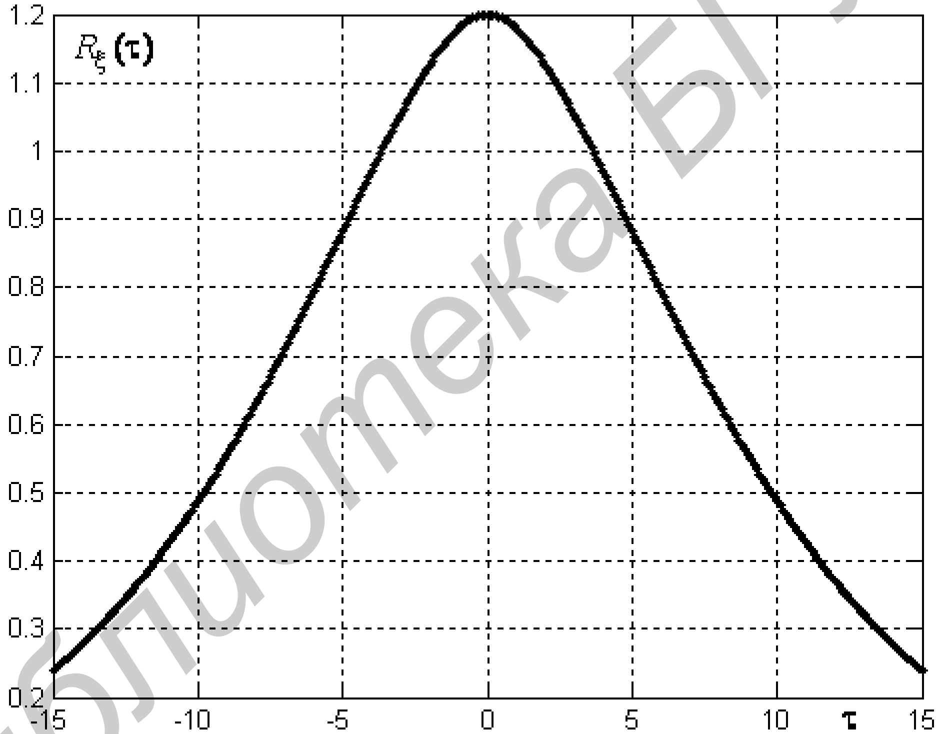

Рис. 4.2. Ковариационная функция (4.7)

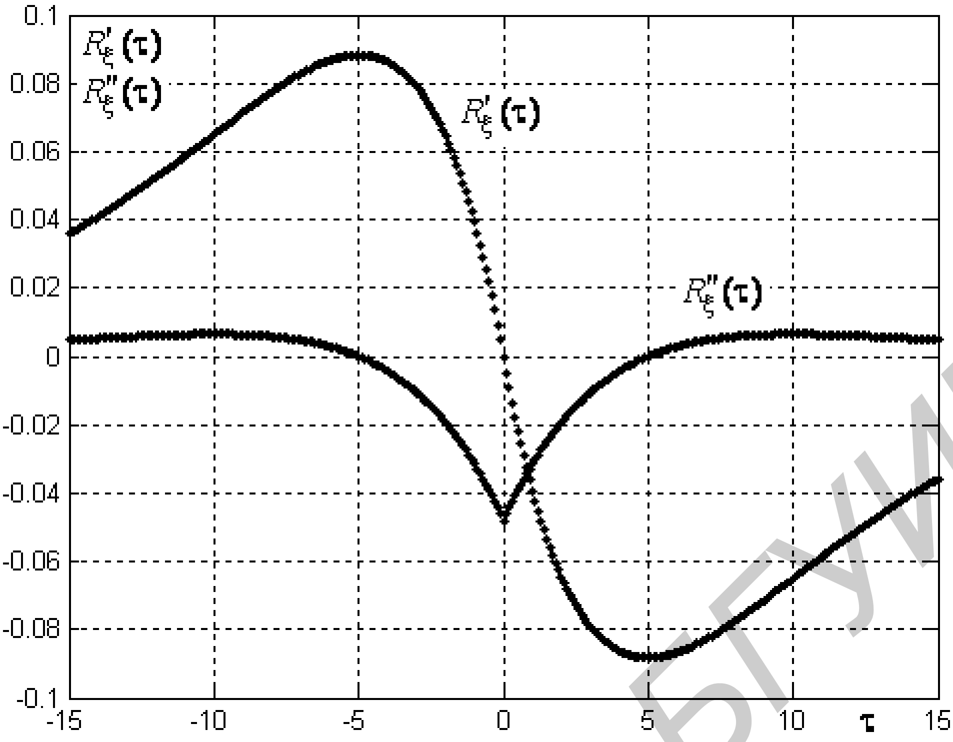

Рис. 4.3. Первая и вторая производные ковариационной функции (4.7)

4.4. Производная в среднем квадратичном случайного процесса

Пусть $\xi'(t)$ – производная в среднем квадратичном случайного процесса $\xi(t)$ и $a_\xi(t)$, $R_\xi(t_1,t_2)$ – его математическое ожидание и ковариационная функция соответственно.

Теорема 4.5. Математическое ожидание $a_{\xi'}(t)=E(\xi'(t))$ и ковариационная функция $R_{\xi'}(t_1,t_2)$ производной в среднем квадратичном $\xi'(t)$ случайного процесса $\xi(t)$ определяются выражениями

$$a_{\xi'}(t)=a'_\xi(t)=\frac{d}{dt}a'_\xi(t),$$

$$R_{\xi'}(t_1,t_2)=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}R_\xi(t_1,t_2),$$

а взаимные ковариационные функции случайного процесса $\xi(t)$ и его производной в среднем квадратичном $\xi'(t)$ – выражениями

$$R_{\xi\xi'}(t_1,t_2)=\frac{\partial}{\partial t_2}R_{\xi}(t_1,t_2),$$

$$R_{\xi'\xi}(t_1,t_2)=\frac{\partial}{\partial t_1}R_{\xi}(t_1,t_2).$$

Действительно, для математического ожидания производной получим

$$a_{\xi'}(t)=E(\xi'(t))=E(\underset{h\to 0}{\text{l.i.m.}}\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}).$$

Поскольку сходимость в среднем квадратичном обладает тем свойством, что символы E и l.i.m. перестановочны (подразд. 1.14), то

$$a_{\xi'}(t)=\lim_{h\to 0}E\left(\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\alpha_{\xi}(t+h)-\alpha_{\xi}(t)}{h}\right)=\frac{d}{dt}a_{\xi}(t).$$

Итак, мы доказали, что

$$E\left(\frac{d}{dt}\xi(t)\right)=\frac{d}{dt}E(\xi(t)).$$

Мы видим, что операции E и d/dt в среднем квадратичном также перестановочны. Воспользуемся этим свойством для доказательства утверждения теоремы относительно ковариационной функции производной:

$$R_{\xi'}(t_1,t_2)=E\left(\frac{d}{dt_1}\overset{\circ}{\xi}(t_1)\frac{d}{dt_2}\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right)=E\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial}{\partial t_2}\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial}{\partial t_2}E\left(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right)=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}R_{\xi}(t_1,t_2).$$

Аналогичным образом получаем выражения для взаимных ковариационных функций:

$$R_{\xi\xi'}(t_1,t_2)=E\left(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\frac{d}{dt_2}\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right)=\frac{\partial}{\partial t_2}E\left(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right)=\frac{\partial}{\partial t_2}R_{\xi}(t_1,t_2),$$

$$R_{\xi'\xi}(t_1,t_2)=E\left(\frac{d}{dt_1}\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right)=\frac{\partial}{\partial t_1}E\left(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right)=\frac{\partial}{\partial t_1}R_{\xi}(t_1,t_2).$$

Теорема доказана.

Теорема 4.6. Математическое ожидание $a_{\xi'}(t)=E(\xi'(t))$ и ковариационная функция $R_{\xi'}(\tau)$ производной в среднем квадратичном $\xi'(t)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ определяются выражениями

$$a_{\xi'}(t)=0,$$

$$R_{\xi'}(\tau)=-\frac{d^2}{d\tau^2}R_\xi(\tau),$$

а взаимные ковариационные функции случайного процесса $\xi(t)$ и его производной в среднем квадратичном $\xi'(t)$ – выражениями

$$R_{\xi\xi'}(\tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}R_\xi(\tau),$$

$$R_{\xi'\xi}(\tau)=-\frac{\partial}{\partial\tau}R_\xi(\tau).$$

Утверждение этой теоремы вытекает из предыдущей теоремы 4.5. Действительно, для стационарного случайного процесса $a_\xi(t)=\text{const}$, поэтому всегда $\frac{d}{dt}a_\xi(t)=0$. Кроме того, пользуясь утверждениями теоремы 4.5, получим

$$R_{\xi'}(t_1,t_2)=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}R_\xi(t_1,t_2)=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}R_\xi(t_2-t_1)=\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial}{\partial t_2}R_\xi(\tau)\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial R_\xi(\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t_2}\right)=\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial R_\xi(\tau)}{\partial\tau}\right)=-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}R_\xi(\tau)=R_{\xi'}(\tau),$$

$$R_{\xi\xi'}(t_1,t_2)=\frac{\partial}{\partial t_2}R_\xi(t_1,t_2)=\frac{\partial}{\partial t_2}R_\xi(t_2-t_1)=\frac{d}{d\tau}R_\xi(\tau)=R_{\xi\xi'}(\tau),$$

$$R_{\xi'\xi}(t_1,t_2)=\frac{\partial}{\partial t_1}R_\xi(t_1,t_2)=\frac{\partial}{\partial t_1}R_\xi(t_2-t_1)=-\frac{\partial}{\partial\tau}R_\xi(\tau)=R_{\xi'\xi}(\tau).$$

Теорема доказана.

Из теоремы 4.6 следует, что производная в среднем квадратичном стационарного случайного процесса также является стационарным случайным процессом, а стационарный случайный процесс и его производная в среднем квадратичном стационарно связаны.

4.5. Интегрируемость случайного процесса

Будем рассматривать интегралы двух типов от случайного процесса $\xi(t)$, а именно, интегралы Римана

$$J_1 = \int_a^b g(t)\xi(t)dt \tag{4.8}$$

и интегралы Римана – Стилтьеса

$$J_2 = \int_a^b g(t)d\xi(t)dt, \tag{4.9}$$

где $[a,b]$ – конечный или бесконечный интервал; $g(t)$ – неслучайная функция, $\xi(t)$ – случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, конечным моментом второго порядка и ковариационной функцией $R_\xi(t_1,t_2)$. В частном случае функция $g(t)$ может быть равна единице. Интегралы (4.8), (4.9) будем понимать как интегралы в среднем квадратичном. Дадим их определение.

Предположим сначала, что $[a,b]$ – конечный интервал, и пусть точки $t_1,t_2,...,t_{m+1}$ определяют его разбиение, так что

$$a = t_1 < t_2 < ... < t_{m+1} = b. \tag{4.10}$$

Составим для этого разбиения следующие интегральные суммы:

$$s_1 = \sum_{j=1}^{m} g(t_j)\xi(t_j)(t_{j+1} - t_j), \tag{4.11}$$

$$s_2 = \sum_{j=1}^{m} g(t_j)(\xi(t_{j+1}) - \xi(t_j)). \tag{4.12}$$

Сумма s_1, называется интегральной суммой Римана, а сумма s_2 – интегральной суммой Римана – Стилтьеса (подразд. 1.9). Рассмотрим такую последовательность разбиений (4.10), что $m \to \infty$, $\max(t_{j+1} - t_j) \to 0$. Если при этом для интегральных сумм s_1 и s_2 существуют пределы в среднем квадратичном, то эти пределы называются интегралами Римана и Римана – Стилтьеса соответственно и обозначаются как выражения (4.8), (4.9). Таким образом,

$$J_1 = \underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}} s_1,$$

$$J_2 = \underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}} s_2,$$

или

$$E((s_1 - J_1)^2) \underset{m\to\infty}{\to} 0, \tag{4.13}$$

$$E((s_2 - J_2)^2) \underset{m\to\infty}{\to} 0. \tag{4.14}$$

Если интегральные суммы (4.11), (4.12) сходятся в среднем квадратичном при $a \to -\infty$, $b \to \infty$, то соответствующие пределы называются интегралами в среднем квадратичном по бесконечному интервалу.

Докажем следующие теоремы о интегрируемости случайного процесса в среднем квадратичном.

Теорема 4.7. Если ковариационная функция $R_\xi(t_1, t_2)$ случайного процесса $\xi(t)$ непрерывна на $[a, b]$ и функция $g(t)$ такова, что существует интеграл Римана

$$Q_1 = \int_a^b \int_a^b g(s) g(u) R_\xi(s, u) ds du, \tag{4.15}$$

то существует интеграл в среднем квадратичном J_1 (4.8) и

$$E(J_1) = 0, \quad E(J_1^2) = Q_1. \tag{4.16}$$

Теорема 4.8. Если ковариационная функция $R_\xi(t_1, t_2)$ случайного процесса $\xi(t)$ – функция с ограниченной вариацией на $[a, b] \times [a, b]$ и функция $g(t)$ такова, что существует интеграл Римана – Стилтьеса

$$Q_2 = \int_a^b \int_a^b g(s) g(u) d_{s,u} R_\xi(s, u), \tag{4.17}$$

то существует интеграл в среднем квадратичном J_2 (4.9) и

$$E(J_2)=0, \quad E(J_2^2)=Q_2. \tag{4.18}$$

Заметим, что в теореме 4.8 интеграл (4.17) – двухмерный интеграл Римана – Стилтьеса. Напомним также определение функции с ограниченной вариацией. Так называется функция $F(t)$ на $[a,b]$, для которой при любом разбиении (4.10) интервала $[a,b]$ выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{m}|F(t_{j+1})-F(t_j)|<k,$$

где k – некоторое число. Аналогичным будет определение функции двух переменных с ограниченной вариацией.

Для доказательства этих теорем рассмотрим два разбиения интервала $[a,b]$, определяемых соответственно точками $t_1,t_2,\ldots,t_{m+1}$ и $v_1,v_2,\ldots,v_{n+1}$. Пусть s_1 и s_1' – соответствующие этим разбиениям суммы Римана, а s_2 и s_2' – суммы Римана – Стилтьеса. Тогда

$$E(s_1s_1')=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}g(t_j)g(v_k)R_\xi(t_j,v_k)(t_{j+1}-t_j)(v_{k+1}-v_j),$$

$$E(s_2s_2')=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}g(t_j)g(v_k)(R_\xi(t_{j+1},v_{k+1})-R_\xi(t_{j+1},v_k)-R_\xi(t_j,v_{k+1})+R_\xi(t_j,v_k)).$$

Так как интегралы (4.15), (4.17) по предположению теорем существуют, то двойные суммы в правых частях последних равенств сходятся к этим интегралам:

$$E(s_1s_1')\underset{m,n\to\infty}{\to}Q_1, \tag{4.19}$$

$$E(s_2s_2')\underset{m,n\to\infty}{\to}Q_2. \tag{4.20}$$

Отсюда по критерию Лоэва (1.26) заключаем, что интегралы в среднем квадратичном (4.8), (4.9) существуют. Из условий (4.19), (4.20) следуют также соотношения для дисперсий $E(J_1^2)=Q_1$, $E(J_2^2)=Q_2$, а из условий

$$E(s_1)\underset{m\to\infty}{\to}0,\ E(s_2)\underset{m\to\infty}{\to}0\ –$$

соотношения для математических ожиданий $E(J_1)=0$, $E(J_2)=0$.

Если математическое ожидание $a_\xi(t)$ случайного процесса $\xi(t)$ не равно нулю, то очевидно, что теорему 4.7 необходимо дополнить условием существования интеграла

$$P_1 = \int_a^b g(t) a_\xi(t) dt,$$

а теорему 4.8 – интеграла

$$P_2 = \int_a^b g(t) d a_\xi(t).$$

При этом следствиями теоремы будут равенства

$$E(J_1) = P_1, \quad E(J_2) = P_2. \tag{4.21}$$

Интерес представляет также интеграл в среднем квадратичном с переменным верхним пределом

$$\eta(t) = \int_a^t g(t)\xi(t) dt, \tag{4.22}$$

который является, очевидно, случайным процессом. В приложениях часто нужно получать вероятностные характеристики случайного процесса $\eta(t)$ (4.22) по вероятностным характеристикам случайного процесса $\xi(t)$. Рассматривая интеграл (4.22) как предел в среднем квадратичном интегральной суммы s_1 (4.11), для математического ожидания $a_\eta(t)$ случайного процесса $\eta(t)$ получим

$$a_\eta(t) = E(\eta(t)) = E(\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{j=1}^m g(t_j)\xi(t_j)(t_{j+1} - t_j)) = \lim_{m\to\infty} E(\sum_{j=1}^m g(t_j)\xi(t_j)(t_{j+1} - t_j)) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^m g(t_j) a_\xi(t_j)(t_{j+1} - t_j) = \int_a^t g(t) a_\xi(t) dt. \tag{4.23}$$

Из выполненных преобразований видно, что операции E и $\int$ (в среднем квадратичном) перестановочны. Воспользовавшись этим свойством, получим ковариационную функцию $R_\eta(t_1, t_2)$ случайного процесса $\eta(t)$:

$$R_\eta(t_1,t_2)=E\left(\int_a^{t_1} g(s)\overset{\circ}{\xi}(s)ds\int_a^{t_2} g(v)\overset{\circ}{\xi}(v)dv\right)=$$

$$=\int_a^{t_1}\int_a^{t_2} g(s)g(v)E\left(\overset{\circ}{\xi}(s)\overset{\circ}{\xi}(v)\right)dsdv=\int_a^{t_1}\int_a^{t_2} g(s)g(v)R_\xi(s,v)dsdv\,. \qquad (4.24)$$

Если процесс $\xi(t)$ стационарен в широком смысле, то $a_\xi(t)=c$, и формулы (4.23), (4.24) можно переписать следующим образом:

$$a_\eta(t)=c\int_a^t g(t)dt\,, \qquad (4.25)$$

$$R_\eta(t_1,t_2)=\int_a^{t_1}\int_a^{t_2} g(s)g(v)R_\xi(s-v)dsdv\,. \qquad (4.26)$$

Из последних выражений видно, что интеграл в среднем квадратичном (4.22) от стационарного случайного процесса стационарным не является.

Пусть теперь функция $g(t)$ и случайный процесс $\xi(t)$ таковы, что существует интеграл в среднем квадратичном J_1 (4.8). Пусть, кроме того, выборочные функции процесса $\xi(t)$ с вероятностью единица непрерывны на $[a,b]$. Тогда интеграл J_1 (4.8) существует и как интеграл от выборочных функций, который определяется для почти всех выборочных функций как обычный интеграл Римана. Можно показать, что оба эти интеграла равны с вероятностью единица [8]. Аналогичное утверждение справедливо и для интеграла Римана – Стилтьеса J_2 (4.9). Если этот интеграл существует в смысле сходимости в среднем квадратичном, и почти все выборочные функции случайного процесса $\xi(t)$ имеют ограниченную вариацию, то интеграл J_2 (4.9) будет существовать и как обычный интеграл Римана – Стилтьеса для почти всех выборочных функций, причем оба интеграла окажутся равными с вероятностью единица.

В связи с последними замечаниями можно также утверждать, что если интегралы (4.8), (4.9) существуют как обычные интегралы от выборочных функций, то формулы (4.23) – (4.26) справедливы и для этого случая.

5. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Спектральная теория стационарных случайных процессов базируется на математической теории рядов и интегралов Фурье. Поэтому предварительно приведем необходимые математические сведения из этой области.

5.1. Ряды Фурье для периодических функций

Периодическую функцию $f(x)$ периода $2l$ можно представить в виде ряда Фурье [23]:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\frac{\pi}{l}x+b_n\sin n\frac{\pi}{l}x), \tag{5.1}$$

где

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(u)\cos n\frac{\pi}{l}u\,du,\ n=0,1,2,\ldots, \tag{5.2}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(u)\sin n\frac{\pi}{l}u\,du,\ n=1,2,\ldots. \tag{5.3}$$

Ряд Фурье (5.1) может быть записан в комплексной форме

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{-in\frac{\pi}{l}x}, \tag{5.4}$$

где

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{in\frac{\pi}{l}x}dx,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots. \tag{5.5}$$

При этом соблюдаются следующие соотношения между коэффициентами c_n (5.5) и a_n, b_n (5.2), (5.3):

$$c_0=\frac{a_0}{2},\ c_n=\frac{a_n+ib_n}{2},\ c_{-n}=\frac{a_n-ib_n}{2},\ n=1,2,\ldots. \tag{5.6}$$

Возможна также запись комплексного ряда Фурье в виде

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{l}x}, \tag{5.7}$$

но в этом случае вместо формул (5.5), (5.6) имеем формулы

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-in\frac{\pi}{l}x}dx,\ n=0,\pm1,\pm2,\dots . \tag{5.8}$$

$$c_0=\frac{a_0}{2},\ c_n=\frac{a_n-ib_n}{2},\ c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2},\ n=1,2,\dots . \tag{5.9}$$

Условия сходимости ряда Фурье определяются следующими теоремами [23].

Теорема 5.1. Если $f(x)$ – абсолютно интегрируемая кусочно-гладкая функция периода $2l$, то ряд Фурье сходится всюду, а его сумма равна $f(x)$ в точках непрерывности и равна значению $(f(x+0)-f(x-0))/2$ в точках разрыва.

Теорема 5.2. Ряд Фурье непрерывной кусочно-гладкой функции $f(x)$ периода $2l$ сходится к ней абсолютно и равномерно.

Напомним, что функция $f(x)$ называется гладкой на отрезке $[a,b]$, если она на этом отрезке обладает непрерывной производной. Функцию $f(x)$ называют кусочно-гладкой на отрезке $[a,b]$, если она сама и ее производная либо непрерывны на этом отрезке, либо допускают на нем лишь разрывы первого рода, и притом в конечном числе.

Отметим, что множитель $1/2l$ в формуле (5.5) можно относить к ряду (5.4), т. е. рассматривать разложение функции $f(x)$ периода $2l$ в ряд вида

$$f(x)=\frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\frac{\pi}{l}x}, \tag{5.10}$$

$$c_n=\int_{-l}^{l} f(x)e^{in\frac{\pi}{l}x}dx,\ n=0,\pm1,\pm2,\dots . \tag{5.11}$$

Физически разложение функции $f(x)$ периода $2l$ в ряд Фурье (5.4) означает, что колебательный процесс $f(x)$ периода $2l$ разлагается на гармонические колебания периодов $2l$, $2l/2$, $2l/3$, $2l/4,\dots$ (круговых частот π/l, $2\pi/l$, $3\pi/l$,

$4\pi/l, \ldots$). Комплексные амплитуды этих колебаний соответственно равны c_1, c_2, c_3, $c_4, \ldots$. Совокупность коэффициентов c_n называется спектром функции $f(x)$. Таким образом, периодическая функция имеет дискретный спектр, так как гармонические составляющие функции $f(x)$ сосредоточены в дискретном ряде точек 0, $\pm\pi/l$, $\pm 2\pi/l$, $\pm 3\pi/l$, … .

5.2. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

В разд. 5.1 было установлено, что при некоторых условиях периодическая функция может быть разложена в сходящийся ряд Фурье. Этот результат можно перенести на непериодические функции, но при этом функция представляется уже не с помощью ряда, а интеграла Фурье. Формально интеграл Фурье может быть получен как предельный случай ряда Фурье.

Пусть $f(x)$ – функция, заданная для всех действительных x и кусочно-гладкая на каждом конечном отрезке $[-l, l]$. Тогда на каждом таком отрезке $f(x)$ может быть разложена в ряд Фурье (5.1) – (5.3). Если в (5.1) подставить выражения (5.2), (5.3) для a_n и b_n, то получим

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(u)du + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos(n\frac{\pi}{l}(u-x))du . \qquad (5.12)$$

Дополним предположения о функции еще одним: пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей оси, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty . \qquad (5.13)$$

Тогда при $l \to \infty$ в силу (5.13) первое слагаемое в правой части равенства (5.12) стремится к нулю, и мы получим

$$f(x) = \lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos(n\frac{\pi}{l}(u-x))du . \qquad (5.14)$$

Если положить

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{l},\ \lambda_2 = \frac{2\pi}{l},\ \ldots,\ \lambda_n = \frac{n\pi}{l},\ \ldots\ ,\ \Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{l},$$

то вместо (5.14) получим

$$f(x) = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\lambda_n \int_{-l}^{l} f(u)\cos(\lambda_n(u-x))du\,. \qquad (5.15)$$

Сумма в последнем выражении напоминает интегральную сумму для функции

$$F(\lambda) = \int_{-l}^{l} f(u)\cos(\lambda(u-x))du\,,$$

поэтому формально вместо (5.15) можно записать

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos(\lambda(u-x))du\,. \qquad (5.16)$$

Интеграл справа в (5.16) называется интегралом Фурье, а формула в целом – интегральной формулой Фурье. Если воспользоваться формулой для косинуса разности, то вместо (5.16) можно записать

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} (a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x)d\lambda\,, \qquad (5.17)$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda u\, du\,, \qquad (5.18)$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\lambda u\, du\,. \qquad (5.19)$$

Легко увидеть сходство выражений (5.17) – (5.19) с выражениями ряда Фурье (5.1) – (5.3).

Можно доказать следующую теорему [23].

Теорема 5.3. Если кусочно-гладкая на каждом конечном отрезке функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей прямой, то интегральная формула Фурье (5.16) имеет место для всех x.

Интеграл Фурье можно записать в комплексной форме. Для этого отметим, что внутренний интеграл в интегральной формуле Фурье (5.16) представляет собой четную функции аргумента λ, что позволяет переписать эту формулу в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos(\lambda(u-x))du\,. \tag{5.20}$$

Далее, интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin(\lambda(u-x))du$$

существует вследствие абсолютной интегрируемости функции f и представляет собой нечетную функцию от λ. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin(\lambda(u-x))du = 0\,. \tag{5.21}$$

Прибавив к (5.20) равенство (5.21), умноженное на i, получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\lambda(u-x)}du\,. \tag{5.22}$$

Это равенство называется комплексной формулой Фурье. Ее можно расчленить на два равенства:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda\,, \tag{5.23}$$

где

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\lambda u}du\,. \tag{5.24}$$

Формулы (5.23), (5.24) полезно сравнить с формулами (5.4), (5.5) для ряда Фурье в комплексной форме. Функция $g(\lambda)$ (5.24) называется преобразованием Фурье исходной функции $f(x)$. Формула (5.23), выражающая $f(x)$ через ее преобразование Фурье, называется формулой обращения для преобразования Фурье.

Представление функции $f(x)$ интегралом Фурье описывает эту функцию как сумму бесконечно малых синусоидальных компонент с круговой частотой

λ; функции $2|g(\lambda)|$ и $\arg g(\lambda)$ соответственно определяют амплитуду и фазу этих синусоидальных компонент.

Отметим еще раз, что интегралом Фурье может быть представлена непериодическая функция, в частности, функция, описывающая любые затухающие колебания.

Таким образом, непериодические функции имеют непрерывный спектр.

Пример 5.1. Найти преобразование Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \le a, \\ 0 & \text{при } |x| > a \end{cases} \tag{5.25}$$

(см. рис. 5.1).

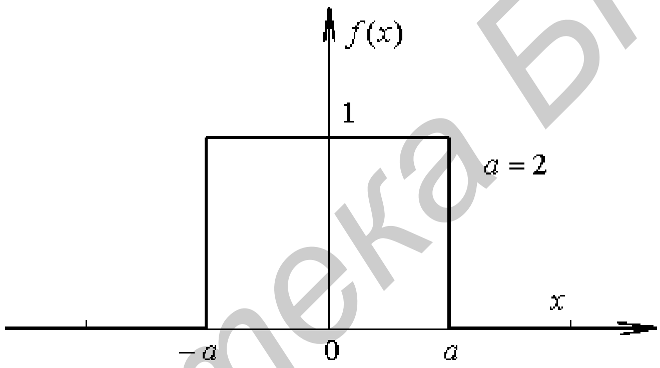

Рис. 5.1. График функции (5.25)

Решение. Формула (5.24) дает

$$g(\lambda) = \int_{-a}^{a} e^{i\lambda u} du = \left. \frac{e^{i\lambda u}}{i\lambda} \right|_{-a}^{a} = \frac{e^{i\lambda a} - e^{-i\lambda a}}{i\lambda} = \frac{2\sin a\lambda}{\lambda}.$$

Как видим, $g(\lambda)$ оказалась здесь действительной функцией. Ее график изображен на рис. 5.2.

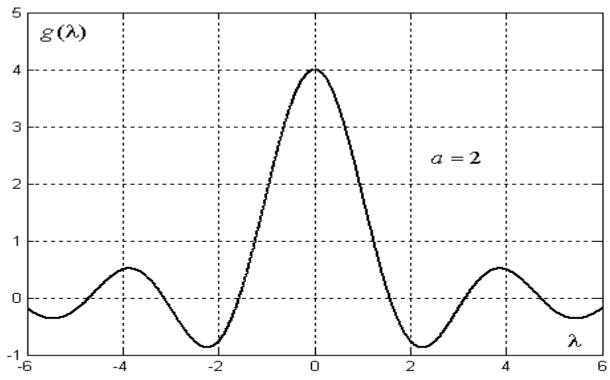

Рис. 5.2. График преобразования Фурье функции (5.25)

5.3. Преобразование Фурье – Стилтьеса

Рассмотрение рядов Фурье и интегралов Фурье может быть объединено с помощью преобразования Фурье – Стилтьеса. Для этого обратимся к преобразованию Фурье (5.24). Эту формулу можно переписать в виде интеграла Римана – Стилтьеса:

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda u} dF(u), \tag{5.26}$$

где

$$F(u) = \int_{-\infty}^{u} f(u)du \tag{5.27}$$

– абсолютно непрерывная функция с ограниченной вариацией на всей оси. Однако равенство (5.26) имеет смысл не только для функций вида (5.27), но и для любых функций с ограниченной вариацией на всей прямой.

Определение 5.1. Интеграл вида

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dF(x), \tag{5.28}$$

где $F(x)$ – произвольная функция с ограниченной вариацией на действительной прямой, называется преобразованием Фурье – Стилтьеса функции $F(x)$.

Формула обращения для преобразования Фурье – Стилтьеса (5.28) имеет следующий вид [2, 4]:

$$F(x_2)-F(x_1)=\frac{1}{2\pi}\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{e^{i\lambda x_1}-e^{-i\lambda x_2}}{i\lambda}g(\lambda)d\lambda. \tag{5.29}$$

Она справедлива для любых точек непрерывности x_1, x_2 функции $F(x)$.

Если $F(x)$ – функция скачков, для которой точки $x=nT$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, служат точками разрыва, а числа $\ldots f(-T), f(0), f(T),\ldots$ – величинами скачков в этих точках, то функция (5.28) представляет собой ряд Фурье (5.7),

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}dF(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)e^{i\lambda nT},$$

и поэтому является периодической с периодом $2\pi/T$.

5.4. Спектральное представление ковариационной функции стационарного случайного процесса с непрерывным временем

Будем рассматривать комплексный непрерывный в среднем квадратичном стационарный случайный процесс $\xi(t)$. Характеристическое свойство ковариационной функции $R_\xi(\tau)$ – неотрицательная определенность – в случае стационарного случайного процесса $\xi(t)$ сводится к соотношению

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_\xi(t_k-t_j)z_k\bar{z}_j=E\left(|\sum_{j=1}^{n}\mathring{\xi}(t_j)z_j|^2\right)\geq 0 \tag{5.30}$$

для любого конечного множества точек t_j и комплексных чисел z_j. Так как случайный процесс $\xi(t)$ предполагается непрерывным в среднем квадратичном, то его ковариационная функция $R_\xi(\tau)$ непрерывна для всех τ. Известно [8], что любая функция $R(\tau)$, обладающая свойством неотрицательной определенности, является ковариационной функцией некоторого непрерывного в среднем квадратичном стационарного случайного процесса, в качестве которого всегда можно взять гауссовский случайный процесс.

Относительно неотрицательно определенной функции $R(\tau)$ справедлива следующая теорема [8].

Теорема 5.4 (Бохнера). Функция $R(\tau)$ неотрицательно определена тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде интеграла Фурье – Стилтьеса по некоторой вещественной неубывающей и ограниченной функции $F(\lambda)$:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} dF(\lambda). \tag{5.31}$$

Достаточность (из (5.31) следует (5.30)) доказывается просто. Подставим (5.31) в (5.30). Получим

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R(t_k - t_j) z_k \bar{z}_j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t_k - t_j)} dF(\lambda)\right) z_k \bar{z}_j =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e^{i\lambda(t_k - t_j)} z_k \bar{z}_j dF(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} e^{i\lambda t_k} z_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n} e^{-i\lambda t_j} \bar{z}_j\right) dF(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} e^{i\lambda t_k} z_k\right|^2 dF(\lambda) \geq 0.$$

Докажем необходимость. Для произвольных вещественных a, b и для любой непрерывной в (a,b) комплексной функции $z(t)$ имеем

$$\int_a^b \int_a^b R(t-u) z(t) \bar{z}(u) dt du = E\left(\int_a^b \int_a^b \overset{\circ}{\xi}(t) \overline{\overset{\circ}{\xi}}(u) z(t) \bar{z}(u) dt du\right) =$$

$$= E\left(\left|\int_a^b \overset{\circ}{\xi}(t) z(t) dt\right|^2\right) \geq 0. \tag{5.32}$$

Положив в (5.32) $z(t) = \exp(-i\lambda t)$, для любого $A > 0$ и любого вещественного λ будем иметь

$$g(\lambda, A) = \frac{1}{2\pi A} \int_0^A \int_0^A R(t-u) e^{-i\lambda(t-u)} dt du \ge 0 .$$

Выполним здесь замену переменных $t = t$, $\tau = t - u$. Тогда прямоугольная область интегрирования $0 \le t \le A$, $0 \le u \le A$ примет вид трапеции (рис. 5.3). Получим

$$g(\lambda, A) = \frac{1}{2\pi A} \int_{-A}^{0} R(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau \int_0^{A+\tau} dt + \frac{1}{2\pi A} \int_0^A R(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau \int_\tau^A dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi A} \int_{-A}^{0} (A+\tau) R(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau + \frac{1}{2\pi A} \int_0^A (A-\tau) R(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} ((1-|\tau|)/A) R(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\tau/A) R(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau , \qquad (5.33)$$

где

$$\mu(t) = \begin{cases} 1-|t|, \text{ если } |t| \le 1, \\ 0, \quad\quad \text{если } |t| > 1. \end{cases}$$

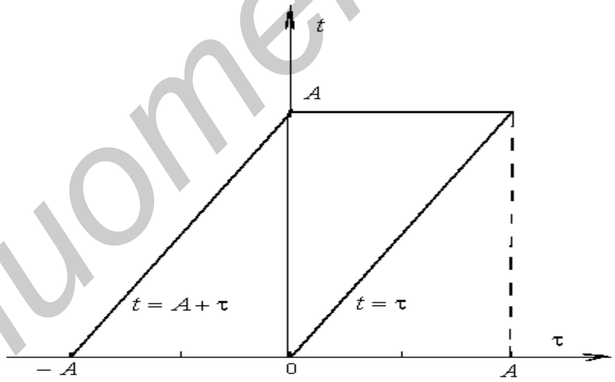

Рис. 5.3. Область интегрирования в (5.33)
после замены переменных $t = t$, $\tau = t - u$

Можно показать, что функция $g(\lambda, A)$ интегрируема на всей действительной оси [8]. Таким образом, для любого фиксированного $A > 0$ непрерывные функции $g(\lambda, A)$ и $\mu(\tau/A)R(\tau)$, интегрируемые на всей действительной оси, связаны интегральной формулой Фурье (5.33). В этих условиях имеет место обратное преобразование Фурье, так что для всех действительных τ

$$\mu(\tau / A) R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda, A) e^{i\lambda\tau} d\lambda .$$

В частности, при $\tau = 0$

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda, A) d\lambda . \qquad (5.34)$$

Функцию $g(\lambda, A) / R(0)$ на основании равенства (5.34) можно считать плотностью вероятности некоторого вероятностного распределения. Тогда $\mu(\tau / A) R(\tau) / R(0)$ будет соответствующей характеристической функцией, причем $\mu(\tau / A) R(\tau) / R(0) \to R(\tau) / R(0)$ при $A \to \infty$ и $R(\tau) / R(0)$ – непрерывная функция. Из теоремы о сходимости характеристических функция [4] следует, что $R(\tau) / R(0)$ также является характеристической функцией, и по определению характеристической функции будем иметь

$$R(\tau) / R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} dF_1(\lambda) . \qquad (5.35)$$

Отсюда вытекает соотношение (5.31). Теорема Бохнера доказана.

В чисто математическом плане эта теорема была доказана С. Бохнером [3], а в применении к ковариационной функции стационарного случайного процесса – А. Я. Хинчиным [28]. Тем самым А. Я. Хинчиным были заложены основы корреляционной (спектральной) теории стационарных случайных процессов. В данном пособии теорема приведена в интерпретации Г. Крамера [8].

Поскольку ковариационная функция $R_\xi(\tau)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ является неотрицательно определенной, то она удовлетворяет теореме Бохнера (5.31). В связи с этим под функцией $R(\tau)$ в формуле (5.31) будем понимать ковариационную функцию $R_\xi(\tau)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ и называть формулу (5.31) спектральным представлением ковариационной функции стационарного случайного процесса с непрерывным временем. Так как $F_1(\lambda)$ в (5.35) есть функция распределения некоторой случайной величины, т. е. $F_1(-\infty)=0$, $F_1(+\infty)=1$, то $F(\lambda)$ в (5.31) удовлетворяет условиям

$$F(-\infty)=0\,,\ F(+\infty)=R(0)\,. \tag{5.36}$$

Неубывающую функцию $F(\lambda)$ в выражении (5.31) будем называть спектральной функцией стационарного случайного процесса $\xi(t)$ и обозначать $F_\xi(\lambda)$.

С точки зрения спектрального представления (5.31) не важно, как определить $F_\xi(\lambda)$ в точках разрыва. Обычно считают $F_\xi(\lambda)$ непрерывной справа, так что $F_\xi(\lambda)=F_\xi(\lambda+0)$.

Для вещественного случайного процесса ковариационная функция $R(\tau)$ вещественна, и формула (5.31) принимает вид

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda\tau dF(\lambda)\,. \tag{5.37}$$

Если спектральная функция $F(\lambda)$ абсолютно непрерывна, т. е. может быть представлена в виде

$$F_\xi(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}s_\xi(\lambda)d\lambda\,, \tag{5.38}$$

то производная

$$s_\xi(\lambda)=F'_\xi(\lambda) \tag{5.39}$$

называется спектральной плотностью случайного процесса $\xi(t)$ с непрерывным временем.

В соответствии с формулой обращения (5.29) можно записать, что для любых точек непрерывности λ_1, λ_2

$$F_\xi(\lambda_2)-F_\xi(\lambda_1)=\frac{1}{2\pi}\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{e^{i\lambda_1\tau}-e^{-i\lambda_2\tau}}{i\tau}R_\xi(\tau)d\tau\,. \tag{5.40}$$

Так как спектральная функция $F_\xi(\lambda)$ отличается от обычной функции распределения случайной величины лишь постоянным множителем, то существует единственное представление вида $F_\xi=F_{\xi,1}+F_{\xi,2}+F_{\xi,3}$, где все $F_{\xi,j}$ – вещественные неубывающие ограниченные функции, $F_{\xi,1}$ – ступенчатая функция, имеющая те же скачки, что и F_ξ, $F_{\xi,2}$ – абсолютно непрерывная и $F_{\xi,3}$ – сингулярная функции. В приложениях, как правило, сингулярная составляющая отсутствует.

5.5. Спектральное представление ковариационной функции стационарного случайного процесса с дискретным временем

Пусть стационарный случайный процесс с дискретным временем $\xi(kT)$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ образуется выборкой значений непрерывного в среднем квадратичном стационарного случайного процесса $\xi(t)$ в дискретные равноотстоящие на T моменты времени. Ковариационная функция стационарного случайного процесса $\xi(kT)$ с дискретным временем (стационарной случайной последовательности) – это последовательность коэффициентов ковариации $R_\xi(kT)$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Теорема 5.5. Ковариационная функция $R_\xi(kT)$ стационарной случайной последовательности $\xi(kT)$ может быть представлена в виде интеграла Фурье – Стилтьеса по некоторой вещественной неубывающей ограниченной функции $F_{\xi,T}(\lambda)$:

$$R_\xi(kT) = \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{ikT\lambda} dF_{\xi,T}(\lambda), \; k = 0, \pm1, \pm2, \ldots . \tag{5.41}$$

Доказательство формулы (5.41) можно выполнить аналогично доказательству теоремы Бохнера (подразд. 5.4). Запишем свойство неотрицательной определенности ковариационной функции

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} R_\xi((m-j)T) z_m \bar{z}_j \geq 0 . \tag{5.42}$$

Для доказательства достаточности условия (5.41) подставим в левую часть неравенства (5.42) выражение (5.41). Получим

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{i(m-j)T\lambda} dF_{\xi,T}(\lambda) z_m \bar{z}_j = \int_{-\pi/T}^{\pi/T}\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e^{i(m-j)T\lambda} z_m \bar{z}_j dF_{\xi,T}(\lambda) =$$

$$= \int_{-\pi/T}^{\pi/T} (\sum_{m=1}^{n} e^{imT\lambda} z_m)(\sum_{j=1}^{n} e^{-imT\lambda} \bar{z}_m) dF_{\xi,T}(\lambda) = \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |\sum_{j=1}^{n} e^{-imT\lambda} z_m|^2 dF_{\xi,T}(\lambda) \geq 0 .$$

Таким образом, из представления (5.41) следует неотрицательная определенность (5.42). Достаточность доказана.

Для доказательства необходимости выберем в (5.42) комплексные числа z_m в виде $z_m = e^{-imT\lambda}$. Получим

$$g(\lambda, n) = \frac{T}{2\pi n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_\xi((m-j)T) e^{-i\lambda(m-j)T} \geq 0 .$$

Введем здесь новую переменную суммирования $k = m - j$ и просуммируем по k. В результате будем иметь

$$g(\lambda, n) = \frac{T}{2\pi n}(nR_\xi(0) + (n-1)R_\xi(T)e^{-i\lambda T} + \cdots + R_\xi((n-1)T)e^{-i\lambda(n-1)T} +$$

$$+ (n-1)R_\xi(-T)e^{i\lambda T} + \cdots + R_\xi(-(n-1)T)e^{i\lambda(n-1)T}) =$$

$$= \frac{T}{2\pi}\sum_{k=-(n-1)}^{(n-1)} (1 - \frac{|k|}{n}) R_\xi(kT) e^{-i\lambda kT} = \frac{T}{2\pi}\sum_{k=-(n-1)}^{(n-1)} \mu(k,n) R_\xi(kT) e^{-i\lambda kT} ,$$

где

$$\mu(k,n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|k|}{n}, & \text{если } |k| \leq m-1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Мы видим, что функция $g(\lambda, n)$ представлена рядом Фурье. Отсюда следует, что $g(\lambda, n)$ – периодическая с периодом $2\pi/T$ функция. Коэффициенты $\mu(k,n)R_\xi(kT)$ ряда Фурье определяются формулой (подразд. 5.1)

$$\mu(k,n) R_\xi(kT) = \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{ikT\lambda} g(\lambda, n) d\lambda , \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Так как при $k=0$ имеем

$$R_\xi(0)=\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T} g(\lambda,n)d\lambda$$

и $g(\lambda,n)\ge 0$, то ясно, что функция $g(\lambda,n)/R_\xi(0)$ есть некоторая плотность распределения вероятности на $[-\pi/T,\pi/T]$. Тогда $\mu(k,n)R_\xi(kT)/R_\xi(0)$ есть соответствующая характеристическая функция, вычисленная для дискретного значения аргумента kT. При $n\to\infty$ имеет место сходимость $\mu(k,n)R_\xi(kT)/R_\xi(0)\to R_\xi(kT)/R_\xi(0)$. По теореме о сходимости характеристических функций получаем, что $R_\xi(kT)/R_\xi(0)$ – характеристическая функция, т. е.

$$R_\xi(kT)/R_\xi(0)=\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{ikT\lambda}dF_{1,T}(\lambda)\,,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots\,. \tag{5.43}$$

где $F_{1,T}(\lambda)$ – некоторая функция распределения. Из (5.43) следует соотношение (5.41). Доказательство теоремы 5.5 закончено.

Как и в случае непрерывного времени, функция $F_{\xi,T}(\lambda)$ в спектральном представлении (5.41) называется спектральной функцией стационарной случайной последовательности $\xi(kT)$. Спектральную функцию можно считать непрерывной справа и удовлетворяющей условиям $F_{\xi,T}(-\pi/T)=0$, $F_{\xi,T}(\pi/T)=R_\xi(0)$. Если $F_{\xi,T}(\lambda)$ абсолютно непрерывна на $[-\pi/T,\pi/T]$, т. е.

$$F_{\xi,T}(\lambda)=\int\limits_{-\pi/T}^{\lambda} s_{\xi,T}(\lambda)d\lambda\,,\ -\pi/T\le\lambda\le\pi/T \tag{5.44}$$

то производная

$$s_{\xi,T}(\lambda)=F'_{\xi,T}(\lambda)\,,\ -\pi/T\le\lambda\le\pi/T$$

называется спектральной плотностью стационарной случайной последовательности $\xi(kT)$.

5.6. Спектральная функция и спектральная плотность стационарного случайного процесса

Рассмотрим сначала случайный процесс $\xi(t)$ с непрерывным временем. Как уже упоминалось, функция $F_\xi(\lambda)$ в спектральном представлении (5.31) ковариационной функции $R_\xi(\tau)$ называется спектральной функцией стационарного случайного процесса $\xi(t)$, а ее производная $s_\xi(\lambda) = F'_\xi(\lambda)$ (5.39) – спектральной плотностью стационарного случайного процесса $\xi(t)$. Рассмотрим более подробно случай, когда существует спектральная плотность $s_\xi(\lambda)$. В этом случае

$$dF_\xi(\lambda) = s_\xi(\lambda)d\lambda,$$

и интеграл Фурье – Стилтьеса (5.31) превращается в интеграл Фурье:

$$R_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} s_\xi(\lambda)d\lambda. \tag{5.45}$$

Обратное преобразование Фурье для (5.45) выражает спектральную плотность $s_\xi(\lambda)$ через ковариационную функцию $R_\xi(\tau)$:

$$s_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau\lambda} R_\xi(\tau)d\tau. \tag{5.46}$$

Таким образом, спектральная плотность $s_\xi(\lambda)$ и ковариационная функция $R_\xi(\tau)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ являются парой преобразований Фурье.

Из (5.45) следует, что

$$R_\xi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_\xi(\lambda)d\lambda. \tag{5.47}$$

Так как $R_\xi(0)$ есть дисперсия случайного процесса $\xi(t)$, то из (5.47) следует, что спектральная плотность $s_\xi(\lambda)$ представляет собой распределение дисперсии случайного процесса $\xi(t)$ по оси угловых частот λ. С другой стороны,

$$R_\xi(0) = E(\overset{\circ}{\xi}{}^2(t)).$$

Если $\overset{\circ}{\xi}(t)$ – ток в единичном сопротивлении, то $\overset{\circ}{\xi}{}^2(t)$ – мгновенная мощность, а $E(\overset{\circ}{\xi}{}^2(t))$ – средняя мощность, выделяемая случайным процессом $\overset{\circ}{\xi}(t)$ в единичном сопротивлении. В таком случае спектральная плотность представляет собой распределение средней мощности случайного процесса $\overset{\circ}{\xi}(t)$ по оси частот λ. Средняя мощность, рассеиваемая в полосе частот $[\lambda_1, \lambda_2]$, определяется как следующий интеграл:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} s_\xi(\lambda)d\lambda.$$

Пользуясь формулой Эйлера $e^{-i\tau\lambda} = \cos\lambda\tau - i\sin\lambda\tau$, выражение (5.46) для спектральной плотности можно переписать так:

$$s_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau)\cos\lambda\tau d\tau - \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau)\sin\lambda\tau d\tau. \qquad (5.48)$$

Если случайный процесс $\xi(t)$ действительный, то его ковариационная функция $R_\xi(\tau)$ действительная и четная, т. е. $R_\xi(\tau) = R_\xi(-\tau)$. В силу четности $R_\xi(\tau)$ и нечетности $\sin\lambda\tau$ второй интеграл в правой части равенства (5.48) равен нулю, и мы имеем

$$s_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau)\cos\lambda\tau d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} R_\xi(\tau)\cos\lambda\tau d\tau. \qquad (5.49)$$

Отсюда следует, что для действительного случайного процесса $\xi(t)$ спектральная плотность $s_\xi(\lambda)$ является действительной и четной функцией

$$s_\xi(\lambda) = s_\xi(-\lambda).$$

Рассмотрим теперь случайный процесс с дискретным временем $\xi(kT)$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Функция $F_{\xi,T}(\lambda)$ в спектральном представлении (5.41) ковариационной функции $R_\xi(kT)$ называется спектральной функцией, а ее производная

$s_{\xi,T}(\lambda)=F'_{\xi,T}(\lambda)$ – спектральной плотностью стационарной случайной последовательности $\xi(kT)$. Из раздела 5.5 ясно, что спектральная функция $F_{\xi,T}(\lambda)$ и спектральная плотность $s_{\xi,T}(\lambda)$ – периодические функции с периодом $2\pi/T$, поэтому достаточно их рассматривать лишь на промежутке $[-\pi/T,\pi/T]$. Если существует спектральная плотность $s_{\xi,T}(\lambda)$, то $dF_{\xi,T}(\lambda)=s_{\xi,T}(\lambda)d\lambda$, и формула (5.41) принимает вид

$$R_{\xi}(kT)=\int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{ikT\lambda} s_{\xi,T}(\lambda)d\lambda,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots . \tag{5.50}$$

Так как это формула для коэффициентов ряда Фурье (5.5), то спектральная плотность $s_{\xi,T}(\lambda)$ может быть представлена рядом Фурье (см. формулу (5.4))

$$s_{\xi,T}(\lambda)=\frac{T}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{\xi}(kT)e^{-ikT\lambda},\ -\pi/T\le\lambda\le\pi/T. \tag{5.51}$$

Для вещественной случайной последовательности $\xi(kT)$ ковариационная функция $R_{\xi}(kT)$ является вещественной, поэтому из (5.50) с помощью формулы Эйлера можно получить, что

$$R_{\xi}(kT)=\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \cos kT\lambda\, s_{\xi,T}(\lambda)d\lambda,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots . \tag{5.52}$$

Теперь $R_{\xi}(kT)$ представляет собой коэффициенты ряда Фурье по косинусам (см. формулы (5.1),(5.2)), т. е.

$$s_{\xi,T}(\lambda)=\frac{T}{\pi}\left(\frac{R_{\xi}(0)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} R_{\xi}(kT)\cos kT\lambda\right),\ -\pi/T\le\lambda\le\pi/T. \tag{5.53}$$

Из последнего выражения следует, что спектральная плотность $s_{\xi,T}(\lambda)$ вещественной случайной последовательности есть функция вещественная и четная: $s_{\xi,T}(\lambda)=s_{\xi,T}(-\lambda)$.

Важным является вопрос связи между спектральными плотностями $s_{\xi}(\lambda)$ случайного процесса $\xi(t)$ и $s_{\xi,T}(\lambda)$ соответствующего ему «решетчатого» случайного процесса $\xi(kT)$. Установим эту связь. Из представления (5.31) (теоремы Бохнера) следует, что для вещественного случайного процесса

$$R_\xi(kT) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos kT\lambda dF_\xi(\lambda).$$

После интегрирования по отрезкам длиной $2\pi/T$ и дальнейшей подстановки $\lambda = \nu + \frac{2\pi m}{T}$ получим

$$R_\xi(kT) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos kT\lambda dF_\xi(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{(2m-1)\pi/T}^{(2m+1)\pi/T} \cos kT\lambda dF_\xi(\lambda) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \cos((\nu + \frac{2\pi m}{T})kT) dF_\xi(\nu + \frac{2\pi m}{T}) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \cos((\nu T + 2\pi m)k) dF_\xi(\frac{\nu T + 2\pi m}{T}) = \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \cos(\nu Tk) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} dF_\xi(\frac{\nu T + 2\pi m}{T}) \right).$$

Введя обозначение

$$dF_{\xi,T}(\nu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} dF_\xi(\frac{\nu T + 2\pi m}{T}), \tag{5.54}$$

будем иметь

$$R_\xi(kT) = \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \cos(kT\nu) dF_{\xi,T}(\nu). \tag{5.55}$$

Предположим, что $F_\xi(\nu)$ абсолютно непрерывна (имеет вид (5.38)). Тогда $dF_\xi(\nu) = s_\xi(\nu)d\nu$, $dF_\xi(\frac{\nu T + 2\pi m}{T}) = s_\xi(\frac{\nu T + 2\pi m}{T})d\nu$, и выражение (5.54) можно представить в виде

$$dF_{\xi,T}(\nu) = s_{\xi,T}(\nu)d\nu,$$

где

$$s_{\xi,T}(\nu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_\xi(\frac{\nu T + 2\pi m}{T}). \tag{5.56}$$

Таким образом, спектральная плотность $s_{\xi,T}(\nu)$ случайной последовательности $\xi(kT)$, полученной выборкой через равные промежутки времени T значений случайного процесса с непрерывным временем $\xi(t)$, получается суммированием спектральных плотностей $s_\xi(\nu)$ случайного процесса $\xi(t)$, сдвинутых по оси круговых частот ν на величины $2\pi m/T$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Пусть, например, спектральная плотность $s_\xi(\nu)$ имеет вид, изображенный на рис. 5.4.

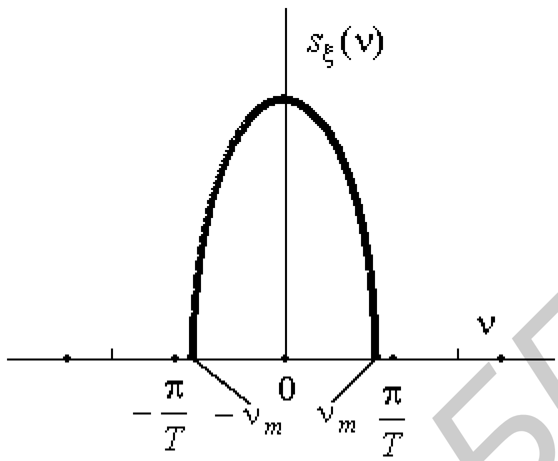

Рис. 5.4. Спектральная плотность случайного процесса $\xi(t)$ в случае $|\nu_m| \le \pi/T$

Тогда спектральная плотность $s_{\xi,T}(\nu)$ содержит в себе $s_\xi(\nu)$, а также составляющие других частот, как показано на рис. 5.5.

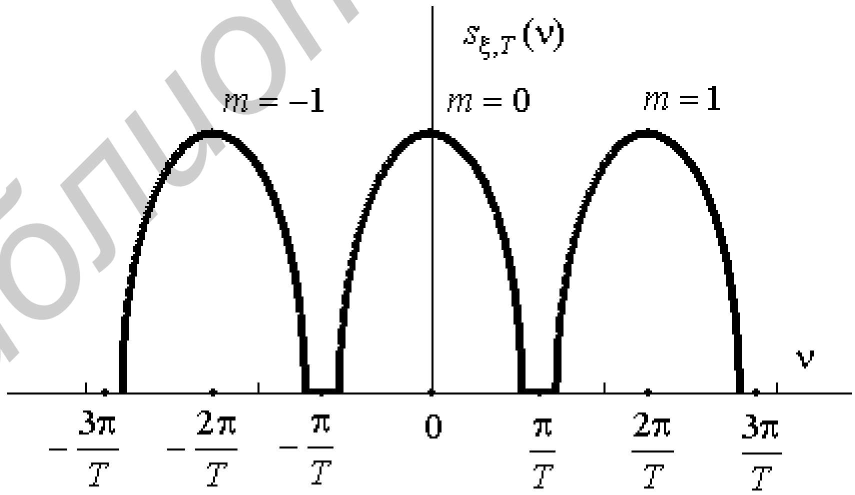

Рис. 5.5. Спектральная плотность случайной последовательности $\xi(kT)$

в случае $|\nu_m| \le \pi/T$

Рис. 5.5 соответствует случаю, когда $s_\xi(\nu)=0$ при $|\nu|>\pi/T$. В этом случае $s_\xi(\nu)$ может быть восстановлена по $s_{\xi,T}(\nu)$, значит, и $R_\xi(\tau)$ может быть восстановлена по $R_\xi(kT)$. Таким образом, для восстановления функции $R_\xi(\tau)$, спектр которой равен нулю вне промежутка $[-\nu_m,\nu_m]$ (см. рис 5.5), по значениям функции в точках $\tau=kT$, период дискретизации T должен удовлетворять условию $T\le\pi/\nu_m$ (теорема В. А. Котельникова). Если же $T>\pi/\nu_m$ (рис. 5.6), то спектральная плотность $s_{\xi,T}(\nu)$ представляет искаженную картину для спектральной плотности $s_\xi(\nu)$ (рис. 5.7).

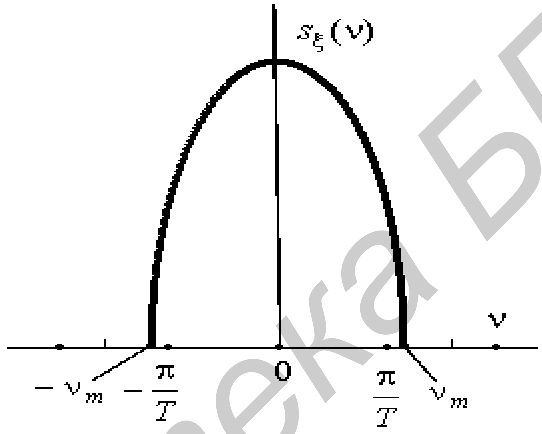

Рис. 5.6. Спектральная плотность случайного процесса $\xi(t)$ в случае $|\nu_m|>\pi/T$

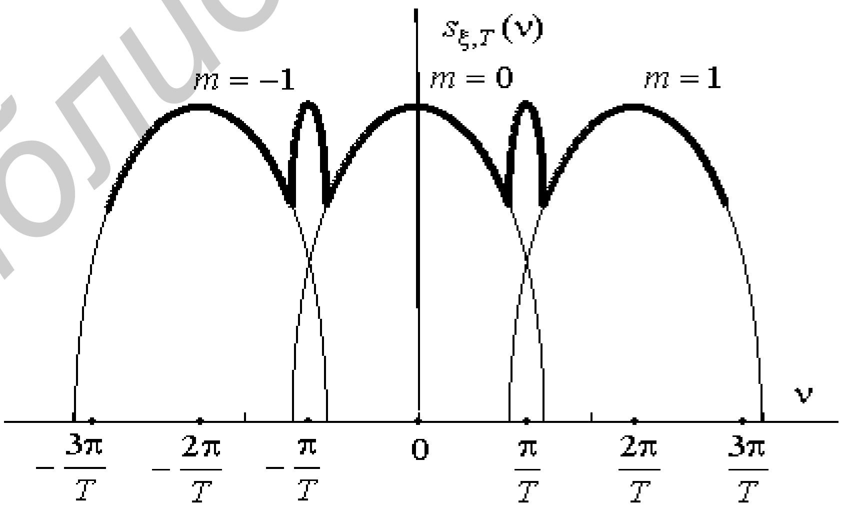

Рис 5.7. Спектральная плотность случайной последовательности $\xi(kT)$

в случае $|\nu_m|\le\pi/T$

5.7. Примеры спектральных функций и спектральных плотностей

Рассмотрим спектральные функции и спектральные плотности вещественных случайных процессов на некоторых примерах.

Пример 5.2. $\xi(kT)$ – последовательность независимых случайных величин с дисперсией σ^2. В этом случае коэффициенты ковариации равны:

$$R_\xi(0) = \sigma^2,\ R_\xi(kT) = 0,\ k = \pm1, \pm2, \ldots .$$

По формуле (5.53) получим спектральную плотность этой случайной последовательности:

$$s_{\xi,T}(\lambda) = \frac{T\sigma^2}{2\pi},\ -\pi/T \le \lambda \le \pi/T.$$

Спектральную функцию найдем по формуле (5.44):

$$F_{\xi,T}(\lambda) = \int\limits_{-\pi/T}^{\lambda} \frac{T\sigma^2}{2\pi} d\lambda = \frac{T\sigma^2}{2\pi}\left(\lambda + \frac{\pi}{T}\right),\ -\pi/T \le \lambda \le \pi/T.$$

Графики функций $s_{\xi,T}(\lambda)$ и $F_{\xi,T}(\lambda)$ изображены на рис. 5.8.

Рис. 5.8. Спектральная плотность и спектральная функция последовательности независимых случайных величин

Пример 5.3. Вещественный случайный процесс с непрерывным временем $\xi(t)$ и спектральной плотностью

$$s_\xi(\lambda) = c. \tag{5.57}$$

Ковариационная функция такого случайного процесса в соответствии с выражением (5.45) равна

$$R_\xi(\tau) = c\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} d\lambda = c\delta(\tau). \tag{5.58}$$

Функция вида (5.58) называется дельта-функцией. Она равна нулю при любом $\tau \neq 0$, а при $\tau = 0$ обращается в бесконечность. Отсюда следует, что любые два сколь угодно близкие сечения случайного процесса с такой ковариационной функцией не коррелированы. Случайный процесс со спектральной плотностью вида (5.57) называется белым шумом. Дисперсия (средняя мощность) белого шума равна бесконечности, как это следует из формулы (5.47). Ясно, что случайных процессов с такой мощностью не существует, так что белый шум является некоторой идеализацией процессов, встречающихся на практике. Например, случайный процесс на входе динамической системы, имеющий постоянную спектральную плотность в полосе пропускания системы, можно считать белым шумом по отношению к рассматриваемой системе.

Пример 5.4. Вещественный случайный процесс с непрерывным временем $\xi(t)$ задан в параметрической форме

$$\xi(t) = a\cos(\lambda_i t + \varphi), \tag{5.59}$$

где a и λ_i – фиксированное число; φ – случайная величина с равномерным распределением на $[-\pi, \pi]$.

Ковариационная функция такого процесса равна (подразд. 2.6, пример 2.1)

$$R_\xi(\tau) = \frac{a^2}{2}\cos(\lambda_i \tau).$$

При такой ковариационной функции равенство (5.37) выполняется в том случае, когда $F_\xi(\lambda)$ есть ступенчатая функция со скачком $a^2/2$ в точке $\lambda = \lambda_i$. Вид такой спектральной функции изображен на рис. 5.9.

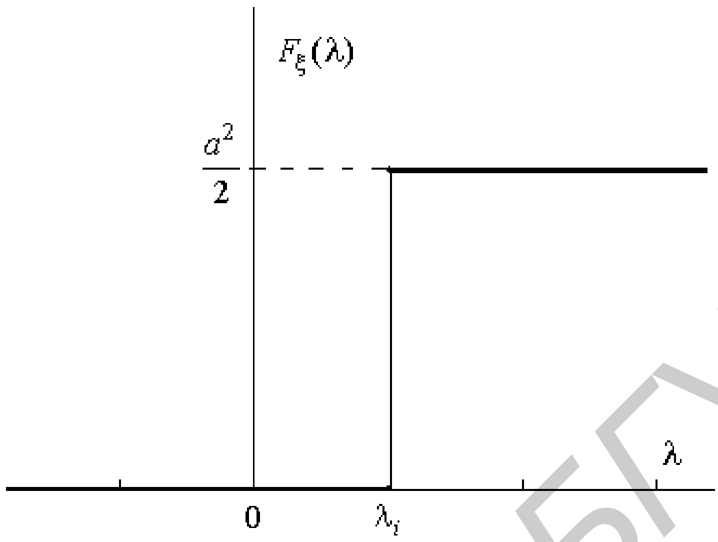

Рис. 5.9. Спектральная функция случайного процесса (5.59)

Если в (5.59) $\lambda_i = 0$, то мы получим случайный процесс вида

$$\xi(t) = c, \tag{5.60}$$

где c – случайная величина с дисперсией σ^2.

Ковариационная функция в этом случае $R_\xi(\tau) = \sigma^2$, а спектральная функция $F_\xi(\lambda)$ имеет тот же вид (рис. 5.9) со скачком в точке $\lambda = 0$.

Из этого примера можно сделать следующий вывод. Если некоторый случайный процесс имеет постоянную составляющую вида (5.60), то спектральная функция имеет скачок в нуле. При наличии составляющей вида (5.59) спектральная функция претерпевает скачок в точке $\lambda = \lambda_i$.

Пример 5.5. Вещественный случайный процесс с непрерывным временем $\xi(t)$ имеет ковариационную функцию вида

$$R_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}. \tag{5.61}$$

Спектральную плотность случайного процесса получим по формуле (5.46):

$$s_\xi(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\tau\lambda}e^{-\alpha|\tau|}d\tau=\frac{\sigma^2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-i\tau\lambda}e^{\alpha\tau}d\tau+\frac{\sigma^2}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-i\tau\lambda}e^{-\alpha\tau}d\tau=$$

$$=\frac{\sigma^2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{(\alpha-i\lambda)\tau}d\tau+\frac{\sigma^2}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-(\alpha+i\lambda)\tau}d\tau=$$

$$=\frac{\sigma^2}{2\pi(\alpha-i\lambda)}e^{(\alpha-i\lambda)\tau}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{\sigma^2}{2\pi(\alpha+i\lambda)}e^{-(\alpha+i\lambda)\tau}\Big|_{0}^{\infty}=$$

$$=\frac{\sigma^2}{2\pi(\alpha-i\lambda)}+\frac{\sigma^2}{2\pi(\alpha+i\lambda)}=\frac{\sigma^2\alpha}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)}. \qquad (5.62)$$

Спектральная плотность $s_\xi(\lambda)$ (5.62) изображена на рис. 5.10.

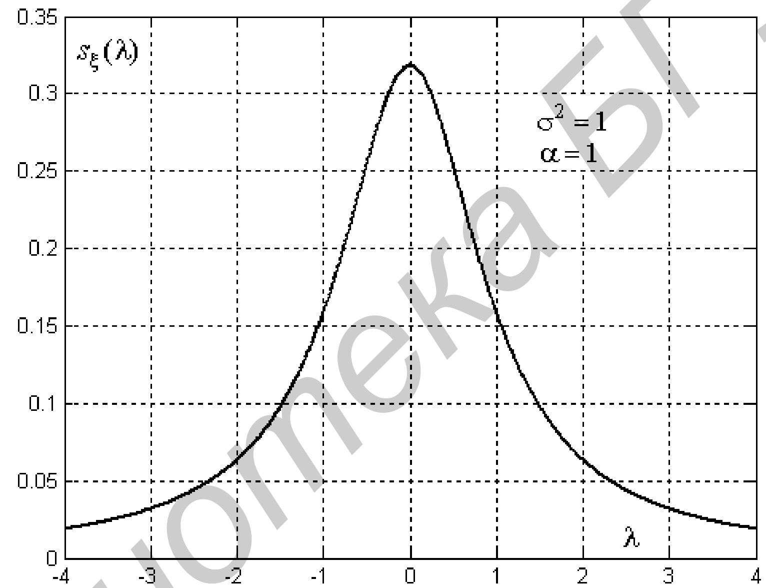

Рис. 5.10. Спектральная плотность (5.62)

5.8. Спектральное представление стационарного случайного процесса

В разд. 5.4, 5.5 мы рассмотрели спектральное представление ковариационной функции стационарного случайного процесса (см. формулы (5.31), (5.41)). Аналогичное представление справедливо и для самого случайного процесса. Это представление будет рассмотрено в настоящем разделе.

Пусть $\xi(t)$ – комплексный непрерывный в среднем квадратичном стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, $F_\xi(\lambda)$ – его спектральная функция, непрерывная справа и удовлетворяющая условиям (5.36): $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=R(0)$. Справедлива следующая теорема о спектральном представлении стационарного случайного процесса.

Теорема 5.6. Для любого стационарного непрерывного в среднем квадратичном случайного процесса $\xi(t)$ существует такой процесс с ортогональными приращениями $\varphi(\lambda)$, что $\xi(t)$ для каждого фиксированного t допускает спектральное представление

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\varphi(\lambda), \tag{5.63}$$

где стохастический интеграл Стилтьеса понимается как интеграл в среднем квадратичном. Процесс $\varphi(\lambda)$ определен с точностью до аддитивной случайной величины. Если потребовать дополнительно, чтобы $\varphi(-\infty)=0$, то будут выполняться соотношения

$$E(\varphi(\lambda))=0,\ E(|\varphi(\lambda)|^2)=F_\xi(\lambda),\ E(|d\varphi(\lambda)|^2)=dF_\xi(\lambda). \tag{5.64}$$

Возможность спектрального представления стационарного случайного процесса впервые была указана А. Н. Колмогоровым [12]. Приведенная теорема принадлежит Г. Крамеру [8].

Доказательство теоремы выходит за рамки данного пособия. Его можно найти в [8]. Мы ограничимся лишь пояснением содержательного смысла представления (5.63). Для этого сравним его с представлением (5.31) для ковариационной функции $R_\xi(\tau)$. Если спектральная функция в (5.31) имеет скачок величины $\Delta F_{\xi,k}$ в точке λ_k, то в спектральных представлениях для $R_\xi(\tau)$ и $\xi(t)$ ему соответствуют элементарные гармонические колебания

$$\Delta F_{\xi,k} e^{it\lambda_k} \text{ и } \Delta\varphi_k e^{it\lambda_k}$$

соответственно, где $\Delta\varphi_k$ – случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $E(|\Delta\varphi_k|^2) = \Delta F_{\xi,k}$. В том случае, когда $F_\xi(\lambda)$ – ступенчатая функция со скачками в точках $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, ...$ оба разложения принимают вид

$$R_\xi(\tau) = \sum_k \Delta F_{\xi,k} e^{i\tau\lambda_k}, \tag{5.65}$$

$$\xi(t) = \sum_k \Delta\varphi_k e^{i\tau\lambda_k}. \tag{5.66}$$

В последней сумме величины $\Delta\varphi_k$ ортогональны ($E(\Delta\varphi_k \overline{\Delta\varphi_l}) = 0$ при $k \neq l$).

Аналогичен смысл приращений $\Delta\varphi_k = \varphi(\lambda_{k+1}) - \varphi(\lambda_k)$ для достаточно коротких отрезков $\Delta\lambda_k = \lambda_{k+1} - \lambda_k$ в случае непрерывной $F_\xi(\lambda)$. Именно, компонента

$$\xi(t, \Delta\lambda_k) = \int_{\Delta\lambda_k} e^{i\lambda t} d\varphi(\lambda),$$

соответствующая участку спектра $\Delta\lambda_k$, на любом конечном участке временной оси $-T \le t \le T$ хорошо аппроксимируется гармоническим колебанием

$$\Delta\varphi_k e^{it\lambda_k}, \tag{5.67}$$

где λ_k – любая точка из $\Delta\lambda_k$, а случайная величина $\Delta\varphi_k$ имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию

$$D(\Delta\varphi_k) = E(|\Delta\varphi_k|^2) = \Delta F_{\xi,k} = F_\xi(\lambda_{k+1}) - F_\xi(\lambda_k). \tag{5.68}$$

И в этом случае случайный процесс $\xi(t)$ можно представить в виде ряда (5.66) с некоррелированными коэффициентами $\Delta\varphi_k$. Ряд (5.66), в котором слагаемые определяются выражениями (5.67), (5.68), можно использовать для моделирования стационарного непрерывного в среднем квадратичном случайного процесса.

Для стационарного случайного процесса с дискретным временем $\xi(kT)$ также возможно спектральное представление. Оно имеет вид

$$\xi(kT) = \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{ik\lambda t} d\varphi_T(\lambda). \tag{5.69}$$

где $\varphi_T(\lambda)$ – процесс с ортогональными приращениями, обладающий теми же свойствами, что и соответствующий процесс $\varphi(\lambda)$ в (5.63); в частности

$$E(|d\varphi_T(\lambda)|^2) = dF_{\xi,T}(\lambda),$$

где $F_{\xi,T}(\lambda)$ – спектральная функция случайной последовательности $\xi(kT)$.

В случае непрерывного спектра, как уже отмечалось, обычно существует спектральная плотность $s_\xi(\lambda)$, т. е. формула (5.31) может быть заменена формулой (5.45). Что же касается разложения случайного процесса (5.63) или (5.69), то даже в простейшем случае применимости формул (5.45) и (5.50) и гауссовости процесса случайные функции $\varphi(\lambda)$, $\varphi_T(\lambda)$ оказываются заведомо не дифференцируемыми, и переход от формул (5.63), (5.69) к формулам типа (5.45), (5.50) оказывается невозможным.

6. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

6.1. Прохождение нестационарного случайного процесса через линейную стационарную динамическую систему

Пусть на вход динамической системы подается случайный процесс $\xi(t)$. Процесс $\eta(t)$ на выходе этой системы также будет случайным. Задача состоит в том, чтобы по вероятностным характеристикам случайного процесса $\xi(t)$ на входе системы и характеристикам системы найти вероятностные характеристики процесса $\eta(t)$ на выходе. Прежде всего нас будут интересовать такие характеристики, как математическое ожидание и ковариационная функция.

Предварительно напомним, что динамическая система может быть описана системой нелинейных дифференциальных уравнений [21]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\eta(t)}{dt} = f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) + \xi(t), \\ \dfrac{\partial\eta_1(t)}{dt} = f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n), \\ \vdots \\ \dfrac{\partial\eta_n(t)}{dt} = f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n), \end{cases} \tag{6.1}$$

где $\xi(t)$ – входное воздействие, $\eta(t)$ – выходной сигнал. Зная входное воздействие $\xi(t)$ и начальные условия $\eta(0)$, $\eta_1(0)$, …, $\eta_n(0)$, в принципе можно получить выходной сигнал $\eta(t)$, решив систему уравнений (6.1). Динамическая система называется линейной, если функции f, f_1, …, f_n в уравнениях (6.1) линейные по своим аргументам. Для линейных динамических систем удобно пользоваться импульсной переходной функцией. Импульсной переходной функцией $k(s, \tau)$ динамической системы называется решение системы уравнений (6.1) при нулевых начальных условиях и входном воздействии вида дельта-функции

$$\xi(s) = \delta(s - \tau),$$

где τ – момент приложения воздействия. В общем случае импульсная переходная функция $k(s, \tau)$ зависит как от текущего момента времени s, так и от момента времени τ приложения воздействия. Если импульсная переходная функция не зависит от момента τ, а зависит лишь от разности $t = s - \tau$, то динамическая система называется стационарной. Импульсная переходная функция $k(s - \tau) = k(t)$ линейной стационарной динамической системы удовлетворяет условию

$$k(t) = 0, \text{ если } t < 0,$$

которое называется условием физической осуществимости динамической системы или условием причинности. Физический смысл этого условия состоит в том, что сигнал на выходе в настоящий момент времени зависит от прошлых и не зависит от будущих значений сигнала на входе.

Соотношение между входным $\xi(t)$ и выходным $\eta(t)$ сигналами посредством импульсной переходной функции имеет следующий вид:

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{t} k(t - s)\xi(s)ds = \int_{0}^{\infty} k(s)\xi(t - s)ds.$$

Предположим теперь, что входным сигналом системы является случайный процесс $\xi(t)$ с математическим ожиданием $a_\xi(t)$, ковариационной функцией $R_\xi(t_1, t_2)$ и конечным моментом второго порядка, и воспользуемся следующим выражением для выходного сигнала:

$$\eta(t) = \int_{0}^{\infty} k(s)\xi(t - s)ds. \tag{6.2}$$

Выясним, существует ли этот интеграл в смысле сходимости о среднем квадратичном. Для этого рассмотрим конечный промежуток $[0, b]$ и составим для него интегральную сумму Римана:

$$I = \sum_{j=1}^{m} k(s_j)\xi(t - s_j)(s_{j+1} - s_j).$$

Пусть динамическая система асимптотически устойчива, т. е.

$$|k(s)| \le ce^{-\alpha s},\ \alpha > 0,$$

и интеграл

$$Q_1 = \int_0^b \int_0^b k(s)k(u)R_\xi(t-s,t-u)dsdu \qquad (6.3)$$

существует в силу того, что ковариационная функция случайного процесса $\xi(t)$ с конечным моментом второго порядка ограничена. На основании теоремы 4.7 (подразд. 4.5) заключаем, что существует интеграл в среднем квадратичном (6.2) для конечного промежутка интегрирования $[0, b]$. Так как предел интеграла (6.3) при $b \to \infty$ существует, то интеграл в среднем квадратичном (6.2) с верхним пределом $+\infty$ также существует.

Найдем математическое ожидание $a_\eta(t)$ и ковариационную функцию $R_\eta(t_1,t_2)$ выходного процесса $\eta(t)$, если известны математическое ожидание $a_\xi(t)$ и ковариационная функция $R_\xi(t_1,t_2)$ входного случайного процесса $\xi(t)$ и импульсная переходная функция $k(t)$ стационарной динамической системы.

Для математического ожидания получим

$$a_\eta(t) = E(\eta(t)) = E\left(\int_0^\infty k(s)\xi(t-s)ds\right) = \int_0^\infty k(s)a_\xi(t-s)ds. \qquad (6.4)$$

Таким образом, математическое ожидание проходит через систему как детерминированный (неслучайный) сигнал.

Для ковариационной функции будем иметь

$$R_\eta(s,u) = E(\overset{\circ}{\eta}(s)\overset{\circ}{\eta}(u)) = E\left(\int_0^\infty k(\mu)\overset{\circ}{\xi}(t-\mu)d\mu\int_0^\infty k(\nu)\overset{\circ}{\xi}(u-\nu)d\nu\right) =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty k(\mu)k(v)E\left(\overset{\circ}{\xi}(s-\mu)\overset{\circ}{\xi}(u-v)\right)d\mu dv = \int_0^\infty\int_0^\infty k(\mu)k(v)R_\xi(s-\mu,u-v)d\mu dv. \qquad (6.5)$$

Найдем еще взаимную ковариационную функцию случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

$$R_{\xi,\eta}(s,u) = E(\mathring{\xi}(s)\mathring{\eta}(u)) = E\left(\mathring{\xi}(s)\int_0^{\infty} k(\nu)\mathring{\xi}(u-\nu)d\nu\right) =$$

$$= \int_0^{\infty} k(v)E\left(\mathring{\xi}(s)\mathring{\xi}(u-v)\right)dv = \int_0^{\infty} k(v)R_{\xi}(s,u-v)dv\,. \qquad (6.6)$$

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 6.1. Для устойчивой стационарной линейной динамической системы с импульсной переходной функцией $k(t)$ и случайным процессом $\xi(t)$ на входе математическое ожидание $a_{\eta}(t)$ и ковариационная функция $R_{\eta}(t_1,t_2)$ выходного процесса $\eta(t)$, а также взаимная ковариационная функция входного и выходного процессов определяются выражениями (6.4), (6.5), (6.6), в которых $a_{\xi}(t)$, $R_{\xi}(t_1,t_2)$ – математическое ожидание и ковариационная функция входного случайного процесса $\xi(t)$.

6.2. Прохождение стационарного случайного процесса через линейную стационарную динамическую систему

Теорема 6.2. Если входной случайный процесс $\xi(t)$ устойчивой стационарной линейной динамической системы с импульсной переходной функцией $k(t)$ стационарен, то математическое ожидание $a_{\eta}(t)$ и ковариационная функция $R_{\eta}(s,u)$ выходного процесса $\eta(t)$, а также взаимная ковариационная функция входного и выходного процессов $R_{\xi,\eta}(s,u)$ определяются выражениями:

$$a_{\eta}(t) = a_{\xi}\int_0^{\infty} k(t)dt = \mathrm{const}, \qquad (6.7)$$

$$R_{\eta}(s,u) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} k(v)k(w)R_{\xi}(s-v-u+w)dvdw = R_{\eta}(s-u)\,, \qquad (6.8)$$

$$R_{\xi,\eta}(s,u) = \int_0^{\infty} k(v)R_{\xi}(s-u+v)dv = R_{\xi,\eta}(s-u)\,, \qquad (6.9)$$

в которых a_ξ, $R_\xi(\tau)$ – математическое ожидание и ковариационная функция входного случайного процесса $\xi(t)$.

Выражения (6.7) – (6.9) следуют непосредственно из выражений (6.4) – (6.6), если учесть свойства стационарности случайного процесса $\xi(t)$: $a_\xi(t) = a_\xi$, $R_\xi(s,u) = R_\xi(s-u)$.

Мы видим, что выходной случайный процесс $\eta(t)$ в этом случае является стационарным, а входной и выходной – стационарно связанными, поскольку математическое ожидание выходного процесса $\eta(t)$ не зависит от времени, а его ковариационная функция и взаимная ковариационная функция с входным процессов зависят только от разности $s-u$.

В случае стационарной системы и стационарного входного процесса удобнее оперировать не ковариационными функциями, а спектральными плотностями, и не импульсной переходной функцией, а частотной передаточной функцией системы.

Передаточной функцией стационарной линейной динамической системы называется преобразование Лапласа от ее импульсной переходной функции:

$$W(p) = \int_0^\infty k(t)e^{-pt}dt,$$

где p – комплексная переменная.

В случае $p = i\omega$ имеем частотную передаточную функцию линейной динамической системы как преобразование Фурье от ее импульсной переходной функции:

$$W(i\omega) = \int_0^\infty k(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Пусть $s_\xi(\omega)$ – спектральная плотность входного процесса $\xi(t)$, а $s_\eta(\omega)$ – спектральная плотность выходного процесса $\eta(t)$. Из определения передаточной функции следует, что

$$W(0)=\int_0^{\infty}k(t)dt\,.$$

Подставляя это выражение в (6.7), получим формулу связи для математических ожиданий входного и выходного случайных процессов:

$$a_{\eta}=w(0)a_{\xi}\,.$$

Получим теперь формулу связи для спектральных плотностей $s_{\eta}(\omega)$ и $s_{\xi}(\omega)$. По определению спектральной плотности имеем

$$s_{\eta}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{\eta}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\,.$$

Подставив в это выражение формулу (6.8), получим

$$s_{\eta}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\tau}d\tau\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}k(v)k(w)R_{\xi}(\tau-v+w)dvdw=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_0^{\infty}dw\int_0^{\infty}dve^{-i\omega v}k(v)e^{i\omega w}k(w)e^{-i\omega(\tau-v+w)}R_{\xi}(\tau-v+w)=$$

$$=W(i\omega)W(-i\omega)s_{\xi}(\omega)\,.$$

Если учесть, что $W(i\omega)W(-i\omega)=|W(i\omega)|^2$, то окончательно будем иметь

$$s_{\eta}(\omega)=|W(i\omega)|^2\,s_{\xi}(\omega)\,.$$

Для взаимной спектральной плотности получим выражение

$$s_{\xi,\eta}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi,\eta}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\tau}d\tau\int_0^{\infty}k(v)R_{\xi}(\tau+v)dv=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_0^{\infty}dve^{i\omega\nu}k(\nu)e^{-i\omega(\tau+\nu)}R_{\xi}(\tau+\nu)=W(-i\omega)s_{\xi}(\omega)\,.$$

В случае дискретного времени стационарная динамическая система описывается z-передаточной функцией $W(z)$, под которой понимается z-преобразование от импульсной переходной функции $k(nT)$:

$$W(z)=\sum_{n=0}^{\infty}k(nT)e^{-nTs}=\sum_{n=0}^{\infty}k(nT)z^{-n}\,,\ z=e^{Ts}\,.$$

Пусть a_ξ и $s_{\xi,T}(\omega)$ – математическое ожидание и спектральная плотность стационарной случайной последовательности $\xi(nT)$ на входе асимптотически устойчивой динамической системы. Тогда выходной сигнал $\eta(nT)$ также является стационарной случайной последовательностью с математическим ожиданием $a_\eta = W(1)a_\xi$ и спектральной плотностью

$$s_{\eta,T}(\omega) = W(e^{-i\omega T})W(e^{i\omega T})s_{\xi,T}(\omega) = |W(i\omega)|^2 \, s_{\xi,T}(\omega).$$

Взаимная спектральная плотность входного и выходного сигналов определяется выражением

$$s_{\xi,\eta,T}(\omega) = W(e^{-i\omega T})s_{\xi,T}(\omega).$$

Вывод этих результатов можно найти в [18].

Пример 6.1. Операцию дифференцирования случайного процесса в среднем квадратичном можно рассматривать как динамическую систему с частотной передаточной функцией $W(i\omega) = i\omega$. Тогда $a_\eta = 0$, $s_\eta(\omega) = \omega^2 s_\xi(\omega)$, $s_{\xi,\eta}(\omega) = -i\omega s_\xi(\omega)$.

Пример 6.2. Динамическая система описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d\eta(t)}{dt} + T\eta(t) = k\xi(t)$$

(апериодическое звено). Заменяя операцию дифференцирования на $i\omega$ (см. пример 6.1), получим $i\omega\eta + T\eta = k\xi$, $(i\omega + T)\eta = k\xi$. Следовательно, частотная передаточная функция этой системы имеет вид

$$W(i\omega) = \frac{k}{T + i\omega}.$$

Тогда $W(i\omega)W(-i\omega) = \frac{k}{T + i\omega} \cdot \frac{k}{T - i\omega} = \frac{k^2}{T^2 + \omega^2}$, $W(-i\omega) = \frac{k}{T - i\omega}$, $W(0) = \frac{k}{T}$ и

$$a_\eta = a_\xi \frac{k}{T}, \; s_\eta(\omega) = \frac{k^2}{T^2 + \omega^2} s_\xi(\omega), \; s_{\xi,\eta}(\omega) = \frac{k}{T - i\omega} s_\xi(\omega).$$

В случае, когда $s_\xi(\omega) = \dfrac{\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)\pi}$, получим, в частности:

$$s_\eta(\omega) = \frac{k^2\alpha}{\pi(T^2 + \omega^2)(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

7. ЦЕПИ МАРКОВА

7.1. Определение цепи Маркова

В этом разделе будем изучать дискретную случайную последовательность ξ_i, $i = 0,1,2,...$, т. е. случайный процесс с дискретным множеством состояний $E = \{E_1, E_2, ..., E_k\}$ или $E = \{E_1, E_2, ..., E_k, ...\}$ и дискретным временем $T = \{t_1, t_2, ..., t_m, ...\}$. Обычно при рассмотрении дискретной последовательности ξ_i говорят о некоторой системе, которая может находиться в одном из состояний $E_1, E_2, ..., E_k, ...$ и переходить из одного состояния в другое в дискретные моменты времени. Такие процессы удобно описывать вероятностями состояний. В общем случае конечномерное распределение дискретной случайной последовательности ξ_i можно определить с помощью условных вероятностей

$$P(\xi_{s+1} = E_{i_{s+1}} / \xi_s = E_{i_s}, \xi_{s-1} = E_{i_{s-1}}, ..., \xi_0 = E_{i_0}),\ E_{i_0}, E_{i_1}, ..., E_{i_{s+1}} \in E.$$

Это вероятности того, что в момент времени $(s+1)$ система будет находиться в состоянии $E_{i_{s+1}} \in E$ при условии, что в момент времени s она находилась в состоянии $E_{i_s} \in E$, в момент времени $(s-1)$ – в состоянии $E_{i_{s-1}} \in E$, и т. д., и в момент времени 0 – в состоянии $E_{i_0} \in E$. К этим вероятностям необходимо добавить также безусловные вероятности $P(\xi_0 = E_{i_0})$ того, что в момент времени 0 система находится в состоянии $E_{i_0} \in E$. Однако такое описание будет весьма сложным. Поэтому выделяют и рассматривают процессы с более простым описанием, в частности, цепи Маркова.

Определение 7.1. Дискретная случайная последовательность ξ_i, $i = 0,1,2,...$, называется цепью Маркова, если вероятность $p_{i,j}^{s,s+1}$ того, что в момент времени $s+1$ система будет находиться в состоянии E_j, зависит от того, в каком состоянии E_i система находилась в предыдущий момент времени s и не зависит от того, в каких состояниях она находилась в более ранние моменты времени $s-1, s-2, \ldots, 0$:

$$p_{i,j}^{s,s+1} = P(\xi_{s+1} = E_j / \xi_s = E_i) = P(\xi_{s+1} = E_j / \xi_s = E_i, \xi_{s-1} = E_k, \ldots, \xi_0 = E_l).$$

Вероятность $p_{i,j}^{s,s+1} = P(\xi_{s+1} = E_j / \xi_s = E_i)$, $i, j = 1,2,\ldots,k,\ldots$, – это условная вероятность того, что в момент времени $(s+1)$ система будет находиться в состоянии E_j при условии, что в предыдущий момент времени s она находилась в состоянии E_i. Эта вероятность называется вероятностью перехода из состояния E_i в состояние E_j за один шаг для моментов времени s, $s+1$.

Цепь Маркова называется конечной, если множество E ее состояний конечное.

Цепь Маркова называется однородной, если условная вероятность $p_{i,j}^{s,s+1}$ не зависит от момента времени s. В этом случае эта вероятность обозначается как $p_{i,j}$ и называется вероятностью перехода из состояния E_i в состояние E_j за один шаг. Мы будем рассматривать только однородные цепи Маркова.

Вероятности перехода $p_{i,j}$ образуют матрицу

$$P = (p_{i,j}),\ i, j = 1,2,\ldots, \tag{7.1}$$

которая называется матрицей вероятностей перехода однородной цепи Маркова. Элементы этой матрицы удовлетворяют следующим условиям:

$$0 \le p_{i,j} \le 1,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{i,j} = 1,\ i = 1,2,\ldots.$$

Первое условие является естественным свойством любой вероятности, а второе является следствием того, что система обязательно перейдет за один шаг в иное состояние или останется в прежнем. Это условие означает, что сумма элементов каждой строки матрицы вероятностей перехода P равна единице.

Пример 7.1. Имеем две урны. В первой урне находятся 1 белый и 2 черных шара, во второй – 1 белый и 5 черных шаров. Начиная с первой урны, наугад вынимаем шар за шаром, причем, если был вынут белый шар, то следующий шар вынимаем из первой урны, а если черный – то из второй. Каждый вынутый шар тут же возвращаем в урну, из которой он был вынут. Нас может интересовать, например, вероятность вынуть белый (или черный) шар на n-м шаге.

Описанная в данном примере последовательность испытаний образует однородную цепь Маркова с двумя состояниями: E_1 – вынутый шар белый и E_2 – вынутый шар черный. Вероятности перехода за один шаг имеют следующий смысл: $p_{1,1}$ – вероятность вынуть белый шар после предыдущего белого, т. е. вероятность вынуть белый шар из первой урны; $p_{1,2}$ – вероятность вынуть черный шар после предыдущего белого, т. е. вероятность вынуть черный шар из первой урны; $p_{2,1}$ – вероятность вынуть белый шар после предыдущего черного, т. е. вероятность вынуть белый шар из второй урны; $p_{2,2}$ – вероятность вынуть черный шар после предыдущего черного, т. е. вероятность вынуть черный шар из второй урны. Таким образом, матрица вероятностей перехода за один шаг имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

Пример 7.2. Случайное блуждание на прямой с поглощающими экранами. Пусть некоторая частица находится на действительной прямой и движется по ней под воздействием случайных толчков, которые возникают в моменты $t_0, t_1, \ldots$. Частица может находиться в точках $a, a+1, \ldots, a+m, \ldots, b$. В точках a и b размещаются поглощающие стенки (экраны). Из каждой точки, кроме точек a и b, частица перемещается в правую точку с вероятностью p и в левую с вероятностью $q = 1 - p$. При достижении стенок (точек a и b) частичка прилипает к ним.

В данном примере рассмотрена система, которая может находиться в одном из состояний $E_1 = a$, $E_2 = a+1,\ldots,$ $E_k = b$. Если система находится в состояниях $E_1 = a$ или $E_k = b$, то она с вероятностью единица остается в этих состояниях. Если же система находится в одном из промежуточных между a и b состоянии $a+m$, то она с вероятностью p переходит в правое состояние $a+m+1$ и с вероятностью $q = 1-p$ – в левое состояние $a+m-1$. Матрица вероятностей перехода этой цепи Маркова имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0 \ldots 0 \\ q\;0\;p\;0 \ldots 0 \\ 0\;q\;0\;p \ldots 0 \\ \vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots \\ 0\,0\,0\,0 \ldots 1 \end{pmatrix}.$$

Состояния a и b системы называются поглощающими.

В данном примере нас может интересовать, например, вероятность прилипания частицы к стенке в точке b.

Этот пример имеет также иную интерпретацию. Некий игрок выигрывает и проигрывает определенную сумму с вероятностями p и $q = 1-p$ соответственно. Суммарный капитал обоих игроков равен b. Игра продолжается до тех пор, пока капитал нашего игрока не уменьшится до нуля ($a = 0$) или не возрастет до b, т. е. до того времени, пока один из игроков не разорится. Нас может интересовать вероятность разорения нашего игрока и распределение вероятностей на протяжении игры. Такая интерпретация задачи случайных блужданий называется классической задачей о разорении.

7.2. Вероятности перехода за несколько шагов (уравнение Чепмена – Колмогорова)

Сейчас нас будут интересовать вероятности перехода системы, которая образует однородную цепь Маркова, из состояния E_i в состояние E_j за n шагов. Обозначим эти вероятности как $p_{i,j}(n)$ и назовем матрицу

$$P_n = (p_{i,j}(n)),\ i, j = 1, 2, \ldots, \tag{7.3}$$

матрицей вероятностей перехода за n шагов. Понятно, что $P_1 = P$, где P – матрица вероятностей перехода за один шаг (7.1).

Рассмотрим переходы системы на протяжении последовательных n шагов. Пусть P_n – матрица вероятностей перехода за эти n шагов, P_m – матрица вероятностей перехода за первые m шагов, $m < n$, P_{n-m} – матрица вероятностей перехода за оставшиеся $n - m$ шагов. Тогда выполняется следующее равенство:

$$P_n = P_m P_{n-m},\ 0 < m < n. \tag{7.4}$$

Действительно, переход за n шагов возможен только через одно из состояний на m-м шаге. Поэтому по формуле полной вероятности получим

$$p_{i,j}(n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{i,\nu}(m) p_{\nu,j}(n-m).$$

Последняя формула есть формула умножения матриц (7.4).

Равенство (7.4) называется уравнением Чепмена – Колмогорова.

Из уравнения (7.4) при $n = 2$ получим, что

$$P_2 = P_1 P_1 = P_1^2 = P^2.$$

При $n = 3$ находим

$$P_3 = P_1 P_2 = P_2 P_1 = P_1^3 = P^3.$$

При любом n имеем

$$P_n = P^n, \tag{7.5}$$

т. е. матрица вероятностей перехода за n шагов равна n-й степени матрицы вероятностей перехода за один шаг.

7.3. Безусловные вероятности цепи Маркова

Для цепи Маркова важно знать абсолютные (безусловные) вероятности состояния системы на любом n-м шаге:

$$a_i(n) = P(\xi_n = E_i),\ i = 1, 2, \ldots .$$

Эти вероятности образуют матрицу-строку (вектор-строку) A_n^T безусловных вероятностей системы для момента времени n:

$$A_n^T = (a_1(n), a_2(n), \ldots) = (a_i(n)),\ i = 1, 2, \ldots . \tag{7.6}$$

Элементы вектора A_n^T удовлетворяют при любом n очевидным условиям:

$$0 \le a_i(n) \le 1,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i(n) = 1.$$

Для полного описания однородной цепи Маркова необходимо знать матрицу вероятностей перехода P и вектор безусловных вероятностей A_0^T для начального момента времени $n = 0$. Этих данных достаточно, чтобы найти вектор безусловных вероятностей A_n^T для любого n-го шага с помощью формулы

$$A_n^T = A_0^T P_n. \tag{7.7}$$

Действительно, попадание системы в состояние E_j на n-м шаге возможно при ее выходе в начальный момент времени из одного из своих состояний и переходе за n шагов в состояние E_j. В этом случае применима формула полной вероятности:

$$a_j(n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(0)\, p_{\nu,j}(n),\ j = 1, 2, \ldots ,$$

которая в векторно-матричной форме имеет вид (7.7).

Рассмотрим пример 7.1 с урнами и найдем вероятности вынуть белый и черный шары во втором испытании. Поскольку выбор шаров начинается с первой урны, то вектор безусловных вероятностей для начального испытания состоит из вероятностей вынуть белый и черный шары из первой урны:

$$A_0^T = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

По формуле (7.5) найдем матрицу вероятностей перехода за два шага:

$$P_2 = P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{7}{36} & \frac{29}{36} \end{pmatrix}.$$

Наконец, по формуле (7.7) найдем вектор безусловных вероятностей на втором шаге:

$$A_2^T = A_0^T P_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} = \left(\frac{11}{54}, \frac{43}{54}\right).$$

Таким образом, при втором испытании (начиная с нулевого) мы с вероятностью $\frac{11}{54}$ вынем белый шар, и с вероятностью $\frac{43}{54}$ – черный.

7.4. Классификация состояний цепи Маркова

Все состояния цепи Маркова принято разделять на существенные и несущественные.

Состояние E_i называется несущественным, если существуют такие j и n, что $p_{i,j}(n) > 0$, и для всех m $p_{j,i}(m) = 0$. Все остальные состояния называются существенными. Мы видим, что из несущественного состояния E_i возможен переход в какое-то другое состояния E_j, но обратно в E_i вернуться нельзя.

В свою очередь, существенные состояния распадаются на классы $S^{(\alpha)}$ так называемых сообщающихся состояний. Существенные состояния E_i и E_j называются сообщающимися, если существуют такие n и m, что $p_{i,j}(n) > 0$ и $p_{j,i}(m) > 0$. Это значит, что из состояния E_i за некоторое число шагов n можно попасть в состояние E_j и затем за некоторое число шагов m вернуться обратно в E_i.

В соответствии с этой классификацией очевидно, что наша система попадает однажды в одно из состояний класса $S^{(\alpha)}$ сообщающихся состояний и никогда не выходит за пределы этого класса. Если класс $S^{(\alpha)}$ состоит только из одного состояния E_i, то это состояние называется поглощающим.

Цепь Маркова называется неприводимой, если она имеет только один класс сообщающихся состояний.

Существенные состояния бывают периодическими и непериодическими. Периодом d_i состояния E_i называется наибольшим общий делитель таких чисел n, для которых $p_{i,i}(n) > 0$. Вероятность $p_{i,i}(n)$ – это вероятность вернуться в состояние E_i за n шагов, выйдя из этого состояния. Состояние E_i, которое имеет период $d_i > 1$, называется периодическим. Состояние E_i называется непериодическим, если такого периода $d_i > 1$ не существует. Таким образом, периодическое состояние E_i – это такое состояние, в которое можно периодически возвращаться через d_i, $2d_i$, $3d_i$, … шагов. Можно доказать, что все состояния, которые относятся к одному и тому же классу $S^{(\alpha)}$, имеют один и тот же период, который обозначается, как $d(\alpha)$ и называется периодом класса $S^{(\alpha)}$. Класс $S^{(\alpha)}$, для которого существует период $d(\alpha) > 1$, называется периодическим. Класс $S^{(\alpha)}$, для которого не существует $d(\alpha) > 1$, называется непериодическим.

Состояния делятся также на возвратные и невозвратные. Для объяснения этих понятий требуется рассмотреть вероятность $K_{i,j}^{(n)}$ того, что из состояния E_i система перейдет в состояние E_j ровно на n-м шаге. В частности, $K_{i,i}^{(n)}$ есть вероятность того, что, начиная с E_i, система впервые вернется в это же состояние на n-м шаге. Обозначим

$$L_{i,j} = \sum_{n=1}^{\infty} K_{i,j}^{(n)} .$$

Понятно, что $L_{i,j}$ есть вероятность того, что, начиная с E_i, система когда-нибудь пройдет через E_j. Состояние E_i называется возвратным, если $L_{i,i} = 1$, и невозвратным, если $L_{i,i} < 1$. Мы видим, что состояние является возвратным, если система обязательно когда-нибудь вернется в это состояние. В невозвратное состояние система может как вернуться, так и не вернуться. Доказано, что в пределах одного класса $S^{(\alpha)}$ существенных состояний или все $L_{i,i} < 1$, или все $L_{i,i} = 1$. Если все $L_{i,i} = 1$, то класс $S^{(\alpha)}$ называется возвратным. Если, наоборот, все $L_{i,i} < 1$, то класс $S^{(\alpha)}$ называется невозвратным.

Возвратные классы, в свою очередь, делятся на положительные и нулевые. Признаком для деления является среднее количество шагов (математическое ожидание количества шагов), необходимое для перехода из E_i в E_j:

$$M_{i,j} = \sum_{n=1}^{\infty} n K_{i,j}^{(n)} .$$

В частности, $M_{i,i}$ есть среднее количество шагов до первого возврата в состояние E_i, когда первоначально также было состояние E_i. $M_{i,i}$ называется также средним временем возврата в состояние E_i. Доказано, что в пределах одного возвратного класса или все $M_{i,j}$ бесконечные, или все $M_{i,j}$ конечные. Классы, для которых все $M_{i,j}$ конечные, называются положительными, а классы, в которых все $M_{i,j} = \infty$, называются нулевыми.

Иногда непериодические положительные классы называются эргодическими.

Пример 7.3. В примере 7.1 подразд. 7.1 с урнами оба состояния образуют один класс существенных сообщающихся состояний.

Пример 7.4. В примере 7.2 подразд. 7.1 со случайными блужданиями на прямой имеются три класса состояний: $\{a\}$, $\{a+1,\ldots,a+m\}$, $\{b\}$. Состояния $\{a\}$, $\{b\}$ – существенные поглощающие. Состояния $a+1,\ldots,a+m$ – несущественные. Система при длительном функционировании выходит из этих состояний и обратно не возвращается.

Пример 7.5. Пусть цепь Маркова имеет следующую матрицу вероятностей перехода:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оба состояния этой цепи существенные и составляют один класс сообщающихся состояний. Легко заметить, что

$$P_2 = P_4 = \ldots = P_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это значит, что класс состояний нашей цепи периодический с периодам $d = 2$.

Для конечных цепей Маркова справедлива следующая теорема.

Теорема 7.1. В конечной цепи Маркова не существует нулевых состояний, и все ее состояния не могут быть невозвратными.

7.5. Предельные вероятности состояний цепи Маркова

Часто нас интересует поведение системы, функционирующей достаточно длительное время. Это значит, что нас интересует поведение вероятностей $p_{i,j}(n)$ при $n \to \infty$. В некоторых случаях эти вероятности сходятся при $n \to \infty$

к некоторым пределам, которые называются предельными вероятностями. Условия существования предельных вероятностей определяет следующая теорема.

Терема 7.2 (Маркова). Если существует такое $s>0$, что все $p_{i,j}(s)>0$, то существуют такие числа p_j^*, $j=1,2,\ldots,k$, что независимо от индекса i выполняются следующие соотношения:

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}(n) = p_j^*,\ j=1,2,\ldots,k, \tag{7.8}$$

$$\sum_{j=1}^{k} p_j^* = 1.$$

Содержательный смысл этой теоремы заключается в том, что вероятности $p_{i,j}(n)$ перехода из состояния E_i в состояние E_j за n шагов при $n\to\infty$ не зависят от состояния E_i, из которого был начат переход. Система как бы забывает о своем состоянии в далеком прошлом.

Пример 7.6. Применима ли теорема о предельных вероятностях к цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}?$$

Решение. Поскольку для такой цепи

$$P_{2m}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ P_{2m+1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ m=1,2,\ldots,$$

то для каждого s матрица P_s имеет нулевые элементы. Условия теоремы не выполняются, так что мы не можем утверждать, что предельные вероятности существуют.

Объединим предельные вероятности (7.8) p_j^*, $j=1,2,\ldots,k$, в вектор-строку предельных вероятностей:

$$(p^*)^T = (p_1^*, p_2^*,\ldots,p_k^*). \tag{7.9}$$

Тогда выражение (7.8) представимо в следующей векторно-матричной форме:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \Pi^*, \tag{7.10}$$

где $\Pi^* = (p^*_{i,j})$ – $(k \times k)$-матрица предельных вероятностей. Все строки матрицы Π^* одинаковы и совпадают с вектором-строкой $(p^*)^T$ (7.9), т. е. для любого i $p^*_{i,j} = p^*_j$.

Теорема 7.3. Если для цепи Маркова существует вектор-столбец предельных вероятностей p^* (7.9), то он удовлетворяет следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$P^T p^* = p^*, \tag{7.11}$$

$$\sum_{j=1}^{k} p^*_j = 1. \tag{7.12}$$

Действительно, запишем для цепи Маркова уравнение Чепмена – Колмогорова (7.4) в виде

$$P_{n+1} = P_n P$$

и найдем предел обеих частей при $n \to \infty$. Поскольку при этом $P_{n+1} \to \Pi^*$, $P_n \to \Pi^*$, то получаем уравнение

$$\Pi^* = \Pi^* P,$$

из которого следует (7.11).

Рассмотрим также безусловные предельные вероятности:

$$a^*_j = \lim_{n\to\infty} a_j(n),$$

образующие вектор-строку безусловных предельных вероятностей $(A^*)^T = (a^*_1, a^*_2, \ldots, a^*_k)$, так что

$$(A^*)^T = \lim_{n\to\infty} A^T_n. \tag{7.13}$$

Теорема 7.4. Если существует вектор предельных вероятностей p^* (7.9), то он является и вектором безусловных предельных вероятностей:

$$A^* = p^*. \tag{7.14}$$

Чтобы получить равенство (7.14), запишем соотношение (7.7), взяв предел от обеих его частей:

$$\lim_{n\to\infty} A_n^T = A_0^T \lim_{n\to\infty} P_n .$$

Учитывая обозначения пределов (7.10), (7.13), получим формулу для расчета матрицы $(A^*)^T$:

$$(A^*)^T = A_0^T \Pi^* .$$

Эта формула для отдельного элемента a_j^* матрицы $(A^*)^T$ имеет вид

$$a_j^* = \sum_{\nu} a_{\nu}(0) p_{\nu, j}^* .$$

Учитывая равенство $p_{i,j}^* = p_j^*$, получим

$$a_j^* = \sum_{\nu} a_{\nu}(0) p_{\nu, j}^* = p_j^* \sum_{\nu} a_{\nu}(0) = p_j^*$$

в силу того, что $\sum_{\nu} a_{\nu}(0) = 1$. Равенство (7.14) доказано.

Пример 7.7. Найти предельные вероятности для цепи Маркова из примера с урнами 7.1 подразд. 7.1.

Поскольку матрица вероятностей перехода этой цепи (7.2) имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix},$$

т. е. не содержит нулевых элементов, то эта цепь удовлетворяет теореме 7.2, и предельные вероятности существуют.

Система уравнений (7.11), (7.12) для предельных условных вероятностей в данном примере имеет вид

$$\frac{1}{3} p_1^* + \frac{1}{6} p_2^* = p_1^*,$$
$$\frac{2}{3} p_1^* + \frac{5}{6} p_2^* = p_2^*,$$
$$p_1^* + p_2^* = 1.$$

Поскольку первые два уравнения являются линейно зависимыми, то, отбрасывая первое из них, получим два уравнения с двумя неизвестными:

$$\frac{2}{3}p_1^* - \frac{1}{6}p_2^* = 0,$$
$$p_1^* + p_2^* = 1.$$

Отсюда получаем $p_1^* = 0{,}2$, $p_2^* = 0{,}8$. Такими же будут и безусловные предельные вероятности $a_1^* = 0{,}2$, $a_2^* = 0{,}8$. Это значит, что после продолжительного числа экспериментов мы будем на каждом шаге вынимать белый шар с вероятностью $a_1^* = 0{,}2$ и черный шар – с вероятностью $a_2^* = 0{,}8$.

8. ПОТОКИ СОБЫТИЙ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

8.1. Определение простейшего (пуассоновского) потока

Первичным понятием теории массового обслуживания является понятие потока требований, поступающих в систему массового обслуживания (СМО). Так, на телефонную станцию в случайные моменты времени поступают вызовы, к кассовому аппарату супермаркета подходят в случайные моменты времени покупатели и т. д. С точки зрения специалиста по теории вероятностей, поток требований представляет собой случайный процесс с дискретным множеством состояний и непрерывным временем и может изучаться на основе общей теории случайных процессов. Такой подход будет изложен в разделе 9. Однако исторически потоки требований первоначально изучались как дискретные случайные величины $\xi_1,\dots,\xi_n$ – количества требований, поступающих в СМО в различные отрезки времени $s_1,\dots,s_n$. В силу случайности моментов поступления требований отрезки времени между соседними требованиями оказываются непрерывными случайными величинами. В данном разделе мы рассмотрим этот подход, исходящий из случайного количества требований в различные отрезки времени и случайных отрезков времени между соседними требованиями.

Потоком однородных событий (требований) называется конечная или счетная последовательность τ_n случайных величин (моментов времени), определенная на одном и том же вероятностном пространстве при условии, что в любой фиксированный интервал времени (a,b) с вероятностью 1 попадает конечное число этих величин.

Если фиксированный момент времени t совпадает сразу с r элементами последовательности τ_n, то будем говорить, что в момент t происходит r событий потока.

Если $\tau_n \le \tau_{n+1}$ – два упорядоченных элемента последовательности, то будем говорить, что в полуинтервале $[\tau_n, \tau_{n+1})$ происходит одно событие.

Поток требований в СМО называется простейшим, если он обладает свойствами *стационарности, ординарности, отсутствия последействия*.

Стационарность потока означает, что для любой группы из конечного числа n непересекающихся отрезков времени вероятность появления в них соответственно $k_1, k_2, ..., k_n$ требований зависит только от этих чисел и длин указанных промежутков времени, но не зависит от их расположения на оси времени. В частности, вероятность p_k появления k требований на отрезке $[T, T+t]$ не зависит от T и является функцией только k и t: $p_k = p_k(k,t)$.

Ординарность потока означает практическую невозможность появления двух или более требований в один и тот же момент времени. В математической форме ординарность записывается следующим образом:

$$\frac{p_{>1}(h)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

или, иначе,

$$p_{>1}(h) = o(h), \tag{8.1}$$

где $p_{>1}(h)$ – вероятность появления на отрезке длиной h двух и более требований. Отсюда сразу следует, что для простейшего потока

$$p_{>1}(0) = 0. \tag{8.2}$$

Отсутствие последействия состоит в том, что вероятность поступления k требований в течение отрезка времени $[T, T+t]$ не зависит от того, сколько требований и как поступали до этого отрезка. Иначе говоря, количества требований (случайные величины $\xi_1, ..., \xi_n$), поступающие в непересекающиеся отрезки времени, независимы в совокупности.

8.2. Свойства простейшего потока

Изучим свойства простейшего потока, вытекающие из его определения.

Будем обозначать $p_k(h)$ вероятность появления ровно k требований на отрезке времени длиной h.

Прежде всего докажем, что для простейшего потока

$$\frac{p_1(h)}{h} \underset{h\to 0}{\to} \lambda,$$

или иначе

$$p_1(h) = \lambda h + o(h), \tag{8.3}$$

где $\lambda = \text{const}$. Это значит, что вероятность поступления ровно одного требования на отрезке времени длиной h пропорциональна длине этого отрезка. Из (8.3) следует, что

$$p_1(0) = 0. \tag{8.4}$$

Величина λ в выражении (8.3) называется параметром простейшего потока. Физический смысл этого параметра будет выяснен в подразд. 8.5.

Для доказательства утверждения (8.3) рассмотрим отрезок времени длиной 1 и обозначим $p_0(1)$ вероятность того, что на этом отрезке не поступит ни одного требования. Разобьем этот единичный отрезок на n равных частей с длиной каждого $1/n$. В силу стационарности вероятности отсутствия требований на этих частичных отрезках одни и те же и равны $p_0(1/n)$, а в силу отсутствия последействия по теореме умножения вероятностей для независимых событий

$$p_0(1) = (p_0(1/n))^n.$$

Отсюда

$$p_0(1/n) = (p_0(1))^{1/n}.$$

Опять из условия отсутствия последействия вероятность отсутствия требований на отрезке времени k/n равна

$$p_0(k/n) = (p_0(1))^{k/n}.$$

В последнем выражении длина отрезка времени – рациональное число k/n. Можно распространить это выражение на отрезок любой действительной длины t. Действительно, для любого неотрицательного действительного числа t можно указать такое целое число k, что при заданном n будет выполняться неравенство

$$\frac{k-1}{n} \le t \le \frac{k}{n}.$$

Так как $p_0(t)$ есть невозрастающая функция, то

$$p_0\left(\frac{k-1}{n}\right) = (p_0(1))^{(k-1)/n} \le p_0(t) \le (p_0(1))^{k/n} = p_0\left(\frac{k}{n}\right),$$

т. е.

$$(p_0(1))^{(k-1)/n} \le p_0(t) \le (p_0(1))^{k/n}.$$

Пусть $n \to \infty$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = t$$

и

$$p_0(t) = (p_0(1))^t. \tag{8.5}$$

Итак, для любого действительного неотрицательного t выполняется равенство (8.5). Так как должно быть

$$0 \le p_0(t) \le 1,$$

т. е.

$$0 \le (p_0(1))^t \le 1,$$

то нетривиальный случай будет тогда, когда $p_0(1) = e^{-\lambda}$, $\lambda = \text{const}$, $\lambda \ge 0$. Случаи $p_0(1) = 0$, $p_0(1) = 1$ малоинтересны.

Таким образом, мы нашли, что для простейшего потока

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{8.6}$$

Представляя функцию $e^{-\lambda t}$ рядом Тейлора в окрестности точки $t = 0$, получим

$$p_0(t) = 1 - \lambda t + o(t), \tag{8.7}$$

$$p_0(0) = 1. \tag{8.8}$$

Поскольку при любых t

$$p_0(t) + p_1(t) + p_{>1}(t) = 1,$$

то при малых t с учетом условия ординарности (8.1) получаем

$$1 - \lambda t + o(t) + p_1(t) + o(t) = 1,$$

откуда следует (8.3).

Итак, мы доказали свойство (8.3). Кроме того, мы получили выражение (8.6), определяющее вероятность отсутствия требований на отрезке времени длиной t. Выражение (8.6) определяет также вероятность того, что случайный отрезок времени ξ между соседними требованиями простейшего потока будет не меньше t (рис. 8.1):

$$P(\xi \geq t) = p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Тогда

$$P(\xi < t) = F_\xi(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \tag{8.9}$$

а это есть функция распределения случайного отрезка времени ξ между соседними требованиями простейшего потока. Плотность вероятности этого распределения равна

$$f_\xi(t) = \frac{d}{dt} F_\xi(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \tag{8.10}$$

Распределение вида (8.9), (8.10) называется экспоненциальным, т. е. отрезок времени ξ между соседними требованиями простейшего потока является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону (8.9). Экспоненциальное распределение символически обозначается как $E(\lambda)$.

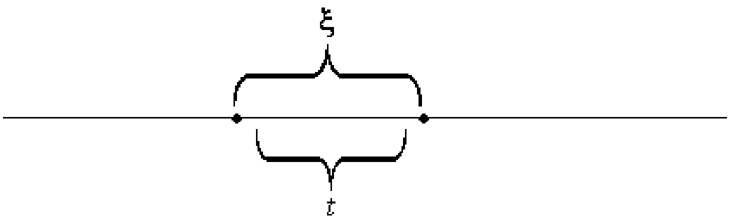

Рис. 8.1. К закону распределения отрезка времени
между соседними требованиями простейшего потока

8.3. Дифференциальные уравнения простейшего потока

Ряд свойств простейшего потока можно получить из дифференциальных уравнений, свойственных этому потоку. Для получения этих уравнений обозначим, как и ранее, $p_k(t)$ вероятность того, что на отрезке времени t поступит ровно k требований. Прежде всего найдем вероятность того, что на отрезке времени $t+h$ поступит ровно k требований. Это событие может произойти одним из следующих способов: за время t поступит j требований и за время h поступят оставшиеся $k-j$ требований, $j=\overline{0,k}$. Пользуясь теоремами сложения и умножения вероятностей, получим

$$p_k(t+h)=\sum_{j=0}^{k} p_j(t)p_{k-j}(h).$$

Теорема умножения здесь применяется на основе свойства отсутствия последействия. Перепишем данное равенство в развернутом виде:

$$p_k(t+h)=p_k(t)p_0(h)+p_{k-1}(t)p_1(h)+\sum_{j=0}^{k-2} p_j(t)p_{k-j}(h). \qquad (8.11)$$

Оценим сумму в правой части равенства:

$$R_{k-2}=\sum_{j=0}^{k-2} p_j(t)p_{k-j}(h).$$

Так как $p_j(t)\le 1$ как вероятность, то

$$R_{k-2} \le \sum_{j=0}^{k-2} p_{k-j}(h) = \sum_{i=2}^{k} p_i(h)$$

и тем более

$$R_{k-2} \le \sum_{i=2}^{\infty} p_i(h) = p_{>1}(h).$$

Согласно свойству ординарности $p_{>1}(h) = o(h)$, значит, $R_{k-2} = o(h)$. В результате вместо (8.11) получаем равенство

$$p_k(t+h) = p_k(t)p_0(h) + p_{k-1}(t)p_1(h) + o(h).$$

Учитывая, что $p_1(h) = \lambda h + o(h)$, а также то, что (см. (8.7))

$$p_0(h) = 1 - \lambda h + o(h),$$

получим

$$p_k(t+h) = p_k(t)(1-\lambda h) + p_{k-1}(t)\lambda h + o(h).$$

Из последнего уравнения следует, что

$$\frac{p_k(t+h) - p_k(t)}{h} = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + o(h).$$

При $h \to 0$ получим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t),\ k = 1,2,\dots . \tag{8.12}$$

К этой системе нужно добавить уравнение для вероятности $p_0(t)$. Ясно, что

$$p_0(t+h) = p_0(t)p_0(h),$$

или

$$p_0(t+h) = p_0(t)(1 - \lambda h + 0(h)).$$

Разделив обе части этого равенства на h и устремив h к нулю, получим

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t). \tag{8.13}$$

Итак, мы доказали, что для вероятностей $p_k(t)$ простейшего потока справедлива система дифференциальных уравнений (8.13), (8.12).

8.4. Решение дифференциальных уравнений простейшего потока

Для решения дифференциальных уравнений (8.13), (8.12) перейдем к функциям:

$$f_0(t) = e^{\lambda t} p_0(t), \tag{8.14}$$

$$f_k(t) = e^{\lambda t} p_k(t),\ k = 1,2,\ldots \tag{8.15}$$

С учетом выражений (8.8), (8.4), (8.2) можем записать, что

$$f_0(0) = 1,\ f_1(0) = f_2(0) = \ldots = 0. \tag{8.16}$$

Дифференцируя функции (8.14), (8.15), получим

$$f_k'(t) = \lambda e^{\lambda t} p_k(t) + e^{\lambda t} p_k'(t) = \lambda f_k(t) + e^{\lambda t} p_k'(t), \tag{8.17}$$

$$f_0'(t) = \lambda e^{\lambda t} p_0(t) + e^{\lambda t} p_0'(t). \tag{8.18}$$

Заменяя в выражении (8.17) $p_k'(t)$ согласно уравнению (8.12), получим

$$f_k'(t) = \lambda f_k(t) + e^{\lambda t}(-\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t)) = \lambda f_k(t) - \lambda f_k(t) + \lambda f_{k-1}(t) = \lambda f_{k-1}(t).$$

Заменяя в выражении (8.18) $p_0'(t)$ согласно уравнению (8.13), будем иметь

$$f_0'(t) = \lambda e^{\lambda t} p_0(t) - \lambda e^{\lambda t} p_0(t) = 0.$$

Таким образом, мы получили систему дифференциальных уравнений первого порядка для функций $f_k(t)$:

$$f_0'(t) = 0, \tag{8.19}$$

$$f_k'(t) = \lambda f_{k-1}(t),\ k = 1,2,\ldots, \tag{8.20}$$

которая может быть последовательно решена, начиная с первого уравнения (8.19). Начальное условие для первого уравнения (8.19) имеем из (8.16): $f_0(0) = 1$. Тогда решением первого уравнения будет функция

$$f_0(t) = 1. \tag{8.21}$$

Второе уравнение из (8.20) будет иметь вид

$$f_1'(t) = \lambda.$$

Начальное условие для него имеем из (8.16): $f_1(0)=1$. Решением этого уравнения будет функция

$$f_1(t)=\lambda t. \tag{8.22}$$

Третье уравнений из (8.20) с учетом решения (8.22) принимает вид

$$f_2'(t)=\lambda^2 t,$$

а начальное условие для него следует из (8.16): $f_2(0)=1$. В таком случае решение этого уравнения имеет вид

$$f_2(t)=\frac{(\lambda t)^2}{2!}.$$

Продолжая этот процесс интегрирования уравнений (8.20) с начальными условиями (8.16), получим общее выражение решения:

$$f_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!},\ k=0,1,2,\dots . \tag{8.23}$$

Возвращаясь теперь от функций (8.23) к обозначению (8.15), получаем выражение для вероятности поступления k требований в отрезке времени t для простейшего потока:

$$p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\ k=0,1,2,\dots . \tag{8.24}$$

Формула (8.24) представляет собой известное распределение Пуассона с параметром λt. Таким образом, мы получили, что число требований в отрезке времени t для простейшего потока подчиняется пуассоновскому распределению, которое символически обозначается как $\Pi(\lambda t)$.

8.5. Средние характеристики простейшего потока

Среднее число требований, поступающих на отрезке времени t для простейшего потока, определяется как среднее значение дискретной случайной величины η с возможными значениями $k=0,1,2,\dots$ и их вероятностями $p_k(t)$ (8.24):

$$E(\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}kp_k(t)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}=$$

$$=\lambda te^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{(k-1)}}{(k-1)!}=\lambda te^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^m}{m!}=\lambda te^{-\lambda t}e^{\lambda t}=\lambda t\,.$$

Тогда среднее число требований, поступающих в единицу времени для простейшего потока, определяется как $E(\eta)/t$ и равно λ. Таким образом, параметр λ простейшего потока представляет собой среднее число требований, поступающих в единицу времени для простейшего потока. Эта величина называется также интенсивностью простейшего потока требований.

Средняя длина отрезка времени между соседними требованиями для простейшего потока определяется как среднее значение случайной величины ξ с экспоненциальным распределением (8.10):

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}tf_{\xi}(t)dt=\int_{0}^{\infty}\lambda te^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, величина $1/\lambda$ является средней длиной отрезка времени между соседними требованиями.

8.6. Другие свойства простейшего потока

Интервалы времени между соседними требованиями и моменты появления требований для случайного потока требований являются, естественно, случайными величинами. Рассмотрим свойства этих случайных величин для простейшего потока требований.

Пусть τ_i – моменты наступления событий (появления требований) для простейшего потока. Для совокупности случайных величин $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n$ найдем вероятность

$$P(t_1-h_1\le\tau_1<t_1+k_1,t_2-h_2\le\tau_2<t_2+k_2,\ldots,t_n-h_n\le\tau_n<t_n+k_n)\,,\qquad(8.25)$$

рассматривая величины h_i и k_i как бесконечно малые, т. е. считая, что $\tau_i = \lim\limits_{h_i, k_i \to 0} t_i$ (см. рис. 8.2).

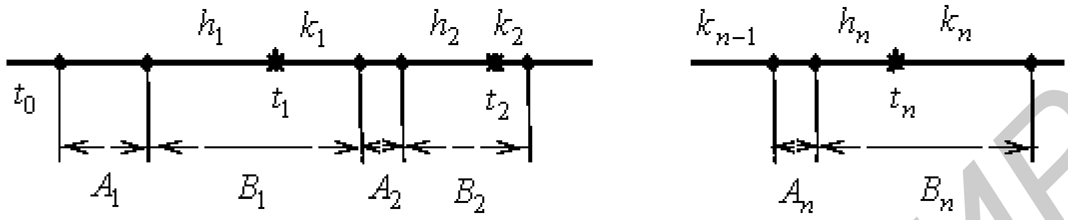

Рис. 8.2. Случайные моменты поступления требований

Для этого рассмотрим полуинтервалы:

$$A_1 = [t_0, t_1 - h_1),\ B_1 = [t_1 - h_1, t_1 + k_1),$$

$$A_2 = [t_1 + k_1, t_2 - h_2),\ B_2 = [t_2 - h_2, t_2 + k_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_n = [t_{n-1} + k_{n-1}, t_n - h_n),\ B_n = [t_n - h_n, t_n + k_n).$$

Вероятность события, состоящего в том, что в интервалах $A_1, \ldots, A_n$ нет ни одного требования потока, а в каждом из интервалов $B_1, \ldots, B_n$ ровно по одному требованию, равна

$$e^{-\lambda(t_1 - h_1)}(\lambda(h_1 + k_1) + o(h_1 + k_1))e^{-\lambda(t_2 - h_2 - t_1 - k_1)}(\lambda(h_2 + k_2) + o(h_2 + k_2))\cdots$$

$$e^{-\lambda(t_n - h_n - t_{n-1} - k_{k-1})}(\lambda(h_n + k_n) + o(h_n + k_n)) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})}\lambda(h_i + k_i) + o(h_i + k_i)), \qquad (8.26)$$

где $t_0 = 0$. Но эта вероятность совпадает с вероятностью (8.25). Следовательно, случайный вектор $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ обладает плотностью вероятности вида

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})} = \lambda^n e^{-\lambda(t_n - t_0)}. \qquad (8.27)$$

Последнее означает, что τ_1, $\tau_2 - \tau_1$, …, $\tau_n - \tau_{n-1}$ – независимые случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону с параметром λ.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 8.1. Если $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n, ...$ – моменты последовательных требований простейшего потока, начиная с любого момента времени t_0, то случайный вектор $(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n)$ имеет плотность вероятности вида (8.27), т. е. интервалы времени τ_1, $\tau_2 - \tau_1$, …, $\tau_n - \tau_{n-1}$ между последовательными требованиями являются независимыми случайными величинами, распределенными по экспоненциальному закону с параметром λ.

Как следствие из данной теоремы доказывается следующая теорема.

Теорема 8.2. При условии, что число событий простейшего потока в интервале (a,b) равно n $(\xi = n)$, моменты этих событий $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ независимы и равномерно распределены в интервале (a,b).

Доказательство. Предположим вначале, что моменты $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ появления требований расположены в порядке возрастания, т. е. $\tau_1 \le \tau_2 \le ... \le \tau_n$. Согласно формуле условной вероятности и предыдущей теореме получим

$$P(t_1 \le \tau_i < t_i + dt_i, 1 \le i \le n / \xi = n) = P(t_1 \le \tau_i < t_i + dt_i, 1 \le i \le n;\ \tau_{n+1} > b / \xi = n) =$$

$$\frac{P(t_1 \le \tau_i < t_i + dt_i, 1 \le i \le n;\ \tau_{n+1} > b,\ \xi = n)}{P(\xi = n)} = \frac{P(t_1 \le \tau_i < t_i + dt_i, 1 \le i \le n;\ \tau_{n+1} > b)}{P(\xi = n)} =$$

$$= \frac{\lambda^n e^{-\lambda(b-a)} dt_1 \dots dt_n}{\dfrac{\lambda^n (b-a)^n}{n!} e^{-\lambda(b-a)}} = \frac{n!}{(b-a)^n} dt_1 \dots dt_n. \qquad (8.28)$$

Числитель левой части последней строки формулы (8.28) получается умножением вероятности (8.26) при бесконечно малых величинах h_i, k_i и $t_0 = a$ и вероятности

$$e^{-\lambda(b - t_n - dt_n)} \sim e^{-\lambda(b - t_n)}$$

отсутствия требований в интервале $(t_n + dt_n, b)$. Знаменатель левой части формулы (8.28) записан на основе формулы (8.24). Из выражения (8.28) видно, что вероятность (условная) попадания случайного вектора $(\tau_1,\tau_2,...,\tau_n)$ с упорядоченными компонентами в указанную область $t_1 \le \tau_i < t_i + dt_i, 1 \le i \le n$, пропорциональна объему $dt_1 \ldots dt_n$ этой области, что является характеристическим свойством многомерного равномерного распределения. Следовательно, выражение (8.28) свидетельствует о том, что случайный вектор $(\tau_1,\tau_2,...,\tau_n)$ с упорядоченными компонентами равномерно распределен в n-мерной области $(a < \tau_1 < ... < \tau_n < b)$. Область равномерного распределения $(a < \tau_1 < \tau_2 < b)$ для случая $n = 2$ иллюстрируются на рис. 8.3, а.

С другой стороны, произвольная случайная величина μ_i, равномерно распределенная в (a,b), имеет плотность вероятности, равную $1/(b-a)$ в этой области, а n независимых случайных величин, равномерно распределенных в (a,b), имеют совместную плотность вероятности, равную $1/(b-a)^n$ в области $(a,b)^n$. Для вероятности $P(t_1 \le \mu_i < t_i + dt_i, 1 \le i \le n)$ будет справедлива формула

$$P(t_1 \le \mu_i < t_i + dt_i, 1 \le i \le n) = \frac{1}{(b-a)^n} dt_1 \cdots dt_n. \tag{8.29}$$

Поскольку существует $n!$ равновероятных и несовместных способов упорядочить n неупорядоченных случайных величин, то для упорядоченной последовательности случайных величин, каждая из которых равномерно распределена в (a,b), вероятность (8.29) по теореме сложения вероятностей для несовместных событий будет в $n!$ раз больше и совпадает с правой частью выражения (8.28). Следовательно, случайный вектор $(\tau_1,\tau_2,...,\tau_n)$, определенный в теореме, имеет равномерное распределение в n-мерном гиперкубе $(a,b)^n$. Область равномерного распределения $(a,b)^2$ для случая $n = 2$ иллюстрируется на рис. 8.3, б. Теорема 8.2 доказана.

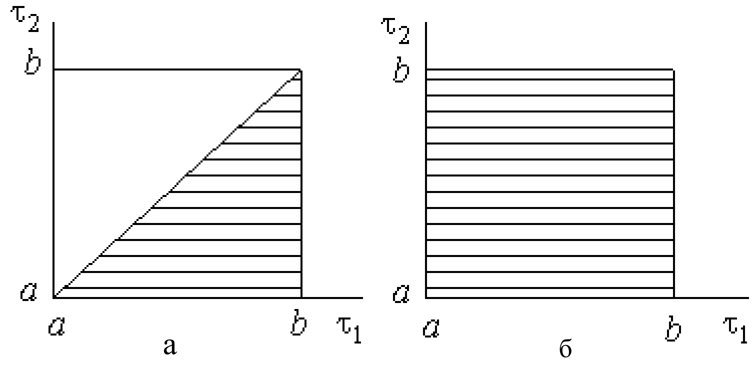

Рис. 8.3. Области равномерного распределения
для двух упорядоченных (а) и произвольных (б) моментов времени τ_1, τ_2

9. ЦЕПИ МАРКОВА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

9.1. Определение. Уравнение Чепмена – Колмогорова

Будем рассматривать дискретный случайный процесс, т. е. процесс с дискретным множеством состояний и непрерывным временем. Как и в разд. 8, будем говорить о некоторой системе, которая может находиться в одном из состояний $E_1, E_2, ..., E_k, ...$и переходит из одного состояния в другое в любой момент времени t.

Определение 9.1. Дискретный случайный процесс $\xi(t)$ называется цепью Маркова с непрерывным временем, если вероятность $p_{i,j}(t_1,t_2)$ того, что в момент времени t_2 система будет находиться в состоянии E_j, зависит от того, в каком состоянии E_i система находилась в некоторый предыдущий момент времени t_1, и не зависит от того, в каких состояниях она находилась в более ранние моменты времени $t_{-1}, \ t_{-2}, ...$:

$$p_{i,j}(t_1,t_2) = P(\xi(t_2) = E_j / \xi(t_1) = E_i) = P(\xi(t_2) = E_j / \xi(t_1) = E_i, \xi(t_{-1}) = E_k, ...).$$

Вероятность

$$p_{i,j}(t_1,t_2) = P(\xi(t_2) = E_j / \xi(t_1) = E_i)$$

есть условная вероятность того, что в момент времени t_2 система будет находиться в состоянии E_j при условии, что в более ранний момент времени t_1 она находилась в состоянии E_i. Она называется вероятностью перехода системы из состояния E_i в момент времени t_1 в состояние E_j в момент времени t_2. Как видим, эта вероятность есть функция двух аргументов t_1 и t_2.

Цепь Маркова с непрерывным временем называется однородной, если вероятность $p_{i,j}(t_1,t_2)$ зависит только от одного аргумента $t = t_2 - t_1$:

$$p_{i,j}(t_1,t_2) = p_{i,j}(t_2 - t_1) = p_{i,j}(t).$$

Вероятность $p_{i,j}(t)$ называется вероятностью перехода из состояния E_i в состояние E_j за время t (за промежуток времени t). В дальнейшем будем рассматривать только однородные цепи Маркова.

Вероятности $p_{i,j}(t)$ образуют матрицу

$$P(t) = (p_{i,j}(t)),\ i, j = 1,2,\dots, \tag{9.1}$$

которая называется матрицей вероятностей перехода за время t. Элементы этой матрицы должны удовлетворять следующим очевидным условиям:

$$p_{i,j}(t) \ge 0 \quad \forall t > 0, \tag{9.2}$$

$$\sum_j p_{i,j}(t) = 1 \quad \forall t > 0, \tag{9.3}$$

$$\lim_{t \to 0} p_{i,j}(t) = \begin{pmatrix} 1, & i = j, \\ 0, & i \ne j. \end{pmatrix}. \tag{9.4}$$

Условие (9.4) означает, что за нулевой промежуток времени система не может перейти в другое состояние и с вероятностью единица остается в прежнем состоянии.

Кроме того, выполняется уравнение Чепмена – Колмогорова, которое определяет вероятность перехода $p_{i,j}(t+\tau)$ за время $t+\tau$:

$$p_{i,j}(t+\tau) = \sum_k p_{i,k}(t)\, p_{k,j}(\tau) \quad \forall t, \tau > 0. \tag{9.5}$$

В матричных обозначениях условия (9.4) и (9.5) получают следующий очень простой вид:

$$P(0) = I, \tag{9.6}$$

$$P(t+\tau) = P(t)P(\tau), \tag{9.7}$$

где I – единичная матрица.

По известным условным вероятностям $p_{i,j}(t)$ можно определить также абсолютные (безусловные) вероятности $a_j(t)$ состояний E_j, $j = 1,2,\dots$, в момент времени t. Для этого надо знать безусловные вероятности $a_j(t_0)$ для начального момента времени t_0. Тогда

$$a_j(t)=\sum_i a_i(t_0)\,p_{i,j}(t-t_0). \tag{9.8}$$

Если ввести вектор-строку безусловных вероятностей

$$A(t)=(a_i(t)),\ i=1,2,\dots,$$

тогда вместо (9.8) можно написать

$$A(t)=A(t_0)P(t-t_0).$$

9.2. Свойства вероятностей перехода

Сформулируем еще некоторые свойства вероятностей перехода $p_{i,j}(t)$. Простейшие из них докажем.

Теорема 9.1. Вероятности $p_{i,j}(t)$ непрерывны при любом $t>0$.

Доказательство выполним в матричной форме. По уравнению Чепмена – Колмогорова (9.7) для $t>0$, $\Delta t>0$ получаем

$$P(t+\Delta t)=P(t)P(\Delta t),$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}P(t+\Delta t)=\lim_{\Delta t\to 0}(P(t)P(\Delta t))=P(t)\lim_{\Delta t\to 0}P(\Delta t)=P(t),$$

что означает непрерывность справа. Записав теперь уравнение Чепмена – Колмогорова в виде

$$P(t)=P(\Delta t)P(t-\Delta t),$$

будем иметь

$$\lim_{\Delta t\to 0}P(t)=\lim_{\Delta t\to 0}(P(\Delta t)P(t-\Delta t)),$$

т. е.

$$P(t)=\lim_{\Delta t\to 0}(P(\Delta t)P(t-\Delta t))=\lim_{\Delta t\to 0}P(t-\Delta t).$$

Таким образом, доказана непрерывность слева, а вместе с этим и теорема.

Теорема 9.2. Для всех $t\ge 0$ $p_{i,i}(t)>0$.

Доказательство. Для $t=0$ из свойства (9.4) имеем $p_{i,i}(0)>0$. Из непрерывности $p_{i,i}(t)$ следует, что для любого i существует такое малое число $\varepsilon>0$, что

$p_{i,i}(t) > 0$ при $0 \le t \le \varepsilon$. Возьмём теперь произвольное t и покажем, что и в этом случае $p_{i,i}(t) > 0$. Последовательно применяя уравнение Чепмена – Колмогорова (9.5), можно получить

$$p_{i,j}(t_1 + t_2 + ... + t_n) = \sum_{k_1,...k_n} p_{i,k_1}(t_1) p_{k_1,k_2}(t_2) \cdots p_{k_n,j}(t_n).$$

Если взять $t_1 = t_2 = ... = t_n = \dfrac{t}{n}$, $i = j$, $k_1 = k_2 = ... = k_n = i$, то получим

$$p_{i,i}(t) \ge [p_{i,i}(t/n)].$$

Понятно, что при достаточно больших n $t/n \le \varepsilon$. Тогда $p_{i,i}(t/n) > 0$ и, таким образом, $p_{i,i}(t) > 0$.

Теорема 9.3. При любом i предел

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1 - p_{i,i}(t)}{t}\right) = -p'_{i,i}(0) = q_{i,i} \tag{9.9}$$

существует и конечен.

Теорема 9.4. При любых $i \ne j$ предел

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{p_{i,j}(t)}{t}\right) = p'_{i,j}(0) = q_{i,j} \tag{9.10}$$

существует и конечен.

В теоремах 9.3, 9.4 утверждается, что вероятности $1 - p_{i,i}(t)$ и $p_{i,j}(t)$ дифференцируемы при $t = 0$. Справедливо также более общее утверждение: если выполняются условия (9.2) – (9.5), то вероятности дифференцируемы при всех $t \ge 0$. Теоремы 9.3 и 9.4 принимаем без доказательства.

Величины $q_{i,i}$ и $q_{i,j}$ (9.9), (9.10) есть значения производных функций $1 - p_{i,i}(t)$ и $p_{i,j}(t)$ соответственно при $t = 0$. Содержательный смысл этих величин можно объяснить следующим образом. При $i \ne j$ $q_{i,j}dt$ представляет собой вероятность перехода из состояния E_i в состояние E_j за время dt. Величина

$1-q_{i,i}dt$ представляет собой вероятность того, что на промежутке времени dt система остается в состоянии E_i.

На рис. 9.1 представлены примеры функций $p_{i,i}(t)$, $p_{i,j}(t)$. Пунктирными прямыми изображены касательные при $t=0$ к функциям $1-p_{i,i}(t)$ и $p_{i,j}(t)$. Понятно, что $tg\alpha = q_{i,i}$, $tg\beta = q_{i,j}$.

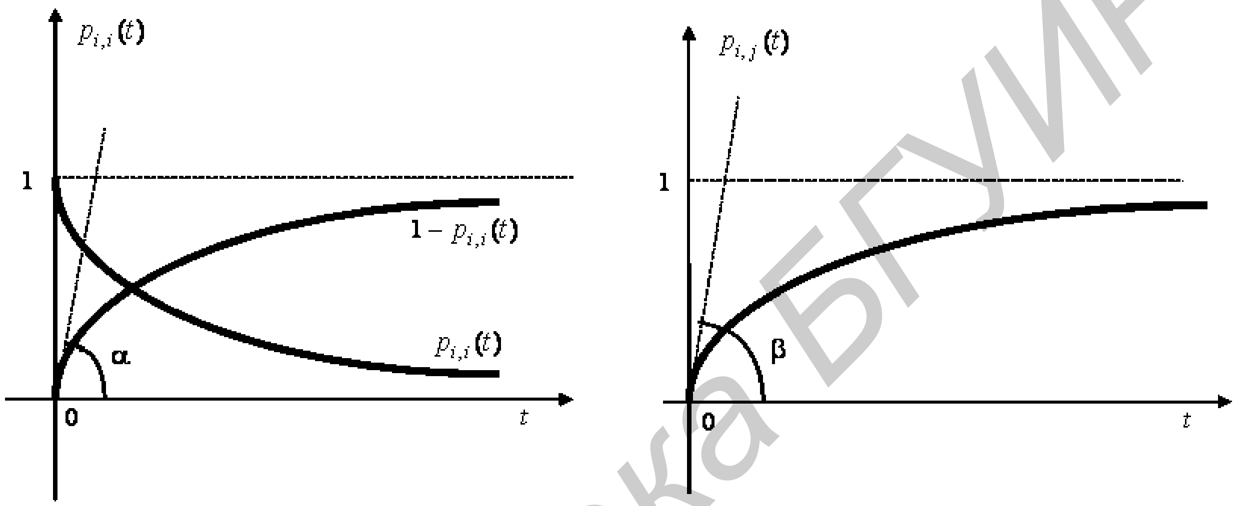

Рис. 9.1. Иллюстрация графиков вероятностей перехода

В общем случае при всех i

$$\sum_{j\neq i} q_{i,j} \leq q_{i,i} \,. \tag{9.11}$$

Действительно, поскольку

$$\sum_{j} p_{i,j}(h) = 1,$$

или

$$\sum_{j\neq i} p_{i,j}(h) = 1 - p_{i,i}(h),$$

то для любого конечного N имеем

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} p_{i,j}(h) \leq 1 - p_{i,i}(h).$$

Если разделить последнее неравенство на h и положить $h \to 0$, то получим неравенство

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} q_{i,j} \leq q_{i,i}.$$

Так как N произвольное, а все слагаемые неотрицательные, то получаем утверждение (9.11).

Легко заметить, что для конечной цепи Маркова с k состояниями вместо неравенства (9.11) справедливо равенство

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} q_{i,j} = q_{i,i}. \tag{9.12}$$

Матрица Q, на главной диагонали которой располагаются величины $(-q_{i,i})$, а остальными элементами являются $q_{i,j}$, называется инфинитезимальной матрицей цепи Маркова. Условие (9.12) означает, что сумма элементов каждой строки инфинитезимальной матрицы конечной цепи Маркова равна нулю.

9.3. Дифференциальные уравнения для вероятностей перехода

Цепь Маркова называется консервативной, если при всех i

$$\sum_{j \neq i} q_{i,j} = q_{i,i} < \infty. \tag{9.13}$$

Теорема 9.5. Вероятности перехода $p_{i,j}(t)$ консервативной цепи Маркова удовлетворяют следующим системам дифференциальных уравнений:

$$p'_{i,j}(t) = \sum_{\nu} q_{i,\nu} p_{\nu,j}(t), \tag{9.14}$$

$$p'_{i,j}(t) = \sum_{\nu} p_{i,\nu}(t) q_{\nu,j}. \tag{9.15}$$

Система (9.15) называется прямой, а (9.14) – обратной.

Чтобы получить прямую систему (9.15), запишем следующее уравнение Чепмена – Колмогорова:

$$p_{i,j}(s+t)=\sum_{\nu} p_{i,\nu}(s)p_{\nu,i}(t) \tag{9.16}$$

и вычтем из обеих частей вероятности $p_{i,j}(s)$. Получим

$$p_{i,j}(s+t)-p_{i,j}(s)=\sum_{\nu\neq j} p_{i,\nu}(s)p_{\nu,j}(t)-p_{i,j}(s)(1-p_{j,j}(t)).$$

Разделим левую и правую части на t и перейдем к пределу при $t\to 0$. Получим прямую систему (9.15).

Вычитая из обеих частей уравнения (9.16) $p_{i,j}(t)$, получим

$$p_{i,j}(s+t)-p_{i,j}(t)=\sum_{\nu\neq i} p_{i,\nu}(s)p_{\nu,j}(t)-(1-p_{i,i}(s))p_{i,j}(t).$$

Разделив левую и правую части на s и перейдя к пределу при $s\to 0$, получим обратную систему (9.14).

Обратная и прямая системы (9.14), (9.15) очень компактно записываются в векторно-матричной форме:

$$P'(t)=QP(t), \tag{9.17}$$

$$P'(t)=P(t)Q. \tag{9.18}$$

Начальные условия для этих уравнений задаются выражением (9.6), т. е. $P(0)=I$. Каждая из систем (9.17), (9.18) имеет единственное решение

$$P(t)=P(0)\exp(Qt)=\exp(Qt)P(0),$$

где функция $\exp(Qt)$ называется матричной экспонентой и определяется в виде следующего ряда:

$$\exp(Qt)=I+Qt+\frac{(Qt)^2}{2!}+\frac{(Qt)^3}{3!}+\ldots.$$

В случае матрицы Q достаточно простой структуры решение уравнений (9.17), (9.18) можно получить в конечной форме (см. подразд. 9.5, 9.6).

Для однородной цепи Маркова с непрерывным временем могут существовать предельные вероятности

$$p_j^*=\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t),\ \ p_j^*=j=1,2,\ldots, \tag{9.19}$$

не зависящие от i. Если они существуют, то удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} P^* Q = 0, \\ \sum\limits_{\nu} p_{\nu}^* = 1, \end{cases} \tag{9.20}$$

где $P^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*, \ldots)$ – вектор-строка предельных вероятностей. Первое из уравнений (9.20) получается из прямой системы (9.18), если положить в ней $P'(t) = 0$ и учесть выражение (9.19). Второе уравнение в (9.20) – это обычное условие нормировки для предельных вероятностей.

Элементы $q_{i,i}$ и $q_{i,j}$ инфинитезимальной матрицы Q определяют вероятности перехода $p_{i,j}(t)$ однозначно. Обычно эти вероятности бывают неизвестны. Величины же $q_{i,i}$ и $q_{i,j}$ можно определить из теоретических соображений или из экспериментальных данных на основе того факта, что с точностью до членов второго порядка малости $q_{i,j}dt$ равно вероятности перехода системы за время dt из состояния E_i в другое состояние E_j, а $1 - q_{i,i}dt$ – вероятности того, что за время dt не произойдет ни одного перехода из состояния E_i в другое состояние. Затем по известным $q_{i,i}$ и $q_{i,j}$ находят вероятности перехода $p_{i,j}(t)$ путем решения системы дифференциальных уравнений.

В подразд. 9.4 – 9.6. рассматриваются примеры цепей Маркова с непрерывным временем.

9.4. Процессы рождения и гибели

Рассмотрим цепь Маркова с состояниями $E_0, E_1, E_2, \ldots$ и возможностью перехода из состояния E_i только в состояние E_{i+1} или E_{i-1}, причем из состояния E_0 возможен переход только в состояние E_1. Такая цепь называется процессом рождения и гибели [7, 25], поскольку переход из E_i в E_{i+1} трактуется как рождение, а переход из E_i в E_{i-1} – как гибель. Все элементы инфинитезимальной матрицы Q такого процесса равны нулю, кроме элементов $q_{i,i-1}$, $q_{i,i}$, $q_{i,i+1}$. Будем использовать более простые обозначения: $q_{i,i+1}=\lambda_i$, $i=0,1,2,\ldots$, $q_{i,i-1}=\mu_i$, $i=1,2,\ldots$, $\mu_0=0$. Процесс рождения и гибели является консервативной цепью Маркова, поэтому (см. (9.13))

$$q_{i,i}=-\lambda_i-\mu_i,\ i=0,1,2,\ldots .$$

Инфинитезимальная матрица Q процесса рождения и гибели имеет вид

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ \mu_1 & -\lambda_1-\mu_1 & \lambda_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \mu_2 & -\lambda_2-\mu_2 & \lambda_2 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & -\lambda_3-\mu_3 & \lambda_3 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Здесь мы допускаем нумерации строк и столбцов матрицы начиная с нуля. Решение дифференциальных уравнений (9.17) или (9.18) с такой матрицей коэффициентов Q в конечной форме и при произвольных λ_i и μ_i оказывается затруднительным. В такой цепи могут существовать предельные вероятности $p_0^*, p_1^*,\ldots$, которые можно найти. Для этого запишем систему уравнений (9.20) в развернутом виде:

$$\begin{cases} -\lambda_0 p_0^*+\mu_1 p_1^*=0, \\ -\lambda_0 p_0^*+(\lambda_1+\mu_1)\,p_1^*+\mu_2 p_2^*=0, \\ -\lambda_1 p_1^*+(\lambda_2+\mu_2)\,p_2^*+\mu_3 p_3^*=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\lambda_i p_i^*+(\lambda_{i+1}+\mu_{i+1})\,p_{i+1}^*+\mu_{i+2} p_{i+2}^*=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Если обозначить

$$\lambda_i p_i^*-\mu_{i+1}p_{i+1}^*=z_i,\ i=0,1,2,\ldots ,$$

то эта система уравнений примет вид

$$\begin{cases} -z_0 = 0, \\ z_0 - z_1 = 0, \\ z_1 - z_2 = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ z_i - z_{i+1} = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases}$$

Отсюда следует, что $z_0 = z_1 = z_2 = \ldots = 0$. Это значит, что

$$\lambda_i p_i^* = \mu_{i+1} p_{i+1}^*, \; i = 0,1,2,\ldots,$$

или

$$p_{i+1}^* = \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} p_i^*, \; i = 0,1,2,\ldots.$$

Применяя последнюю формулу последовательно несколько раз, получим

$$p_m^* = p_0^* \prod_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}, \; m = 1,2,\ldots. \tag{9.21}$$

Величину p_0^* найдем из условия нормировки, т. е. из второго уравнения системы (9.20):

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m^* = p_0^* + \sum_{m=1}^{\infty} p_m^* = p_0^* + p_0^* \left(\sum_{m=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right) = 1.$$

Получаем, что

$$p_0^* = \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right)^{-1}. \tag{9.22}$$

Итак, если выполняется соотношение

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} < \infty, \tag{9.23}$$

то предельные вероятности существуют и определяются формулами (9.22), (9.21). Если же эта величина равна бесконечности, то из (9.22) $p_0^* = 0$ и из (9.21) $p_m^* = 0 \;\; \forall m > 0$. В этом случае предельных вероятностей не существует. Физически это означает, что система с течением времени будет переходить в состояния с возрастающими номерами, уходя в бесконечность.

В случае $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda$, $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu$ процесс гибели и рождения можно рассматривать как математическую модель системы массового обслуживания (см. подразд. 9.7).

9.5. Процессы чистого рождения и чистой гибели

Цепь Маркова с состояниями $E_0, E_1, E_2, \ldots$ и возможностью перехода из состояния E_i только в состояние E_{i+1} называется процессом чистого рождения. В сравнении с процессом рождения и гибели здесь все μ_i равны нулю, т. е. инфинитезимальная матрица Q имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Легко записать прямую систему дифференциальных уравнений (9.15) для вероятностей перехода $p_{i,j}(t)$. Для любого $i \geq 0$:

$$\begin{cases} p'_{i,0}(t) = -\lambda_0 p_{i,0}(t), \\ p'_{i,1}(t) = -\lambda_1 p_{i,1}(t) + \lambda_0 p_{i,0}(t), \\ p'_{i,2}(t) = -\lambda_2 p_{i,2}(t) + \lambda_1 p_{i,1}(t), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ p'_{i,n}(t) = -\lambda_n p_{i,n}(t) + \lambda_{n-1} p_{i,n-1}(t), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases} \tag{9.24}$$

Решение системы уравнений (9.24) можно получить последовательно, начиная с первого уравнения. Для получения решения рассмотрим случай $i = 0$, который представляется нам наиболее важным. Начальные условия (9.6) в этом случае означают, что

$$p_{0,0}(0)=1,\ p_{0,n}(0)=0\ \ \forall n>0.$$

В частности, из первого уравнения системы уравнений (9.24) с учетом начального условия $p_{0,0}(0)=1$ находим

$$p_{0,0}(t)=e^{-\lambda_0 t}.$$

Подставляя это решение во второе уравнение системы (9.24), получим уравнение

$$p'_{0,1}(t)=-\lambda_1 p_{0,1}(t)+\lambda_0 e^{-\lambda_0 t},$$

интегрирование которого приведет к решению

$$p_{0,1}(t)=\frac{\lambda_0}{\lambda_1-\lambda_0}(e^{-\lambda_0 t}-e^{-\lambda_1 t}).$$

Мы не будем продолжать решение дальше. Отметим лишь, что решения $p_{i,j}(t)$ системы уравнений (9.24) неотрицательны при всех i, j, t. Однако, если λ_k растут слишком быстро при возрастании k, то может случиться, что $\sum\limits_{j=0}^{\infty} p_{i,j}(t)<1$, т. е. вероятности не будут удовлетворять условию нормировки. Доказано, что для того, чтобы при всех значениях t решения $p_{i,j}(t)$ системы уравнений (9.24) удовлетворяли соотношению $\sum\limits_{j=0}^{\infty} p_{i,j}(t)=1$, необходимо и достаточно расходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\lambda_k^{-1}$, т. е. выполнения условия

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^{-1}=\infty.$$

Цепь Маркова с состояниями $E_0, E_1, E_2, \ldots$ и возможностью перехода из состояния E_i только в состояние E_{i-1}, называется процессом чистой гибели. В сравнении с процессом рождения и гибели здесь все λ_i равны нулю, т. е. инфинитезимальная матрица Q имеет вид

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ \mu_1 & -\mu_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \mu_2 & -\mu_2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & -\mu_3 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Прямая система дифференциальных уравнений (9.15) для вероятностей перехода $p_{i,j}(t)$ для любого $i \geq 0$ имеет вид

$$\begin{cases} p'_{i,0}(t)=\mu_1 p_{i,1}(t), \\ p'_{i,1}(t)=-\mu_1 p_{i,1}(t)+\mu_2 p_{i,2}(t), \\ p'_{i,2}(t)=-\mu_2 p_{i,2}(t)+\mu_3 p_{i,3}(t), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ p'_{i,n}(t)=-\mu_n p_{i,n}(t)+\mu_{n+1} p_{i,n+1}(t), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases}$$

Важным для нас является случай $i=n$, поскольку нас будут интересовать переходы из состояния E_n в состояние E_j при $n \geq j$. Начальные условия (9.6) в этом случае означают, что

$$p_{n,n}(0)=1,\ p_{n,j}(0)=0\ \ \forall j<n,$$

а система дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} p'_{n,0}(t)=\mu_1 p_{n,1}(t), \\ p'_{n,1}(t)=-\mu_1 p_{n,1}(t)+\mu_2 p_{n,2}(t), \\ p'_{n,2}(t)=-\mu_2 p_{n,2}(t)+\mu_3 p_{n,3}(t), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ p'_{n,n}(t)=-\mu_n p_{n,n}(t). \end{cases} \tag{9.25}$$

Решение этой системы уравнений можно получить последовательно, как и для процессов чистого рождения, однако мы не будем этим заниматься. В подразд. 9.6 приводится решение системы уравнений (9.25) в частном случае $\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu$.

9.6. Пуассоновский процесс

Процесс чистого рождения, в случае когда $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda$, называется пуассоновским процессом. Инфинитезимальная матрица пуассоновского процесса имеет вид:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для любого $i \geq 0$ вместо (9.24) мы имеем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} p'_{i,0}(t) = -\lambda p_{i,0}(t), \\ p'_{i,1}(t) = -\lambda p_{i,1}(t) + \lambda p_{i,0}(t), \\ p'_{i,2}(t) = -\lambda p_{i,2}(t) + \lambda p_{i,1}(t), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ p'_{i,n}(t) = -\lambda p_{i,n}(t) + \lambda p_{i,n-1}(t), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases} \tag{9.26}$$

с начальными условиями

$$p_{0,0}(0) = 1,\ p_{0,n}(0) = 0 \ \ \forall n > 0. \tag{9.27}$$

Нас будет интересовать случай $i = 0$, т. е. вероятности перехода из состояния E_0 в состояние E_n. Состояние E_k будем понимать как то, что случайный процесс принимает численное значение k. Будем решать систему уравнений:

$$\begin{cases} p'_{0,0}(t) = -\lambda p_{0,0}(t), \\ p'_{0,1}(t) = -\lambda p_{0,1}(t) + \lambda p_{0,0}(t), \\ p'_{0,2}(t) = -\lambda p_{0,2}(t) + \lambda p_{0,1}(t), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ p'_{0,n}(t) = -\lambda p_{0,n}(t) + \lambda p_{0,n-1}(t), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases} \tag{9.28}$$

Для решения системы (9.26) воспользуемся приемом, примененным в подразд. 8.4, т. е. введем вспомогательные функции:

$$f_{0,0}(t)=e^{\lambda t}p_{0,0}(t), \qquad (9.29)$$

$$f_{0,k}(t)=e^{\lambda t}p_{0,k}(t),\ k=1,2,... \qquad (9.30)$$

С учетом выражений (9.27) мы можем записать, что

$$f_{0,0}(0)=1,\ f_{0,1}(0)=f_{0,2}(0)=...=0. \qquad (9.31)$$

Дифференцируя функции (9.29), (9.30) получим

$$f'_{0,0}(t)=\lambda e^{\lambda t}p_{0,0}(t)+e^{\lambda t}p'_{0,0}(t). \qquad (9.32)$$

$$f'_{0,k}(t)=\lambda e^{\lambda t}p_{0,k}(t)+e^{\lambda t}p'_{0,k}(t)=\lambda f_{0,k}(t)+e^{\lambda t}p'_{0,k}(t). \qquad (9.33)$$

Заменяя в уравнениях (9.32), (9.33) вероятности $p'_{0,k}(t)$ согласно уравнениям (9.28), получим

$$f'_{0,0}(t)=\lambda e^{\lambda t}p_{0,0}(t)-\lambda e^{\lambda t}p_{0,0}(t)=0,$$

$$f'_{0,k}(t)=\lambda f_{0,k}(t)+e^{\lambda t}(-\lambda p_{0,k}(t)+\lambda p_{0,k-1}(t))=$$

$$=\lambda f_{0,k}(t)-\lambda f_{0,k}(t)+\lambda f_{0,k-1}(t)=\lambda f_{0,k-1}(t).$$

Таким образом, мы получили систему дифференциальных уравнений первого порядка для функций $f_k(t)$:

$$f'_{0,0}(t)=0, \qquad (9.34)$$

$$f'_{0,k}(t)=\lambda f_{0,k-1}(t),\ k=1,2,..., \qquad (9.35)$$

которая может быть последовательно решена начиная с первого уравнения (9.34). Начальное условие для первого уравнения (9.34) имеем из (9.31): $f_{0,0}(0)=1$. Тогда решением уравнения (9.34) будет функция

$$f_{0,0}(t)=1.$$

Первое уравнение из (9.35) будет иметь вид

$$f'_{0,1}(t)=\lambda.$$

Начальное условие для него получаем из (9.31): $f_{0,1}(0)=0$. Решением этого уравнения будет функция

$$f_{0,1}(t)=\lambda t. \tag{9.36}$$

Третье уравнений из (9.35) с учетом решения (9.36) принимает вид

$$f'_{0,2}(t)=\lambda^2 t,$$

а начальное условие для него следует из (9.31): $f_{0,2}(0)=0$. В таком случае решение этого уравнения имеет вид

$$f_{0,2}(t)=\frac{(\lambda t)^2}{2!}.$$

Продолжая этот процесс интегрирования уравнений (9.35) с начальными условиями (9.31), получим общее выражение решения:

$$f_{0,k}(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!},\ k=0,1,2,\ldots . \tag{9.37}$$

Возвращаясь теперь от функций (9.37) к обозначениям (9.30), получаем искомое выражение для вероятностей перехода:

$$p_{0,k}(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\ k=0,1,2,\ldots .$$

Мы видим, что вероятности $p_{0,k}(t)$ подчиняются формуле Пуассона. Отсюда происходит название этого процесса.

Пуассоновский процесс более известен как пуассоновский или простейший поток требований в системе массового обслуживания (СМО) (см. разд. 8). Если считать, что состояние E_k означает наличие в СМО k требований, то вероятность $p_{0,k}(t)$ означает поступление в СМО k требований за время t. Таким образом, количество требований, поступающих в СМО за время t, подчиняется распределению Пуассона:

$$P(\xi=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\ k=0,1,2,\ldots .$$

Параметр λ пуассоновского процесса представляет собой среднее количество требований, поступающих в СМО в единицу времени (см. подразд. 8.5), величина $1/\lambda$ – среднее время между соседними требованиями.

Таким образом, пуассоновский поток требований в СМО можно рассматривать с позиций теории цепей Маркова с непрерывным временем как цепь чистого рождения.

Рассмотрим также цепь чистой гибели в случае $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu$. В этом случае система дифференциальных уравнений (9.25) принимает вид

$$\begin{cases} p'_{n,0}(t) = \mu p_{n,1}(t), \\ p'_{n,1}(t) = -\mu p_{n,1}(t) + \mu p_{n,2}(t), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ p'_{n,j}(t) = -\mu p_{n,j}(t) + \mu p_{n,j+1}(t), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ p'_{n,n-1}(t) = -\mu p_{n,n-1}(t) + \mu p_{n,n}(t), \\ p'_{n,n}(t) = -\mu p_{n,n}(t). \end{cases} \tag{9.38}$$

Эту систему можно решить так же, как это было сделано в случае системы (9.28), т. е. путем введения вспомогательных функций:

$$\begin{cases} \varphi_{n,n}(t) = e^{\mu t} p_{n,n}(t), \\ \varphi_{n,j}(t) = e^{\mu t} p_{n,j}(t), \ j = n-1, n-2, \ldots, 1. \end{cases} \tag{9.39}$$

Дифференцирование этих функций дает выражения

$$\varphi'_{n,n}(t) = \mu e^{\mu t} p_{n,n}(t) + e^{\mu t} p'_{n,n}(t),$$

$$\varphi_{n,j}(t) = \mu e^{\mu t} p_{n,j}(t) + e^{\mu t} p'_{n,j}(t), \ \ j = n-1, n-2, \ldots, 1.$$

С учетом уравнений (9.38) эти выражения приводятся к виду

$$\varphi'_{n,n}(t) = 0,$$

$$\varphi'_{n,j}(t) = \mu \varphi_{n,j+1}(t), \ \ j = n-1, n-2, \ldots, 1.$$

Последовательное интегрирование последних уравнений, начиная с первого, с учетом начальных условий

$$\varphi_{n,n}(0)=1,\ \varphi_{n,n-1}(0)=\varphi_{n,n-2}(0)=\ldots=0,$$

приводит к решению $\varphi_{n,n}(t)=1$, $\varphi'_{n,j}(t)=\dfrac{(\mu t)^{n-j}}{(n-j)!}$, $j=n-1,n-2,\ldots,1$. Возвращаясь в выражениях (9.39) к вероятностям $p_{n,j}(t)$, получим решение уравнений (9.38) для цепи чистой гибели:

$$p_{n,j}(t)=\frac{(\mu t)^{n-j}}{(n-j)!}e^{-\mu t},\ j=n,n-1,n-2,\ldots,1, \tag{9.40}$$

$$p_{n,0}(t)=1-\sum_{j=1}^{n}p_{n,j}(t). \tag{9.41}$$

Распределение вероятностей (9.40), (9.41) подобно распределению Пуассона, но им не является, поскольку здесь мы имеем конечное число возможных значений случайной величины. Иногда оно называется усеченным распределением Пуассона.

9.7. Процесс рождения и гибели как математическая модель системы массового обслуживания

Процессы рождения и гибели в случае $\lambda_0=\lambda_1=\ldots=\lambda$, $\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu$ представляют собой математическую модель одноканальной системы массового обслуживания (СМО) с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным распределением длительностей обслуживания (модель типа M/M/1). В этом случае отношение λ_i/μ_{i+1} в (9.21), (9.22) обозначается как $\rho=\lambda/\mu$, и эти формулы преобразуются к виду

$$p_m^*=p_0^*\rho^m,\ m=1,2,\ldots .$$

$$p_0^*=\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m\right)^{-1}=(1+\rho+\rho^2+\ldots)^{-1}.$$

При $\rho<1$ соотношение (9.23) выполняется, так что получим

$$p_0^* = (1+\rho+\rho^2+\ldots)^{-1} = \left(\frac{1}{1-\rho}\right)^{-1} = 1-\rho. \qquad (9.42)$$

$$p_m^* = (1-\rho)\rho^m,\ m = 0,1,2,\ldots. \qquad (9.43)$$

Величина $\rho = \lambda/\mu$, ($\rho = 1 - p_0^*$) называется коэффициентом загруженности обслуживающего прибора. Если состояние E_m трактовать как факт нахождения в системе m требований, то вероятности p_m^*, $m = 0,1,2,\ldots$, представляют собой вероятности того, что в установившемся режиме в СМО будет находиться m требований. Вероятность p_0^*, определяемую формулой (9.42), называют вероятностью простоя СМО. Если обозначить как ξ число требований в СМО, то формула (9.43) определяет распределение вероятностей этой случайной величины. Распределение вида (9.43) называется геометрическим с параметром $1-\rho$ и обозначается $G(1-\rho)$. Теперь мы можем найти среднее число требований в установившемся режиме функционирования СМО как математическое ожидание указанной случайной величины ξ:

$$a_\xi = E(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p_i^* = \sum_{i=0}^{\infty} i(1-\rho)\rho^i = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}.$$

Здесь мы не демонстрировали процесс вычисления математического ожидания, а воспользовались результатом, известным из теории вероятностей. Точно так же получаем дисперсию числа требования в установившемся режиме функционирования СМО:

$$d_\xi = E((\xi - a_\xi)^2) = E(\xi^2) - a_\xi^2 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}.$$

Вероятность того, что в установившемся режиме в СМО будет не менее N требований, определяется выражением

$$P(\xi \ge N) = \sum_{i=N}^{\infty} p_i^* = \sum_{i=N}^{\infty} (1-\rho)\rho^i = \rho^N.$$

Длина очереди q в СМО определяется как число требований в системе, если это число равно нулю, и как число требований в системе минус единица, если это число больше нуля. Иначе говоря,

$$q = \begin{cases} \xi, & \text{если } \xi = 0, \\ \xi - 1, & \text{если } \xi > 0. \end{cases}$$

Тогда средняя длина очереди определится выражением

$$a_q = E(q) = 0 \cdot p_0^* + \sum_{i=1}^{\infty} (i-1) p_i^* = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i^* - \sum_{i=1}^{\infty} p_i^* =$$

$$= E(\xi) - (1 - p_0^*) = \frac{\rho}{1-\rho} - (1-\rho) = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}.$$

Можно найти также другие характеристики СМО, однако это потребует дополнительных рассуждений. Поэтому приведем лишь конечные результаты.

Время пребывания требования в системе t определяется как время пребывания требования в очереди t_q плюс время обслуживания требования t_s:

$$t = t_q + t_s.$$

Такое же соотношение сохраняется для средних значений этих случайных величин. Среднее время пребывания требования в системе определяется выражением

$$a_t = E(t) = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

Среднее время пребывания требования в очереди равно

$$a_{t_q} = E(t_q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}.$$

Среднее время обслуживания требования

$$a_{t_s} = a_t - a_{t_q} = \frac{1}{\mu}.$$

Время занятости обслуживающего прибора обозначим t_p. Среднее время занятости прибора определяется выражением

$$a_{t_p} = E(t_p) = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

9.8. Случайный телеграфный сигнал

Рассмотрим конечную цепь Маркова с непрерывным временем и двумя состояниями E_1 и E_2. Пусть эти состояния имеют численные значения $E_1 = -1$ и $E_2 = 1$, причем вероятность перехода за малое время Δt в другое состояние определяется условием

$$p_{1,2}(\Delta t) = p_{2,1}(\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t).$$

Такой процесс называется случайным телеграфным или случайным двоичным сигналом. Одна из реализаций этого процесса приведена на рис. 9.2.

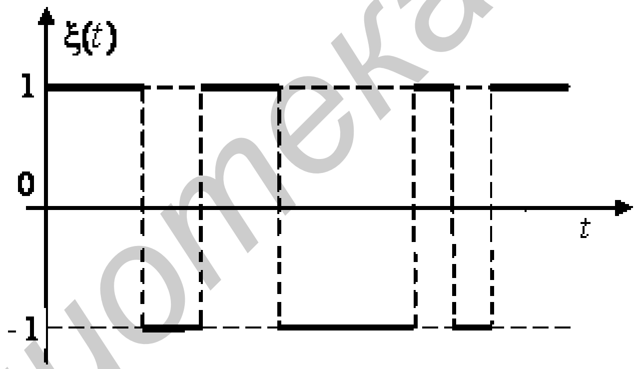

Рис. 9.2. Реализация случайного телеграфного сигнала

Условие (9.12) означат, что инфинитезимальная матрица процесса имеет следующий вид:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Матрица вероятностей перехода $P(t)$ (9.1) имеет размер 2x2:

$$P(t)=\begin{bmatrix} p_{1,1}(t) & p_{1,2}(t) \\ p_{2,1}(t) & p_{2,2}(t) \end{bmatrix}.$$

Найдем эту матрицу как решение прямой системы дифференциальных уравнений

$$P'(t)=P(t)Q$$

с начальными условиями

$$P(0)=I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Известно, что решением этих уравнений является матричная экспонента, которая определятся как следующий ряд:

$$P(t)=P(0)e^{Qt}=I(I+Qt+\frac{1}{2!}(Qt)^2+\frac{1}{3!}(Qt)^3+\cdots). \qquad (9.44)$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{cases} p_{1,1}(t)=p_{2,2}(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}e^{-2\lambda t}, \\ p_{1,2}(t)=p_{2,1}(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-2\lambda t}. \end{cases} \qquad (9.45)$$

Чтобы убедиться в справедливости последних формул, необходимо разложить эти функции в ряды Тейлора в окрестности нуля и сравнить их с рядом (9.44) для матрицы $P(t)$.

Для случайного телеграфного сигнала существуют предельные вероятности

$$p_j^*=\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t).$$

Из формул (9.45) при $t\to\infty$ получаем

$$p_1^*=p_2^*=\frac{1}{2}.$$

Эти вероятности будут для больших моментов времени и безусловными:

$$a_1^*=P(\xi(t)=1)=\frac{1}{2},$$

$$a_2^*=P(\xi(t)=1)=\frac{1}{2}.$$

Теперь можно найти математическое ожидание и ковариационную функцию телеграфного сигнала. Для больших моментов времени (т. е. для стационарного состояния) получим

$$E(\xi(t)) = 1 \cdot P(\xi(t) = 1) - 1 \cdot P(\xi(t) = -1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

$$R_\xi(\tau) = E(\xi(t)\xi(t+\tau)) =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot a_1^* \cdot p_{1,1}(\tau) + 1 \cdot (-1) \cdot a_1^* \cdot p_{1,2}(\tau) + (-1) \cdot 1 \cdot a_2^* \cdot p_{2,1}(\tau) + (-1) \cdot (-1) \cdot a_2^* \cdot p_{2,2}(\tau) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2\lambda\tau} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2\lambda\tau}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2\lambda\tau}\right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2\lambda\tau} = e^{-2\lambda\tau},\ \tau > 0.$$

Учитывая, что ковариационная функция является четной, получаем выражение ковариационной функции для любых τ:

$$R_\xi(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}.$$

Мы получили ковариационную функцию вида (2.9) и пример того, где она встречается на практике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон, Т. Статистический анализ временных рядов / Т. Андерсон. – М. : Мир, 1976. – 756 с.

2. Боровков, А. А. Теория вероятностей : учеб. пособие. – 5-е изд. перераб. и доп. / А. А. Боровков. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 656 с.

3. Бохнер, С. Лекции об интегралах Фурье / С. Бохнер. – М. : Физматгиз, 1962. – 360 с.

4. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей. – 8-е изд., испр. и доп. / Б. В. Гнеденко. – М. : Изд-во «Едиториал УРСС», 2005. – 448 с.

5. Гнеденко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания. – 6-е изд. / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. – Л. : Изд-во «ЛКИ», 2013. – 402 с.

6. Гренандер, У. Случайные процессы и статистические выводы / У. Гренандер. – М. : ИЛ, 1961. – 168 с.

7. Карлин, С. Основы теории случайных процессов / С. Карлин. – М. : Мир, 1971. – 536 с.

8. Крамер, Г. Стационарные случайные процессы / Г. Крамер, М. Лидбеттер. – М. : Мир, 1969. – 398 с.

9. Коваленко, И. Н. Теория вероятностей и математическая статистика / И. Н. Коваленко, А. А. Филиппова. – М. : Высш. шк., 1982. – 256 с.

10. Колмогоров, А. Н. Основные понятия теории вероятностей / А. Н. Колмогоров. – М. : Наука, 1974. – 120 с.

11. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа. – 7-е изд. / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Физматлит, 2004. – 572 с.

12. Колмогоров, А. Н. Теория вероятностей и математическая статистика : сб. статей / А. Н. Колмогоров. – М. : Наука, 1986. – 535 с.

13. Левин, Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. – М. : Радио и связь, 1989. – 656 с.

14. Медич, Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление / Дж. Медич. – М. : Энергия, 1973. – 440 с.

15. Муха, В. С. Теория вероятностей / В. С. Муха. – Минск : БГУИР, 2001. – 167 с.

16. Муха, В.С. Методическое пособие по курсу «Вероятностные процессы в АСУ». Ч. 1 / В. С. Муха. – Минск : МРТИ, 1988. – 60 с.

17. Муха, В. С. Методическое пособие по курсу «Вероятностные процессы в АСУ». Ч. 2 / В. С. Муха. – Минск : МРТИ, 1988. – 60 с.

18. Острем, К. Введение в стохастическую теорию управления / К. Острем. – М. : Мир, 1973. – 324 с.

19. Розанов, Ю. А. Стационарные случайные процессы / Ю. А. Розанов. – М. : Физматгиз, 1963. – 284 с.

20. Тутубалин, В. Н. Теория вероятностей и случайных процессов / В. Н. Тутубалин. – М. : МГУ, 1992. – 400 с.

21. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Кн. 1 / под ред. В. В. Солодовникова. – М. : Машиностроение, 1967. – 768 с.

22. Тихонов, В. И. Марковские процессы / В. И. Тихонов, В. А. Миронов. – М. : Сов. радио, 1977. – 488 с.

23. Толстов, Г. П. Ряды Фурье. – 3-е изд. / Г. П. Толстов.– М. : Физматлит, 1980. – 382 с.

24. Толстов, Г. П. Мера и интеграл / Г. П. Толстов. – М. : Наука, 1976. – 392 с.

25. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. – Т. 1. – М. : Мир, 1984. – 528 с.

26. Харин, Ю. С. Теория вероятностей : учеб. пособие / Ю. С. Харин, Н. М. Зуев. – Минск : БГУ, 2004. – 199 с.

27. Харин, Ю. С. Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика : учебник / Ю. С. Харин, Н. М. Зуев, Е. Е. Жук. – Минск: БГУ, 2011. – 463 с.

28. Хинчин, А. Я. Теория корреляции стационарных стохастических процессов / А. Я. Хинчин // Успехи математических наук. – 1938. – Вып. 5. – С. 42 – 51.

29. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей / В. П. Чистяков. – М. : Дрофа, 2007. – 254 с.

30. Чжун, Кай-Лай С. Однородные цепи Маркова / Кай-Лай С. Чжун. – М. : Мир, 1964. – 425 с.

31. Яглом, А. М. Корреляционная теория стационарных функций / А. М. Яглом. – Л. : Гидрометеоиздат, 1981. – 282 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Св. план 2013, поз. 22

Учебное издание

Муха Владимир Степанович

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *И. В. Ничипор*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная правка и оригинал-макет *Ю. Ч. Клочкевич, А. А. Лысеня*

Подписано в печать 20.11.2013. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 11,16. Уч.-изд. л. 9,5. Тираж 100 экз. Заказ 82.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6