ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ НА МУЛЬТИСЕТИ

Л. А. Пилипчук, А. С. Пилипчук
Кафедра компьютерных технологий и систем, Факультет прикладной математики и информатики,
Белорусский государственный университет
Минск, Республика Беларусь
E-mail: pilipchuk@bsu.by

Работа посвящена одной обратной задаче оптимизации потока в мультисети. Рассматривается математическая модель экстремальной неоднородной прямой задачи потокового программирования с линейной целевой функцией и линейными ограничениями и выбрано одно из ее допустимых решений. Требуется так минимальнo изменить вектор целевой функции задачи, чтобы выбранное допустимое решение стало оптимальным. Мера близости векторов целевой функции оценивается в соответствии с выбранной нормой.

Введение

Обратная оптимизация относительно новая область исследований и создание методов решения задач обратной оптимизации является актуальной задачей оптимизации процессов во многих отраслях. Как правило, в задаче оптимизации предполагается, что все параметры, связанные с целевой функцией и ограничениями, известны, и целью является нахождение решения, которое является оптимальным для заданных значений параметров. На практике существует много ситуаций, когда значения параметров неизвестны, но приведены некоторые оценки этих параметров, а также из опыта или практики известно некоторое допустимое решение. В таких ситуациях, обратная оптимизация может быть использована для минимального изменения коэффициентов целевой функции в соответствии с выбранной нормой так, чтобы известное допустимое решение стало оптимальным. В [1] впервые рассмотрены принципы обратной оптимизации для исследования задачи кратчайшего пути с применением l_2 нормы, а также представлена обратная версия задачи линейного программирования. В [2] приведены некоторые применения обратной оптимизации для сетевых задач. Обратным задачам квадратичного программирования посвящена работа [3]. В [4] рассмотрена одна обратная обобщенная задача дробно-линейного программирования. В [5] исследуются математические модели обратных задач на сетях: обобщенной транспортной задачи и дробно-линейной задачи и предложены методы их решения с нормой l_1. Обратный метод оптимизации для транспортной задачи рассмотрен в [6]. в соответствии с l_1 нормой. В работе строится математическая модель обратной задачи в соответствии с l_1 нормой для одной неоднородной линейной задачи оптимизации мультипотока в мультисети с целью минимального изменения вектора целевой функции задачи. В соответствии с выбранной нормой l_1 обратная задача остается в рамках линейного программирования.

I. Математическая модель прямой задачи

Рассмотрим конечную связную ориентированную мультисеть $G = (I, U)$ с множеством узлов I и множеством мультидуг U, определенных на $I \times I (|I| < \infty, |U| < \infty$. Мультисеть $G = (I, U)$ представлена в виде семейства $|K|$ связных сетей $\widetilde{G}^k$, $k \in K = \{1, 2, \ldots\}$, $|K| < \infty, I^k \subseteq I$, $\widetilde{U}^k \subseteq U$. Каждая связная сеть $\widetilde{G}^k = (I^k, \widetilde{U}^k)$ соответствует некоторому типу k потока в мультисети $G = (I, U)$. Определим для каждого узла $i \in I$ мультисети G множество типов потоков $K(i) = \{k \in K : i \in I^k\}$, проходящих через узел $i \in I$. Для каждой мультидуги $(i, j) \in U$ определим множество типов потоков $K(i, j) = \{k \in K : (i, j) \in \widetilde{U}^k$, проходящих через мультидугу $(i, j) \in U$. Для каждой мультидуги (i, j) определим множество $K_1(i, j) = \{k \in K : (i, j) \in \widetilde{U}_1^k\}$, $\widetilde{U}_1^k \subseteq \widetilde{U}^k$. Итак, мультисеть G представляет собой объединение $|K|$ сетей: $G^k = (I^k, U^k)$, $U^k = \{(i, j)^k : (i, j) \in \widetilde{U}^k, k \in K\}$. Обозначим через U_0 множество мультидуг $(i, j) \in U_0, U_0 \subseteq U$, для каждой мультидуги которого выполняется неравенство: $|K_0(i, j)| > 1$, где $K_0(i, j) = K(i, j) \setminus K_1(i, j)$, $(i, j) \in U_0$. Обозначим $U_1^k = \{(i, j)^k : (i, j) \in \widetilde{U}^k\}$, $k \in K$. Каждая сеть $G^k = (I^k, U^k)$ имеет следующие характеристики: x_{ij}^k - дуговой поток k- го типа по мультидуге $(i, j) \in U$ (дуговой поток k-го типа); d_{ij}^k - пропускная способность дуги $(i, j)^k$ для k -го типа потока, $k \in K_1(i, j)$. Через d_{ij}^0 обозначим суммарную пропускную способность мультидуги (i, j), где $(i, j) \in U_0$. $I_i^+(U^k) = \{j \in I^k : (i, j)^k \in U^k\}$, $I_i^-(U^k) = \{j \in I^k : (i, j)^k \in U^k\}$; a_i^k- интенсивность узла i для k -го типа потока.

Математическая модель прямой неоднородной задачи потокового программирования с взаимосвязью дуговых потоков имеет вид:

$$f(x) = \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} c_{ij}^k x_{ij}^k \longrightarrow \min, \qquad (1)$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j\in I_i^-(U^k)} x_{ji}^k = a_i^k,$$
$$i \in I^k,\, k \in K, \qquad (2)$$

$$\sum_{(i,j)\in U}\sum_{k\in K(i,j)} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = \alpha_p,\, p = \overline{1,l}, \qquad (3)$$
$$\sum_{k\in K_0(i,j)} x_{ij}^k \le d_{ij}^0,$$
$$x_{ij}^k \ge 0,\, k \in K_0(i,j),\, (i,j) \in U_0, \qquad (4)$$

$$0 \le x_{ij}^k \le d_{ij}^k,\, k \in K_1(i,j),\, (i,j) \in U, \qquad (5)$$

$$x_{ij}^k \ge 0,\, k \in K(i,j) \setminus K_1(i,j),\, (i,j) \in U \setminus U_0, \quad (6)$$

Для экстремальных линейных неоднородных задач указанного класса при известных значениях параметров в [7, 8] разработаны опорные методы решения, которые основаны на применениии конструктивной теории декомпозиции.

II. Математическая модель обратной задачи

В обратной задаче оптимизации необходимо скорректировать вектор стоимости $c = (c_{ij}^k,\, (i,j) \in U,\, k \in K(i,j))$ так, чтобы допустимое решение $x^0 = (x_{ij}^{k0},\, (i,j) \in U,\, k \in K(i,j))$ стало оптимальным решением скорректированной задачи с новыми значениями компонент вектора стоимости. Согласно [9], в зависимости от значений x_{ij}^{k0}, $(i,j) \in U$, $k \in K(i,j)$ заданного допустимого решения x^0, определим множества: 1) если $\sum_{k\in K_0(i,j)} x_{ij}^{k0} = d_{ij}^{k0}$ имеем:

$$B_1 = \left\{(i,j)^k : (i,j) \in U_0, x_{ij}^{k0} = 0\right\};$$
$$B_2 = \left\{(i,j)^k : (i,j) \in U_0, x_{ij}^{k0} \ne 0\right\};$$

2) если $\sum_{k\in K_0(i,j)} x_{ij}^{k0} < d_{ij}^{k0}$ имеем:

$$B_3 = \left\{(i,j)^k : (i,j) \in U_0, x_{ij}^{k0} = 0\right\};$$
$$B_4 = \left\{(i,j)^k : (i,j) \in U_0, x_{ij}^{k0} \ne 0\right\};$$

Определим множества R_1, R_2, R_3, L_1, L_2:

$$R_1 = \left\{(i,j)^k, k \in K_1(i,j),\, (i,j) \in U : x_{ij}^{k0} = 0\right\};$$
$$R_2 = \left\{(i,j)^k, k \in K_1(i,j),\, (i,j) \in U : x_{ij}^{k0} = d_{ij}^k\right\};$$
$$R_3 = \left\{(i,j)^k : 0 < x_{ij}^{k0} < d_{ij}^k\right\},$$
$$k \in K_1(i,j),\, (i,j) \in U;$$
$$L_1 = \left\{(i,j)^k : x_{ij}^{k0} = 0\right\},$$
$$k \in K(i,j) \setminus K_1(i,j),\, (i,j) \in U \setminus U_0;$$
$$L_2 = \left\{(i,j)^k : x_{ij}^{k0} > 0\right\},$$
$$k \in K(i,j) \setminus K_1(i,j),\, (i,j) \in U \setminus U_0.$$

Обратная задача оптимизации для рассматриваемой неоднородной задачи потокового программирования имеет вид:

$$\sum_{(i,j)\in U}\sum_{k\in K(i,j)} (\alpha_{ij}^k + \beta_{ij}^k) \longrightarrow \min$$
$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p - \nu_{ij} \le c_{ij}^k + \alpha_{ij}^k - \beta_{ij}^k,$$
$$\nu_{ij} \ge 0,\, (i,j)^k \in B_1, k \in K_0(i,j), (i,j) \in U_0;$$
$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{p} r_p - \nu_{ij} = c_{ij}^k + \alpha_{ij}^k - \beta_{ij}^k,$$
$$\nu_{ij} \ge 0,\, (i,j)^k \in B_2, k \in K_0(i,j), (i,j) \in U_0;$$
$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p \le c_{ij}^k + \alpha_{ij}^k - \beta_{ij}^k,$$
$$(i,j)^k \in B_3, k \in K_0(i,j), (i,j) \in U_0;$$
$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p = c_{ij}^k + \alpha_{ij}^k - \beta_{ij}^k,$$
$$(i,j)^k \in B_4, k \in K_0(i,j), (i,j) \in U_0;$$
$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{p} r_p \le c_{ij}^k + \alpha_{ij}^k - \beta_{ij}^k, (i,j)^k \in R_1;$$
$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{p} r_p - \omega_{ij}^k = c_{ij}^k + \alpha_{ij}^k - \beta_{ij}^k,$$
$$\omega_{ij}^k \ge 0,\ (i,j)^k \in R_2;$$
$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{p} r_p = c_{ij}^k + \alpha_{ij}^k - \beta_{ij}^k, (i,j)^k \in R_3;$$
$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{p} r_p \le c_{ij}^k + \alpha_{ij}^k - \beta_{ij}^k, (i,j)^k \in L_1;$$
$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{p} r_p = c_{ij}^k + \alpha_{ij}^k - \beta_{ij}^k, (i,j)^k \in L_2;$$
$$\alpha_{ij}^k \ge 0,\ \ \beta_{ij}^k \ge 0, (i,j) \in U, k \in K(i,j).$$

III. Заключение

Построена математическая модель обратной задачи для изменения параметров целевой функции для линейной неоднородной задачи потокового программирования с взаимосвязью потоков различных типов и с учетом ограничений на пропускные способности дуг с применением l_1 нормы.

1. Burton D., Toint Ph. L. // Mathematical Programming. – 1992. Vol. 53. – P. 45–61.
2. Ahuja R. K., Orlin J. B. // Operation Research. – 2001. Vol. 49. – P. 771–783.
3. Zhang J., Zhang Li. // Applied Math. and Opt. – 2010. Vol. 61. – No.1. – P. 57–83.
4. Hladik M. // Eur. J. Oper. Res. – 2010. 205(1). – P. 42–46.
5. Xu C., Xu X. M. // J. Systems Science and Complexity. – 2013. Vol. 26. No. 3. – P. 350–364.
6. Jain S., Arya N. // IOSR Journal of Mathematics. – 2013. Vol. 5. – No.4. – P. 24–27.
7. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. Ч. 3. Специальные задачи. Минск, 1980.
8. Пилипчук, Л.А. Линейные неоднородные задачи потокового программирования. Минск, 2009.
9. Пилипчук, Л.А. Методы построения оптимальных параметров целевой функции в неоднородных сетевых задачах линейной оптимизации с неточными данными / Л.А. Пилипчук // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины.– 2016. – №3 (96). С. 113–117.