Аналитические свойства решений трехмерной нелинейной динамической системы (Analytical properties of solutions of three-dimensional nonlinear dynamical system)

В. В. Цегельник (V. V. Tsegel'nik)

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Республика Беларусь

tsegvv@bsuir.by

Система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y(x^2 + z - 1) + ax, \\ \dot{y} = x(-x^2 + 3z + 1) + ay, \\ \dot{z} = -2z(b + xy) \end{cases} \tag{1}$$

(система Рабиновича–Фабриканта [1] с неизвестными функциями x, y, z независимой переменной t (a, b — произвольные фиксированные параметры)) моделирует процесс нелинейного взаимодействия волн в плазме. Она оказывается полезной при описании процессов, протекающих в вязкой среде (жидкой или газообразной), при возникновении волн Толлмина–Шлихтинга и др. При стандартных значениях $a = 0.87$, $b = 1.1$ в модели (1) наблюдается детерминированный хаос, а ее притягивающее множество представляет собой странный аттрактор [2].

Новые качественные свойства решений системы (1) получены в [3] (смотри также [4]) с учетом новых подходов к исследованию динамических систем, изложенных в [5]. В частности, доказано существование в (1) скрытых хаотических аттракторов при определенных значениях a и b.

На основании известной гипотезы [6] о несовместимости выполнения для системы свойства Пенлеве с хаотичностью ее поведения, актуальным является исследование аналитических свойств решений системы (1). Под свойством Пенлеве (в предположении, что независимая переменная t является комплексной) будем понимать отсутствие у общего решения системы (1) подвижных критических особых точек [7, 8], т.е. возможность наличия только подвижных полюсов.

Одним из алгоритмов, обеспечивающих проверку выполнения условий, необходимых для наличия у дифференциального уравнения свойства Пенлеве является формальный тест Пенлеве [9, 10] (алгоритм Ковалевской–Гамбье [11]).

Теорема 1. *Система* (1) *ни при каких значениях параметров* a, b *не проходит формальный тест Пенлеве и, следовательно, не обладает свойством Пенлеве.*

Доказательство утверждения следует из того, что для системы (1) ни при каких a и b не выполняется первый (из трех) шаг формального теста Пенлеве.

Система (1) в общем случае обладает симметрией $x(t) \to -x(t)$, $y(t) \to -y(t)$, $z(t) \to z(t)$.

Если $a = b = 0$, то (1) сохраняет свой вид при следующих преобразованиях:

а) $x(t) \to -x(-t), y(t) \to y(-t), z(t) \to z(-t)$.

б) $x(t) \to x(-t), y(t) \to -y(-t), z(t) \to z(-t)$.

Теорема 2. *Система* (1) *при* $a = 0$ *имеет решение вида*

$$x = \frac{x_{-1}}{\tau^{\frac{1}{2}}} + x_1\tau^{\frac{1}{2}} + x_3\tau^{\frac{3}{2}} + \ldots, \tag{2}$$

$$y = \frac{ix_{-1}}{\tau^{\frac{1}{2}}} + y_1\tau^{\frac{1}{2}} + y_3\tau^{\frac{3}{2}} + \ldots, \tag{3}$$

$$z = z_0\tau + z_1\tau^2 + \ldots, \tag{4}$$

где $\tau = t - t_0$, $x_{-1}^2 = \frac{i}{2}$, $i^2 = -1$, z_0, $x_1(y_1)$, t_0 *— произвольные постоянные, причем* $\frac{3}{2}x_1 - \frac{iy_1}{2} = -ix_{-1}$. *Ряды* (2)–(4) *сходятся в области* $0 < |\tau| < \rho$, $\rho > 0$.

В том, что разложения (2)–(4) зависят от трех произвольных постоянных, легко убедиться непосредственной подстановкой рядов в уравнения системы (1). Для доказательства сходимости разложений (2)–(4) достаточно ввести преобразования

$$\tau = s^2, x = \frac{1}{s}(x_{-1} + u_1(s)), y = \frac{1}{s}(ix_{-1} + u_2(s)), z = s^2(z_0 + u_3(s)),$$

переводящие систему (1) в систему Брио и Буке и воспользоваться следующим результатом (см. теорему A.12 из [12, с. 272]):

Если система Брио и Буке

$$su_j' = f_j(s, u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad ' = \frac{d}{ds} \tag{5}$$

с аналитическими в некоторой окрестности точки $s = u_1 = \dots = u_n = 0$ функциями f_j, $j = 1, 2, \dots, n$, с условиями $f_j(0, \dots, 0) = 0$, допускает формальное решение

$$u_j(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} s^k, \quad c_{jk} \in \mathbb{C}, \tag{6}$$

то разложение (6) сходится в области $0 < |s| < \rho_1$, $\rho_1 > 0$.

Теорема 3. *Система* (1) *в случае* $a = -b$ *имеет неавтономный первый интеграл* $x^2 + y^2 + 4z = Ce^{2at}$, *где* C *— произвольная постоянная.*

Следствие. *Система* (1) *при* $a = b = 0$ *имеет интеграл энергии* [1] $x^2 + y^2 + 4z = E$, *где* E *— произвольная постоянная.*

Теорема 4. *Система* (1) *в случае* $a = b = 0$ *не обладает хаотическим поведением.*

В силу следствия систему (1) можно свести к двумерной автономной системе. Но согласно [13] решения автономных систем с двумерным фазовым пространством не могут быть хаотичными.

Список литературы

1. *Рабинович М.И., Фабрикант А.Л.* Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах // ЖЭТФ. 1979. Т. 77, №2. С. 617–629.
2. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит. 2006.
3. *Danca M.-F., Feskan M., Kuznetsov N., Chen G.* Looking more closely to the Rabinovich–Fabrikant system // Int. J. Bifurc. Chaos. 2016. V. 26, N 2. Art. 165 0038.
4. *Danca M.-F., Chen G.* Bifurcation and Chaos in a complex model of dissipative medium // Int. J. Bifurc. Chaos. 2004. V. 14. P. 3409–3447.
5. *Леонов Г.А., Кузнецов Н.В.* Скрытые колебания в динамических системах: шестнадцатая проблема Гильберта, гипотезы Айзермана и Калмана, скрытые аттракторы в контурах Чуа // Современная математика. Фундаментальные направления. 2012. Т. 45. С. 105–121.
6. *Гориэли А.* Интегрируемость и сингулярность. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед. 2006.
7. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ГНТИУ, 1939.
8. *Громак В.И., Лукашевич Н.А.* Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск: Университетское. 1990.

9. *Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. II // J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 715–721.
10. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М.: Мир. 1987.
11. *Ковалевская С.В.* Научные работы. М.: АН СССР. 1948.
12. *Gromak V.I., Laine I., Shimomura S.* Painlevé differential equations in the complex plane. Berlin: de Gruyter, 2002.
13. *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир. 1990.

Поведение резольвенты краевых задач в областях с трещинами (Resolvent behavior of boundary value problems on domains with cracks)

И. В. Цылин (I. V. Tsylin)

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

ioxlxoi@yandex.ru

Пусть M — гладкое связное многообразие с римановой метрикой g, $\mathcal{A}$ — эллиптический оператор

$$\nabla^* (A\nabla u + au) + b\nabla u + cu, \tag{1}$$

Введем оператор, решающий первую краевую задачу для оператора $\mathcal{A}$ в области Ω

$$\mathcal{G}_\Omega \colon H^{-1}(M) \to \mathring{H}^1(M).$$

Определение 1. Для пары фиксированных атласов $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ многообразия M положим, что $(\kappa_U, U) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow (\kappa_U, V) \in \mathcal{U}$, $V \Subset U$, введем расстояние $d_{\mathcal{U}}$ между произвольными множествами X и Y следующим образом

$$d_{\mathcal{U}}(X,Y) = \sup_{\mathcal{U}} \inf_{\nexists\delta\Rightarrow\infty} \{\delta\,|\kappa_U(X\cap U) + \delta e_d \supset \kappa_U(Y\cap V),$$
$$\kappa_U(X\cap V) - \delta e_d \subset \kappa_U(Y\cap U)\}\,.$$