

С. С. Каянович

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь,

### КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СТЕРЖНЕВОГО ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ

В статье [1] доказано существование решений модели стержневого течения на каждом временном слое  $t_m = m\tau$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ . В данной работе получены априорные оценки этих решений, которые не зависят от  $\tau$  и позволяют выполнить предельный переход при  $\tau \rightarrow 0$ .

*Ключевые слова:* разрешимость, предельный переход, априорные оценки, гладкость, срезающая функция.

S. S. Kayanovich

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus,

### BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR PLUG FLOW IN THE CHANNEL

In the article [1], we have proved the existence of solutions for a model of plug flow at each time step  $t_m = m\tau$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ . In this article, *a priori* estimates of these solutions have been obtained, which do not depend on  $\tau$  and allow passing to the limit as  $\tau \rightarrow 0$ .

*Keywords:* solvability, passage to the limit, *a priori* estimates, smoothness, cut-off function.

**Введение.** Исследование вопроса о разрешимости модели стержневого течения было начато в работе [1]. Пространство изменения переменных  $(x, t)$  разбивалось плоскостями  $t_m = m\tau$  на слои, производная по времени, которая присутствует в одном из уравнений, заменялась разностной производной, и доказывалось (при достаточно малом  $\tau$ ) однозначная разрешимость полученной системы на каждом временном слое.

Чтобы доказать разрешимость рассматриваемой системы в пространстве  $(x, t)$ , необходимо обосновать возможность выполнения предельного перехода при  $\tau \rightarrow 0$ . Для этого в данной работе устанавливаются априорные оценки самого решения краевой задачи и его производных первого и второго порядков. В случае одного уравнения краевые задачи исследовались рядом авторов [2–9]. В настоящей статье рассматривается система из трех уравнений, для одного из которых оказались полезными способы исследования, подобные тем, что были применены в вышеуказанных работах.

Отметим, что константы, которые появляются в ходе исследования и ограничивают модули самого решения и его производных, не зависят от  $\tau$  и не будут увеличиваться при  $\tau \rightarrow 0$ . Для того чтобы данную статью можно было читать без обращения к [1], здесь сохранен необходимый минимум информации из указанной работы, но при этом внесены изменения: функция  $\zeta$  теперь обозначается  $\zeta'$ , константа  $\beta - \beta_1$ . Также усилены требования к гладкости функций: если в [1] полагалось  $l \geq 3$ , то теперь  $l \geq 5$ .

**Постановка задачи.** Примем следующие обозначения:  $x = (x_1, x_2)$ ,  $0 \leq x_1 \leq L$ ,  $0 \leq x_2 \leq H$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $\Omega = (0, L) \times (0, H)$ ,  $S_1 = [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = 0]$ ,  $S_2 = [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = H]$ ,  $S_{iT} = S_i \times [0, T]$ ,  $i = 1, 2$ ,  $S_3 = [x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq H]$ ,  $S_4 = [x_1 = L, 0 \leq x_2 \leq H]$ ,  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$  – граница  $\Omega$ ,  $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$ ,  $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$ ,  $S_T = S \times [0, T]$ ,  $\bar{\Omega}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$ ,  $\bar{\Omega}$  – область, ограниченная кривой  $\bar{S}$ ,  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega} \cup \bar{S}$ ,  $\bar{S} = \bar{S}_1 \cup \bar{S}_2 \cup \bar{S}_3 \cup \bar{S}_4$ ,

$$\text{где } \bar{S}_1 = \left[ 0 \leq x_1 \leq \frac{\delta}{2}, x_2 = \theta_1(x_1) \right] \cup \left[ \frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L - \frac{\delta}{2}, x_2 = 0 \right] \cup \left[ L - \frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L, x_2 = \varphi_1(x_1) \right],$$

$$\bar{S}_2 = \left[ 0 \leq x_1 \leq \frac{\delta}{2}, x_2 = \theta_2(x_1) \right] \cup \left[ \frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L - \frac{\delta}{2}, x_2 = H \right] \cup \left[ L - \frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L, x_2 = \varphi_2(x_1) \right],$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_3 &= [x_1 = 0, \theta_1(0) \leq x_2 \leq \theta_2(0)], \quad \tilde{S}_4 = [x_1 = L, \varphi_1(L) \leq x_2 \leq \varphi_2(L)], \quad \tilde{\Omega}_T = \tilde{\Omega} \times [0, T], \quad \tilde{S}_T = \tilde{S} \times [0, T], \\ \bar{\Omega}_T &= \bar{\Omega} \times [0, T], \quad \Omega_1 = [0 \leq x_1 \leq L, 0 < x_2 \leq \varepsilon], \quad \Omega_2 = [0 \leq x_1 \leq L, H - \varepsilon \leq x_2 < H], \\ \Omega_{iT} &= \Omega_i \times [0, T], \quad i = 1, 2, \quad \Omega' = [0 \leq x_1 \leq L, \varepsilon_1 < x_2 < H - \varepsilon_1], \quad \Omega'_T = \Omega' \times [0, T], \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}, \\ S'_1 &= [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = \varepsilon_1], \quad S'_2 = [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = H - \varepsilon_1], \quad S'_{iT} = S'_i \times [0, T], \quad i = 1, 2, \\ \theta_i(x_1), \varphi_i(x_1), \quad (i = 1, 2) &- \text{строго монотонные функции. Пусть, кроме того,} \\ \theta_1(0) = \varphi_1(L) = \varepsilon_1, \quad \theta_2(0) = \varphi_2(L) = H - \varepsilon_1, \quad \theta_1\left(\frac{\delta}{2}\right) = \varphi_1\left(L - \frac{\delta}{2}\right) = 0, \quad \theta_2\left(\frac{\delta}{2}\right) = \varphi_2\left(L - \frac{\delta}{2}\right) = H. \end{aligned}$$

Считаем, что  $\theta_2$  симметрична  $\theta_1$ , а  $\varphi_2 - \varphi_1$  относительно прямой  $x_2 = \frac{H}{2}$ . Таким образом, области  $\bar{\Omega}, \tilde{\Omega}$  симметричны относительно той же прямой  $x_2 = \frac{H}{2}$ . Здесь  $\varepsilon, \delta$  – малые положительные числа,  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ .

На рис. 1 изображен канал и обозначены некоторые участки границ.

Для постановки задачи и получения априорных оценок нам потребуется срезающая функция, которую определим так:

$$\zeta(x) = \zeta'(x)\zeta''(x),$$

где  $\zeta'(x) = 1$ , если  $\delta \leq x_1 \leq L - \delta, 0 \leq x_2 \leq H$ ,

$$0 \leq \zeta'(x) \leq 1,$$

если  $\left[\frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq \delta\right] \cup \left[L - \delta \leq x_1 \leq L - \frac{\delta}{2}\right], 0 \leq x_2 \leq H$ ,

$$\zeta'(x) = 0,$$

если  $\left[0 \leq x_1 \leq \frac{\delta}{2}\right] \cup \left[L - \frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L\right], [\theta_1(x_1) \leq x_2 \leq \theta_2(x_1)] \cup [\varphi_1(x_1) \leq x_2 \leq \varphi_2(x_1)]$ ,

$$\zeta''(x) = 1,$$

если  $0 \leq x_1 \leq L, \varepsilon \leq x_2 \leq H - \varepsilon$ ,

$$0 \leq \zeta''(x) \leq 1,$$

если  $[\varepsilon_1 \leq x_2 \leq \varepsilon] \cup [H - \varepsilon \leq x_2 \leq H - \varepsilon_1], 0 \leq x_1 \leq L$ ,

$$\zeta''(x) = 0,$$

$$[0 \leq x_2 \leq \varepsilon_1] \cup [H - \varepsilon_1 \leq x_2 \leq H], \left[\theta_1^{-1}(x_2) \leq x_1 \leq \varphi_1^{-1}(x_2)\right] \cup \left[\theta_2^{-1}(x_2) \leq x_1 \leq \varphi_2^{-1}(x_2)\right].$$

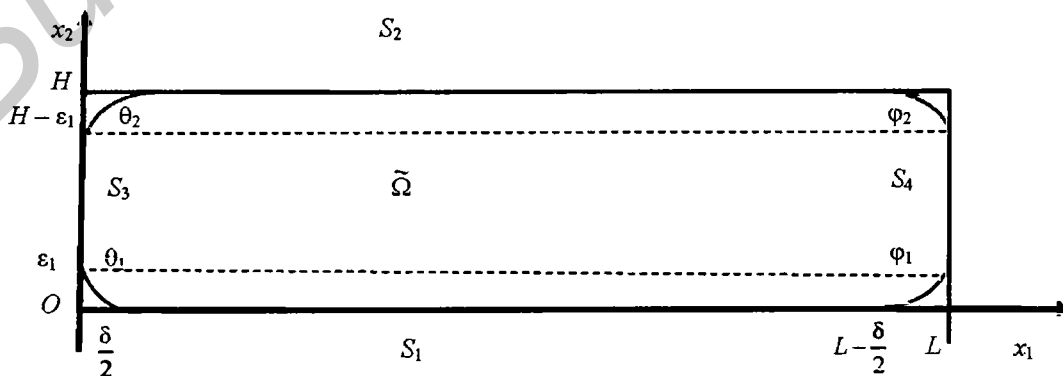


Рис. 1

Fig. 1

Будем предполагать, что  $\zeta(x) \in C_{l,\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $\bar{S} \in C_{l,\alpha}$ . Здесь  $l \geq 5$ ,  $\alpha \in (0,1)$ , а классы функций  $C_{l,\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $C_{l,\alpha}(S)$  и смысл принадлежности  $S \in C_{l,\alpha}$  определены в [8].

Рассмотрим задачу (плотность  $\rho = 1$ ):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^2 u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (x,t) \in \bar{\Omega}_T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \quad (x,t) \in \bar{\Omega}_T, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0, \quad (x,t) \in \bar{\Omega}_T, \quad (3)$$

$$u_1|_{t=0} = \bar{b}(x), \quad \bar{b}|_{S_1 \cup S_2} = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad u_1|_{\bar{S}_T} = \tilde{\psi}_1(s,t), \quad (s,t) \in \bar{S}_T, \quad (4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n}|_{\bar{S}_T} = \zeta(s) \sum_{j=1}^2 \omega_j(s,t) \cos \alpha_j, \quad (s,t) \in \bar{S}_T, \quad (5)$$

$$u_2(s,0)|_{S_1 \cup S_2} = 0, \quad (6)$$

$$\int_0^H \frac{\partial \bar{b}(x_1, z)}{\partial x_1} dz = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (7)$$

где  $u_1$ ,  $u_2$  – продольная и поперечная компоненты скорости текущей жидкости соответственно,  $p$  – давление жидкости.

При этом для уравнения (2) (при  $t > 0$ ) задача ставится следующим образом (функция  $u_1$  перед этим доопределяется при соответствующем значении времени в четырех криволинейных треугольниках, расположенных по углам  $\bar{\Omega}_T$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \quad (x,t) \in \Omega_{1T}, \quad u_2|_{S_{1T}} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \quad (x,t) \in \Omega_{2T}, \quad u_2|_{S_{2T}} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad (x,t) \in \Omega'_{1T}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2}|_{S'_{1T}} = g_1(x_1, \varepsilon_1, t), \quad u_2|_{S'_{2T}} = g_2(x_1, H - \varepsilon_1, t), \end{aligned}$$

где

$$g_1(x_1, \varepsilon_1, t) = - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{S'_{1T}}, \quad g_2(x_1, H - \varepsilon_1, t) = - \int_H^{H-\varepsilon_1} \frac{\partial u_1(x_1, z, t)}{\partial x_1} dz.$$

Такая постановка задачи позволяет найти решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям прилипания на обеих стенках канала.

В условиях (4) и (5)  $\tilde{\psi}_1(s,t) \in C_{l,\alpha}(\bar{S}_T)$ ,  $\tilde{\psi}_1|_{t=0} = \bar{b}(s)$ ,  $x = s \in \bar{S}$ ,  $\tilde{\psi}_1 = 0$  при  $\frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L - \frac{\delta}{2}$ ,  $[x_2 = 0] \cup [x_2 = H]$ ,  $t \in [0, T]$ ;  $\frac{\partial p}{\partial n}|_{\bar{S}_T}$  – производная по направлению вектора  $\bar{n}$  внутренней нормали к  $\bar{S}_T$ ;  $\alpha_i$  – угол между вектором  $\bar{n}$  и осью  $Ox_i$ ;  $\omega_i(s,t) = \nu \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^2 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial t}$ ,  $(s,t) \in \bar{S}_T$ , при  $t = 0$   $\frac{\partial u_i}{\partial t} = 0$ .

В работе [11] предложен численный метод решения задачи (1)–(7), при реализации которого были получены распределения поперечной и продольной компонент скорости течения жидкости, а также распределение давления. Сравнение последнего проводилось по длине канала (результаты представлены на рис. 3, а, б в [11]).

Представим распределения поперечной и продольной компонент скорости, найденные в [11] и позволяющие четко определить понятие стержневого течения жидкости (рис. 2 и 3 соответственно). Обозначения, принятые в данной работе, находятся в следующих соотношениях:

$$x_2 = y + h, \quad u_2 = v, \quad H = 2h, \quad x_1 = x, \quad u_1 = u.$$

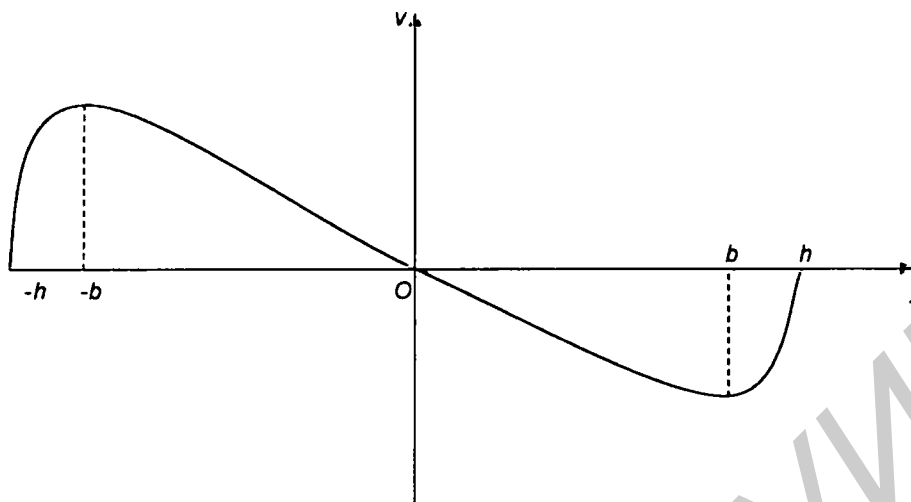


Рис. 2. Распределение поперечной компоненты скорости по ширине канала  
 Fig. 2. Distribution of the transverse velocity component over the channel width

На рис. 2 представлено распределение поперечной компоненты скорости  $u_2$  ( $u_2 = v$ ) в направлении координаты  $x_2$  ( $x_2 = y$ ) в сечении канала  $x_1 = c$  ( $0 < c < L$ ).

О п р е д е л е н и е 1. Область течения, в которой  $\frac{\partial v}{\partial y} < 0$  ( $-b < y < b$ ), называется *стержнем течения* (см. рис. 2).

На рис. 3 показано распределение продольной компоненты скорости  $u_1$  ( $u_1 = u$ ) в направлении координаты  $x_2 = y$  в двух сечениях канала  $x_1 = c_1$  (кривая 1) и  $x_1 = c_2$  (кривая 2), где  $0 \leq c_1 < c_2 < L$ . Как видим, при движении по каналу в направлении от входа к выходу пограничные слои расширяются, а ядро течения сужается. В масштабе рис. 3 при произвольном значении  $x_1 = c$ , где  $0 < c < L$ , точки  $y = h$ ,  $y = b$  (а также точки  $y = -h$ ,  $y = -b$ ) почти сливаются. Значит, стержень включает в себя ядро течения и значительные части пограничных слоев, образующихся около стенок канала, т. е. стержень течения занимает почти всю его область, кроме тоненьких оболочек между ним и каждой из стенок.

О п р е д е л е н и е 2. Течение жидкости, которое имеет структуру, представленную на рис. 2, 3, называется *стержневым течением*.

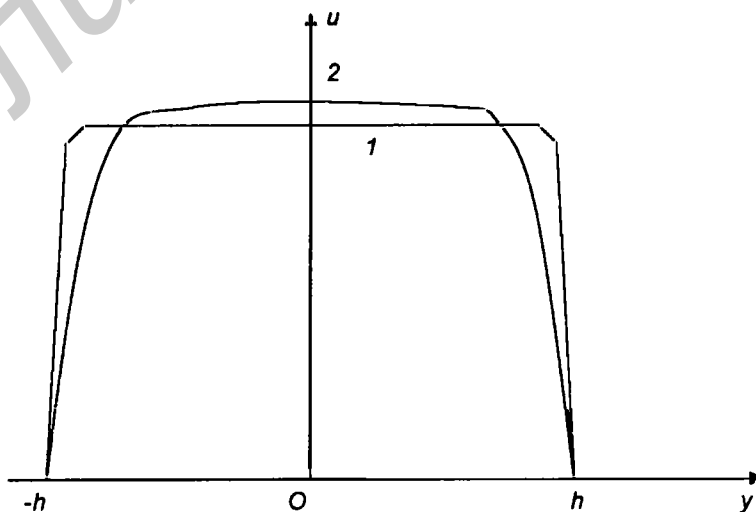


Рис. 3. Распределение продольной скорости по ширине канала:  
 кривая 1 – сечение на входе в канал; кривая 2 – сечение на некотором расстоянии от входа в канал

Fig. 3. Distribution of the transverse velocity component over the channel width:  
 curve 1 – cross section at the channel inlet; curve 2 – cross section at some distance from the channel inlet

Переходим к задаче (1)–(7). При  $t = 0$  функция  $u_1(x, 0) = \bar{b}(x)$  задана. Найдем при  $t = 0$  функцию  $u_2$ , решая (2) с граничным условием  $u_2|_{S_1} = 0$  ( $0 \leq x_1 \leq L, 0 < x_2 \leq H$ ) [1].

Зная функции  $u_1, u_2$ , решаем (3) с условием ( $t = 0$ )

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\tilde{S}_T} = \zeta(s) \sum_{j=1}^2 \omega_j(s, t) \cos \alpha_j, \quad (s, t) \in \tilde{S}_T,$$

где  $\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\tilde{S}_T}$  – производная по направлению вектора  $\bar{n}$  внутренней нормали к  $\tilde{S}$ ,  $\alpha_i$  – угол между вектором  $\bar{n}$  и осью  $Ox_p$ ,

$$\omega_i = v \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^2 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

Разобьем пространство  $(x, t)$  плоскостями  $t_m = m\tau$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, M$ , на слои и предположим, для сокращения записи, что  $M\tau = T$ . Пусть  $\tilde{\Omega}_m$  есть сечение  $\tilde{\Omega}_T$  плоскостью  $t_m = m\tau$ ,  $\tilde{S}_m$  – его граница  $\tilde{\Omega}_m = \tilde{\Omega}_m \cup \tilde{S}_m$ .

На каждом слое  $\tilde{\Omega}_m$  определим функции, которые будем обозначать  $u_{1,m}, u_{2,m}, p_m, m = \overline{0, M}$ . Выше было найдено решение при  $t = 0$ , т. е. решение  $u_{1,0}, u_{2,0}, p_0$ . Для нахождения функции  $u_1$  на слоях  $\tilde{\Omega}_m$  полагаем:

$$u_1|_{\tilde{S}_T} = \tilde{\psi}_1(s, t), \quad (s, t) \in \tilde{S}_T,$$

где  $\tilde{\psi}_1(s, t) \in C_{l,\alpha}(\tilde{S}_T)$ ,  $\tilde{\psi}_1|_{t=0} = \bar{b}(s)$ ,  $x = s \in \tilde{S}$ ;  $\tilde{\psi}_1 = 0$  при  $\frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L - \frac{\delta}{2}, [x_2 = 0] \cup [x_2 = H], t \in [0, T]$ , и преобразуем задачу для  $u_1$  в задачу с нулевым граничным условием. Вводя в рассмотрение функцию  $f(x, t)$ , удовлетворяющую при любом  $t \in [0, T]$  условию  $f \in C_{l+1,\alpha}(\tilde{\Omega})$ ,  $f|_{\tilde{S}_T} = \tilde{\psi}_1|_{\tilde{S}_T}$ , и новую искомую функцию  $w(x, t)$ , удовлетворяющую равенству  $u_1(x, t) = w(x, t) + f(x, t)$ , для  $w(x, t)$  получаем задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} - v \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + (w + f) \frac{\partial w}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_1} w + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + F(x, t) + \frac{\partial p}{\partial x_1} &= 0, \\ w|_{\tilde{S}_T} &= 0, \quad w|_{t=0} = \bar{b}(x) - f|_{t=0}, \quad x \in \tilde{\Omega}, \quad \bar{b}(x) - f|_{t=0} = 0, \quad x = s \in \tilde{S}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$F(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t} - v \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} + f \frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Вводя обозначения  $g_T(x, t_m) = \frac{1}{\tau} (g_m - \overset{\vee}{g}_m)$ ,  $g_m = g(x, t_m)$ ,  $\overset{\vee}{g}_m = g(x, t_{m-1})$ , полагая  $w_m = u_{1,m} - f_m$  и заменяя  $\frac{\partial w}{\partial t}$  на разностную производную  $w_T(x, t_m)$ , запишем уравнение (8) в виде

$$\begin{aligned} v \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 w_m}{\partial x_k^2} - (w_m + f_m) \frac{\partial w_m}{\partial x_1} - u_{2,m} \frac{\partial w_m}{\partial x_2} - \frac{\partial f_m}{\partial x_1} w_m - u_{2,m} \frac{\partial f_m}{\partial x_2} - \frac{1}{\tau} w_m + \frac{1}{\tau} \overset{\vee}{w}_m - F_m - \frac{\partial \overset{\vee}{p}_m}{\partial x_1} &= 0, \\ w_m|_{\tilde{S}_m} &= 0, \quad F_m = f_T(x, t_m) - v \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_k^2} + f_m \frac{\partial f_m}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Будем полагать, что в  $\tilde{\Omega}_T$  функция  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  полуограничена снизу, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \geq \beta_1 = \text{const}. \quad (10)$$

Тогда при выполнении неравенства  $\frac{1}{\tau} + \beta_1 > 0$  уравнение (9) с нулевым граничным условием при  $m = 1$  имеет единственное решение  $w_1 \in C_{l,\alpha}(\bar{\Omega}_1)$ . Зная  $w_1$ , из соотношения  $u_1 = w + f$  находим  $u_{1,1} \in C_{l,\alpha}(\bar{\Omega}_1)$ . Продолжим  $u_{1,1}$ , найденную на  $\bar{\Omega}_1$ , на всю область  $\bar{\Omega}$ , доопределив ее в четырех криволинейных треугольниках, расположенных по углам  $\bar{\Omega}$ . Рассмотрим, например, треугольник с вершинами  $(0,0), (0,\varepsilon_1), \left(\frac{\delta}{2}, 0\right)$ . Его криволинейная сторона задается уравнением  $x_2 = \theta_1(x_1)$  ( $x_1 = \theta_1^{-1}(x_2)$ ). Полагаем  $u_{1,1}(x) = u_{1,1}(x_1, x_2) = u_{1,1}(\theta_1^{-1}(x_2), x_2)$  при  $0 \leq x_1 \leq \theta_1^{-1}(x_2), 0 \leq x_2 \leq \varepsilon_1$ . На остальные криволинейные треугольники продолжение осуществляется аналогично. Функцию  $u_{1,1}(x)$  ( $t = \tau$ ), определенную указанным образом на всей  $\bar{\Omega}$ , обозначаем  $u_1(x)$  и решаем уравнение (2) для нахождения  $u_2(x)$ . Отметим, что условие вида (7) для  $u_1(x)$  в общем случае не выполняется и не удается найти функцию  $u_2$ , удовлетворяющую условию  $u_2|_{S_1 \cup S_2} = 0$ , решая только уравнение (2).

Поэтому решаем (2) в областях  $\Omega_1 = [0 \leq x_1 \leq L, 0 < x_2 \leq \varepsilon]$  и  $\Omega_2 = [0 \leq x_1 \leq L, H - \varepsilon \leq x_2 < H]$  с граничными условиями

$$u_2|_{x_2=0} = 0, u_2|_{x_2=H} = 0.$$

Для любого  $x_2: 0 < x \leq \varepsilon$  получаем:

$$u_2(x_1, x_2) = - \int_0^{x_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz, u_2(x_1, H - x_2) = - \int_H^{H-x_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz.$$

Затем интегрируем уравнение

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

в области  $[0 \leq x_1 \leq L, \varepsilon_1 < x_2 < H - \varepsilon_1], \left(\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}\right)$ , с граничными условиями

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=\varepsilon_1} = - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_2=\varepsilon_1}, u_2|_{x_2=H-\varepsilon_1} = - \int_H^{H-\varepsilon_1} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz.$$

Зная функции  $u_1, u_2$ , решаем (3) с условием ( $t = \tau$ ):

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\bar{S}} = \zeta(s) \sum_{j=1}^2 \omega_j(s) \cos \alpha_j, s \in \bar{S}, \tag{11}$$

где  $\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\bar{S}}$  – производная по направлению вектора  $\bar{n}$  внутренней нормали к  $\bar{S}$ ,  $\alpha_i$  – угол между вектором  $\bar{n}$  и осью  $Ox_i$ ,  $\omega_i = v \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^2 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial t}$ , а  $\frac{\partial u_i}{\partial t}$  заменена разностной производной

$$u_{i\bar{t}}(x, t_1) = \frac{1}{\tau} \left( u_{i,1}^{\check{}} - u_{i,1}^{\vee} \right).$$

Итак, при  $t = t_1 = \tau$  получены функции  $w_1, u_1, u_2, p$ , т. е. найдены  $w_1, u_{1,1}, u_{2,1}, p_1$  на слое  $\bar{\Omega}_1$ . Переходим на слой  $\bar{\Omega}_2$  и находим  $w_2, u_{1,2}, u_{2,2}, p_2$  и т. д.

**Оценка модуля решения  $w_m$ .** Рассматривая уравнение (9), опуская нижний индекс  $m$  и вводя обозначения  $\frac{\partial z}{\partial x_i} = z_{x_i}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} = z_{x_i x_i}, \check{w} + f = \bar{f}, \check{u}_2 f_{x_2} + F + \check{p}_{x_1} = d$ , получаем

$$w_i - v \sum_{k=1}^2 w_{x_k x_k} + \bar{f} w_{x_1} + \check{u}_2 w_{x_2} + f_{x_1} w + d = 0. \tag{12}$$

В уравнении (12) делаем замену  $w = ge^{\beta t}$  ( $t = t_m$ ) и замечаем, что

$$w_t = \frac{1}{\tau} \left( ge^{\beta t} - \overset{\vee}{g} e^{\beta(t-\tau)} \pm ge^{\beta(t-\tau)} \right) = \frac{1}{\tau} e^{\beta(t-\tau)} \left( g - \overset{\vee}{g} \right) + \frac{1}{\tau} ge^{\beta t} (1 - e^{-\beta\tau}).$$

Получаем

$$g_t e^{-\beta t} - \overset{\vee}{g} \sum_{k=1}^2 g_{x_k x_k} + \bar{f} g_{x_1} + \overset{\vee}{u}_2 g_{x_2} + g \left( \frac{1 - e^{-\beta\tau}}{\tau} + f_{x_1} \right) + \frac{d}{e^{\beta t}} = 0. \quad (13)$$

Легко показать, что при  $\beta = \text{const} > 0$   $\frac{1 - e^{-\beta\tau}}{\tau} > \beta e^{-\beta\tau}$  и, если  $\tau_1 = \text{const} > 0$  такая, что верно неравенство  $\frac{1}{\tau_1} + \frac{e^2}{2} \beta_1 > 0$ , то существует  $\beta > 0$ , например  $\beta = \frac{2}{\tau_1}$ , и при  $0 < \tau < \tau_1$  верна цепочка неравенств (см. (10))

$$\beta e^{-\beta\tau} + f_{x_1} \geq \beta e^{-\beta\tau} + \beta_1 > \beta e^{-\beta\tau_1} + \beta_1 > 0. \quad (14)$$

Для функции  $g$ , удовлетворяющей уравнению (13), возможны три случая: а) ее максимум в области  $\tilde{\Omega}_T$  достигается при  $t = 0$ , и тогда  $g \leq \max | \bar{b}(x) - f |_{t=0} |$ ; б)  $g \leq 0$ ; в) положительный максимум достигается в некоторой внутренней точке  $(x_0, t_{m_0}) \in \tilde{\Omega}_T$ ,  $m_0 \geq 1$ . В этом последнем случае в точке  $(x_0, t_{m_0})$  выполняются условия

$$g_t \geq 0, \quad \forall g_{x_i x_i} \leq 0, \quad i = 1, 2, \quad g_{x_i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

и из (13) следует

$$g \left( \frac{1 - e^{-\beta\tau}}{\tau} + f_{x_1} \right) + \frac{d}{e^{\beta t}} \leq 0,$$

а с учетом (14) получаем

$$g \leq \frac{-de^{-\beta t}}{\beta e^{-\beta\tau_1} + \beta_1}.$$

Аналогично устанавливается оценка для  $g$  снизу. В результате получаем

$$|w_m| \leq C_1, \quad \text{где } C_1 = e^{\beta T} \left[ \max_{x \in \tilde{\Omega}} | \bar{b}(x) - f |_{t=0} | + \max_{\tilde{\Omega}_T} \left| \frac{de^{-\beta t}}{\beta e^{-\beta\tau_1} + \beta_1} \right| \right]. \quad (15)$$

**Оценка первых производных  $w_m$  по  $x_i$ .** Сначала оценим указанные производные на границе  $\tilde{S}_T$ , оценивая их на левой, правой, нижней и верхней частях этой границы. Рассмотрим левую часть границы  $S'_3 \times [0, T]$ ,

$$S'_3 = [0 \leq x_2 < \varepsilon_1, x_1 = \theta_1^{-1}(x_2)] \cup [\varepsilon_1 \leq x_2 \leq H - \varepsilon_1, x_1 = 0] \cup [H - \varepsilon_1 < x_2 \leq H, x_1 = \theta_2^{-1}(x_2)],$$

функцию

$$x_1 = \psi(x_2) = \begin{cases} \theta_1^{-1}(x_2), & 0 \leq x_2 < \varepsilon_1 \\ 0, & \varepsilon_1 \leq x_2 \leq H - \varepsilon_1 \\ \theta_2^{-1}(x_2), & H - \varepsilon_1 < x_2 \leq H \end{cases},$$

которая задает  $S'_3$ , и функцию  $\chi(x) = \chi(x_1, x_2) = N_1 e^{-N_2(x_1 - \psi(x_2))}$  ( $N_1 > 0, N_2 > 0$ ). Вводя обозначения

$$D_1 = \overset{\vee}{g} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - \bar{f} \frac{\partial}{\partial x_1} - \overset{\vee}{u}_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad D_2 = \left( \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} ds \right)_i - D_1,$$

получаем

$$D_1\chi = N_1 \left[ vN_2^2 \left( 1 + \left( \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \right)^2 \right) + N_2 \left( v \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \bar{f} - u_2 \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \right) \right] e^{-N_2(x_1 - \psi(x_2))}.$$

Наибольшее положительное значение  $\chi(x)$  принимает на  $S'_3$ , так как для любой точки  $x \in \bar{\Omega}$   $x_1 - \psi(x_2) \geq 0$ , а для любой точки  $x \in S'_3$   $x_1 - \psi(x_2) = 0$ , и при достаточно больших  $N_1, N_2$

$$D_1\chi > \max_{\substack{(x,t) \in \bar{\Omega}_T \\ |w| \leq C_1}} |f_{x_1} w + d|, \quad \chi|_{S'_3} = N_1 \geq \chi(x) + \left| \bar{b}(x) - f \right|_{t=0}. \quad (16)$$

Рассмотрим функцию  $w + \chi$  ( $w = w_m, m = 0, \bar{M}$ ). Для нее (в силу (12) и (16))

$$D_2(w + \chi) = w_t - D_1 w - D_1 \chi = -f_{x_1} w - d - D_1 \chi < 0$$

в области  $\bar{\Omega}_T$ , тогда как в точке максимума функции  $w + \chi$  должно быть  $D_2(w + \chi) \geq 0$ . Далее

$$(w + \chi)|_{S'_3} = N_1 \geq (w + \chi)|_{\bar{S}}, \quad (w + \chi)|_{t=0} = \chi(x) + \left| \bar{b}(x) - f \right|_{t=0} \leq N_1.$$

Отсюда следует, что свое наибольшее значение  $w + \chi$  принимает на  $S'_{3,T} = S'_3 \times [0, T]$  и  $\frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{S'_{3,T}} \geq -\frac{\partial \chi}{\partial n} \Big|_{S'_{3,T}}$ .

Рассмотрение функции  $w - \chi$  позволяет установить неравенство  $\frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{S'_{3,T}} \leq \frac{\partial \chi}{\partial n} \Big|_{S'_{3,T}}$ , а рассмотрение остальных трех частей границы приводит к оценке

$$|w_{x_i}|_{\bar{S}_T} \leq C_2 s. \quad (17)$$

Далее могут быть установлены оценки во внутренних точках  $\bar{\Omega}'_T$ :

$$\left| w_{x_i} \right|_{\bar{\Omega}'_T} \leq C_2, \quad \left| w_{x_i x_j} \right|_{\bar{\Omega}'_T} \leq C_3, \quad \bar{\Omega}'_T \subset \bar{\Omega}_T, \quad (18)$$

но поскольку устанавливаются они похожими способами, а вторая из оценок (18) доказывается сложнее, то первую из этих оценок будем считать установленной, а второе неравенство из (18) будем доказывать.

**Оценка вторых производных  $w_m$  по  $x_i x_j$ .** Введем вспомогательные функции  $g_i (i = 1, 2)$  следующим образом:

$$w_{x_i} = b(g_i), \quad b(g_i) = -2C_2 + 3aC_2 e \int_0^{g_i} e^{-s^h} ds, \quad (19)$$

где  $C_2$  – константа из (18),  $a > 1, h > 1$  – константы, которые определяются ниже. Из (19) следует

$$w_{x_i x_k} = b'(g_i) g_{ixk} = 3aeC_2 e^{-g_i^h} g_{ixk}, \quad w_{x_i x_k x_k} = b'(g_i) g_{ixk x_k} - b'(g_i) h g_i^{h-1} g_{ixk}^2.$$

Дифференцируем (12) по  $x_i (f_{x_1} = \bar{f}, w_m = w)$ :

$$w_{tx_i} - v \sum_{k=1}^2 w_{x_k x_k x_i} + \bar{f} w_{x_1 x_i} + u_2 w_{x_2 x_i} = -\bar{f}_{x_i} w_{x_1} - u_{2x_i} w_{x_2} - (\bar{f} w)_{x_i} - d_{x_i},$$

обозначаем правую часть через  $I_i$ , подставляем в последнее уравнение найденные выражения для  $w_{x_i x_k}, w_{x_i x_k x_k}$ , и делим его на  $b'(g_i)$ :



$$\frac{e^{g_i^h}}{\tau} \left( \int_{g_i(m-1)}^{g_i(m)} e^{-s^h} ds \right) - \nu \sum_{k=1}^2 g_{ix_k x_k} + \nu h g_i^{h-1} \sum_{k=1}^2 (g_{ix_k})^2 + \bar{f} g_{ix_1} + u_2 \overset{\vee}{g}_{ix_2} = \frac{I_1}{b'(g_i)} \equiv I_2.$$

Полученное равенство дифференцируем по  $x_j$ :

$$\frac{1}{\tau} \left( e^{g_i^h} (m) \int_{g_i(m-1)}^{g_i(m)} e^{-s^h} ds \right)_{x_j} - \nu \sum_{k=1}^2 g_{ix_j x_k x_k} + \nu h (h-1) g_i^{h-2} g_{ix_j} \sum_{k=1}^2 (g_{ix_k})^2 + 2\nu h g_i^{h-1} \sum_{k=1}^2 g_{ix_k} g_{ix_j x_k} + \bar{f} g_{ix_j x_1} + u_2 \overset{\vee}{g}_{ix_j x_2} + \bar{f}_{x_j} g_{ix_1} + u_{2x_j} \overset{\vee}{g}_{ix_2} = I_{2x_j} \equiv I_3. \quad (20)$$

Введем в рассмотрение функции  $r_{ij} = \zeta g_{ix_j}$ . Верны следующие равенства:

$$\zeta g_{ix_j x_k} = r_{ijx_k} - \frac{\zeta_{xk}}{\zeta} r_{ij}, \quad \zeta g_{ix_j x_k x_k} = r_{ijx_k x_k} - 2 \frac{\zeta_{xk}}{\zeta} r_{ijx_k} + \left( \frac{2\zeta_{xk}^2}{\zeta^2} - \frac{\zeta_{xk x_k}}{\zeta} \right) r_{ij}.$$

Умножая (20) на  $\zeta$  и используя последние равенства, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\zeta}{\tau} \left( e^{g_i^h} (m) \int_{g_i(m-1)}^{g_i(m)} e^{-s^h} ds \right)_{x_j} - \nu \sum_{k=1}^2 \left[ r_{ijx_k x_k} - 2 \frac{\zeta_{xk}}{\zeta} r_{ijx_k} + \left( \frac{2\zeta_{xk}^2}{\zeta^2} - \frac{\zeta_{xk x_k}}{\zeta} \right) r_{ij} \right] + \\ & + \nu h (h-1) g_i^{h-2} r_{ij} \sum_{k=1}^2 (g_{ix_k})^2 + 2\nu h g_i^{h-1} \sum_{k=1}^2 g_{ix_k} \left( r_{ijx_k} - \frac{\zeta_{xk}}{\zeta} r_{ij} \right) + \\ & + \bar{f} \left( r_{ijx_1} - \frac{\zeta_{x1}}{\zeta} r_{ij} \right) + u_2 \overset{\vee}{\left( r_{ijx_2} - \frac{\zeta_{x2}}{\zeta} r_{ij} \right)} + \bar{f}_{x_j} r_{i1} + u_{2x_j} \overset{\vee}{r_{i2}} = \zeta I_3. \end{aligned} \quad (21)$$

Умножаем (21) на  $\zeta^2 r_{ij}$  и полученные равенства ( $j=1,2$ ) суммируем по  $j$  от 1 до 2 (при этом опустим первое самое громоздкое слагаемое, которое ниже оценим отдельно):

$$\begin{aligned} & -\nu \zeta^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left[ r_{ij} r_{ijx_k x_k} - 2 \frac{\zeta_{xk}}{\zeta} r_{ij} r_{ijx_k} + \left( \frac{2\zeta_{xk}^2}{\zeta^2} - \frac{\zeta_{xk x_k}}{\zeta} \right) r_{ij}^2 \right] + \nu h (h-1) g_i^{h-2} \sum_{j=1}^2 r_{ij}^2 \sum_{k=1}^2 r_{ik}^2 + \\ & + 2\nu h g_i^{h-1} \sum_{j=1}^2 r_{ij} \sum_{k=1}^2 r_{ik} \left( \zeta r_{ijx_k} - \zeta_{xk} r_{ij} \right) + \zeta^2 \sum_{j=1}^2 r_{ij} \left( \bar{f}_{x_j} r_{i1} + u_{2x_j} \overset{\vee}{r_{i2}} \right) + \zeta \bar{f} \sum_{j=1}^2 \left( \zeta r_{ij} r_{ijx_1} - \zeta_{x1} r_{ij}^2 \right) + \\ & + \zeta u_2 \overset{\vee}{\sum_{j=1}^2 \left( \zeta r_{ij} r_{ijx_2} - \zeta_{x2} r_{ij}^2 \right)} = \zeta^3 \sum_{j=1}^2 r_{ij} I_3. \end{aligned} \quad (22)$$

Оценим слагаемое, которое было опущено при получении (22):

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\zeta^4}{\tau} \sum_{j=1}^2 \left[ g_{ix_j} (m) \left( e^{g_i^h(m)} \int_{g_i(m-1)}^{g_i(m)} e^{-s^h} ds \right)_{x_j} \right] = \\ &= \frac{\zeta^4}{\tau} \sum_{j=1}^2 \left[ g_{ix_j} (m) e^{g_i^h(m)} \left( h g_i^{h-1} (m) g_{ix_j} (m) \int_{g_i(m-1)}^{g_i(m)} e^{-s^h} ds + e^{-g_i^h(m)} g_{ix_j} (m) - e^{-g_i^h(m-1)} g_{ix_j} (m-1) \right) \right] = \\ &= \frac{\zeta^4}{\tau} \sum_{j=1}^2 \left[ g_{ix_j} (m) \left( h g_i^{h-1} (m) g_{ix_j} (m) \int_{g_i(m-1)}^{g_i(m)} e^{g_i^h(m)-s^h} ds + g_{ix_j} (m) - e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)} g_{ix_j} (m-1) \right) \right]. \end{aligned}$$

Пусть  $J_2 = h g_i^{h-1} (m) \int_{g_i(m-1)}^{g_i(m)} e^{g_i^h(m)-s^h} ds$ . Тогда при  $g_i(m-1) \leq g_i(m)$  верна цепочка неравенств

$$J_2 \geq h \int_{g_i(m-1)}^{g_i(m)} s^{h-1} e^{g_i^h(m)-s^h} ds = -e^{g_i^h(m)-s^h} \Big|_{g_i(m-1)}^{g_i(m)} = e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)} - 1.$$

При  $g_i(m-1) \geq g_i(m)$  верна цепочка

$$|J_2| \leq h \int_{g_i(m)}^{g_i(m-1)} s^{h-1} e^{g_i^h(m)-s^h} ds = -e^{g_i^h(m)-s^h} \Big|_{g_i(m)}^{g_i(m-1)} = 1 - e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)},$$

из которой следует  $J_2 \geq e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)} - 1$ . Значит, в обоих случаях  $J_2 \geq e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)} - 1$ . Поэтому

$$\begin{aligned} J_1 &\geq \frac{\zeta^4}{\tau} \sum_{j=1}^2 \left[ g_{ix_j}(m) \left( g_{ix_j}(m) \left( e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)} - 1 \right) + g_{ix_j}(m) - e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)} g_{ix_j}(m-1) \right) \right] = \\ &= \frac{\zeta^4}{\tau} \sum_{j=1}^2 \left[ g_{ix_j}(m) e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)} \left( g_{ix_j}(m) - g_{ix_j}(m-1) \right) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь вводим функцию  $q = \sqrt{\sum_{j=1}^2 r_{ij}^2}$  и рассматриваем (22) в точке  $(x_0, t_{m_0})$  максимума функции  $q^2 = \sum_{j=1}^2 r_{ij}^2$ , где  $m_0 \geq 1$ , а  $x_0$  является внутренней точкой  $\tilde{\Omega}$  (она находится в области, где  $\zeta \neq 0$ ).

Так как в точке  $(x_0, t_{m_0})$

$$\left( q^2 \right)_{x_k} = 2 \sum_{j=1}^2 r_{ij} r_{ijx_k} = 0, \quad \left( q^2 \right)_{x_k x_k} = 2 \sum_{j=1}^2 r_{ijx_k}^2 + 2 \sum_{j=1}^2 r_{ij} r_{ijx_k x_k} \leq 0,$$

т. е.

$$\sum_{j=1}^2 r_{ijx_k}^2 \leq - \sum_{j=1}^2 r_{ij} r_{ijx_k x_k},$$

и из (23) следует  $J_1 \geq 0$ , то из (22) получаем

$$\begin{aligned} &v \zeta^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 r_{ijx_k}^2 + v h(h-1) g_i^{h-2} q^4 + 2 \zeta v h g_i^{h-1} \sum_{j=1}^2 r_{ij} \sum_{k=1}^2 r_{ik} r_{ijx_k} \leq v \sum_{k=1}^2 \left( 2 \zeta_{x_k}^2 - \zeta \zeta_{x_k x_k} \right) q^2 + \\ &+ 2 v h g_i^{h-1} \sum_{j=1}^2 r_{ij} \sum_{k=1}^2 \zeta_{x_k} r_{ik} + \bar{f} \zeta \zeta_{x_1} q^2 + \check{u}_2 \zeta \zeta_{x_2} q^2 - \zeta^2 \sum_{j=1}^2 r_{ij} \left( \bar{f}_{x_j} r_{i1} + u_{2x_j} r_{i2} \right) + \zeta^3 \sum_{j=1}^2 r_{ij} I_3. \end{aligned} \quad (24)$$

Из (19) следует: если  $w_{x_i} = -C_2$ , то  $\int_0^{\gamma_{i1}} e^{-s^h} ds = \frac{1}{3ae}$ , если  $w_{x_i} = C_2$ , то

$$\int_0^{\gamma_{i2}} e^{-s^h} ds = \frac{1}{ae}. \quad (25)$$

Так как при  $a > 1, h > 1$   $\frac{1}{ae} < \int_0^{\frac{1}{a}} e^{-s^h} ds < \frac{1}{a}$ , то с учетом (25) получаем

$$\frac{1}{3ae} < \gamma_{i1} \leq g_i \leq \gamma_{i2} < \frac{1}{a}. \quad (26)$$

Третье слагаемое в левой части (24) можно оценить так:

$$\left| 2 \zeta v h g_i^{h-1} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 r_{ij} r_{ik} r_{ijx_k} \right| \leq \frac{v}{2} \zeta^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 r_{ijx_k}^2 + 2 v h^2 \max_{i=1,2} g_i^{2h-2} q^4. \quad (27)$$

Обозначая правую часть (24) через  $I_4$  и учитывая (27), получаем

$$\frac{1}{2} \nu \zeta^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 r_{ijxk}^2 + \nu h q^4 \left[ (h-1) \min_{i=1,2} g_i^{h-2} - 2h \max_{i=1,2} g_i^{2h-2} \right] \leq I_4. \quad (28)$$

Выберем  $a > 3e$ , например, полагаем  $a = 4e$ . В силу (26)

$$\nu h^2 q^4 \left[ \frac{h-1}{h} \min_{i=1,2} g_i^{h-2} - 2 \max_{i=1,2} g_i^{2h-2} \right] > \nu h^2 q^4 \left( \frac{1}{12e^2} \right)^{h-2} \left[ \frac{h-1}{h} - 2 \left( \frac{1}{4e} \right)^2 \left( \frac{3}{4} \right)^{h-2} \right].$$

Выберем  $h = h_0$  настолько большим, чтобы  $\left[ \frac{h_0-1}{h_0} - 2 \left( \frac{1}{4e} \right)^2 \left( \frac{3}{4} \right)^{h_0-2} \right] > \frac{1}{a}$ . Из (28) получаем

$$\frac{1}{a} \nu h^2 q^4 \left( \frac{1}{12e^2} \right)^{h_0-2} \leq I_4. \quad (29)$$

Из (29) после несложных оценок слагаемых из  $I_4$  следует оценка

$$\left| w_{x_i x_j} \right|_{\Omega_T} \leq C_3. \quad (30)$$

Заметим, что

$$q^4 = \left( \sum_{j=1}^2 r_{ij}^2 \right)^2 = \zeta^4 \left( \sum_{j=1}^2 g_{ixj}^2 \right)^2 = \zeta^4 \left[ \sum_{j=1}^2 \left( \frac{e^{g_i^h}}{3aC_2e} w_{x_i x_j} \right)^2 \right]^2. \quad (31)$$

Поэтому константа  $C_3$  такова, что  $C_3 < \infty$  для любой строго внутренней подобласти  $\tilde{\Omega}'$  области  $\tilde{\Omega}$ , но при приближении границы  $\tilde{\Omega}'$  к границе  $\tilde{\Omega}$  безгранично растет.

После вычисления (30) аналогичным способом могут быть получены оценки

$$\left| w_{x_i x_j x_k} \right|_{\tilde{\Omega}_T'} \leq C_4, \quad \left| w_{x_i x_j x_k x_s} \right|_{\tilde{\Omega}_T'} \leq C_5, \quad \overline{\tilde{\Omega}_T'} \subset \tilde{\Omega}_T', \quad \overline{\tilde{\Omega}_T''} \subset \tilde{\Omega}_T''$$

и затем выполнен предельный переход при  $\tau \rightarrow 0$ , доказывающий разрешимость задачи (1)–(7) [10]. При указанных выше требованиях, накладываемых на данные, решение является классическим.

**Заключение.** Отметим, что для первой производной функции  $w$  удастся получить ее оценку (17) на границе области, а для производных более высокого порядка их не существует. Поэтому оценки для производных второго и более высоких порядков удастся получить только в строго внутренних подобластях рассматриваемой области решения.

### Список использованных источников

1. Каянович, С. С. Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения / С. С. Каянович // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 1. – С. 52–59.
2. Schauder, J. Uber lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung / J. Schauder // Math. Zeitschr. – 1934. – Vol. 38, N 2. – P. 257–283.
3. Бернштейн, С. Н. Ограничение модулей последовательных производных решений уравнений параболического типа / С. Н. Берштейн // Докл. Нац. акад. наук Беларусі. – 1938. – Т. 18, № 3. – С. 385–389.
4. Ладыженская, О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения / О. А. Ладыженская. – М., 1953.
5. Ладыженская, О. А. О разрешимости основных краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов / О. А. Ладыженская // Докл. Нац. акад. наук Беларусі. – 1954. – Т. 97, № 3. – С. 395–398.
6. Ладыженская, О. А. Первая краевая задача для квазилинейных параболических уравнений / О. А. Ладыженская // Докл. Нац. акад. наук Беларусі. – 1956. – Т. 107, № 5. – С. 636–639.
7. Ладыженская, О. А. Решение первой краевой задачи в целом для квазилинейных параболических уравнений / О. А. Ладыженская // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1958. – Т. 7. – С. 149–177.
8. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева. – М.: Наука, 1964. – 538 с.

9. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралъцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
10. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. – Л.: ЛГУ, 1950. – 256 с.
11. Каянович, С. С. Стержневое течение вязкой жидкости / С. С. Каянович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2013. – № 3. – С. 32–35.

## References

1. Kayanovich S.S. Solvability of the differential model of plug flow. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2015, no. 1, pp. 52–59. (in Russian)
2. Schauder J. Uber lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. *Mathematische Zeitschrift*, 1934, vol. 38, no. 1, pp. 257–282. doi: 10.1007/BF01170635. (in German)
3. Bernshtein S.N. Restriction of the modules of the successive derivatives of the solutions of the parabolic-type equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 1938, vol. 18, no. 3, pp. 385–389. (in Russian)
4. Ladyzhenskaya O.A. *Mixed problem for the hyperbolic equation*. Moscow, State Publishing House technical and theoretical literature, 1953. 280 p. (in Russian)
5. Ladyzhenskaya O.A. Solvability of the basic boundary-value problems for the parabolic- and hyperbolic-type equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 1954, vol. 97, no. 3, pp. 395–398. (in Russian)
6. Ladyzhenskaya O.A. First boundary-value problem for quasi-linear parabolic equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 1956, vol. 107, no. 5, pp. 636–639. (in Russian)
7. Ladyzhenskaya O.A. Solution of the first boundary-value problems, in general for quasi-linear parabolic equations. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva* [Works of the Moscow Mathematical Society], 1958, vol. 7, pp. 149–177. (in Russian)
8. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. *Linear and quasi-linear equations of elliptical type*. Moscow, Nauka, 1964. 538 p. (in Russian)
9. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*. Moscow, Nauka, 1967. 736 p. (in Russian)
10. Sobolev S.L. *Some applications of the functional analysis in mathematical physics* Leningrad, Leningrad State University, 1950. 256 p. (in Russian)
11. Kayanovich S.S. Plug flow of viscous fluid. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Ser. Fizika-tekhnichnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physico-Technical series], 2013, no. 3, pp. 32–35. (in Russian)

## Сведения об авторе

**Каянович Сергей Сергеевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: sergkay@mail.ru

## Для цитирования

Каянович, С. С. Краевая задача для стержневого течения в канале / С. С. Каянович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 4. – С. 55–66.

## Information about the author

**Kayanovich Siarhei Siarheevich** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Chair of Higher Mathematics, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: sergkay@mail.ru

## For citation

Kayanovich S.S. Boundary-value problem for plug flow in the channel. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2016, no. 4, pp. 55–66. (in Russian)