Ивашенко В.П. (Минск, БГУИР)

Грамматика. Гармония. Геометрия.

В работе рассматриваются соответствия между онтологическими моделями [1] и геометрическими представлениями гармонических отношений с целью выявления особенностей концепций, основанных на понятии гармонии. «ГАРМО́НИЯ (греч. harmonia — связь, стройность, соразмерность), соразмерность частей, слияние различных компонентов объекта в единое органическое целое. В древнегреческой философии — организованность космоса, в противоположность хаосу. Выразительное средство музыки, связанное с объединением тонов в созвучия и последованием созвучий в условиях лада» [2]. «…(связь, порядок, строй, слаженность, соразмерность, стройность) приятная для слуха слаженность звуков, объединение звуков в созвучия и их закономерное последование. Гармония – также дисциплина…» [3].

В истории европейской культуры с античных времён известно представление о «гармонии сфер». Учение о гармонии сфер связывается с платоническими и пифагорейскими традициями [4, 48 с.]. Термин «гармония» относится и к теории музыки. Для античной музыки древней Греции характерна так называемая «полная система», включающая диатонику, хроматику и энармонику [2, 66-70 с.]. В средние века известно представление о «свободных искусствах», которое также развилось из античных представлений. Свободные искусства составляли своего рода «диатонику искусств», которая разбивалась на тривиум и квадривиум [5]. Известно их геометрическое представление в виде круга (рисунок 1). Таковы некоторые исторические предпосылки рассматриваемого предмета.

В европейской науке процессы развития зачастую рассматриваются в форме синтеза вращательного и поступательного движений – спирали. Известны: Архимедова спираль, спираль Ферма, гиперболическая спираль, спираль Фибоначчи, логарифмическая спираль и др. Последняя была описана Р. Декартом [6, 192 с.] и Я. Бернулли.

Формула логарифмической спирали в полярных координатах $r = a * e^{b*\varphi}$.

Представим логарифмическую спираль на комплексной плоскости

$$\varphi = \arctan\left(\left\langle x, y \right\rangle\right);\ x + i * y = r * \cos(\varphi) + i * r * \sin(\varphi) = a * e^{(b+i)*\arctan\left(\left\langle x, y \right\rangle\right)}.$$

Музыкальные звуки, ступени звукоряда сопоставим лучам, выходящим из центра спирали, которые пересекают её в точках, расстояние до которых от центра координат есть частота обозначаемого нотой музыкального звука (рисунок 2). Такое геометрическое представление музыкальных звуков по высоте является двумерным и комплекснозначным. Так как комплексные числа образуют подмножество гиперкомплексных чисел, то в соответствии с процедурой Кэли-Диксона возможно подобное представление в алгебре гиперкомплексных чисел, имеющих более высокие размерности, вплоть до бесконечности. Например, при размерности четыре, в алгебре кватернионов, любой кватернион может быть представлен в виде

$$r = r_0 + e^{\psi_0} * e^{b*2*\pi*n} * e^{\varphi_0} = r_0 + e^{\psi_0} * e^{b*\varphi} * e^{\varphi_0}.$$

В этом случае представление может иметь размерность до четырех, сохраняя периодические свойства спирали. Для его получения достаточно найти произведение радиуса основного представления, на радиусы одного из других представлений (см. таблицы 1 и 2), при этом в случае ортогональных пространств размерности умножаются.

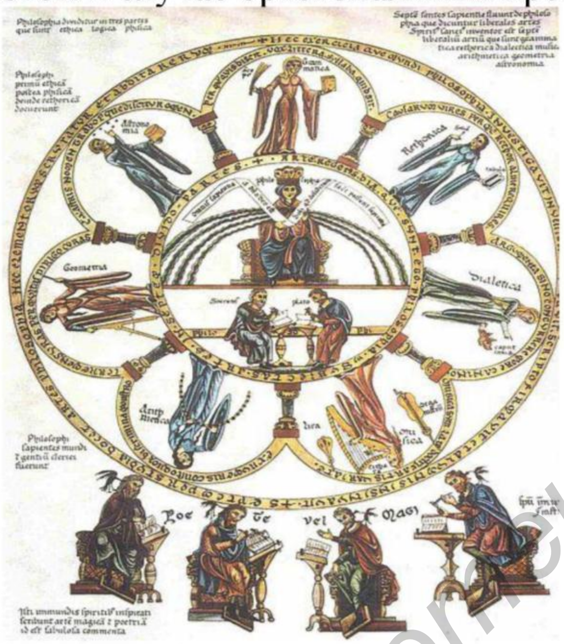

Рисунок 1. Философия и семь свободных искусств. Миниатюра из книги Геррады Ландсбергской «Hortus Deliciarum» (1167—1185)

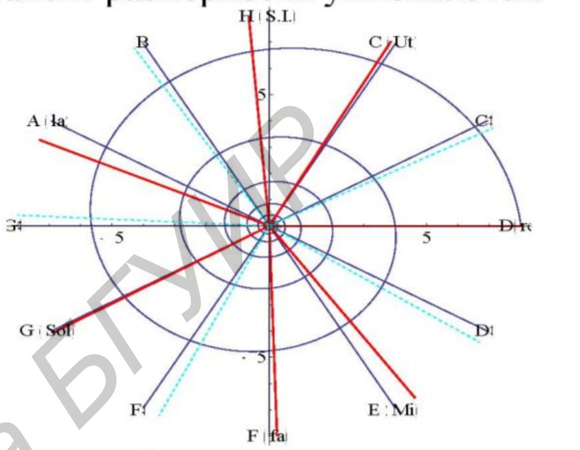

Рисунок 2. Лучи жирной линией соответствуют ступеням диатоники чистого строя (“настройка предела 5”), совместно с лучами штриховой линией – хроматика чистого строя; тонкие сплошные лучи – равномерно темперированные тоны; длины отрезков от вершин лучей до точек их пересечения со спиралью – частоты тонов в октавах

Таблица 1. Параметры представлений в алгебре кватернионов

размерность	период	r_0	e^{ψ_0}	b	e^{φ_0}
двумерное	$2*\pi$	0	1	$\frac{\ln(2)}{2*\pi}$	1
двумерное	$2*\pi/3$	0	1	$3*j$	1
двумерное	$\pi/3$	$\frac{1+j}{2}$	$-\frac{1-j}{2}$	$6*j$	1
трёхмерное	$\pi/2$	$\frac{1+j+k}{3}$	$-\sqrt[4]{\frac{2}{3}} * e^{i*\frac{\pi}{2}} * e^{\frac{j+k}{\sqrt{2}}*\arctan(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$	$\frac{j-k}{3*\sqrt{2}}$	$e^{\frac{j+k}{\sqrt{2}}*\arctan(\sqrt{2}-\sqrt{3})} * e^{i*\frac{\pi}{2}} * \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

Таблица 2. Значения для представлений с шагом $2*\pi*n/12$

период	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$2*\pi$	1	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[6]{2}$	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[12]{32}$	$\sqrt[2]{2}$	$\sqrt[12]{128}$	$\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[4]{8}$	$\sqrt[6]{32}$	$\sqrt[12]{2048}$
$\pi/6$	1	j	1	j	1	j	1	j	1	j	1	j
$\pi/4$	1	j	k	1	j	k	1	j	k	1	j	k
$\pi/3$	1	j	-1	-j	1	j	-1	-j	1	j	-1	-j

В основе музыкальной гармонии лежит натуральный звукоряд и система гармонических обертонов музыкальных звуков. Однако, так как ступеней натурального звукоряда бесконечно много и все их невозможно различить на слух, используют только их небольшое количество [5, 183 с.]. Натуральный звукоряд составляет основу так называемого «чистого строя», существуют различные системы «чистого строя», одна из таких систем «настройка предела 5», в которой каждый музыкальный интервал, выражающий отношение частот входящих в него звуков может быть представлен в соответствии с формулой $2^p * 3^q * 5^d$, где $\{p\} \cup \{q\} \cup \{d\} \subseteq \mathbb{N}$.

В этом случае на множестве сочетаний звуков задана полная решётка (рисунок 3), в соответствии с операциями наибольшего общего рационального делителя (НОД) $GCDr(\langle a,b \rangle)$ и наименьшего общего рационального кратного и $LCMr(\langle a,b \rangle)$, что соответствует операциям минимума и максимума на показателях степеней (таблица 3).

В соответствии со звуковысотными соотношениями формируются гармонические законы [7, 50 с.], которые представимы в виде правил (таблица 4) над ассоциациями звуков (интервалами, аккордами).

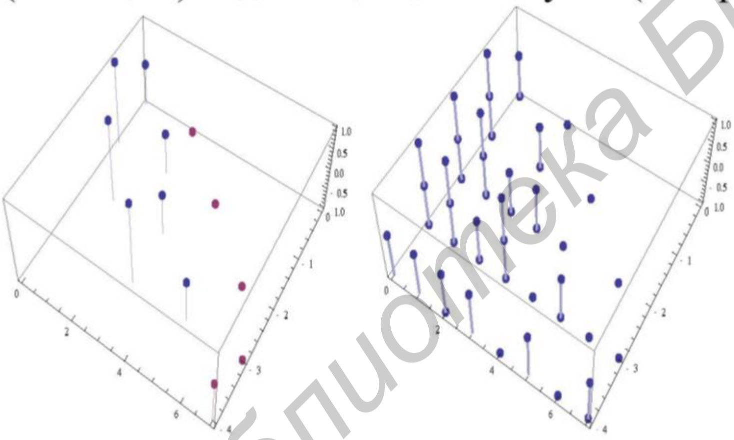

Рисунок 3. Элементы решётки $\langle p,q,d \rangle$ в пространстве $\mathbb{N}^3$ (слева – ступени октавы, справа – НОД их созвучий)

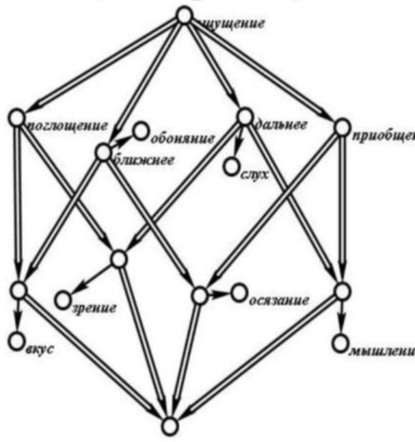

Рисунок 4. Граф онтологической модели чувств и ощущений

Таблица 3. Значения $LCMr$ и $GCDr$ пар ступеней октавы «чистого строя»

ступень	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1	16/15	9/8	6/5	5/4	4/3	45/32	3/2	8/5	5/3	16/9	15/8
1	1	1/15	1/8	1/5	1/4	1/3	1/32	1/2	1/5	1/3	1/9	1/8
16/15	16	16/15	1/120	2/15	1/60	4/15	1/480	1/30	8/15	1/15	16/45	1/120
9/8	9	144	9/8	3/40	1/8	1/24	9/32	3/8	1/40	1/24	1/72	3/8
6/5	6	48/5	18	6/5	1/20	2/15	3/160	3/10	2/5	1/15	2/45	3/40
5/4	5	80	45/4	30	5/4	1/12	5/32	1/4	1/20	5/12	1/36	5/8
4/3	4	16/3	36	12	20	4/3	1/96	1/6	4/15	1/3	4/9	1/24
45/32	45	720	45/8	90	45/4	180	45/32	3/32	1/160	5/96	1/288	15/32
3/2	3	48	9/2	6	15/2	12	45/2	3/2	1/10	1/6	1/18	3/8
8/5	8	16/5	72	24/5	40	8	360	24	8/5	1/15	8/45	1/40
5/3	5	80/3	45	30	5	20/3	45	15	40	5/3	1/9	5/24
16/9	16	16/3	144	48	80	16/3	720	48	16	80/3	16/9	1/72
15/8	15	240	45/8	30	15/4	60	45/8	15/2	120	15	240	15/8

Таблица 4. Правила добавления обертонов и основного тона

Правила добавления обертонов	$\langle C_i, C_{i+1}\rangle \leftarrow \langle C_i\rangle$ $\langle C_i, E_{i+2}\rangle \leftarrow \langle C_i\rangle$ $\langle C_i, H_{i+3}\rangle \leftarrow \langle C_i\rangle$ $\langle C_i, G_{i+1}\rangle \leftarrow \langle C_i\rangle$ $\langle C_i, D_{i+3}\rangle \leftarrow \langle C_i\rangle$ $\langle C_i, F\#_{i+5}\rangle \leftarrow \langle C_i\rangle$
Правила добавления основного тона	$\langle C_i, C_{i+1}\rangle \leftarrow \langle C_i, C_{i+1}\rangle$ $\langle C_{i-3}, C_i, H_i\rangle \leftarrow \langle C_i, H_i\rangle$ $\langle G\#_{i-3}, C_i, D\#_i\rangle \leftarrow \langle C_i, D\#_i\rangle$ $\langle C_{i-1}, C_i, G_i\rangle \leftarrow \langle C_i, G_i\rangle$ $\langle C_{i-5}, C_i, F\#_i\rangle \leftarrow \langle C_i, F\#_i\rangle$ $\langle F_{i-2}, C_i, F_i\rangle \leftarrow \langle C_i, F_i\rangle$ $\langle C_{i-2}, C_i, E_i\rangle \leftarrow \langle C_i, E_i\rangle$ $\langle C\#_{i-4}, C_i, C\#_i\rangle \leftarrow \langle C_i, C\#_i\rangle$ $\langle F_{i-2}, C_i, A_i\rangle \leftarrow \langle C_i, A_i\rangle$ $\langle C_{i-3}, C_i, D_i\rangle \leftarrow \langle C_i, D_i\rangle$ $\langle G\#_{i-3}, C_i, G\#_i\rangle \leftarrow \langle C_i, G\#_i\rangle$ $\langle B_{i-4}, C_i, B_i\rangle \leftarrow \langle C_i, B_i\rangle$
Правила смены тональности	$\langle E_i, G_i, H_i\rangle \leftarrow \langle C_i, E_i, G_i\rangle$ $\langle A_{i-1}, C_i, E_i\rangle \leftarrow \langle C_i, E_i, G_i\rangle$ $\langle C_i, D\#_i, G_i\rangle \leftarrow \langle C_i, E_i, G_i\rangle$

Таблица 5. Признаки сходства

	Число элементов	Симметрия (группа перестановок)	Другие признаки
диатоника	7	S_2^2, K_4	наличие единственной неподвижной точки; стабилизаторы тривиума и квадривиума и неподвижной точки
хроматика	12	$S_2^4, S_3, Dih_6, Dih_{12}, G_{768}, \ldots$	отсутствие неподвижных точек

В октаве хроматической музыкальной системы современной европейской музыки содержится двенадцать нот. В случае равномерной 12-тоновой темперации рациональные отношения частот звуков возможны только для чистых интервалов – октав. Однако, в силу зонного характера присущего восприятию музыки [7, 80 с.], допустимы приближённые решения, в этом случае высота звука становится скорее следствием гармонических сочетаний, ассоциаций звуков, чем следствием собственной частоты. В диатонической семиступенной и в хроматической двенадцатиступенной системах присутствуют отношения между ступенями. Одно из них – это порядок ступеней в октаве по высоте, но не менее важным «гармонизирующим» отношением является отношение звуков и ступеней квинтового круга, которое в 12-тоновой системе задаётся циклической перестановкой ($FCGDAEHF\#C\#G\#D\#B$). В целом количество вариантов упорядочения семи различных элементов довольно велико – 6129859, для двенадцати ещё больше – 414864951055853499 [8], но далеко не все они находят место в музыке. Возможно, небольшое количество используемых отношений объясняет, почему в истории неоднократно проводились соответствия и обнаруживались аналогии между отношениями ступеней музыкального строя и иными системами [9]. Ещё одним фактором, способным объяснить такие аналогии является наличие некоторого сходства, симметрии внутри музыкальных систем. При исследовании симметрии применимы методы теории групп [10]. Наличие симметрии той или иной группы перестановок может быть одним из признаков сходства (таблица 5). При наличии симметрии, думается, проще построить аналогию, так как проще исключить из рассмотрения нарушающее симметрию, оставив остальное, чем обнаружить асимметрию там, где её нет.

С другой стороны, волновые и колебательные процессы присущи не только звуку и музыке, они пронизывают мир, проявляясь в разных в видах и формах физического взаимодействия. В математике разложение в ряды Фурье при обработке сигналов является одним из успешно применяющихся математических методов.

Таблица 6. Система («диатоническая») чувств и ощущений

	зрение	мышление	слух	эмоции	обоняние	осязание	вкус
ближнее	-	-	-	-	+	+	+
дальнее	+	+	+	-	-	-	-
приобщение	-	+	-	-	-	+	-
поглощение	+	-	-	-	-	-	+

Таблица 7. Система «диатоника смирения и страстей»

	гнев	страх	печаль	смирение	радость	восхищение	восторг
приятие	-	-	-	-	+	+	+
неприятие	+	+	+	-	-	-	-
отстранённость	-	+	-	-	-	+	-
вовлечённость	+	-	-	-	-	-	+

Таблица 8. Система «хроматика искусств и наук»

Одним из явлений, обладающим сходством с восприятием звука (от «си»), является восприятие цвета, возбуждаемого электромагнитными волнами, имеющими частоты в диапазоне октавы (400–800 ТГц). В подкрепление тезиса о «гармонии мира» продолжим рассмотрение явлений, связанных с восприятием, перечислением нескольких систем и их аналогий с хроматической 12-тоновой системой и диатоникой: система чувств и ощущений (таблица 6) и её онтологическая модель (решётка), соответствующая принципам анализа формальных понятий (рисунок 4) [1], онтологически изоморфная ей система эмоций [11, 482 с.],[12–15] (таблица 7), система «искусств и наук» (таблица 9). Последняя система является развитием системы свободных искусств, в ней «геометрия» и «алгебра» переставлены из-за отклонения малой сексты (5/3) в сторону «ля-бемоль». В таблицах 6 и 7 столбцы упорядочены в соответствии с квинтовым кругом (серым цветом выделены элементы «квадриума», белым – «тривиум»), порядок в таблице 8 соответствует порядку возрастания ступеней в октаве, начиная с «соль-диез».

В заключение выделим особенности идеи «гармонии мира»: 1) периодичность, самоподобие (наличие и стремление к выявлению повторяющихся черт в разных пространственно-временных масштабах), 2) лаконичность, стремление выделять наиболее крупные соотношения («резонансы»), 3) стремление связать разнородное в единое, 4) стремление оценить и сравнить, связать разнородное в единое так, чтобы найти «общий знаменатель», который бы позволял дать количественную оценку одного и другого, 5) рациональность, стремление дать оценку в виде рационального (целого), вычислимого числа.

1. Ивашенко, В.П. Модели и алгоритмы интеграции знаний на основе однородных семантических сетей. Материалы Международной научн.-техн. конференции OSTIS. — Минск, 2015.

2. Советский энциклопедический словарь / ред. Прохоров, А.М. — М., 1989.

3. Музыкальный энциклопедический словарь / Гл. ред. Г. В. Келдыш. — М., 1990.

4. Поспелова, Р.Л., Холопов, Ю.Н. Философия гармонии Боэция // Гармония: проблемы науки и методики. Вып. 2. — Ростов-на-Дону, 2005. — С. 38–66.

5. Музыкально-теоретические системы. Учебник для историко-теоретических и композиторских факультетов музыкальных вузов. — М., 2006.

6. Декарт Р. Геометрия. С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта. — Серия: Классики естествознания. — М.-Л., 1938.

7. Гарбузов, Н.А. — музыкант, исследователь, педагог. Сборник статей // Сост. О. Сахалтуева, О. Соколова. Ред. Ю. Рагс. — М., 1980.

8. Brinkmann, G., McKay, B.D. Posets on up to 16 points. Order, 19 (2002). — PP. 147–179.

9. Друскин, Я.С. О риторических приёмах в музыке И.С. Баха. — СПб., 2005.

10. Crans, Alissa, Fiore, Thomas M., Satyendra, Ramon. Musical Actions of Dihedral. Groups. — American Mathematical Monthly, Volume 116, Number 6, June–July 2009. — PP. 479–495.

11. Декарт, Р. Сочинения в 2 т.: Пер. с лат. и франц. Т. 1 // Сост., ред., вступ. ст. В.В. Соколова.— М., 1989.

12. Фоминых, И.Б. Эмоции как аппарат оценок поведения интеллектуальных систем. Десятая национальная конференция по искусственному интеллекту с международным участием КИИ–2006. Труды конференции. — М., 2006.

13. Steunebrink, B.R., Dastani, M.M. & Meyer, J-J.Ch. (2008). A Formal Model of Emotions: Integrating Qualitative and Quantitative Aspects. In G. Mali, C.D. Spyropoulos, N. Fakotakis & N. Avouris (Eds.), Proc. 18th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI’08) (pp. 256–260). Greece/Amsterdam: Patras / IOS Press.

14. Леонтьев, В.О. Формулы эмоций. Одиннадцатая национальная конференция по искусственному интеллекту с международным участием КИИ. Труды конференции. Т. 1.— М., 2008.

15. O'Rorke, P. & Ortony, A. (1994). Explaining emotions. Cognitive Science, 18. — PP. 283–323.