

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

В. П. Кузнецов, С. В. Лукьянец, М. А. Крупская

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Конспект лекций

В 2-х частях

Часть 2

Дискретные системы, нелинейные системы, случайные процессы в системах автоматического управления

*Рекомендовано УМО вузов Республики Беларусь
по образованию в области информатики и радиоэлектроники
в качестве учебно-методического пособия для студентов учреждений,
обеспечивающих получение высшего образования по специальности
«Информационные технологии и управление
в технических системах»*

Минск БГУИР 2009

УДК 681.511.4(075.8)
ББК 32.965.5я73
К89

Рецензенты:

кафедра автоматизации технологических процессов и электротехники БГТУ;
профессор кафедры систем автоматического управления Военной академии
Республики Беларусь, доктор технических наук, профессор В. А. Куренёв

Кузнецов, В. П.

К89 Теория автоматического управления. Конспект лекций. В 2 ч. Ч. 2:
Дискретные системы, нелинейные системы, случайные процессы в систе-
мах автоматического управления : учеб.-метод. пособие / В. П. Куз-
нецов, С. В. Лукьянец, М. А. Крупская. – Минск : БГУИР, 2009. – 135 с.: ил.
ISBN 978-985-488-473-8 (ч. 2)

В компактной форме изложены основы теории дискретных, нелинейных, сто-
хастических систем автоматического управления. Рассмотрены элементы современ-
ной теории систем.

Конспект лекций предназначен для студентов всех форм обучения, изучающих
системы автоматического управления. Полезен при выполнении курсовых и ди-
пломных проектов.

УДК 681.511.4(075.8)
ББК 32.965.5я73

Часть 1 «Линейные непрерывные системы» издана в БГУИР в 2007 г.

ISBN 978-985-488-473-8 (ч. 2)
ISBN 978-985-488-048-8

© Кузнецов В. П., Лукьянец С. В.,
Крупская М. А., 2009
© УО «Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники», 2009

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|-----|
| Предисловие | 5 |
| 1. Дискретные системы автоматического управления | 6 |
| 1.1. Основные понятия и классификация | 8 |
| 1.2. Решетчатые функции, разностные уравнения и дискретное преобразование Лапласа | 10 |
| 1.3. Описание разомкнутых импульсных систем | 14 |
| 1.4. Частотные характеристики импульсных систем | 19 |
| 1.5. Характеристики замкнутых импульсных систем | 24 |
| 1.6. Процессы в импульсных системах | 26 |
| 1.7. Устойчивость процессов в импульсных системах | 32 |
| 1.8. Точность импульсных систем | 37 |
| 1.9. Оценки качества импульсных систем | 41 |
| 1.10. Условия эквивалентности импульсных и непрерывных САУ | 45 |
| 1.11. Элементы синтеза импульсных систем | 50 |
| 1.12. Уравнения состояния линейных импульсных систем | 53 |
| 1.13. Характеристики импульсных систем, описываемых уравнениями в пространстве состояний | 57 |
| 1.14. Цифровые системы автоматического управления | 59 |
| 1.15. Исследование цифровых систем автоматического управления | 62 |
| 2. Нелинейные системы автоматического управления..... | 66 |
| 2.1. Общие сведения о нелинейных системах..... | 66 |
| 2.2. Математические модели замкнутых нелинейных систем автоматического управления..... | 69 |
| 2.3. Исследование нелинейных систем методом фазовой плоскости..... | 71 |
| 2.3.1. Основные понятия..... | 71 |
| 2.3.2. Классификация фазовых портретов..... | 74 |
| 2.3.3. Построение фазовых траекторий..... | 78 |
| 2.3.4. Скользящие режимы в нелинейных системах..... | 79 |
| 2.3.5. Система с переменной структурой..... | 81 |
| 2.4. Метод припасовывания..... | 83 |
| 2.5. Метод точечного преобразования..... | 86 |
| 2.6. Метод гармонической линеаризации..... | 89 |
| 2.6.1. Исходные положения метода гармонической линеаризации..... | 89 |
| 2.6.2. Вычисление коэффициентов гармонической линеаризации..... | 93 |
| 2.6.3. Алгебраический метод определения симметричных колебаний..... | 93 |
| 2.6.4. Частотный метод определения симметричных колебаний..... | 96 |
| 2.6.5. Вынужденные колебания в нелинейных системах..... | 100 |
| 2.7. Устойчивость процессов в нелинейных системах..... | 101 |
| 2.7.1. Основные понятия и определения..... | 101 |
| 2.7.2. Теоремы Ляпунова..... | 103 |
| 2.7.3. Абсолютная устойчивость..... | 104 |

| | |
|--|-----|
| 2.8. Коррекция нелинейных систем..... | 107 |
| 2.8.1. Коррекция нелинейной системы с помощью обратной связи..... | 107 |
| 2.8.2. Коррекция нелинейной системы с помощью вибрационного сглаживания | 108 |
| 3. Случайные процессы в системах автоматического управления..... | 110 |
| 3.1. Случайные процессы и их характеристики..... | 110 |
| 3.2. Прохождение случайных сигналов через линейную непрерывную систему автоматического управления | 113 |
| 3.3. Расчёт точности системы при случайных воздействиях | 116 |
| 3.4. Особенности синтеза систем автоматического управления..... | 117 |
| 3.5. Случайные процессы в импульсных системах..... | 120 |
| 3.6. Случайные процессы в нелинейных системах..... | 122 |
| 4. Элементы современной теории автоматического управления..... | 125 |
| 4.1. Оптимальное управление | 125 |
| 4.2. Интеллектуальные САУ | 126 |
| 4.2.1. Экспертные информационные системы | 126 |
| 4.2.2. Нейросетевые САУ | 127 |
| 4.2.3. САУ с ассоциативной памятью..... | 128 |
| 4.2.4. Системы управления с нечёткой логикой | 129 |
| Литература | 134 |

ПРЕДИСЛОВИЕ

Конспект лекций по дисциплине «Теория автоматического управления» (ТАУ) состоит из двух частей. Первая часть [1], изданная в 2007 г., посвящена изложению теории линейных непрерывных систем. В соответствии с требованиями образовательного стандарта ОСБР 1-53 01 07 – 2007 и типового учебного плана специальности 1-53 01 07 «Информационные технологии и управление в технических системах» оптимальные и адаптивные системы выделены в самостоятельную дисциплину. Во второй части конспекта лекций рассматриваются дискретные и нелинейные системы, случайные процессы в системах автоматического управления (САУ) и элементы современной ТАУ.

Вторая часть состоит из четырех разделов.

В первом разделе излагается теория дискретных систем. Даются основные понятия дискретных систем, краткие сведения о разностных уравнениях и дискретном преобразовании Лапласа. Рассматриваются передаточные функции и частотные характеристики импульсных систем. Анализируются процессы в импульсных САУ, их устойчивость и точность. Рассматриваются характеристики импульсных систем, описываемых уравнениями в пространстве состояний. Кратко исследуются цифровые САУ. Излагаются некоторые подходы к синтезу дискретных систем.

Второй раздел посвящен нелинейным системам. В нем приводятся общие сведения о нелинейных системах, статических и динамических свойствах. Значительное внимание уделено анализу нелинейных САУ методом фазовой плоскости. Рассматриваются скользящие режимы в нелинейных САУ и процессы в системах с переменной структурой. Излагаются методы припасовывания и точечного преобразования. Рассмотрены метод гармонической линеаризации нелинейностей и его применение для определения симметричных колебаний как в режиме свободных, так и в режиме вынужденных движений. В этом разделе также изложены подходы А. М. Ляпунова к анализу устойчивости нелинейных систем. Рассмотрены соответствующие теоремы Ляпунова. Изложен вопрос оценки абсолютной устойчивости нелинейных систем на основе метода В. М. Попова. Рассмотрена коррекция нелинейных систем.

В третьем разделе рассматриваются случайные процессы в САУ. Приводятся общие сведения о случайных процессах и их характеристиках. Анализируется прохождение случайных сигналов через линейные непрерывные, импульсные и нелинейные системы. Кратко излагаются вопросы расчета таких систем.

Четвёртый раздел содержит информацию о некоторых направлениях современной теории автоматического управления, таких, как адаптивное оптимальное управление; экспертные информационные системы управления; нейросетевые системы управления; системы фаззи-управления.

Авторы выражают благодарность кандидату технических наук, доценту И. Ф. Кузьмицкому и доктору технических наук, профессору В. А. Куреневу за рецензирование конспекта лекций и полезные советы по улучшению его содержания.

Авторы признательны Г. С. Волковой за помощь в компьютерной подготовке рукописи к изданию.

1. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Развитие дискретных систем обусловлено постоянно повышающимися требованиями к управлению различными технологическими процессами, с одной стороны, и возможностями вычислительной техники в обеспечении этих требований, с другой стороны. Так, в современных электромеханических системах необходимо обеспечивать перемещение с высокой скоростью (до 1 м/с) при погрешности, не превышающей десятых долей процента. Погрешность позиционирования иногда должна быть менее 1 мкм. Возникают также задачи реализации сложных законов управления в реальном времени. Аналоговые системы не могут обеспечить таких показателей из-за инерционности и дрейфа нуля операционных усилителей, на которых, как правило, реализуются устройства управления. Широкое распространение микропроцессоров позволяет устранить отмеченные недостатки аналоговых регуляторов, существенно расширить функции управления и повысить его качество. При этом появляется возможность организации параллельно с управлением тестирования и моделирования. Дискретные системы также обладают высокой помехозащищенностью, имеют меньшие габариты и вес.

В то же время анализ и синтез дискретных систем требуют четкого учета их особенностей, умелого использования соответствующего математического аппарата, тщательной разработки алгоритмов управления, грамотного выбора аппаратных и программных средств при их реализации. Все эти вопросы объединяет теория дискретных систем автоматического управления.

Большой вклад в развитие теории дискретных систем внесли Я. З. Цыпкин, Ю. С. Попков, В. А. Бесекерский, Л. Т. Кузин, Б. К. Чемоданов, Э. Джурри, Ю. Ту, В. В. Шахгильдян и др.

Рассмотрим примеры дискретных систем.

На рис. 1.1, *а* представлена функциональная схема системы стабилизации частоты генератора электрических колебаний, использующей принцип импульсно-фазовой автоподстройки частоты.

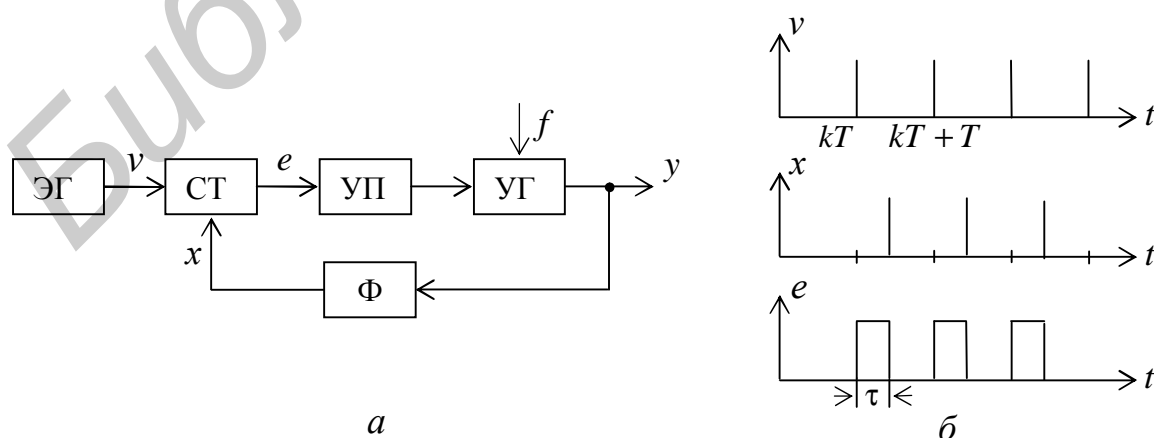


Рис. 1.1

Объект управления в этой системе – управляемый генератор УГ, управляемая координата – его частота y . Возмущением f могут быть внутренние шумы генератора, внешние наводки и т.п. Эталонный генератор ЭГ задает последовательность коротких импульсов v . Формирователь Ф создает последовательность коротких импульсов x , частота которых равна частоте y . Устройством сравнения (фазовым детектором) является статический триггер СТ с двумя входами. Усилительные, преобразовательные и фильтрующие устройства обозначены через УП.

Как показано на рис. 1.1, б, в режиме стабилизации частоты последовательности импульсов v и x равны между собой, а фаза импульсов x отстает от фазы импульсов v . Импульсы v переводят триггер в «1», а x – в «0». Сигнал рассогласования e представляет собой последовательность импульсов, модулированных по ширине при $T = \text{const}$.

Если возмущение f увеличивает частоту сигнала y , то длительность τ уменьшается и уменьшается среднее значение сигналов e и u , что приведет к уменьшению частоты y . Так происходит стабилизация частоты.

В качестве следующего примера рассмотрим систему автоматического сопровождения цели по дальности импульсной радиолокационной станции (РЛС), функциональная схема которой приведена на рис. 1.2, а. Система содержит основные функциональные элементы: временной дискриминатор ВД, усилитель-преобразователь УП, исполнительное устройство ИУ и генератор селекторного напряжения ГСН.

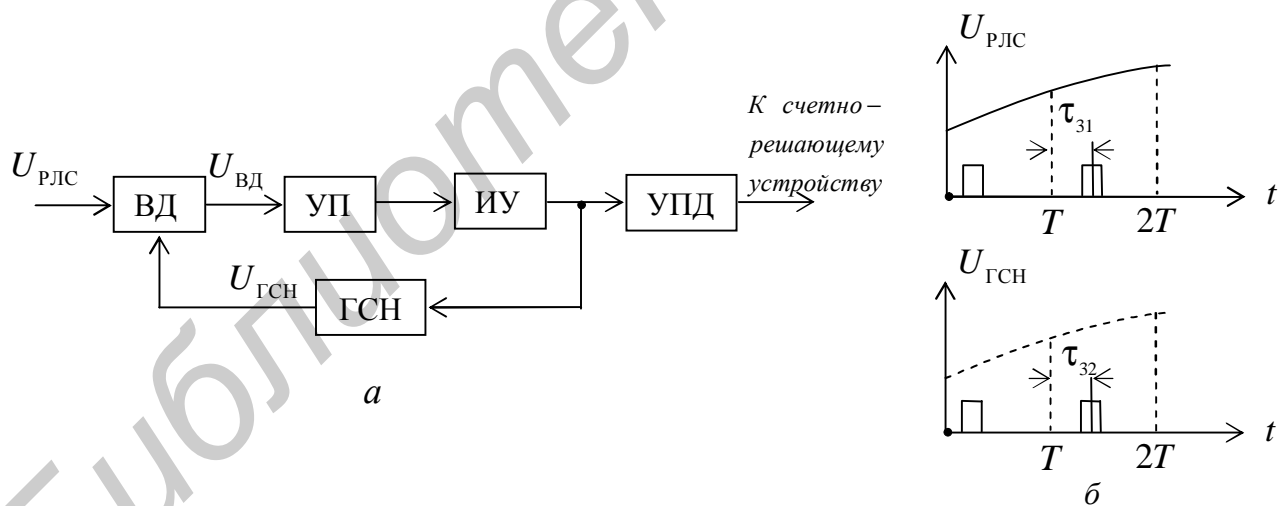


Рис. 1.2

Входным воздействием системы является напряжение импульсов $U_{\text{РЛС}}$, отраженных от цели. Информация о дальности до цели содержится в запаздывании τ_{31} (рис. 1.2, б) отраженного сигнала относительно импульса опорного напряжения в дискретные моменты времени kT .

При работе системы цель облучается с помощью РЛС, отраженные сигналы из РЛС поступают на вход устройства сравнения ВД системы сопрово-

ждения цели. Напряжение, соответствующее измеренной дальности, вырабатывается системой и после преобразования в дискретную форму с помощью генератора селекторного напряжения поступает на второй вход устройства сравнения. Эти две величины сравниваются между собой. Отклонение $U_{\text{вд}}$ используется для управления исполнительным устройством с целью уменьшения этого отклонения.

Примером цифровой системы управления является электропривод степени подвижности промышленного робота. Аналогичная система рассмотрена в первой части конспекта [1]. К цифровым системам обращаются в случаях, когда регулятор реализуется с помощью микропроцессора.

Дискретные системы управления применяются также в ракетной и атомной технике.

1.1. Основные понятия и классификация

Если хотя бы один из сигналов в замкнутом контуре системы автоматического управления (САУ) подвергается дискретизации (квантованию), то такая система будет относиться к классу дискретных САУ. Различают квантование сигнала по времени, по уровню и одновременно по времени и уровню. Соответственно дискретные САУ делятся на импульсные, релейные и цифровые. Дискретизация в импульсных САУ обычно осуществляется устройствами, называемыми импульсными элементами (ИЭ) (модуляторами), в релейных – устройствами, имеющими релейные характеристики (реле), а в цифровых – аналого-цифровыми или цифроаналоговыми преобразователями. Класс релейных систем рассмотрен в разделе 2, т.к. методы исследования релейных систем базируются на теории и методах исследования нелинейных непрерывных САУ. В данном разделе будем рассматривать импульсные и цифровые САУ.

На вход ИЭ поступает непрерывный сигнал $e(t)$, на выходе имеем импульсный сигнал в виде модулированной последовательности прямоугольных импульсов. Параметрами импульсной последовательности, которые подвергаются модуляции, являются ширина τ , высота h и период T (частота $\omega_0 = 2\pi/T$). Соответственно различают амплитудно-импульсную (АИМ), широтно-импульсную (ШИМ) и частотно-импульсную (ЧИМ) модуляции. Наиболее широко используются АИМ и ШИМ. Кроме этого, различают модуляцию 1-го и 2-го рода. Обозначим произвольный момент квантования сигнала через t_k , $k = 0, 1, \dots$, тогда при модуляции 1-го рода законы модуляции будут

$$h_k = f_1(e(t_k)), \tau_k = f_2(e(t_k)), T_k = f_3(e(t_k)), \quad (1.1)$$

где f_i – некоторые функции.

Таким образом, при модуляции 1-го рода значение модулированного параметра в k -й момент времени определяется значением входного сигнала в этот же момент времени t_k .

Если функции f_i в (1.1) являются линейными относительно $e(t_k)$, то будем иметь линейный ИЭ и линейные законы модуляции. Если модулируемый параметр зависит от значений входного сигнала $e(t)$ на некотором интервале времени t , часто предшествующем моменту t_k , то имеем случай модуляции 2-го рода. При этом вместо функций f_i обычно фигурируют некоторые функционалы. Например, зависимость

$$\int_{kT}^{kT+t_k} e(t)dt = r, \quad r = \text{const} \quad (1.2)$$

характеризует так называемую пороговую ШИМ 2-го рода, где r – порог срабатывания модулятора.

Классификацию импульсных САУ по виду модуляции закончим еще одним разделением их на два класса: если все элементы САУ (в том числе и ИЭ) описываются линейными уравнениями, то такую САУ будем называть линейной. Если хотя бы один элемент (в том числе и ИЭ) описывается нелинейными уравнениями, то такую САУ будем относить к классу нелинейных.

Основой общей теории дискретных САУ является теория линейных импульсных систем с АИМ-1 (амплитудно-импульсной модуляцией 1-го рода), в которой все звенья системы описываются линейными дифференциальными уравнениями или передаточными функциями, а ИЭ осуществляет линейную модуляцию 1-го рода. Базовая структура линейной стационарной импульсной САУ, к которой можно во многих случаях свести реальную структуру и которая будет являться предметом дальнейшего рассмотрения, представлена на рис. 1.3, где ЛНЧ – линейная непрерывная часть системы, y , v – выход и вход системы, e – сигнал ошибки, e^* – последовательность прямоугольных импульсов, модулированных по амплитуде.

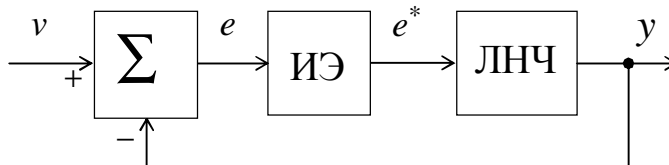


Рис. 1.3

Будем полагать, что ЛНЧ описывается передаточной функцией $W_0(s)$, а ИЭ является линейным и характеризуется постоянными параметрами: дли-

тельностью импульсов $\tau = \text{const}$, периодом повторения $T = \text{const}$, коэффициентом передачи (усиления) k_u и законом линейной АИМ-1:

$$h(kT) = h_k = k_u e(kT) = k_u e_k, \quad (1.3)$$

причем переменные v , e , f , y являются непрерывными функциями времени. В дальнейшем можно полагать $k_u = 1$. Если $k_u \neq 1$, то его можно отнести к ЛНЧ.

Связь координат v , e , f , y можно записать в операторной форме:

$$E(s) = V(s) - Y(s), \quad Y(s) = E^*(s) W_0(s). \quad (1.4)$$

Уравнения (1.3), (1.4) можно интерпретировать как модель импульсной САУ. Неудобство модели в том, что ряд координат являются непрерывными функциями времени, а другие определены для дискретных моментов времени kT или k .

1.2. Решетчатые функции, разностные уравнения и дискретное преобразование Лапласа

Основой математической теории описания процессов в импульсных системах является аппарат решетчатых функций и разностных уравнений.

Решетчатой функцией $f(t_k)$ будем называть функцию, определенную для целочисленных значений аргумента t_k ($k = 0, 1, \dots$). Впредь будем рассматривать t_k или k как дискретное время. Для ШИМ и АИМ $T_k = t_{k+1} - t_k = T = \text{const}$, поэтому функции будем обозначать $f(kT)$ или f_k . Решетчатые функции $f(kT)$ часто получаются из непрерывных $f(t)$ при замене $t = kT$.

Аналогом производных непрерывных функций для решетчатых функций являются конечные разности. Конечная разность первого порядка (первая разность) для решетчатой функции $f(k)$ обозначается $\Delta f(k)$ и определяется выражением

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k). \quad (1.5)$$

Вторая разность $\Delta^2 f(k)$ определяется как

$$\Delta^2 f(k) = \Delta[\Delta f(k)] = f(k+2) - 2f(k+1) + f(k) \text{ и т.д. [5].}$$

Аналогом операции интегрирования для решетчатой функции является операция суммирования

$$F(k) = \sum_{i=0}^{k-1} f(i).$$

Очевидна связь $\Delta F(k) = f(k)$, а функция $F(k)$ называется первообразной для решетчатой функции $f(k)$.

Аналогом дифференциальных уравнений непрерывных функций для решетчатых функций являются разностные уравнения, связывающие функцию $f(k)$ с ее разностями $\Delta f(k)$, ..., $\Delta^n f(k)$, или разностные уравнения, связывающие функцию $f(k)$ с ее значениями $f(k+1)$, ..., $f(k+n)$. В дальнейшем будем рассматривать второй вариант разностных уравнений.

Линейные импульсные системы описываются линейными разностными уравнениями следующего вида:

$$a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = b_0 v(k+m) + \dots + b_m v(k), \quad (1.6)$$

где $v(k)$ – заданная функция (вход), $y(k)$ – искомая функция (решение разностного уравнения, выход), a_i , b_i – постоянные коэффициенты, при этом чаще всего $a_0 = 1$.

Величина $n = 1, 2, \dots$ определяет порядок разностного уравнения. Для полного задания при нахождении решения $y(k)$ кроме вида функции $v(k)$ следует задать начальные условия искомого решения $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$.

В случае непрерывных систем [1], описываемых линейными дифференциальными уравнениями, в теории автоматического управления широкое распространение находят методы исследования, базирующиеся на преобразованиях Лапласа и Фурье, где функция непрерывного аргумента $f(t)$ преобразуется в функцию комплексной переменной s с помощью преобразования Лапласа:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = L \{ f(t) \},$$

где $F(s)$ – изображение, $f(t)$ – оригинал, L – символ прямого преобразования Лапласа. Существует обратный переход от $F(s)$ к $f(t)$, т.е. $f(t) = L^{-1} \{ F(s) \}$, где L^{-1} – символ обратного преобразования Лапласа.

Аналогом преобразования Лапласа для решетчатых функций является дискретное преобразование Лапласа или Z-преобразование, определяемое соотношениями

$$F(z) = Z \{ f(k) \} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}, \quad (1.7)$$

$$f(k) = Z^{-1} \{ F(z) \} = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z) z^{k-1} dz,$$

где $F(z)$ – изображение, z – комплексная переменная, $f(k)$ – решетчатая функция (оригинал), а Z и Z^{-1} – соответственно символы прямого и обратного Z -преобразований.

В литературе (например [6]) приводятся таблицы соответствия между $f(k)$ и $F(z)$. Например, если $f(k) = 1[k]$ – единичная ступенчатая решетчатая функция, то $F(z) = \frac{z}{z-1}$. Там же достаточно подробно рассматриваются свойства Z -преобразования. Например, если $f(k) = c_1 f_1(k) + c_2 f_2(k)$, где c_1, c_2 – постоянные, то $F(z) = c_1 F_1(z) + c_2 F_2(z)$ (свойство линейности).

Другое свойство: пусть $F(z) = Z\{f(k)\}$, тогда $Z\{f(k+m)\} = z^m F(z)$ при условии, что $f(0) = 0, \dots, f(m-1) = 0$ (теорема сдвига).

Если применить Z -преобразование к разностному уравнению (1.6), то с учетом вышеприведенных свойств нетрудно получить алгебраические уравнения относительно изображений:

$$(z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n)Y(z) = (b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m)V(z), \quad (1.8)$$

$$Y(z) = \frac{b_0 z^m + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} V(z). \quad (1.9)$$

Функция комплексной переменной z

$$W(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{b_0 z^m + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \quad (1.10)$$

называется передаточной функцией и определяется как отношение изображений выхода $Y(z)$ ко входу $V(z)$ при нулевых начальных условиях переменных $y(k), v(k)$.

Наряду с решетчатыми функциями $f(k)$ используются смещенные решетчатые функции, которые получаются из непрерывной функции $f(t)$ при замене $t = kT + \varepsilon T$ и обозначаются $f(kT + \varepsilon T)$ или в сокращенной записи $f(k, \varepsilon)$, где $0 \leq \varepsilon \leq 1$ – параметр сдвига. Уравнение (1.6) также можно записать относительно смещенных решетчатых функций, т.е. будем иметь разностное уравнение со смещенным аргументом.

Для смещенных решетчатых функций $f(k, \varepsilon)$ преобразование (1.7) будет иметь вид

$$F(z, \varepsilon) = Z_\varepsilon\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k, \varepsilon) z^{-k}, \quad (1.11)$$

т.е. изображение будет зависеть от параметра ε . При $\varepsilon = 0$ (1.7) и (1.11) совпадают.

Итак, в рамках изложенного можно говорить о функциях: непрерывной $f(t)$, решетчатой $f(kT) = f(k)$, смещенной решетчатой $f(kT + \varepsilon T) = f(k, \varepsilon)$ и соответственно об изображениях: $F(s) = L\{f(t)\}$, $F(z) = Z\{f(k)\}$ и $F(z, \varepsilon) = Z_\varepsilon\{f(k, \varepsilon)\}$.

Существует однозначная связь между перечисленными функциями и изображениями [6]. Эти соотношения для наиболее употребительных функций приведены в табл.1.1. Z -преобразование получается из последнего столбца при $\varepsilon = 0$.

Таблица 1.1

| Непрерывная функция | | Решетчатая функция | Z_ε -преобразование для $f(kT + \varepsilon T)$ |
|---------------------|--------------------------------|------------------------|--|
| $f(t)$ | $F(s)$ | | |
| $1[t]$ | $\frac{1}{s}$ | $1[kT]$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| t | $\frac{1}{s^2}$ | kT | $Tz \left[\frac{\varepsilon}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} \right]$ |
| $\frac{t^2}{2!}$ | $\frac{1}{s^3}$ | $\frac{(kT)^2}{2!}$ | $\frac{T^2 z}{2!} \left[\frac{\varepsilon^2}{z-1} + \frac{2\varepsilon}{(z-1)^2} + \frac{z+1}{(z-1)^3} \right]$ |
| $e^{-\alpha t}$ | $\frac{1}{s + \alpha}$ | $e^{-\alpha kT} = d^k$ | $\frac{z d^\varepsilon}{z - d}$, $d = e^{-\alpha T}$ |
| $1 - e^{-\alpha T}$ | $\frac{\alpha}{s(s + \alpha)}$ | $1 - e^{-\alpha kT}$ | $\frac{z}{z-1} + \frac{z d^\varepsilon}{z-d}$ |
| $t e^{-\alpha t}$ | $\frac{1}{(s + \alpha)^2}$ | $kT e^{-\alpha kT}$ | $\frac{z d^\varepsilon \varepsilon}{z-d} + \frac{z d^{\varepsilon+1}}{(z-d)^2}$ |

Отметим, что в литературе наряду с дискретным преобразованием Лапласа в форме Z -преобразования используется так называемое D -преобразование, получаемое из (1.7), (1.11) заменой $z = e^{sT}$, т.е. изображения будут функциями комплексной переменной s . Очевидно, свойства Z - и D -преобразований во многом идентичны.

Решение разностного уравнения (1.8) при нулевых начальных условиях с использованием Z -преобразования имеет следующий алгоритм:

- по уравнению (1.8) находим передаточную функцию $W(z)$;
- задавая вход $v(k)$, находим по таблицам изображение функции $V(z)$;
- перемножая $W(z)$ и $V(z)$, находим изображение $Y(z)$, которое будет иметь вид $Y(z) = A(z)/B(z)$, где $A(z)$ и $B(z)$ полиномы относительно z ;

– представляем сложную дробно-рациональную функцию $A(z)/B(z)$ в виде суммы простейших дробей первой степени:

$$Y(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = Y_1(z) + \dots + Y_n(z);$$

– переходим от изображения $Y(z)$ к оригиналу $y(k)$:

$$y(k) = y_1(k) + \dots + y_n(k),$$

где $y_i(k) = Z^{-1}\{Y_i(z)\}$ находим по таблицам.

Пример 1.1. Найти решение разностного уравнения $y(k+1) + 2y(k) = 3v(k)$ при нулевом начальном значении $y(0) = 0$ и воздействии вида единичной ступенчатой функции $v(k) = 1[k]$.

$$\text{Находим } W(z) = \frac{3}{z+2}, \quad V(z) = Z\{1[k]\} = \frac{z}{z-1}, \quad Y(z) = \frac{3z}{(z+2)(z-1)}.$$

$$\text{Представим } Y(z) \text{ в виде следующей суммы: } Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+2}.$$

Из табл. 1.1 $Z^{-1}\{z/(z-1)\} = 1[k]$, $Z^{-1}\{z/(z+2)\} = (-2)^k$, тогда решение будет иметь вид

$$y(k) = Z^{-1}\{Y(z)\} = 1 - (-2)^k.$$

1.3. Описание разомкнутых импульсных систем

Структура разомкнутой импульсной системы приведена на рис. 1.4.

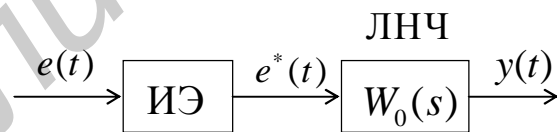


Рис. 1.4

Линейная непрерывная часть системы характеризуется передаточной функцией $W_0(s)$, а импульсный элемент законом модуляции $h_k = e(kT) = e_k$ и постоянными значениями величин τ и T . Заметим, что сигналы $e(t)$ и $y(t)$ – непрерывные, а $e^*(t)$ – последовательность прямоугольных импульсов, модулированных по амплитуде.

Рассмотрим получение разностного уравнения на простейшем примере. Пусть $W_0(s) = \frac{k_0}{T_1 s + 1}$, тогда $y(t)$ и $e^*(t)$ связаны дифференциальным уравнением $y^{(1)}(t) + \frac{1}{T_1} y(t) = \frac{k_0}{T_1} e^*(t)$, которое легко решается.

Обозначим значение координаты $y(t)$ в произвольный момент времени квантования kT через $y(kT)$, тогда на интервале действия k -го импульса $h_k = e(kT)$ и закон изменения выхода будет иметь следующий вид:

$$y(t) = y(kT)e^{-\frac{t-kT}{T_1}} + k_0 e(kT)(1 - e^{-\frac{t-kT}{T_1}}), \quad t \in [kT, kT + \tau]. \quad (1.12)$$

Найдем закон изменения $y(t)$ на интервале паузы в k -м периоде, когда $e^*(t) = 0$. Он будет иметь вид

$$y(t) = y(kT + \tau)e^{-\frac{t-kT-\tau}{T_1}}. \quad (1.13)$$

Полагая в (1.12) $t = kT + \tau$, найдем $y(kT + \tau)$; подставим в (1.13) и после преобразований будем иметь

$$y(t) = y(kT)e^{-\frac{t-kT}{T_1}} + k_0 e(kT)e^{-\frac{t-kT}{T_1}}(e^{\frac{\tau}{T_1}} - 1), \quad t \in [kT + \tau, kT + T]. \quad (1.14)$$

Положим в (1.14) $t = kT + T$ и, обозначая $y(kT + T) = y(k + 1)$, $y(kT) = y(k)$, $e(kT) = e(k)$, будем иметь

$$y(k + 1) + a_1 y(k) = b_0 e(k), \quad (1.15)$$

где $a_1 = -e^{-\frac{T}{T_1}}$, $b_0 = k_0(e^{\frac{\tau}{T_1}} - 1)e^{-\frac{T}{T_1}}$.

Итак, связь e и y в дискретные моменты времени kT описывается линейным разностным уравнением первого порядка (частный случай (1.6)), коэффициенты которого a_1 и b_0 определены через параметры ИЭ и ЛНЧ.

Аналогично можно получить разностное уравнение при $t = kT + \varepsilon T$, т.е. для смещенных решетчатых функций $y(k, \varepsilon)$.

Применяя к (1.15) Z -преобразование, найдем для данного случая передаточную функцию

$$W(z) = \frac{k_0 d(d^{-\gamma} - 1)}{z - d} \quad d = e^{-\frac{T}{T_1}}, \quad \gamma = \frac{\tau}{T}. \quad (1.16)$$

Для простейших случаев передаточных функций $W_0(s)$ по этой же методике можно получить дискретные передаточные функции разомкнутой системы. Ниже приведем таблицу для трех вариантов передаточной функции $W_0(s)$.

Таблица 1.2

| | | | |
|----------|------------------|-----------------------------------|---|
| $W_0(s)$ | $\frac{a}{s}$ | $\frac{b}{T_1s + 1}$ | $\frac{c}{s(T_1s + 1)}$ |
| $W(z)$ | $\frac{aT}{z-1}$ | $\frac{bd(d^{-\gamma} - 1)}{z-d}$ | $cT \left[\frac{\gamma}{z-1} + \frac{d(1-d^{-\gamma})T_1}{T(z-d)} \right]$ |

Если передаточная функция $W_0(s)$ имеет более высокий порядок, но может быть представлена в виде суммы передаточных функций $W_i(s)$ простейшего типа, то в этом случае, находя по табл. 1.2 $W_i(z)$, можно получить общую передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W(z) = \sum_i W_i(z) = \frac{Y(z)}{E(z)}.$$

Рассмотрим другой способ получения передаточной функции разомкнутой системы, излагаемый практически в любом учебнике. Структура на рис. 1.4 может быть представлена в виде, изображенном на рис. 1.5, а.

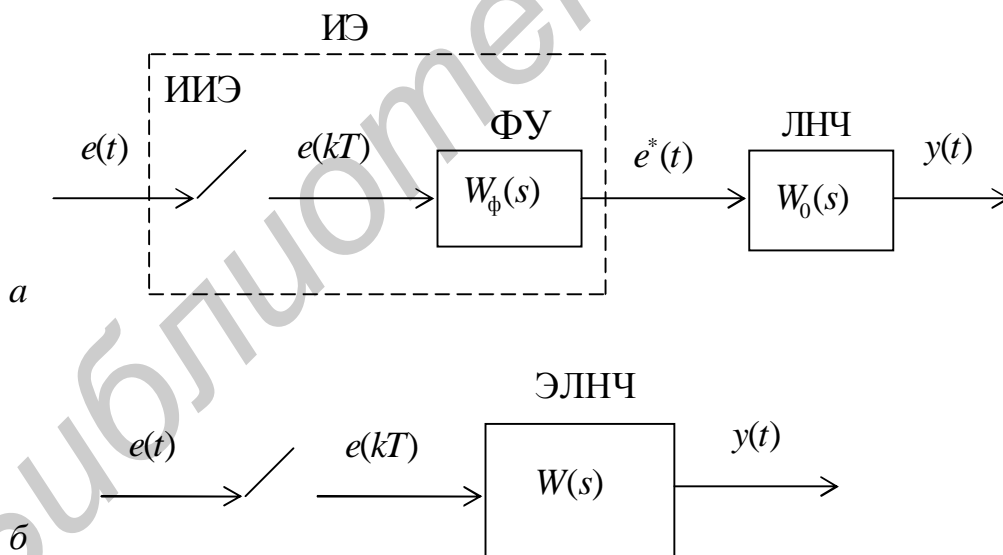


Рис. 1.5

На рис. 1.5, а импульсный элемент представлен в виде идеального импульсного элемента (ИИЭ) или ключа и формирующего устройства (ФУ). Ключ периодически замыкается с периодом T и формирует последовательность импульсов в виде δ -функций, площадь которых равна $e(kT)$. ФУ фор-

мирует последовательность прямоугольных импульсов $e^*(t)$, амплитуда которых равна $h_k = e(kT)$.

По определению δ -функция описывается так:

$$\delta(t - \lambda) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = \lambda, \\ 0 & \text{при } t \neq \lambda, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \lambda) dt = f(\lambda).$$

Разумеется, физически ИИЭ не существует, однако такое математическое представление ИЭ отражает физику процессов в исходной структуре рис. 1.3. Объединяя передаточные функции $W_\phi(s)$ и $W_0(s)$, приходим к структуре рис. 1.5, б, где ЭЛНЧ – эквивалентная линейная непрерывная часть с передаточной функцией $W(s) = W_\phi(s)W_0(s)$. В случае прямоугольных импульсов $W_\phi(s)$ имеет вид

$$W_\phi(s) = \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} = \frac{1 - e^{-\gamma Ts}}{s}, \quad (1.17)$$

где $0 < \gamma = \frac{\tau}{T} \leq 1$.

Если $\tau = T$, $\gamma = 1$, то такое формирующее устройство называют фиксатором или экстраполятором нулевого порядка.

Если рассматривать $y(t)$ для $t = kT$, т.е. $y(kT)$ и ввести изображения решетчатых функций $E(z)$, $Y(z)$, то связь входа и выхода в области изображений будет $Y(z) = W(z)E(z)$, где передаточную функцию дискретной разомкнутой системы можно определить по выражению [6]:

$$W(z) = Z \left\{ \frac{W_0(s)}{s} \right\} - z^{-1} Z_\varepsilon \left\{ \frac{W_0(s)}{s} \right\}_{\varepsilon=1-\gamma}. \quad (1.18)$$

Отметим, что Z -преобразование применяется к решетчатым функциям. Однако каждой решетчатой функции $f(k)$ соответствует непрерывная $f(t)$, а ей некоторое изображение $F(s)$. Поэтому $Z\{F(s)\}$ будем понимать как символическую запись $Z\{f(k)\}$.

Алгоритм применения формулы (1.18) следующий. Если $W_0(s)$ имеет высокий порядок, то $W_0(s)/s$ представляют в виде суммы простейших (табличных) слагаемых. Далее по таблицам Z_ε -преобразования находят изображения каждого слагаемого и суммируют их. В результате получают изобра-

жение $Z_\varepsilon \{W_0(s)/s\} = W_1(z, \varepsilon)$. Полагая в $W_1(z, \varepsilon)$ $\varepsilon = 0$, получают первое слагаемое в (1.18) и, полагая $\varepsilon = 1 - \gamma$, – второе.

Наиболее часто используется случай фиксатора нулевого порядка ($\gamma = 1$). В этом случае формула (1.18) упрощается и имеет вид

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_0(s)}{s} \right\}. \quad (1.19)$$

В наиболее общем случае передаточная функция $W_0(s)$ может быть записана в виде $W_0(s) = k_0 N(s) / s^\nu L(s)$. При этом всегда степень полинома $s^\nu L(s)$ больше степени полинома $N(s)$, а $\nu = 0, 1, 2, \dots$ характеризует порядок астатизма. В этом случае передаточная функция импульсной системы будет иметь вид

$$W(z) = \frac{k_0 N_1(z)}{(z-1)^\nu L_1(z)} = \frac{1}{(z-1)^\nu} W_1(z), \quad (1.20)$$

причем степени полиномов $L(s)$ и $L_1(z)$ будут равны.

Для импульсной системы понятие порядка астатизма сохраняется, т.е. передаточная функция (1.20) соответствует импульсной системе с астатизмом ν -го порядка.

Пример 1.2. Найти передаточную функцию разомкнутой импульсной системы, если $W_0(s) = k_0 (\tau_1 s + 1) / [s(T_1 s + 1)]$. Представим $W_0(s)$ в виде суммы двух слагаемых

$$W_0(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{T_1 s + 1},$$

где $A = k_0$, $B = k_0 (\tau_1 - T_1)$.

Воспользуемся табл. 1.2, тогда

$$Z\{A/s\} = A\gamma T / (z-1), \quad Z\{B/(T_1 s + 1)\} = Bd(d^{-\gamma} - 1)/(z-d).$$

Таким образом,

$$W(z) = \frac{A\gamma T}{z-1} + \frac{Bd(d^{-\gamma} - 1)}{z-d}. \quad (1.21)$$

Теперь воспользуемся формулой (1.18) и найдем

$$Z_\varepsilon \left\{ \frac{W_0(s)}{s} \right\} = Z_\varepsilon \left\{ \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s(T_1 s + 1)} \right\}.$$

По таблицам Z-преобразования [6] (либо табл. 1.1) находим:

$$Z_{\varepsilon} \left\{ \frac{A}{s^2} \right\} = ATz \left[\frac{\varepsilon}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} \right],$$

$$Z_{\varepsilon} \left\{ \frac{B}{s(T_1s+1)} \right\} = B \left[\frac{z}{z-1} - \frac{zd^{\varepsilon}}{z-d} \right].$$

Таким образом, имеем

$$Z_{\varepsilon} \left\{ \frac{W_0(s)}{s} \right\} = ATz \left[\frac{\varepsilon}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} \right] + B \left[\frac{z}{z-1} - \frac{zd^{\varepsilon}}{z-d} \right],$$

откуда находим $Z_{\varepsilon}\{W_0(s)/s\}$ при $\varepsilon=0$ и $Z_{\varepsilon}\{W_0(s)/s\}$ при $\varepsilon=1-\gamma$ и подставляем их в (1.21). После преобразований приходим к выражению (1.19). Как и следовало ожидать, оба способа дали одинаковую передаточную функцию, которую можно записать и так:

$$W(z) = \frac{b_0z + b_1}{z^2 + a_1z + a_2}, \quad (1.22)$$

где $b_0 = A\gamma T + Bd(d^{-\gamma} - 1)$, $b_1 = -A\gamma Td - Bd(d^{-\gamma} - 1)$, $a_1 = -(1+d)$, $a_2 = d$, а коэффициенты A и B определены ранее.

Если в приведенных выражениях положить $\gamma=1$, то получим передаточную функцию для случая, когда ФУ является фиксатором нулевого порядка.

1.4. Частотные характеристики импульсных систем

При описании и исследовании импульсных систем наряду с передаточными функциями и разностными уравнениями широкое распространение получили методы на базе частотных характеристик.

Если в формуле (1.7), определяющей прямое Z-преобразование, сделать замену переменной $z = e^{j\omega T}$, то получим соотношение

$$F^*(j\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) e^{-j\omega kT}, \quad (1.23)$$

которое определяет прямое дискретное преобразование Фурье.

Пусть известна передаточная функция разомкнутой системы $W(z)$, тогда после формальной замены $z = e^{j\omega T}$ получим $W(e^{j\omega T}) = W^*(j\omega)$, где ω – угловая частота.

Функция $W^*(j\omega)$ называется амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ) импульсной системы. Далее знак * будет относиться к частотным характеристикам импульсных систем. Характеристики без этого знака (например $W(j\omega)$) будут относиться к непрерывным системам.

$A^*(\omega) = |W^*(j\omega)|$ называется амплитудной частотной характеристикой (АЧХ) системы, а $\varphi^*(\omega) = \arg W^*(j\omega)$ – фазовой частотной характеристикой системы. Можно также ввести понятия вещественной и мнимой частотных характеристик.

Физический смысл частотных характеристик импульсной системы точно такой же, как и для непрерывной. Если на вход разомкнутой системы рис. 1.3 поступает гармонический сигнал $e(t) = A \sin \Omega t$, которому соответствует решетчатая функция $e(k) = A \sin \Omega k T$, то на выходе в установившемся режиме будем иметь сигнал

$$y(\infty) = A |W^*(j\Omega)| \sin(\Omega k T + \varphi^*(\Omega)), \quad (1.24)$$

где $y(\infty)$ здесь и далее будет обозначать установившееся значение сигнала или процесса при $k \rightarrow \infty$ или больших значений времени k .

Таким образом, АЧХ показывает, как изменяется амплитуда гармоники, а ФЧХ определяет величину фазового сдвига при прохождении гармоники через импульсную систему.

Так как $W^*(j\omega) = W(e^{j\omega T})$, а $e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T$, то в силу периодичности функций $\cos \omega T$ и $\sin \omega T$ частотные характеристики по отношению ω являются периодическими функциями периода $\omega_0 = 2\pi/T$, где здесь и далее ω_0 – частота квантования (дискретизации) импульсного элемента.

Так же как для непрерывных систем, для импульсных САУ строятся графики $W^*(j\omega)$, $A^*(\omega)$ и $\varphi^*(\omega)$ на плоскости при изменении частоты ω . График $W^*(j\omega)$ является годографом на комплексной плоскости. Так как частотные характеристики являются периодическими с периодом ω_0 , то их достаточно строить только на интервале частот от минус $\frac{\omega_0}{2}$ до $\frac{\omega_0}{2}$. Более того, $A^*(\omega)$ – четная, $\varphi^*(\omega)$ – нечетная функции своего аргумента, а годограф $W^*(j\omega)$ симметричен относительно действительной оси. Поэтому характеристики обычно строятся на интервале частот от 0 до $\frac{\omega_0}{2}$.

Периодичность частотных характеристик отличает их от характеристик непрерывных систем, что затрудняет получение логарифмических характеристик. Поэтому введем еще один класс частотных характеристик. В переда-

точной функции $W(z)$ сделаем замену комплексной переменной z на новую комплексную переменную w по формулам:

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w}, \quad w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}. \quad (1.25)$$

Заменяя $z = e^{j\omega T}$, получим $w = \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{2}{T} j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$. Обозначим $\frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = \omega_w$, тогда $w = j\omega_w$, где ω_w имеет размерность угловой частоты и носит название псевдочастоты. При изменении ω от минус $\frac{\omega_0}{2}$ до $\frac{\omega_0}{2}$ псевдочастота изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. При малых ω частота ω_w близка к ω .

Итак, заменяя z на w , получим передаточную функцию $W(w)$, из которой, полагая $w = j\omega_w$, получаем частотные характеристики $W^*(j\omega_w)$, $|W^*(j\omega_w)|$, $\varphi^*(j\omega_w) = \arg W^*(j\omega_w)$ – соответственно АФЧХ, АЧХ и ФЧХ относительно псевдочастоты.

Используя АЧХ и ФЧХ, можно получить логарифмические характеристики $L^*(\omega_w) = 20 \lg |W^*(j\omega_w)|$ – ЛАЧХ и $\varphi^*(j\omega_w)$ – ЛФЧХ. Графики логарифмических характеристик строятся обычным образом, как и для непрерывных систем в логарифмическом масштабе.

В заключение рассмотрим одно из интересных свойств импульсных систем, связанное с периодичностью частотных характеристик. Пусть на вход разомкнутой системы поступает гармонический сигнал $e(t) = A \sin(\Omega + r\omega_0)t$, $r = 0, 1, 2, \dots$, которому соответствует решетчатая функция $e(k) = A \sin(\Omega + r\omega_0)kT$. Тогда в соответствии с (1.24) в установившемся режиме на выходе будем иметь

$$y(\infty) = A |W^*(j(\Omega + r\omega_0))| \sin(\Omega kT + r\omega_0 kT + \varphi^*(\Omega + r\omega_0)).$$

В силу периодичности частотных характеристик $|W^*(j\omega)|$ и $\varphi^*(\omega)$ имеем $|W^*(j(\Omega + r\omega_0))| = |W^*(j\Omega)|$, $\varphi^*(\Omega + r\omega_0) = \varphi^*(\Omega)$. Кроме того, с учетом $\omega_0 = 2\pi/T$ можно записать $\sin(\Omega kT + 2\pi r k + \varphi^*(\Omega)) = \sin(\Omega kT + \varphi^*(\Omega))$. Окончательно получим $y(\infty) = A |W^*(j\omega)| \sin(\Omega kT + \varphi^*(\Omega))$, что совпадает с (1.24).

Итак, высокочастотная гармоника $A \sin(\Omega + r\omega_0)t$ и низкочастотная $A \sin \Omega t$ на выходе разомкнутой импульсной системы дают один и тот же вы-

ходной сигнал. Это явление называется стробоскопическим эффектом, который заключается в переносе высокочастотных составляющих спектра входного сигнала в низкочастотную область.

Пример 1.3. Пусть $W(s) = \frac{k_0}{T_1 s + 1}$, тогда передаточная функция разомкнутой системы в соответствии с (1.16) будет иметь вид

$$W(z) = \frac{k_1}{z-d}, \quad d = e^{-\frac{T}{T_1}}, \quad k_1 = k_0 d (d^{-\gamma} - 1), \quad \gamma = \frac{\tau}{T}.$$

Найдем основные частотные характеристики такой разомкнутой импульсной системы. Полагая $z = e^{j\omega T}$, с учетом $e^{j\omega T} = \cos\omega T + j\sin\omega T$ будем иметь

$$W^*(j\omega) = \frac{k_1}{(\cos\omega T - d) + j\sin\omega T}, \quad (1.26)$$

$$A^*(\omega) = \frac{k_1}{\sqrt{1 - 2d\cos\omega T + d^2}}, \quad (1.27)$$

$$\varphi^*(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\sin\omega T}{\cos\omega T - d}. \quad (1.28)$$

График АФЧХ (1.26) на комплексной плоскости представляет собой полуокружность при изменении частоты ω от 0 до $\omega_0/2$ (рис. 1.6, а). При этом $W^*(j0) = k_1/(1-d)$, $W^*(j\omega_0/2) = -k_1/(1+d)$. Радиус этой окружности равен $k_1/(1-d^2)$, а центр лежит на оси в точке С с координатой $k_1 d/(1+d)$.

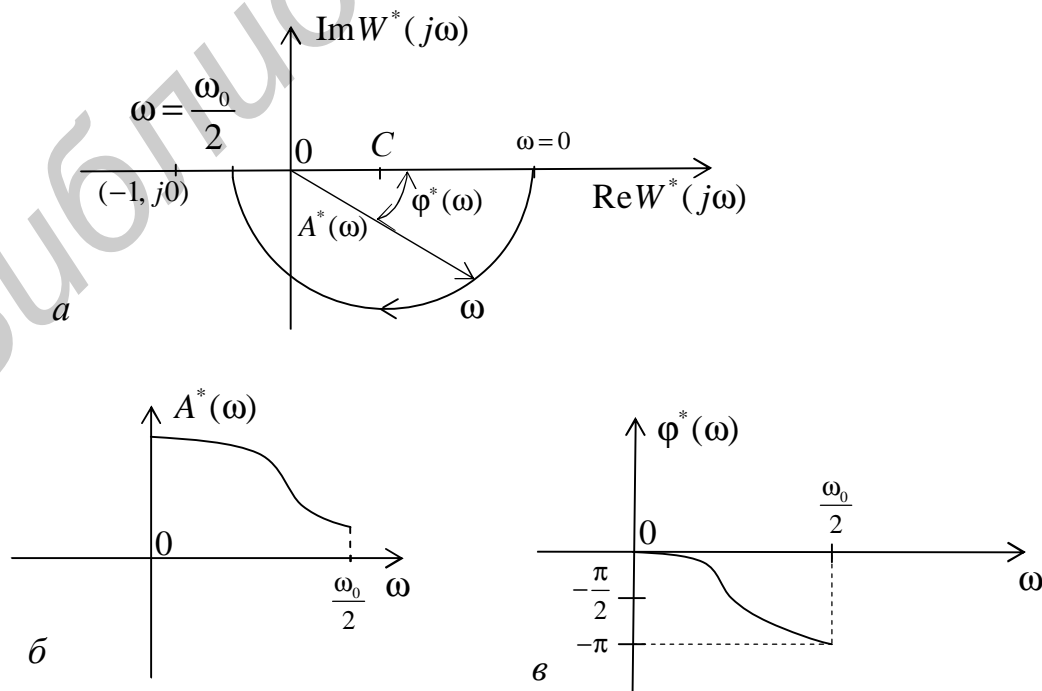


Рис. 1.6

Найдем логарифмические характеристики такой разомкнутой импульсной системы. В передаточной функции $W(z)$ сделаем замену $z = \left(1 + \frac{T}{2}w\right) / \left(1 - \frac{T}{2}w\right)$, тогда после несложных преобразований получим

$$W^*(w) = \frac{k'(1 - \tau_1'w)}{1 + T_1'w},$$

где $k' = \frac{k_1}{1-d}$, $\tau_1' = \frac{T}{2}$, $T_1' = \frac{T}{2} \frac{1+d}{1-d}$, а τ_1' и T_1' можно рассматривать как постоянные времени. Заменяя $w = j\omega_w$, получим АФЧХ относительно псевдочастоты ω_w :

$$W^*(j\omega_w) = \frac{k'(1 - j\omega_w\tau_1')}{1 + j\omega_w T_1'}, \quad (1.29)$$

из которой находим АЧХ и ФЧХ

$$|W^*(j\omega_w)| = \frac{k' \sqrt{1 + (\omega_w\tau_1')^2}}{\sqrt{1 + (\omega_w T_1')^2}}, \quad (1.30)$$

$$\varphi^*(\omega_w) = -\arctg \omega_w \tau_1' - \arctg \omega_w T_1'. \quad (1.31)$$

Логарифмическую амплитудно-частотную характеристику получим из $|W^*(j\omega_w)|$, которая будет иметь вид

$$L^*(\omega_w) = 20 \lg k' + 20 \lg \sqrt{1 + (\omega_w \tau_1')^2} - 20 \lg \sqrt{1 + (\omega_w T_1')^2}. \quad (1.32)$$

На рис. 1.7 приведены графики ЛАЧХ и ЛФЧХ, построенные в соответствии с (1.32) и (1.31), в которых учтено, что всегда $T_1' > \tau_1'$.

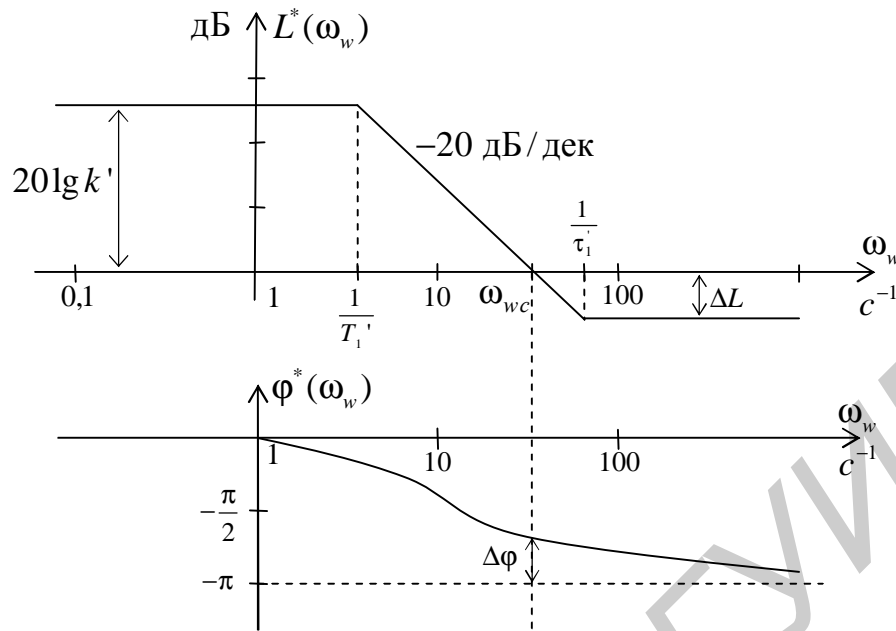


Рис. 1.7

1.5. Характеристики замкнутых импульсных систем

Рассмотрим базовую структуру импульсной САУ (см. рис. 1.3). Пусть найдена передаточная функция разомкнутой импульсной САУ $W(z)$, связывающая Z -изображения выхода y и сигнала ошибки e . Тогда $Y(z) = W(z)E(z)$. Очевидно, что $E(z) = V(z) - Y(z)$. Из этих уравнений нетрудно получить два соотношения:

$$Y(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)} V(z), \quad (1.33)$$

$$E(z) = \frac{1}{1+W(z)} V(z). \quad (1.34)$$

Введем следующие обозначения:

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)}, \quad \Phi_e(z) = \frac{1}{1+W(z)}, \quad (1.35)$$

тогда (1.33), (1.34) запишутся как $Y(z) = \Phi(z)V(z)$, $E(z) = \Phi_e(z)V(z)$.

Функцию $\Phi(z)$ будем называть главной передаточной функцией замкнутой импульсной системы, а $\Phi_e(z)$ – передаточной функцией замкнутой импульсной системы по ошибке. Итак, зная $W(z)$, нетрудно найти $\Phi(z)$ и

$\Phi_e(z)$. Если $W(z)$ есть отношение двух полиномов некоторых степеней относительно z , то $\Phi(z)$ и $\Phi_e(z)$ также будут отношением полиномов. Поэтому в конечном итоге $\Phi(z)$ можно представить в виде

$$\Phi(z) = \frac{Q(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^m + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (1.36)$$

Используя (1.36) и связь $Y(z) = \Phi(z)V(z)$, нетрудно найти разностное уравнение замкнутой импульсной системы, связывающее вход и выход:

$$a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = b_0 v(k+m) + \dots + b_m v(k). \quad (1.37)$$

Кроме этого, введем еще одну важную характеристику системы – характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (1.38)$$

которое является алгебраическим уравнением n -й степени. Полином $D(z)$ называется характеристическим полиномом замкнутой системы.

Введем также понятие частотных характеристик замкнутой системы. Делая в передаточной функции $\Phi(z)$ замену $z = e^{j\omega T}$, получим частотные характеристики, из которых наиболее часто используются $\Phi^*(j\omega)$ – АФЧХ замкнутой системы, $|\Phi^*(j\omega)|$ – АЧХ замкнутой системы и $P^*(\omega) = \operatorname{Re} \Phi^*(j\omega)$ – вещественная частотная характеристика замкнутой системы. Физический смысл этих частотных характеристик такой же, как и для разомкнутых систем.

Следующим классом характеристик импульсной системы являются временные характеристики: весовая функция импульсной системы $\varphi(k)$ и переходная функция импульсной системы $h(k)$, определяемые следующими соотношениями:

$$\varphi(k) = Z^{-1}\{\Phi(k)\}, \quad h(k) = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\Phi(k)\right\}. \quad (1.39)$$

Физический смысл временных характеристик следующий. Если на вход замкнутой системы поступает сигнал в виде δ -функции $v(t) = \delta(t)$, изображение которой $Z\{v(t)\} = V(z) = 1$, то изображение выхода будет равно $Y(z) = \Phi(z)V(z) = \Phi(z)$. Таким образом, $y(k) = Z^{-1}\{\Phi(k)\} = \varphi(k)$, т.е. $\varphi(k)$ есть реакция системы на сигнал в виде δ -функции. Если же на вход системы поступает сигнал в виде единичного ступенчатого воздействия $v(t) = 1[t]$,

изображение которого равно $Z\{v(k)\} = Z\{1[k]\} = z/(z-1)$, то изображение выхода будет $Y(z) = \Phi(z)[z/(z-1)]$, а оригинал $y(k) = Z^{-1}\{\Phi(z)[z/(z-1)]\} = h(k)$. Таким образом, $h(k)$ – это реакция системы на единичное ступенчатое воздействие. Функции $\varphi(k)$ и $h(k)$ связаны следующим соотношением: $\varphi(k) = \Delta h(k)$.

Если для системы известна весовая функция $\varphi(k)$, то при заданном входе $v(k)$ выход определяется следующим образом:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(k-i)v(i). \quad (1.40)$$

Выражение (1.40) представляет собой аналог интеграла свертки для импульсных систем.

Пример 1.4. Пусть $W_o(s) = \frac{k_0}{T_1 s + 1}$ (см. пример 1.3), тогда $W(z) = \frac{k_1}{z-d}$, где, $k_1 = k_0 d (d^{-\gamma} - 1)$, $\gamma = \frac{\tau}{T}$, $d = e^{-\frac{T}{T_1}}$. Нетрудно найти основные характеристики замкнутой системы:

$$\Phi(z) = \frac{k_1}{z + k_1 - d}, \quad \Phi_e(z) = \frac{z-d}{z + k_1 - d},$$

$$y(k+1) + (k_1 - d)y(k) = k_1 v(k),$$

$$D(z) = z + (k_1 - d) = 0,$$

$$\Phi^*(j\omega) = \frac{k_1}{(k_1 - d + \cos\omega T) + j\sin\omega T},$$

$$|\Phi^*(j\omega)| = \frac{k_1}{\sqrt{(k_1 - d + \cos\omega T)^2 + \sin^2\omega T}}.$$

1.6. Процессы в импульсных системах

Под процессом в импульсной САУ будем понимать изменение во времени некоторых координат, характеризующих систему. Чаще всего исследуется поведение системы по отношению к выходной координате y или по отношению к сигналу ошибки. Будем рассматривать все процессы для дискретных моментов времени kT , т.е. в виде решетчатых функций $y(k)$, $v(k)$ и т.д. Процессы в САУ возникают за счет приложения внешних воздействий

(управляющих, возмущений и т.п.) либо за счет изменения значений внутренних координат системы (вариации начальных условий).

Исходными характеристиками при анализе процессов являются разностное уравнение замкнутой системы, главная передаточная функция системы $\Phi(z)$ либо АФЧХ замкнутой системы $\Phi^*(j\omega)$.

Методы вычисления процессов можно разделить на три категории: аналитические, графоаналитические и методы моделирования с использованием ЭВМ.

С математической точки зрения вычисление процессов – это нахождение решения разностного уравнения (1.37). В теории разностных уравнений доказано, что общее решение уравнения (1.37) всегда представимо в виде суммы двух слагаемых

$$y(k) = y_c(k) + y_b(k), \quad (1.41)$$

где $y_c(k)$ – свободная составляющая общего решения, а $y_b(k)$ – вынужденная составляющая. Свободная составляющая обусловлена ненулевыми начальными условиями по переменной $y(k)$ и, если они равны нулю, то $y_c(k) = 0$. Вынужденная обусловлена входным воздействием $v(k)$ и, если $v(k) = 0$, то $y_b(k) = 0$.

Для оценки динамических свойств системы обычно ищется $y_b(k)$ и наиболее часто для двух видов входного сигнала $v(t) = 1[t]$ – единичной ступенчатой функции и $v(t) = A \sin \Omega t$ – гармонического воздействия, которым соответствуют решетчатые функции $v(k) = 1[k]$, $v(k) = A \sin \Omega k t$. Реакция системы на сигнал $v(k) = 1[k]$, как отмечено выше, это переходная функция замкнутой системы $h(k)$.

Типичный вид функции $h(k)$ приведен на рис. 1.8, на котором представлен график решетчатой функции $h(k)$ и непрерывная функция – огибающая.

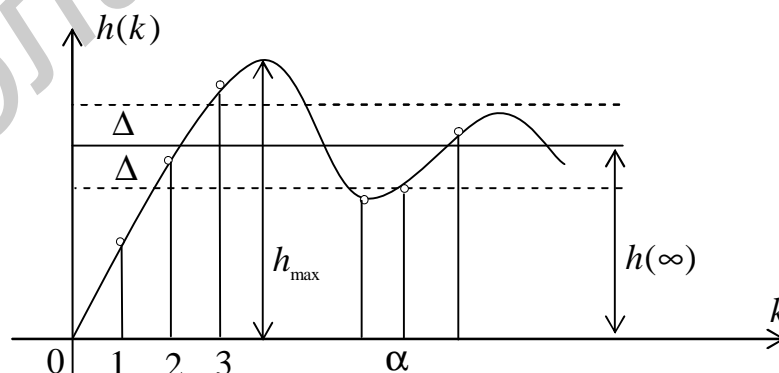


Рис. 1.8

Величина Δ задается, а $h(\infty)$ – установившееся значение функции $h(k)$. Используя график, введем два важнейших показателя качества системы, характеризующие ее динамические свойства: перерегулирование

$$\sigma\% = \frac{h_{\max} - h(\infty)}{h(\infty)} 100\%,$$

которое измеряется в процентах, и время регулирования t_p , определяемое как момент времени, когда переходная функция $h(k)$, «войдет» в область 2Δ и будет оставаться там при $k \rightarrow \infty$. На рис. 1.8 $t_p = \alpha T$, где α – целое число. Обычно $\Delta = 5\%h(\infty)$. Область 2Δ будем называть 5%-ной трубкой.

Рассмотрим аналитический способ вычисления переходной функции замкнутой системы $h(k)$. Пусть задана передаточная функция замкнутой системы в виде $\Phi(z) = Q(z)/D(z)$, где $Q(z)$ и $D(z)$ – полиномы степеней m и n , причем $m < n$. Тогда при входном сигнале $v(k) = 1[k]$, изображение которого равно $V(z) = z/(z-1)$, изображение выходного сигнала будет

$$Y(z) = \Phi(z)V(z) = \frac{z}{z-1} \frac{Q(z)}{D(z)} = \frac{zQ(z)}{B(z)}.$$

Рассмотрим идею получения $h(k)$ для простейшего случая. Пусть характеристическое уравнение $D(z) = 0$ имеет простые корни z_1, \dots, z_n (полюса передаточной функции $\Phi(z)$), тогда дробно-рациональная функция $Q(z)/B(z)$ разлагается на сумму простейших первого порядка:

$$\frac{Q(z)}{B(z)} = \sum_{i=0}^n \frac{Q(z_i)}{B^{(1)}(z_i)} \frac{1}{z - z_i}, \quad B^{(1)}(z_i) = \left. \frac{dB(z)}{dz} \right|_{z=z_i},$$

где считаем $z_0 = 1$. С учетом того, что $B^{(1)}(z) = (z-1)D^{(1)}(z) + D(z)$, будем иметь

$$\frac{Q(z)}{B(z)} = \frac{Q(1)}{D(1)} + \sum_{i=1}^n \frac{Q(z_i)}{(z_i-1)D^{(1)}(z_i)} \frac{1}{z - z_i}.$$

Таким образом, изображение $Y(z)$ будет иметь вид

$$Y(z) = z \frac{Q(z)}{B(z)} = \frac{Q(1)}{D(1)} + \sum_{i=1}^n c_i \frac{z}{z - z_i},$$

где $c_i = \frac{Q(z_i)}{(z_i-1)D^{(1)}(z_i)}$.

Каждое слагаемое под знаком суммы является табличным, т.е. для него легко найти оригинал. Окончательно, переходя к оригиналам $y(k) = Z^{-1}\{Y(z)\}$ и обозначая $y(k) = h(k)$, будем иметь

$$h(k) = \Phi(1) + \sum_{i=1}^n c_i z_i^k. \quad (1.42)$$

Первое слагаемое в (1.42) характеризует установившуюся (постоянную) составляющую, а второе – переходную.

В случае кратных корней характеристического уравнения $D(z) = 0$ в литературе [6] приводят соответствующие выражения для вычисления $h(k)$.

Недостатком такого подхода является необходимость вычисления корней алгебраических уравнений. Кроме того, после получения аналитического выражения требуется строить график $h(k)$ для оценки вида переходного процесса и параметров $\sigma\%$ и t_p . Обычно такой подход применим для систем не выше третьего порядка.

Существуют графоаналитические способы построения переходного процесса $h(k)$, базирующиеся на вещественной частотной характеристике замкнутой системы $P^*(\omega) = \operatorname{Re}\Phi^*(j\omega)$. Эти методы изложены, например, в [4], однако утратили свое значение.

Наиболее распространенный в настоящее время путь вычисления и построения переходной функции $h(k)$ – это компьютерное моделирование.

Второй тип процессов, исследуемых в импульсных системах, это процессы, вызванные гармоническими входными сигналами вида $v(k) = A \sin \Omega k T$. Наиболее просто они определяются для случая установившегося режима (для больших значений дискретного времени k). В этом случае исходной характеристикой является АФЧХ системы $\Phi^*(j\omega)$. После вычисления АЧХ как $|\Phi^*(j\omega)|$ и ФЧХ как $\varphi^*(\omega)$ определяется выходной гармонический сигнал в установившемся режиме:

$$y(\infty) = A |\Phi^*(j\Omega)| \sin(\Omega k T + \varphi^*(\Omega)). \quad (1.43)$$

Итак, вычисляя $|\Phi^*(j\Omega)|$ и $\varphi^*(\Omega)$, найдем амплитуду гармонического сигнала на выходе $A |\Phi^*(j\Omega)|$ и сдвиг его по фазе $\varphi^*(\Omega)$ относительно входа.

Одним из способов вычисления процессов в импульсной системе при любом законе изменения входной величины является рекуррентный пошаговый способ решения разностного уравнения (1.37). Рассмотрим разностное

уравнение примера 1.1: $y(k+1) + 2y(k) = 3v(k)$ при $y(0) = 0$ и $v(k) = 1[k]$, $k = 0, 1, \dots$ Уравнение запишем в виде

$$y(k+1) = -2y(k) + 3v(k).$$

Будем последовательно задавать значения $k = 0, 1, \dots$ и т. д., тогда при $k = 0$ имеем $y(1) = -2y(0) + 3v(0)$, но т.к. задано $y(0) = 0$, $v(0) = 1$, то $y(1) = 3$. При $k = 1$ имеем $y(2) = -2y(1) + 3v(1) = -2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = -3$. При $k = 2$ получим $y(3) = -2y(2) + 3v(2) = 9$ и т. д. Это совпадает с результатом аналитического решения $y(k) = 1 - (-2)^k$, полученного ранее в примере 1.1.

Рассмотрим общий случай уравнения (1.37), для чего представим его в следующем виде (принимая $a_0 = 1$):

$$y(k+n) = -a_1 y(k+n-1) - \dots - a_n y(k) + b_0 v(k+m) + \dots + b_m v(k).$$

Полагаем следующие начальные условия $v(k) = 0$ при $k = -1, -2, -3, \dots$, $y(0) = y(-1) = \dots = y(-(n-1)) = 0$, вход $v(k)$ задан для $k = 0, 1, 2, \dots$. Последовательно для $k = -(n-1), -(n-2), \dots, 0, 1, \dots$ найдем $y(1), y(2), \dots$

В импульсных системах, в отличие от непрерывных, при определенных параметрах системы возможно существование процессов «конечной длительности», т.е. достигающих установившегося положения за конечный промежуток времени.

Если в импульсной системе путем подбора параметров ИЭ и ЛНЧ можно в передаточной функции замкнутой системы (1.36) сделать все $a_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, $a_0 \neq 0$ (далее полагаем $a_0 = 1$), то передаточная функция (1.36) будет иметь вид

$$\Phi(z) = \frac{b_0 z^m + \dots + b_m}{z^n},$$

а разностное уравнение (1.37) соответственно будет

$$y(k+n) = b_0 v(k+m) + \dots + b_m v(k).$$

Задавая $v(k) = 1[k]$, $k = 0, 1, \dots$, $v(k) = 0$ при $k = -1, -2, -3, \dots$, а также $y(0) = y(-1) = \dots = y(-(n-1)) = 0$, можно вычислить переходную функцию $h(k) = y(k)$. При этом начиная с n -го момента времени ее значения будут постоянными $h = h(\infty) = b_0 + \dots + b_m$, т.е. переходной процесс заканчивается за nT интервалов. Пусть, например, имеем $y(k+2) = 2v(k+1) + 3v(k)$, $v(k) = 1[k]$, $k = 0, 1, \dots$, $v(-1) = 0$, $y(0) = 0$, $y(-1) = 0$, тогда найдем $y(0) = 0$, $y(1) = 2$, $y(2) = y(3) = \dots = 5$.

Итак, в системах с конечной длительностью процессов всегда время регулирования $t_p = nT$.

Пример 1.5. Пусть передаточная функция $W_0(s) = k_0(\tau_1 s + 1) / [s(T_1 s + 1)]$, тогда (см. пример 1.2) передаточная функция разомкнутой системы будет

$$W(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z^2 + a_1 z + a_2},$$

где
$$b_0 = k_0 T \left[\gamma + \frac{\tau_1 - T_1}{T} d(d^{-\gamma} - 1) \right], \quad b_1 = k_0 T \left[-\gamma d - \frac{\tau_1 - T_1}{T} d(d^{-\gamma} - 1) \right],$$

$$a_1 = -(1 + d), \quad a_2 = d, \quad d = e^{-\frac{T}{T_1}}.$$

Пусть $\gamma = 1$, $\tau_1 = 0$, $T/T_1 = 0,5$, $k_0 T = 1$. Тогда с учетом $d = e^{-0,5} \approx 0,61$ нетрудно вычислить коэффициенты: $b_0 = 0,22$, $b_1 = 0,17$, $a_1 = -1,61$, $a_2 = 0,61$.

Передаточная функция разомкнутой системы в этом случае будет

$$W(z) = \frac{0,22z + 0,17}{z^2 - 1,61z + 0,61},$$

а замкнутой системы

$$F(z) = \frac{Q(z)}{D(z)} = \frac{0,22z + 0,17}{z^2 - 1,39z + 0,78}.$$

Округляя числа, получим окончательное выражение для расчетов:

$$F(z) = \frac{0,2z + 0,2}{z^2 - 1,4z + 0,8} = \frac{Q(z)}{D(z)}.$$

Корни характеристического уравнения $D(z) = z^2 - 1,4z + 0,8$ будут $z_1 = 0,7 + j0,56$, $z_2 = 0,7 - j0,56$. Находим величины, входящие в (1.42). Так как $n = 2$, получим $c_1 = 0,39(-1,26 + j0,23)$, $c_2 = 0,39(-1,26 - j0,23)$, $F(1) = 1$. Таким образом, будем иметь

$$h(k) = 1 + c_1(0,7 + j0,56)^k + c_2(0,7 - j0,56)^k.$$

После преобразования комплексных чисел с использованием известных правил получаем окончательно

$$h(k) = 1 - 0,9^k \sin(0,7k + 1,4).$$

Пример 1.6. Пусть $W_0 = k_0/(T_1s + 1)$, тогда (см. пример 1.4) $W(z) = k_1/(z - d)$, $d = e^{-\frac{T}{T_1}}$, $k_1 = k_0d(d^{-\gamma} - 1)$. Передаточная функция замкнутой системы имеет вид $\Phi(z) = k_1/(z - d + k_1)$. Найдем $h(k)$ при $v(k) = 1[k]$. Очевидно, $y(z) = k_1 z / [(z - 1) \cdot (z - d + k_1)]$. По табл. 1.1 для данного изображения находим оригинал

$$h(k) = y(k) = \frac{k_1}{1 - d + k_1} [1 - (d - k_1)^k].$$

Установившийся процесс в такой системе при $d \neq k_1$ и $k \rightarrow \infty$ будет $h(\infty) = k_1/(1 - d + k_1)$. Если $d > k_1$, процесс будет монотонным, а если $d < k_1$ – колебательным. Пусть выполняется условие $d = k_1$, т.е. $k_0 = \frac{1}{e^{\frac{T}{T_1}} - 1}$, что всегда выполнимо. В этом случае имеем систему с процессами конечной длительности, т.е. $h(k)$ будет $h(0) = 0$, $h(1) = h(2) = \dots = k_1 = d$. Процесс в системе заканчивается через один период T .

1.7. Устойчивость процессов в импульсных системах

Как отмечено в подразд. 1.5, замкнутая импульсная система характеризуется разностным уравнением (1.37) или передаточной функцией (1.36). Решение разностного уравнения всегда представимо в виде суммы свободной $y_c(k)$ и вынужденной $y_b(k)$ составляющих (1.41). На устойчивость процессов, протекающих в импульсной системе, или на устойчивость импульсной системы влияет только поведение свободной составляющей. Дадим определения устойчивости, аналогичные определениям для непрерывных систем [1].

Если с течением времени при $k \rightarrow \infty$ свободная составляющая $y_c(k)$ затухает и стремится к нулю, т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} y_c(k) = 0$, то система будет асимптотически устойчивой (далее просто устойчивой).

Если $y_c(k)$ при $k \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает, т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} y_c(k) = \infty$, то система будет неустойчивой.

Наконец, если при $k \rightarrow \infty$ $y_c(k)$ не возрастает до бесконечности и не затухает до нуля, то система будет нейтральна или находится на границе устойчивости.

Устойчивость системы, как сейчас покажем, зависит от корней характеристического уравнения замкнутой системы:

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (1.44)$$

Если уравнение (1.44) имеет n простых (различных) корней z_i , то свободная составляющая имеет следующий вид:

$$y_c(k) = c_1 z_1^k + \dots + c_n z_n^k, \quad (1.45)$$

где c_i – произвольные постоянные.

Из (1.45) нетрудно сделать вывод, что если все z_i – действительные величины и все модули $|z_i| < 1$, то при $k \rightarrow \infty$ $y_c(k) \rightarrow 0$, т.е. система устойчива. Если какой-либо корень z_i – комплексный, т.е. $z_i = a + jb$, то его можно представить в виде $z_i = |z_i| e^{j\varphi}$, $|z_i| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$. В силу этого составляющая $z_i^k = |z_i|^k e^{j\varphi k} = |z_i|^k (\cos\varphi k + j\sin\varphi k)$ при $k \rightarrow \infty$ будет стремиться к нулю.

Рассмотренное выше можно распространить на случай произвольных корней уравнения (1.44) и сформулировать следующее условие: необходимым и достаточным условием устойчивости импульсной системы является выполнение условия

$$|z_i| < 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.46)$$

т.е. модули всех корней характеристического уравнения (1.44) должны быть меньше единицы.

Если $|z_i| \leq 1$, $i = 1, \dots, n$, то система нейтральна, а если существует хотя бы один корень, модуль которого больше единицы, то система неустойчива.

Для оценки устойчивости нет необходимости находить корни уравнения (1.44). Разработаны специальные критерии устойчивости для импульсных систем, которые являются аналогами соответствующих критериев непрерывных систем. Существуют две их разновидности: алгебраические и частотные. Начнем рассмотрение с алгебраического критерия.

В уравнении (1.44) сделаем замену комплексной переменной z на новую комплексную переменную w по формуле

$$z = \frac{1+w}{1-w}. \quad (1.47)$$

Замена (47) аналогична (25), только множитель $T/2$ при w опускается.

В результате замены от (1.44) приходим к уравнению n -й степени относительно w :

$$A_0 w^n + A_1 w^{n-1} + \dots + A_n = 0. \quad (1.48)$$

Формулы, связывающие A_i с a_i , приводятся в литературе [6].

Замена (1.47) обладает следующими свойствами:

– n корням z_i уравнения (1.44) однозначно соответствуют n корней w_i уравнения (1.48) и наоборот;

– корню z_i уравнения (1.44), для которого $|z_i| < 1$, однозначно соответствует корень w_i уравнения (1.48), который будет иметь отрицательную действительную часть, т.е. $Re w_i < 0$.

На основании вышесказанного можно сформулировать: если все корни $|z_i| < 1$, то все корни w_i будут с отрицательными действительными частями ($Re w_i < 0$) и наоборот. Таким образом, для оценки устойчивости импульсной системы можно применить критерий Гурвица, разработанный для непрерывных систем.

Для уравнения (1.48) составим матрицу Гурвица [1]

$$A = \begin{bmatrix} A_1 A_3 \dots \dots 0 \\ A_0 A_2 \dots \dots 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0 \dots \dots \dots A_n \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

и введем главные (диагональные) определители этой матрицы:

$$\Delta_1 = A_1, \quad \Delta_2 = A_1 A_2 - A_0 A_3, \quad \dots, \Delta_n = |A|.$$

Необходимым и достаточным условием устойчивости замкнутой импульсной системы будет выполнение неравенств

$$A_0 > 0, \quad \Delta_1 > 0, \quad \dots, \Delta_n > 0. \quad (1.50)$$

Рассмотрим простейшие случаи. Пусть $n = 1$, тогда (1.44) будет $a_0 z + a_1 = 0$. Непосредственно находим корень уравнения $z_1 = -a_1/a_0$. Условие устойчивости будет $|z_1| < 1$, т.е. $|a_1| < a_0$ при $a_0 > 0$.

Пусть $n = 2$, тогда (1.44) будет $a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0$. Замена (1.47) приведет к уравнению $A_0 z^2 + A_1 z + A_2 = 0$, где $A_0 = a_0 - a_1 + a_2$, $A_1 = 2(a_0 - a_2)$, $A_2 = a_0 + a_1 + a_2$. По критерию Гурвица получим условие устойчивости:

$$a_0 - a_1 + a_2 > 0, \quad a_0 + a_1 + a_2 > 0, \quad a_0 - a_2 > 0. \quad (1.51)$$

Для $n = 3$ условия устойчивости приведены в [6].

Рассмотрим для импульсных систем частотный критерий устойчивости Найквиста, аналог критерия Найквиста для непрерывных систем. Для оценки устойчивости импульсной замкнутой системы базовой структуры (см. рис. 1.3) будем использовать АФЧХ разомкнутой системы $W(j\omega)$. Формулировка критериев Найквиста для импульсных систем аналогична формулировке для непрерывных систем. Приведем одну из формулировок

для случая, когда передаточная функция разомкнутой системы не имеет полюсов, модули которых больше единицы, т.е. разомкнутая система устойчива или нейтральна. Итак, критерий Найквиста: замкнутая система будет устойчива, если годограф $W(j\omega)$ при изменении ω от 0 до $\omega_0/2$ не охватывает на комплексной плоскости точку с координатами $(-1, j0)$.

Исследовать устойчивость также можно по логарифмическим характеристикам разомкнутой системы $L(\omega_w)$ и $\varphi(\omega_w)$. Формулировка вышеприведенного критерия Найквиста для логарифмических характеристик разомкнутой системы следующая: замкнутая импульсная система будет устойчивой, если до частоты среза ω_{wc} фазовая характеристика $\varphi(\omega_w)$ не пересекает ось $\varphi(\omega_w) = -\pi$, либо пересекает ее четное количество раз. Аналогично непрерывным системам вводятся понятия запасов устойчивости замкнутой импульсной системы по модулю ΔL и по фазе $\Delta\varphi$. На рис. 1.7, например, показан случай устойчивой импульсной замкнутой системы и показаны запасы устойчивости ΔL , $\Delta\varphi$.

При исследовании импульсных систем одной из важнейших задач является задача, связанная с определением областей устойчивости и выбором параметров из условий устойчивости. Коэффициенты a_i характеристического уравнения (1.44) зависят от параметров импульсной системы: коэффициента усиления, постоянных времени, периода дискретизации и т.п. При одних значениях этих параметров система будет устойчивой, при других – неустойчивой.

Совокупность параметров, при которых система будет устойчивой, соответствует области устойчивости в пространстве исследуемых параметров. Граница этой области будет границей устойчивости. Если число исследуемых параметров равно единице или двум, то области устойчивости можно интерпретировать как интервал (или интервалы) в случае одного параметра и как некоторые области на плоскости двух параметров во втором случае. При этом возможно графическое построение областей устойчивости.

Для определения областей устойчивости можно воспользоваться любыми критериями устойчивости. В случае небольшого порядка системы n удобно использовать критерий Гурвица для импульсных систем.

Пусть α_i , $i = 1, \dots, r$ – параметры системы, относительно которых определяется область устойчивости, тогда коэффициенты a_i характеристического уравнения (1.44) и соответственно коэффициенты A_i уравнения (1.48) зависят от α_i . Таким образом, область устойчивости в пространстве параметров α_i будет определяться неравенствами (1.50), где $A_i(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, а границы этой области определяются уравнениями

$$A_0(\alpha_i) = 0, A_1(\alpha_i) = 0, \dots, A_n(\alpha_i) = 0. \quad (1.52)$$

Пример 1.7. Пусть $W_0(s) = k_0 / (T_1 s + 1)$. Требуется исследовать устойчивость замкнутой системы. Передаточная функция разомкнутой системы будет (см. пример 1.2) $W(z) = k_1 / (z - d)$, где $d = e^{-\frac{T}{T_1}}$, $k_1 = k_0 d (d^{-\gamma} - 1)$, $\gamma = \tau / T$. Характеристическое уравнение замкнутой системы $D(z) = z + k_1 - d = 0$. Оно имеет единственный корень $z_1 = d - k_1$ и из условия устойчивости $|z_i| < 1$ получим

$$d - 1 < k_0 d (d^{-\gamma} - 1) < 1 + d, \quad d = e^{-\frac{T}{T_1}}. \quad (1.53)$$

Неравенство (1.53) определяет собой область устойчивости для четырех параметров импульсной системы T , T_1 , γ , k_0 . Так как $0 < d < 1$, $d(d^{-\gamma} - 1) > 0$, то будем иметь

$$\frac{d - 1}{d(d^{-\gamma} - 1)} < k_0 < \frac{d + 1}{d(d^{-\gamma} - 1)}. \quad (1.54)$$

Выражение (1.54) определяет при заданных d и γ интервал (область устойчивости) изменения коэффициента усиления k_0 из условий устойчивости, где $k_m = \frac{1 + d}{d(d^{-\gamma} - 1)}$ – граничное (максимальное) значение коэффициента усиления, при этом если $k_0 < k_m$, то замкнутая система устойчива, если $k_0 > k_m$, то неустойчива.

В частности, при $\gamma = 1$ (система с экстраполятором нулевого порядка) из (1.54) имеем

$$-1 < k_0 < \frac{1 + d}{1 - d}. \quad (1.55)$$

На базе этого примера сделаем важный общий вывод, касающийся импульсных систем. Для непрерывной замкнутой системы с передаточной функцией $W_0(s) = k_0 / (T_1 s + 1)$ условие устойчивости будет $k_0 > -1$, т.е. при любом $T_1 > 0$ и любом сколь угодно большом $k_0 > 0$ система устойчива. Для импульсной системы увеличивать k_0 безгранично нельзя, система при $k_0 > k_m$ станет неустойчивой. Итак, введение импульсного элемента в замкнутый контур САУ делает систему более критичной по отношению к устойчивости.

Анализ устойчивости данной системы можно провести и на базе частотного критерия Найквиста по полученным в примере 1.3 частотным характеристикам. Из рис.1.6 и формулы (1.26) следует, что при увеличении k_0 точка при $\omega = \omega_0 / 2$ будет смещаться влево по действительной оси и при значении k_0 , большем граничного, годограф $W(j\omega)$ охватит точку $(-1, j0)$, при этом

система станет неустойчивой. Это следует также из логарифмических частотных характеристик рис. 1.7. Если увеличивается k_0 , то увеличивается k_1 , ЛАЧХ поднимается вверх, ω_{wc} сдвигается вправо, $\Delta L \rightarrow 0$, $\Delta \phi \rightarrow 0$ и система при превышении граничного значения коэффициента усиления k_0 становится неустойчивой.

Пример 1.8. Пусть $W_0(s) = k_0(\tau_1 s + 1) / [s(T_1 s + 1)]$, что соответствует примеру 1.2. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид (1.22), а характеристическое уравнение замкнутой системы будет

$$z^2 + (a_1 + b_0)z + a_2 + b_1 = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 = 0,$$

где $b_0 = A\gamma T + Bd(d^{-\gamma} - 1)$, $b_1 = -A\gamma Td - Bd(d^{-\gamma} - 1)$, $a_1 = -(1 + d)$, $a_2 = d$, $A = k_0$, $B = k_0(\tau_1 - T_1)$, $d = e^{-\frac{T}{T_1}}$, $\alpha_1 = a_1 + b_0$, $\alpha_2 = a_2 + b_1$.

Используя (1.51), получим условия устойчивости:

$$1 - \alpha_1 + \alpha_2 > 0, \quad 1 + \alpha_1 + \alpha_2 > 0, \quad 1 - \alpha_2 > 0.$$

Итак, задавая параметры системы k_0 , τ_1 , T_1 , T , γ , находим α_1, α_2 и проверяем по приведенным условиям устойчивость замкнутой системы.

Рассмотрим частный случай при $\tau_1 = 0$, когда можно показать, что система трех неравенств сводится к двум:

$$k_0 T < \frac{2(1 + e^{-\beta})\beta}{\gamma\beta + [\gamma\beta - (e^{\gamma\beta} - 1)]e^{-\beta}},$$

$$k_0 T < \frac{\beta(e^\beta - 1)}{e^{\gamma\beta} - 1 - \gamma\beta}, \quad (1.56)$$

где $\beta = T/T_1$.

Эти неравенства определяют область устойчивости системы в пространстве параметров k_0 , T_1 , T , γ . Отсюда также видно, что величина k_0 ограничена сверху правой частью первого или второго неравенства.

1.8. Точность импульсных систем

Точность замкнутой импульсной системы (см. рис. 1.3) в дискретные моменты времени kT определяется сигналом ошибки (рассогласования) $e(kT) = v(kT) - y(kT)$, который характеризует текущую ошибку. Для оценки точности более удобно ввести, как это сделано для непрерывных систем, понятие установившейся ошибки $e(\infty)$, которая определяется для достаточно

больших моментов времени k после затухания переходной (свободной) составляющей процессов и в отличие от текущей ошибки часто является числом. Итак, при вычислении $e(\infty)$ будем полагать, что $e(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k)$.

Изображение сигнала ошибки и изображение входа связаны соотношением

$$E(z) = \Phi_e(z)V(z) = \frac{1}{1+W(z)}V(z),$$

где передаточную функцию разомкнутой системы будем брать в форме (1.22):

$$W(z) = \frac{1}{(z-1)^v}W_1(z).$$

Обычно оценивается точность импульсной системы на два вида воздействий: полиномиального $v(k) = v_0 + v_1k + v_2k^2 + \dots + v_rk^r$ и гармонического $v(k) = A \sin \Omega kT$.

Частными случаями полиномиального воздействия являются ступенчатая функция (скачок по положению) $v(k) = v_0 1[k]$, линейное воздействие (скачок по скорости) $v(k) = v_1k$ и квадратичное воздействие (скачок по ускорению) $v(k) = v_2k^2$.

В теории Z -преобразования существует теорема о конечном значении решетчатой функции (оригинала) [6]:

$$f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z).$$

Используя эту теорему, можно написать

$$e(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z), \quad (1.57)$$

где $E(z) = \frac{(z-1)^v}{(z-1)^v + W_1(z)}V(z)$.

Рассмотрим частные случаи. Пусть $v = 0$, $v(k) = v_0 1[k]$, тогда $V(z) = v_0 z / (z-1)$ и из (1.57) нетрудно получить $e(\infty) = v_0 / (1 + W_1(1))$. Так как $v = 0$ соответствует статической системе, то такую ошибку называют статической.

Пусть $v = 1$, $v(k) = v_1k$, тогда $V(z) = v_1 z / (z-1)^2$ и из (1.57) получим $e(\infty) = v_1 / W_1(1)$. Такую ошибку будем называть скоростной. Нетрудно проверить, что в данном случае статическая ошибка будет равна нулю.

Пусть $\nu = 2$, статическая и скоростная ошибки будут равны нулю, появится ошибка по ускорению. При этом все ошибки будут обратно пропорциональны величине $W_1(1)$.

Итак, можно сделать вывод, который является общим для импульсных систем: точность системы тем выше (ошибки тем меньше), чем выше порядок астатизма системы и больше величина $W_1(1)$. Так как $W_1(1)$ прямо пропорциональна коэффициенту усиления k_0 линейной непрерывной части системы $W_0(s)$, то увеличение k_0 будет приводить к повышению точности импульсной системы.

Точность системы в установившихся режимах также можно оценивать по коэффициентам ошибок c_0, c_1, \dots , которые имеют аналогичный непрерывным системам смысл и определяются по выражению [6]

$$c_i = \frac{d^i \Phi_e(z)}{dz^i} \Big|_{z=1}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (1.58)$$

В частности для системы с астатизмом ν -го порядка $c_0 = c_1 = \dots = c_{\nu-1} = 0$.

Рассмотрим анализ точности системы при воспроизведении гармонического сигнала $y(k) = \sin \Omega k T$, амплитуду которого будем полагать равной единице. Тогда в соответствии с (1.43) в установившемся режиме на выходе замкнутой системы сигнал будет иметь вид

$$y(\infty) = |\Phi^*(j\Omega)| \sin(\Omega k T + \varphi^*(\Omega)), \quad (1.59)$$

а ошибка в установившемся режиме будет

$$e(\infty) = |\Phi_e^*(j\Omega)| \sin(\Omega k T + \varphi_e^*(\Omega)), \quad (1.60)$$

где $|\Phi^*(j\Omega)|$, $|\Phi_e^*(j\Omega)|$, $\varphi^*(\Omega)$, $\varphi_e^*(\Omega)$ – соответствующие значения модулей и сдвигов фаз, определенные по частотным характеристикам $\Phi^*(j\omega)$, $\Phi_e^*(j\omega)$.

Обычно в теории систем автоматического управления считают, что ошибки воспроизведения гармонического сигнала по фазе не имеют существенного влияния на работу САУ. Ошибки воспроизведения амплитуды из (1.59), (1.60) будут

$$\Delta_y = |1 - |\Phi^*(j\Omega)|| = |1 - A_3^*(\Omega)|,$$

$$\Delta_e = |\Phi_e^*(j\Omega)|. \quad (1.61)$$

Обычно $\Delta_y \geq \Delta_e$, однако в диапазоне низких частот при малом Ω можно считать $\Delta_e \approx \Delta_y$.

Так же как и для непрерывных систем, для замкнутой импульсной системы можно ввести понятие полосы пропускания: это диапазон частот от 0 до ω_n , в котором ошибка воспроизведения гармонического сигнала Δ_y не превышает заданной величины Δ , т.е. $|\Delta_y| \leq \Delta$.

Так как $\Phi^*(j\omega) = W^*(j\omega)/[1+W^*(j\omega)]$, а $\Phi_e^*(j\omega) = 1/[1+W^*(j\omega)]$, то для определения Δ_y и Δ_e в (1.61) можно использовать АФЧХ разомкнутой системы $W^*(j\omega)$.

Если частота входной гармоники достаточно низкая, то несложно показать, что при $\omega \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow 1$) для статических систем ($v=0$) $|\Phi^*(j0)| = \frac{W_1(1)}{1+W_1(1)}$, $|\Phi_e^*(j0)| = \frac{1}{1+W_1(1)}$ и $\Delta_y \approx \Delta_e \approx 1/[1+W_1(1)]$. Для астатических систем $|\Phi^*(j0)| = 1$, $|\Phi_e^*(j0)| = 0$ и $\Delta_y = \Delta_e \approx 0$.

Таким образом, на точность воспроизведения гармонического сигнала влияет порядок астатизма и коэффициент усиления k_0 непрерывной части системы, входящей в $W_1(1)$.

В заключение отметим, что все изложенное имеет смысл только для устойчивых систем.

Пример 1.9. Рассмотрим импульсную САУ из примеров 1.3 и 1.7. Передаточная функция непрерывной части $W_0 = k_0/(T_1s + 1)$, а передаточная функция разомкнутой импульсной системы $W(z) = k_1/(z-d)$, $k_1 = k_0d(d^{-\gamma} - 1)$, $d = e^{-T/T_1}$. Рассмотрим случай, когда $\gamma = 1$, тогда $k_1 = k_0(1-d)$. В примере 1.7 для $\gamma = 1$ условие устойчивости будет $0 < k_0 < (1+d)/(1-d)$.

Найдем $W(1) = k_0$ и статическую ошибку:

$$e^{(\infty)} = \frac{1}{1+W(1)} = \frac{1}{1+k_0}.$$

Из условия устойчивости $k_0 < (1+d)/(1-d)$ следует, что при любом конечном $0 < d < 1$ ошибку нельзя сделать меньше величины $(1-d)/2$.

Оценим ошибки в такой системе при гармоническом воздействии. Очевидно,

$$\Phi^*(j\omega) = \frac{k_1}{e^{j\omega T} - d + k_1}, \quad \Phi_e^*(j\omega) = \frac{e^{j\omega T} - d}{e^{j\omega T} - d + k_1}.$$

Примем $d = 0,5$, из условия устойчивости $k_0 < 3$ выберем $k_0 = 2$, тогда $k_1 = 1$. Модули частотных характеристик будут

$$|\Phi^*(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1,25 + \cos \omega T}}, \quad |\Phi_e^*(j\omega)| = \frac{\sqrt{1,25 - \cos \omega T}}{\sqrt{1,25 + \cos \omega T}}.$$

Пусть $T = 0,1$ с, $\omega = 1$ рад/с, тогда $|\Phi^*(j1)| = 0,668$, $|\Phi_e^*(j1)| = 0,334$. В соответствии с (1.61) имеем $\Delta_y = 1 - 0,668 = 0,332$, $\Delta_e = 0,334$, т.е. ошибки почти совпали. В процентном отношении ошибка составляет 33 %.

Пусть $d = 0,9$, из условия устойчивости $k_0 < 19$ выбираем $k_0 = 10$, тогда $k_1 = 1$. При $T = 0,1$ с, $\omega = 1$ рад/с ошибки в этом случае будут $\Delta_y = 0,1$, $\Delta_e = 0,15$, т.е. (10 – 15) %.

1.9. Оценки качества импульсных систем

Так же как и для непрерывных систем, для импульсных САУ существуют различные оценки качественных показателей.

Динамические показатели системы можно оценить по корням характеристического уравнения замкнутой системы $D(z) = 0$ (1.38). Качественные показатели динамических свойств линейной импульсной системы в основном определяются характером поведения свободной составляющей $y_c(k)$ общего решения (1.41) или, что то же самое, переходной составляющей, которая является вторым слагаемым переходной функции $h(k)$ в (1.42). В случае различных корней z_i характеристического уравнения (1.38), свободная (переходная) составляющая имеет вид (1.45), а при наличии одного кратного корня z_1 кратности r и остальных простых корней z_{r+1}, \dots, z_n будет

$$y_c(k) = c_1 z_1^k + c_2 k z_1^k + \dots + c_r k^{r-1} z_1^k + c_{r+1} z_{r+1}^k + \dots + c_n z_n^k.$$

Из приведенных выражений следует, что характер изменения во времени $y_c(k)$ зависит от вида корней z_i . Будем далее предполагать, что $|z_i| < 1$, т.е. система устойчива. Тогда при $k \rightarrow \infty$ все составляющие затухают и $\lim_{k \rightarrow \infty} y_c(k) = 0$.

В теории линейных импульсных систем принято вводить корневые оценки относительно корней s_i характеристического уравнения $D(s) = 0$, получаемого из уравнения $D(z) = 0$ заменой $z = e^{sT}$. Если $z = \alpha + j\beta$, а $s = a + jb$, то нетрудно получить связь между действительными и мнимыми частями корней:

$$a = \frac{1}{T} \ln \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad b = \frac{1}{T} \varphi, \quad \varphi = \arctg \frac{\beta}{\alpha}.$$

Доминирующей составляющей (наиболее медленно затухающей) в переходном процессе будет та, для которой корень z_i имеет наибольший модуль $\max_i |z_i|$, который обозначим через $\rho_i = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}$. Этому корню соответствует корень s_i , для которого величина $|a_i|$ будет минимальной.

Степенью устойчивости η будем называть минимальную величину модуля вещественной части корня характеристического уравнения $D(s) = 0$ замкнутой системы

$$\eta = \min_i |a_i| = \min_i \frac{1}{T} \left| \ln \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2} \right|. \quad (1.62)$$

Таким образом, для определения η следует в (1.62) взять корень z_i , имеющий минимальный модуль.

Степень устойчивости η применяется для оценки быстродействия системы: чем больше η , тем меньше t_p . С этой точки зрения термин «степень устойчивости» является неудачным, его следовало бы заменить на термин «степень быстродействия». Однако будем придерживаться общепринятой терминологии. Если определить время регулирования t_p как время вхождения переходной функции в 5 %-ную трубку от установившегося режима, то это произойдет за l периодов:

$$l = \frac{3}{\eta}, \quad t_p = lT = \frac{3}{\left| \ln \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2} \right|}. \quad (1.63)$$

В частности, для процессов «конечной длительности» (см. подразд. 1.6) все корни характеристического уравнения z_i равны нулю и величина $\eta = \infty$. Поэтому такие системы называют системами с бесконечной степенью устойчивости.

Второй корневой оценкой является степень колебательности (колебательность системы) μ , определяемая как

$$\mu = \max_i \left| \frac{b_i}{a_i} \right| = \max_i \frac{|\Phi_i|}{\left| \ln \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2} \right|}. \quad (1.64)$$

Величина μ характеризует склонность системы к колебаниям: чем больше μ , тем переходные процессы становятся более колебательными.

Вычисление η и μ по корням характеристического уравнения при высоком порядке последнего – трудоемкий процесс. Существуют косвенные методы оценки этих величин, изложенные в литературе [4].

Следующим видом оценок процессов в импульсных системах являются суммарные оценки вида:

$$I_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (h(\infty) - h(k)), \quad I_2 = \sum_{k=0}^{\infty} (h(\infty) - h(k))^2, \quad (1.65)$$

где $h(k)$ – переходная функция замкнутой системы, $h(\infty)$ – ее установившееся значение при $k \rightarrow \infty$.

Оценка I_1 принимается для монотонных процессов ($\sigma \% = 0$), а I_2 как для монотонных, так и для колебательных ($\sigma \% \neq 0$). Поэтому чаще применяется более универсальная оценка I_2 . Суммарные оценки так же, как интегральные для непрерывных систем одновременно с помощью одного показателя оценивают и длительность переходного процесса (время регулирования t_p), и его отклонения. Считается, что чем меньше величины I_1 и I_2 , тем лучше качество динамики системы.

Как показано в [4],

$$I_1 = -\frac{d}{dz} \Phi(z) \Big|_{z=1}, \quad I_2 = \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} \left| \frac{H_1^*(j\omega)}{D^*(j\omega)} \right|^2 d\omega, \quad (1.66)$$

где $D^*(j\omega) = D(z)$ при $z = e^{j\omega T}$, $D(z)$ – характеристический полином передаточной функции замкнутой системы $\Phi(z) = Q(z)/D(z)$, а $H_1^*(j\omega) = [\Phi(1) - \Phi^*(j\omega)] \frac{e^{j\omega T}}{1 - e^{j\omega T}}$.

Методика определения I_2 может базироваться на построении графика зависимости квадрата модуля $\left| \frac{H_1^*(j\omega)}{D^*(j\omega)} \right|^2$ от частоты на интервале $0 < \omega < \pi/T$ и определении площади полученной фигуры.

Перейдем к рассмотрению частотных оценок качества импульсных систем, использующих частотные характеристики разомкнутой и замкнутой системы.

Использование АФЧХ замкнутой системы позволяет ввести так называемый показатель колебательности системы

$$M = \frac{\max |\Phi^*(j\omega)|}{|\Phi^*(j0)|}, \quad (1.67)$$

который характеризует колебательность процессов в системе: чем больше M , тем процессы являются более колебательными. Величина $M = 1$ соответствует отсутствию колебаний. Обычно приемлемой считается величина M , лежащая в пределах $1, 1-1, 5$.

Использование $|\Phi^*(j\omega)|$ позволяет, как об этом говорилось в подразд. 1.8, ввести понятие полосы пропускания замкнутой системы, т.е. определить диапазон частот от 0 до ω_n , в котором ошибка воспроизведения амплитуды входного гармонического сигнала на выходе системы не превышает заданной. Иногда ω_n определяют как частоту, при которой $|\Phi^*(j\omega_n)| = 0,707$.

Отметим, что прямое определение M требует построения $|\Phi^*(j\omega)|$. Однако существуют косвенные методы определения M по известной АФЧХ разомкнутой системы [3].

При использовании частотных характеристик разомкнутой системы $|W^*(j\omega)|$, $\varphi^*(\omega)$, $L^*(\omega_w)$ определяют в первую очередь запасы устойчивости по фазе и модулю. Наиболее часто их определяют по логарифмическим характеристикам. Эти запасы легко определить по графикам, которые показаны на рис. 1.7 для примера 1.3.

Отметим, что величина ω_{wc} влияет на время регулирования t_p . Так же как и в непрерывных системах, чем больше ω_{wc} , тем меньше t_p .

Напомним, что для непрерывных систем получено достаточно много аналитических и графических зависимостей, связывающих параметры частотных характеристик и качественных показателей системы [6]. К сожалению, этого нельзя сказать об импульсных системах, у которых эти связи более сложные и часто менее прозрачные.

Пример 1.10. Рассмотрим импульсную САУ из примеров 1.3 и 1.7, где $W_0(s) = k_0 / (T_1 s + 1)$, $W(z) = k_1 / (z - d)$, $k_1 = k_0 d (d^{-T} - 1)$, $d = e^{-\frac{T}{T_1}}$. Характеристическое уравнение замкнутой системы $D(z) = z - d + k_1 = 0$ имеет единст-

венный корень $z_1 = d - k_1$. Из условия устойчивости $-1 < d - k_1 < 1$. Если $d > k_1$, то корень $z_1 > 0$, если $d < k_1$, то корень $z_1 < 0$. Степень устойчивости

$$\eta = \frac{1}{T} |\ln |d - k_1||,$$

которая при $0 < |d - k_1| < 1$ изменяется от $-\infty$ до 0. Очевидно, при $d = k_1$ величина $\eta = \infty$ и система будет иметь бесконечную степень устойчивости.

Величина $\mu = 0$ при $d > k_1$ и $\mu = \pi / \ln |d - k_1|$ при $d < k_1$.

Найдем суммарную оценку I_1 . Так как $\Phi(z) = k_1 / (z - d + k_1)$, то в соответствии с (1.66) $I_1 = k_1 / (1 - d + k_1)^2$. Эту оценку следует применять при $z_1 > 0$, т.е. при $d > k_1$. Минимальная величина I_1 будет при $d = k_1$, т.е. в системе с бесконечной степенью устойчивости.

1.10. Условия эквивалентности импульсных и непрерывных САУ

Рассмотрим разомкнутую импульсную систему, приведенную на рис. 1.5, б, передаточная функция ЭЛНЧ которой имеет вид $W(s) = W_\Phi(s)W_0(s)$. Передаточная функция импульсной системы будет $W(z)$, а частотная характеристика $W^*(j\omega)$. Существует связь между частотными характеристиками ЭЛНЧ $W(j\omega)$ и частотной характеристикой импульсной системы $W^*(j\omega)$, которая имеет вид [4]

$$W^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W[j(\omega + r\omega_0)], \quad (1.68)$$

где, как и ранее, $\omega_0 = 2\pi/T$ – частота дискретизации.

Итак, характеристика $W^*(j\omega)$ получается суммированием смещенных относительно друг друга вдоль оси ω на частоту повторения ω_0 характеристик $W(j\omega)$ ЭЛНЧ, умноженных на $1/T$. Из (1.68) вещественные и мнимые части частотных характеристик:

$$\operatorname{Re} W^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} W[j(\omega + r\omega_0)], \quad (1.69)$$

$$\operatorname{Im} W^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} W[j(\omega + r\omega_0)].$$

Предположим, что вещественная и мнимая частотные характеристики заданы на интервале частоты ω от минус ω_n до ω_n (ω_n – полоса пропускания) и вне этого интервала равны нулю, а спектральные характеристики входного сигнала $V(j\omega)$ определены на некотором интервале $-\omega_c < \omega < \omega_c$ и равны нулю вне этого интервала. В этом случае, если $\omega_c < \omega_n < \frac{\omega_0}{2}$, справедливо следующее соотношение:

$$Y(j\omega) = W^*(j\omega)V(j\omega) = \frac{1}{T}W(j\omega)V(j\omega). \quad (1.70)$$

Итак, при выполнении условия $\omega_c < \omega_n < \frac{\omega_0}{2}$ импульсная система с передаточной функцией $W^*(j\omega)$ преобразует входной сигнал точно так же, как некоторая непрерывная система с передаточной функцией $\frac{1}{T}W(j\omega)$.

Фактически сформулирован аналог известной теоремы Котельникова: если спектр частот входного воздействия ограничен и лежит в диапазоне частот $-\omega_n < \omega < \omega_n$, то свойство системы с АИМ, где $\omega_0 > 2\omega_n$, тождественны свойствам эквивалентной непрерывной системы с АФЧХ $\frac{1}{T}W(j\omega)$.

Частотные характеристики входного сигнала $V(j\omega)$ и системы $W(j\omega)$ на практике реально не ограничены по частоте величинами ω_c и ω_n , и можно говорить лишь об их малости при $\omega > \omega_c$ и $\omega > \omega_n$. Поэтому на практике условие сведения системы с АИМ к соответствующей непрерывной системе обычно ужесточают и требуют, чтобы

$$\omega_0 \geq 10\omega_n, \quad (1.71)$$

где ω_n – частота, характеризующая полосу пропускания ЭЛНЧ.

Для проверки выполнения (1.71) следует построить $|W(j\omega)|$ и найти ω_n . Иногда вместо (1.71) легче воспользоваться другой более простой рекомендацией [6]:

$$T_{\max} \geq 10T, \quad (1.72)$$

где T_{\max} – максимальная постоянная времени передаточной функции $W_0(s)$.

Использование $W(s) = W_\phi(s)W_0(s)$ в качестве эквивалентной передаточной функции неудобно из-за присутствия в ней передаточной функции формирующего устройства, АФЧХ которого имеет вид

$$W_{\Phi}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega\tau}}{j\omega} = \tau \left| \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \right| e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}.$$

АЧХ и ФЧХ фиксирующего устройства будут:

$$|W_{\Phi}(j\omega)| = \tau \left| \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \right|, \quad \varphi(\omega) = -\frac{\omega\tau}{2}.$$

Соответственно АФЧХ эквивалентной непрерывной системы

$$W(j\omega) = \frac{\tau}{T} \left| \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \right| W_0(j\omega) e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}. \quad (1.73)$$

В основном методы анализа непрерывных линейных систем управления разработаны для случая, когда передаточная функция разомкнутой системы является дробно-рациональной относительно s . Поэтому непосредственное исследование передаточной функции

$$W(s) = \frac{1}{T} W_{\Phi}(s) W_0(s) \quad (1.74)$$

и частотных характеристик разомкнутой системы (1.73) затруднительно.

Рассмотрим возможные варианты дальнейшего упрощения моделей импульсных систем.

Если полагать в (1.73) $\omega\tau = 1$, то $\sin \frac{\omega\tau}{2} \approx \frac{\omega\tau}{2}$ и $W_{\Phi}(j\omega) = \tau e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}$, а (1.74) превратится в следующее выражение:

$$W(s) = \frac{\tau}{T} W_0(s) e^{-\frac{s\tau}{2}}. \quad (1.75)$$

И, наконец, наиболее простой вид модель приобретает при условии, когда τ мало:

$$W(s) = \frac{\tau}{T} W_0(s), \quad (1.76)$$

т.е. практически с точностью до множителя $\gamma = \tau/T$ передаточные функции $W(s)$ и $W_0(s)$ совпадают. Очевидно, при $\tau = T$ все сказанное соответствует

случаю, когда формирующее устройство является фиксатором нулевого порядка.

Для всех трех эквивалентных моделей (1.74), (1.75), (1.76) характерно то, что они тем более близки к исходной импульсной системе, чем ниже диапазон рассматриваемых частот, т.е. справедливы для низкочастотной области. Модель (1.74) более точная, но неудобная, модель (1.76) менее точная из всех трех типов.

Пример 1.11. Пусть $W_0(s) = \frac{k_0}{T_1 s + 1}$. В примерах 1.3 и 1.7 получена пере-

даточная функция разомкнутой системы $W(z) = \frac{k_1}{z-d}$, $k_1 = k_0 d (d^{-\gamma} - 1)$,

$d = e^{-\frac{T}{T_1}}$. Передаточная функция замкнутой системы $\Phi(z) = \frac{k_1}{z-d+k_1}$.

Далее будем рассматривать для наглядности случай $\tau = T$, $\gamma = 1$. В примерах 1.3 и 1.7 получены следующие результаты при анализе импульсной системы:

– область устойчивости

$$-1 < k_0 < \frac{1+d}{1-d};$$

– процессы будут носить монотонный характер ($\sigma\% = 0$), если

$$-1 < k_0 < \frac{d}{1-d};$$

– процессы будут носить колебательный характер ($\sigma\% > 0$), если

$$\frac{d}{1-d} < k_0 < \frac{1+d}{1-d};$$

– переходная функция $h(k)$ имеет вид

$$h(k) = \frac{k_0}{1+k_0} \left[1 - (d - k_0(1-d))^k \right]. \quad (1.77)$$

Основные выводы: в системе могут при определенных параметрах существовать как монотонные, так и колебательные процессы; коэффициент усиления k_0 ограничен из условия устойчивости и не может быть сделан сколь угодно большим.

Вместо импульсной системы рассмотрим эквивалентную непрерывную систему с передаточной функцией вида (1.76). Так как в нашем примере $\tau = T$, то имеем $W(s) = W_0(s) = k_0 / (T_1 s + 1)$. Вид переходного процесса в замкнутой системе будет

$$h(t) = \frac{k_0}{1+k_0} \left(1 - e^{-\frac{t(1+k_0)}{T_1}} \right), \quad (1.78)$$

а условие устойчивости: $-1 < k_0 < \infty$.

Итак, коэффициент k_0 можно увеличивать до любого значения без потери устойчивости, а процессы (1.78) всегда будут монотонными.

Для дискретных моментов времени $t = kT$ выражение (1.78) приобретает вид

$$h(k) = \frac{k_0}{1+k_0} \left(1 - d^{k(1+k_0)} \right). \quad (1.79)$$

Очевидно, чем ближе величины $d - k_0(1-d)$ и $d^{(1+k_0)}$, тем процессы будут ближе между собой. Так как $d = e^{-\frac{T}{T_1}} = e^{-\beta}$, $\beta = T/T_1$, то, разлагая функции $d - k_0(1-d)$ и $d^{(1+k_0)}$ в ряд Тейлора относительно $\beta = 0$ и ограничиваясь линейными членами, получим

$$e^{-\beta} - k_0(1 - e^{-\beta}) \approx 1 - (1+k_0)\beta,$$

$$e^{-\beta(1+k_0)} \approx 1 - (1+k_0)\beta.$$

Итак, при малых β процессы в обеих системах идентичны и имеют монотонный характер.

Однако, например, при $\beta = T/T_1 = 1$ и $k_0 = 1$ процесс в дискретной системе (1.77) будет $h(k) = 0,5(1 - (-0,26)^k)$, а в соответствующей непрерывной системе (1.79) $h(k) = 0,5(1 - (0,14)^k)$, т.е. эти процессы совершенно различны.

Рассмотрим второй случай замены импульсной системы непрерывной с передаточной функцией (1.75). Для нашего случая $\tau = T$ и

$$W(s) = \frac{k_0}{T_1 s + 1} e^{-\frac{sT}{2}}.$$

Передаточная функция замкнутой системы будет

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{k_0 e^{-\frac{sT}{2}}}{T_1 s + 1 + k_0 e^{-\frac{sT}{2}}}.$$

В этом случае приходим к системе автоматического управления с запаздыванием.

Уравнение, связывающее вход и выход системы, будет иметь вид

$$y^{(1)}(t) + \frac{1}{T_1} y(t) + \frac{k_0}{T_1} y\left(t - \frac{T}{2}\right) = k_0 v\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

и является дифференциально-разностным. При $T = 0$ оно превращается в дифференциальное.

Условие устойчивости для такой системы

$$T \leq 2T_1 \frac{\pi - \arctg \sqrt{k_0^2 - 1}}{\sqrt{k_0^2 - 1}}.$$

Здесь опять имеем ограничения на коэффициент усиления k_0 из условий устойчивости, как и в исходной импульсной системе.

Наконец, замена импульсной системы непрерывной с передаточной функцией (1.74) приводит нас в данном случае к дифференциально-разностному уравнению второго порядка

$$y^{(2)}(t) + \frac{1}{T_1} y^{(1)}(t) + \frac{k'}{T_1} y(t) - \frac{k'}{T_1} y(t - T) = \frac{k'}{T_1} v(t) - \frac{k'}{T_1} v(t - T), \quad k' = \frac{k_0}{T}.$$

1.11. Элементы синтеза импульсных систем

Как известно, под синтезом любой САУ понимают создание и построение системы, удовлетворяющей заданным требованиям. Частным случаем синтеза является оптимальный, когда наряду с обеспечением заданных требований необходимо минимизировать (максимизировать) некоторые показатели системы. Оптимальные методы синтеза в данном разделе рассматриваться не будут.

Основные этапы синтеза САУ следующие:

1. Выбор отдельных функционально необходимых элементов системы и исходной структуры системы. На этом этапе формируется исходная структура, включающая объект управления, исполнительное устройство, усилительно-преобразовательные устройства, датчики и т.п. Желательно уже здесь учесть некоторые требования к показателям создаваемой системы. Затем определяют математические модели отдельных элементов и получают исходную структуру системы рис. 1.3 с передаточной функцией $W(s) = W_\Phi(s)W_0(s)$.

2. Анализ полученной системы на соответствие ее заданным требованиям. Если они не удовлетворяются, то возникает задача изменения па-

раметров, структуры или отдельных элементов до получения требуемых показателей.

3. Придание системе нужных свойств – этап коррекции системы, которая осуществляется путем введения в систему специальных корректирующих устройств.

4. Последний этап – проверочный. Так как большинство методов синтеза являются приближенными, то для синтезированной системы определяются все необходимые показатели на соответствие их заданным требованиям.

Коснемся третьего, наиболее важного этапа синтеза. Характеристиками исходной нескорректированной системы являются $W_\Phi(s)$, $W_0(s)$ или $W(z) = Z\{W_\Phi(s)W_0(s)\}$. Необходимо создать систему, передаточная функция прямой цепи которой была бы требуемой (желаемой) $W_{\text{ж}}(z)$. Реализация этого возможна двумя путями.

Первый путь заключается в изменении $W_0(s)$ введением в прямую цепь после формирующего устройства корректирующих устройств обычного непрерывного типа: последовательных, параллельно-встречных или параллельных с некоторыми передаточными функциями $W_K(s)$, так чтобы передаточная функция прямой цепи стала $W_{\text{ож}}(s)$ и $W_{\text{ж}}(z) = Z\{W_\Phi(s)W_{\text{ож}}(s)\}$. Такой подход носит название непрерывной коррекции.

Второй путь заключается во введении в прямую цепь (обычно) до ИИЭ звена с импульсной передаточной функцией $W_K(z)$, так что $W_{\text{ж}}(z) = W_K(z)W(z)$. Этот подход носит название дискретной или импульсной коррекции.

Первый способ коррекции иллюстрирует рис. 1.9, а, второй – рис. 1.9, б.

На рис. 1.9, а $W_0(s) = W_1W_2W_3$, а после введения трех типов корректирующих устройств будет

$$W_{\text{ож}}(s) = \frac{(W_1 + W_{K1})W_2W_{K2}W_3}{1 + W_3W_{K3}};$$

на рис.1.9, б имеем $W_{\text{ж}}(z) = W_K(z)W(z)$.

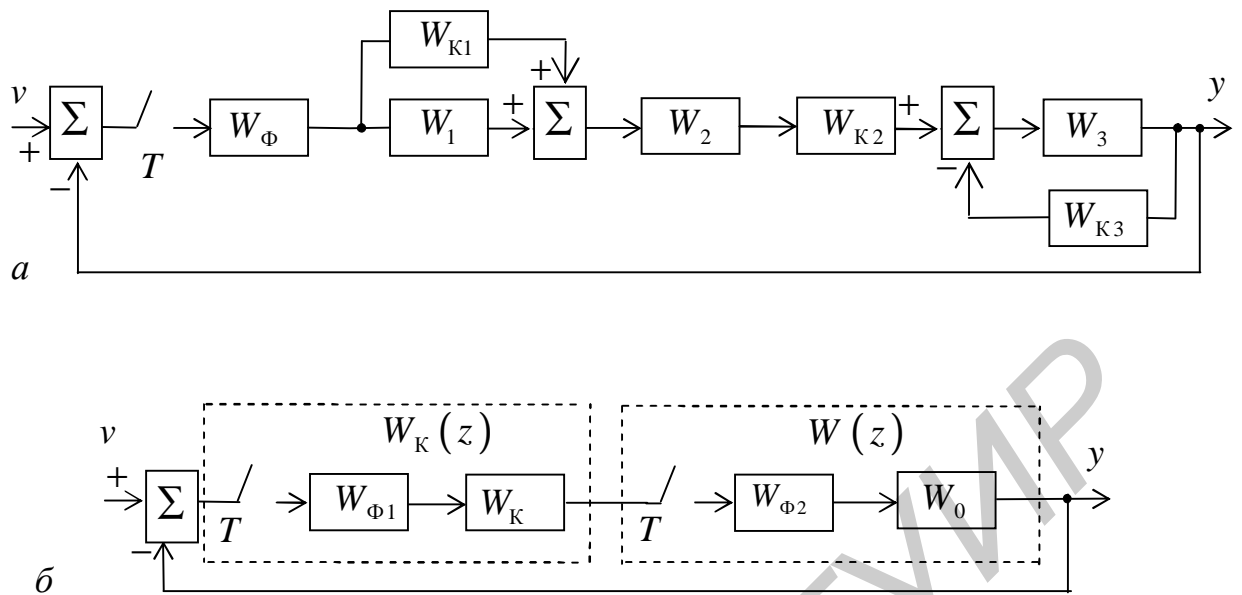


Рис. 1.9

Отметим, что при дискретной коррекции необходимо вводить дополнительный импульсный элемент.

Рассмотрим формальные пути коррекции импульсной системы. Исходными данными являются передаточная функция $W_0(s)$, характеризующая полученную функционально необходимую структуру, и импульсный элемент с передаточной функцией $W_\Phi(s)$, т.е. фактически задана $W(s) = W_\Phi(s)W_0(s)$. Кроме этого, заданы некоторые показатели качества системы: точность, корневые показатели, суммарные оценки, частотные показатели, время регулирования, перерегулирование или другие.

На первом шаге коррекции исходя из заданных показателей качества выбирается желаемая импульсная передаточная функция разомкнутой системы $W_{\text{ж}}(z)$.

Второй шаг содержит два возможных варианта: импульсная и непрерывная коррекция.

В случае импульсной коррекции определяем $W(z) = Z\{W(s)\}$ и далее передаточную функцию импульсного корректирующего устройства $W_{\text{к}}(z) = W_{\text{ж}}(z)/W(z)$.

В случае непрерывной коррекции по $W_{\text{ж}}(z)$ находим $W_{\text{ож}}(s) = Z^{-1}\{W_{\text{ж}}(z)\}$. Зная $W_{\text{ож}}(s)$ и $W_0(s)$, выбираем тип и конкретный вид коррекции. Например, в случае последовательной коррекции в прямую цепь следует включить звено с передаточной функцией $W_{\text{к}}(s) = W_{\text{ож}}(s)/W_0(s)$.

Существенные трудности такого формального подхода:

1. Не существует четких рекомендаций по выбору $W_{\text{ж}}(z)$ ввиду того, что трудно связать показатели качества системы и вид $W_{\text{ж}}(z)$.

2. Получаемые передаточные функции корректирующих устройств могут быть очень сложными и в ряде случаев физически нереализуемыми. Поэтому при выборе $W_{\text{ж}}(z)$ (или $W_{\text{ож}}(s)$) следует учитывать передаточную функцию исходной системы $W(z)$ (или $W_0(s)$).

Касаясь последнего замечания, отметим, что синтез является многозначной задачей, т.е. можно найти бесчисленное множество таких передаточных функций $W_{\text{ж}}(z)$, при которых система будет удовлетворять заданным показателям качества. Отсюда возникает требование – найти такую $W_{\text{ж}}(z)$, при которой коррекция будет наиболее простой и легко реализуемой на практике.

Рассмотрим один из возможных путей коррекции, позволяющих обойти первую трудность, из указанных выше. Это путь сведения импульсной системы к непрерывной. Пусть выполняются условия (1.71) и (1.72). Тогда вместо исходной импульсной системы будем рассматривать непрерывную с передаточной функцией в прямой цепи $W(s) = \gamma W_0(s)$, $\gamma = \tau/T$. Используя известные и хорошо разработанные методы синтеза непрерывных линейных систем [1] (например частотные), найдем с учетом заданных показателей качества $\gamma W_{\text{ож}}(s)$ для импульсной системы. Зная $W_{\text{ож}}(s)$ по $W(s)$, реализуем коррекцию $W_{\text{к}}(s)$ одним из известных способов.

При таком подходе необходим проверочный расчет синтезированной импульсной системы. Используя $W_{\text{ф}}(s)$ и $W_{\text{ож}}(s)$, находим $W_{\text{ж}}(z) = Z\{W_{\text{ф}}(s)W_{\text{ож}}(s)\}$ и проверяем выполнение заданных показателей для импульсной системы.

Некоторые подходы к синтезу импульсных САУ по логарифмическим частотным характеристикам $L^*(\omega_w)$ и $\Phi^*(\omega_w)$ импульсной системы даны в [3].

1.12. Уравнения состояния линейных импульсных систем

Так же как и непрерывные системы [1], импульсные можно описывать с помощью векторно-матричных уравнений, называемых уравнениями состояния.

Уравнениями состояния линейной импульсной системы называются уравнения вида

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bv(k), \\y(k) &= Cx(k),\end{aligned}\tag{1.80}$$

где $x = \text{col}[x_1, \dots, x_n]$ – вектор состояния системы, $v = [v_1, \dots, v_m]$ – вектор входа системы, $y = [y_1, \dots, y_p]$ – вектор выхода системы, A – основная матрица системы размерностью $n \times n$, B – матрица входа системы размерности $n \times m$, C – матрица выхода системы размерностью $p \times n, k = 0, 1, 2, \dots$ дискретное время.

Первое уравнение в (1.80) – уравнение входа системы, второе – уравнение выхода. Уравнениями (1.80) описываются как многомерные системы, когда v, y – векторы, так и одномерные системы, когда v, y – скалярные величины.

Рассмотрим методику получения уравнений (1.80) для разомкнутой импульсной системы, изображенной на рис. 1.4. Вход $e^*(t)$ и выход $y(t)$ линейного непрерывного звена с передаточной функцией $W_0(s)$ можно описать с помощью уравнений состояния [1]:

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= A_0 x(t) + B_0 e^*(t), \\ y(t) &= C_0 x(t), \end{aligned} \quad (1.81)$$

где коэффициенты матриц A_0 размерностью $n \times n$, B_0 размерности $n \times 1$ и C_0 размерностью $1 \times n$ находятся по передаточной функции $W_0(s)$.

Используя матрицу A_0 , можно найти [1] переходную матрицу состояния непрерывной системы (1.81), которую обозначим $\Phi_0(t)$, и записать общее решение первого (дифференциального) уравнения (1.81) в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi_0(t - t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi_0(t - \lambda) B_0 e^*(\lambda) d\lambda, \\ y(t) &= C_0 x(t), \end{aligned}$$

где t_0 – момент приложения внешнего воздействия $e^*(t)$, $x(t_0)$ – начальное значение вектора состояния при $t = t_0$.

Сигнал $e^*(t)$ с выхода ФУ представляет собой последовательность прямоугольных импульсов длительностью τ и высотой $h_k = e(kT)$, поступающих в моменты времени kT . Рассмотрим произвольный k -й момент времени $t = kT$ и обозначим значение вектора состояния при $t = kT$ через $x(kT)$. Тогда реакция системы (выход звена) на k -й импульс будет

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi_0(t - kT) x(kT) + \int_{kT}^t \Phi_0(t - \lambda) B_0 d\lambda e(kT), \\ y(t) &= C_0 x(t), \quad t \in [kT, kT + \tau]. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Обозначим при $t = kT + \tau$ (момент окончания импульса) значение вектора $x(t)$ через $x(kT + \tau)$. Тогда во время паузы в k -м периоде сигнал на выходе звена будет определяться выражениями:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi_0(t - kT - \tau)x(kT + \tau), \\ y(t) &= C_0x(t), \quad t \in [kT + \tau, kT + T]. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Из (1.82) находим при $t = kT + \tau$ вектор $x(kT + \tau)$, подставляем его в (1.83) и окончательно получаем

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi_0(t - kT - \tau) \left[\Phi_0(\tau)x(kT) + \int_{kT}^{kT+\tau} \Phi_0(kT + \tau - \lambda)B_0d\lambda e(kT) \right], \\ y(t) &= C_0x, \quad t \in [kT + \tau, kT + T]. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Положим в (1.84) $t = kT + T$ и, используя свойства переходной матрицы состояния [1], получим

$$x(kT + T) = \Phi_0(T)x(kT) + \int_{kT}^{kT+\tau} \Phi_0(kT + T - \lambda)B_0d\lambda e(kT).$$

Сделав под интегралом замену переменной $\lambda - kT = \varepsilon$, и с учетом $y(kT) = C_0x(kT)$ получим

$$\begin{aligned} x(kT + T) &= \Phi_0(T)x(kT) + \int_0^{\tau} \Phi_0(T - \varepsilon)d\varepsilon B_0e(kT), \\ y(kT) &= C_0x(kT). \end{aligned}$$

Обозначим числовые матрицы

$$A = \Phi_0(T), \quad B = \int_0^{\tau} \Phi_0(T - \varepsilon)d\varepsilon B_0, \quad C = C_0, \quad (1.85)$$

а векторы $x(kT)$, $x(kT + T)$, $e(kT)$, $y(kT)$ через $x(k)$, $x(k+1)$, $e(k)$, $y(k)$. Окончательно получим уравнения состояния разомкнутой импульсной системы вида (1.80)

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Be(k), \\ y(k) &= Cx(k). \end{aligned} \quad (1.86)$$

Приведенная методика получения разностных уравнений разомкнутой импульсной системы обобщает подход, изложенный в подразд. 1.2 при выводе уравнения (1.15).

Напомним [1] один из возможных способов определения вида матриц A_0 , B_0 , C_0 в (1.81) с использованием передаточной функции $W_0(s)$ линейной непрерывной части системы. Пусть $W_0(s) = N(s)/L(s)$ – дробно-рациональная функция переменной s и уравнение $L(s) = 0$ имеет n различных корней s_1, \dots, s_n , тогда

$$A_0 = \begin{bmatrix} s_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & s_n \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad c_0 = [1 \dots 1], \quad (1.87)$$

где $\beta_i = (s - s_i)W_0(s)|_{s=s_i} = \frac{N(s_i)}{L^{(1)}(s_i)}$, $L^{(1)}(s_i) = \frac{d}{ds}L(s)|_{s=s_i}$.

Если A_0 – диагональная матрица (1.87), то нетрудно найти Φ_0 , A , B , C в (1.86)

$$\Phi_0(t) = \begin{bmatrix} e^{s_1 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & e^{s_n t} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} e^{s_1 T} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & e^{s_n T} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 (1 - e^{-s_1 T}) \frac{e^{s_1 T}}{s_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_n (1 - e^{-s_n T}) \frac{e^{s_n T}}{s_n} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \dots 1]. \quad (1.88)$$

В случае кратных корней s_i матрица A_0 будет иметь форму Жордана.

Получим уравнения состояния замкнутой линейной импульсной системы рис. 1.3. С учетом уравнения замыкания $e(k) = y(k) - v(k)$ из (1.86) получим уравнения состояния замкнутой импульсной системы:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A - BC)x(k) + Bv(k), \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned} \quad (1.89)$$

где $(A - BC)$ – основная матрица замкнутой системы.

Возможно также получение уравнений состояния импульсной системы с использованием в качестве исходных передаточной функций разомкнутой $W(z)$ или замкнутой $\Phi(z)$ импульсной системы либо соответствующих разностных уравнений [5].

Пример 1.12. Пусть в разомкнутой импульсной системе $W_0(s) = \frac{k_0(\tau_1 s + 1)}{s(T_1 s + 1)}$. Уравнение $s(T_1 s + 1) = 0$ имеет два корня $s_1 = 0$, $s_2 = -\frac{1}{T_1}$.

Находим $\beta_1 = k_0$, $\beta_2 = \frac{k_0}{T_1}(\tau_1 - T_1)$. В соответствии с (1.88) определяем матрицы

A , B , C . Окончательно уравнения состояния разомкнутой импульсной системы будут

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} k_0 \tau \\ k_0 (T_1 - \tau_1) (1 - d^\gamma) d \end{bmatrix} v(k), \\ y(k) &= [1 \ 1] x(k), \quad d = e^{-\frac{T}{T_1}}. \end{aligned} \quad (1.90)$$

1.13. Характеристики импульсных систем, описываемых уравнениями в пространстве состояний

Если в первом уравнении (1.80), которое является неоднородным разностным уравнением, считать матрицу B нулевой, то получим однородное разностное уравнение

$$x(k+1) = Ax(k), \quad (1.91)$$

в котором, полагая заданным начальное состояние вектора $x(0)$ при $k = 0, 1, 2, \dots$, получим $x(1) = Ax(0)$, $x(2) = A^2x(0)$, и т.д. Таким образом, общее решение уравнения (1.91) можно записать в виде

$$x(k) = \Phi(k)x(0) = A^k x(0). \quad (1.92)$$

Матрица $\Phi(k) = A^k$ носит название переходной матрицы состояния линейной импульсной системы. Вычисление $\Phi(k)$ по известной матрице A всегда возможно. Наиболее просто найти $\Phi(k)$, если матрица A диагональная. Если $A = \text{diag}[\lambda_1^k \dots \lambda_n^k]$, то $\Phi(k) = \text{diag}[\lambda_1^k \dots \lambda_n^k]$.

Если найдена $\Phi(k)$, то в импульсной системе, описываемой уравнениями (1.80), можно вычислить выход $y(k)$ при заданном входе $v(k)$ по выражению

$$y(k) = C\Phi(k)x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} C\Phi(k-i-1)Bv(i). \quad (1.93)$$

В (1.93) первое слагаемое – свободная составляющая, а второе – вынужденная.

Применим к уравнениям (1.80) Z -преобразование, полагая, что начальные значения вектора состояния $x(0)$ – нулевые. Получим $zX(z) = AX(z) + BV(z)$, $Y(z) = CX(z)$, где $X(z)$, $V(z)$, $Y(z)$ – изображения соответствующих векторов $x(k)$, $v(k)$, $y(k)$.

Из полученного уравнения найдем

$$Y(z) = C[zE - A]^{-1}BV(z) = W(z)V(z), \quad (1.94)$$

где $[zE - A]^{-1}$ – обратная матрица к матрице $[zE - A]$, E – единичная $n \times n$ матрица.

Матрица $W(z) = C[zE - A]^{-1}B$ размерностью $p \times m$ носит название передаточной матрицы (матрицы передаточных функций) импульсной системы. Ее элементы $W_{ij}(z)$ являются обычными скалярными функциями, связывающими j вход v_j с i выходом y_i . Если $y(k)$, $v(k)$ – скалярные величины, то $W(z)$ – обычная скалярная передаточная функция.

Матрицу $W(k) = C\Phi(k-1)B$ будем называть весовой матрицей. Очевидна связь

$$W(z) = Z\{W(k)\}, \quad W(k) = Z^{-1}\{W(z)\}.$$

Отметим один из способов определения переходной матрицы состояния $\Phi(k)$ с помощью Z -преобразования:

$$\Phi(k) = Z^{-1}\{[zE - A]^{-1}\}.$$

Введем еще одну из важнейших характеристик импульсной системы, заданной уравнениями состояния (1.80), – характеристическое уравнение импульсной системы

$$\det[zE - A] = 0, \quad (1.95)$$

где \det означает определитель матрицы $[zE - A]$. Если матрица A имеет размерность $n \times n$, то (1.95) – это алгебраическое уравнение n -й степени.

Линейная импульсная система, описываемая уравнениями состояния (1.80), будет устойчива, если все корни z_1, \dots, z_n уравнения (1.95) по модулю меньше единицы, т.е. $|z_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$. Для выяснения этого факта можно, например, использовать алгебраический критерий устойчивости импульсных систем, изложенный в подразд. 1.7.

Для импульсных систем, описываемых уравнениями (1.80), можно ввести и другие понятия, аналогичные понятиям для непрерывных систем [1], такие как наблюдаемость и управляемость. Управляемость и наблюдаемость зависят от вида матриц A , B , C в (1.80). Определения и методы оценки управляемости и наблюдаемости идентичны [1] и здесь не приводятся.

Пример 1.13. Найдем передаточную функцию разомкнутой импульсной системы из примера 1.12, используя полученные уравнения состояния (1.90). В соответствии с (1.94) $W(z) = C[zE - A]^{-1}B$. Найдем матрицу $[zE - A]^{-1}$. Очевидно,

$$[zE - A]^{-1} = \begin{bmatrix} z-1 & 0 \\ 0 & z-d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-d} \end{bmatrix}.$$

С учетом матриц B и C из (1.90) имеем

$$W(z) = [1 \ 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-d} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_0\tau \\ k_0(T_1 - \tau_1)(1 - d^{-\gamma})d \end{bmatrix} = \frac{b_0z + b_1}{z^2 + a_1z + a_2},$$

где $a_1 = -(1+d)$, $a_2 = d$, $b_0 = k_0\gamma T + k_0(\tau_1 - T_1)d(d^{-\gamma} - 1)$,
 $b_1 = -k_0\gamma Td - k_0(\tau_1 - T_1)d(d^\gamma - 1)$.

Этот результат совпадает с результатом, полученным в примере 1.2.

1.14. Цифровые системы автоматического управления

Цифровой можно назвать такую САУ, в состав которой включено цифровое вычислительное устройство (ЦВУ) в виде отдельных схем на базе элементов цифровой логики, микропроцессоров, микроконтроллеров и в наиболее сложных случаях в виде специализированных управляющих вычислительных машин (комплексов).

При классификации САУ по виду математических моделей под цифровой САУ будем понимать такую, в которой хотя бы один из сигналов в контуре управления подвергается одновременной дискретизации (квантованию) по уровню и времени. С этой точки зрения цифровая САУ является подклассом дискретных систем.

На ЦВУ возлагаются следующие основные функции: формирование программы управления (для систем стабилизации, позиционирования и про-

граммного управления), реализация цифровых алгоритмов управления и реализация дискретной коррекции. Кроме этого, ЦВУ можно применять и для выполнения других функций: контроля элементов и состояния всей системы в целом, некоторых сервисных функций (учет времени работы и т.п.).

Цифровая САУ содержит две части: ЦВУ и непрерывную часть, включающую объект управления, исполнительное устройство, усилительно-преобразовательные и корректирующие устройства, датчики и т.п. Будем считать непрерывную часть линейной, описываемой передаточной функцией $W_0(s)$. Тогда базовая структура рассматриваемой системы будет иметь следующий вид:

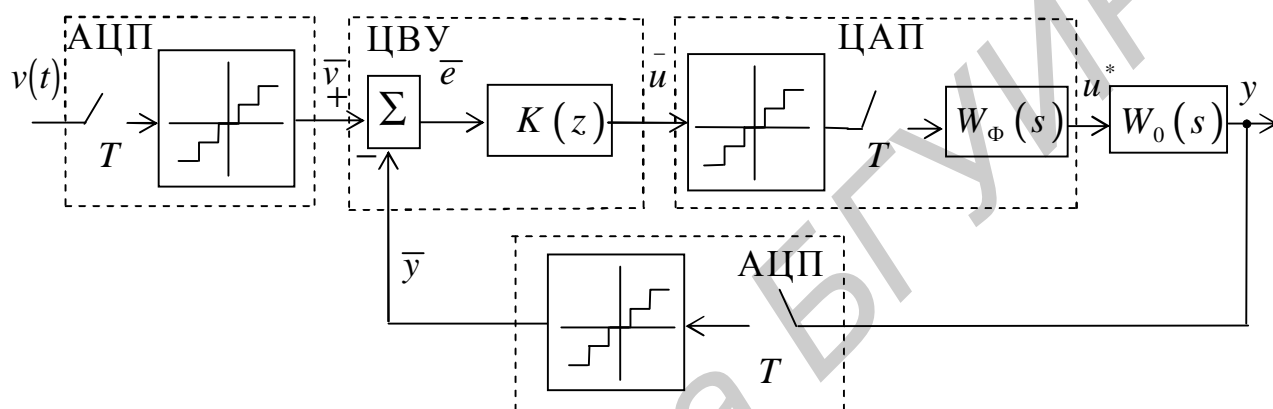


Рис. 1.10

На рис. 1.10 АЦП – аналого-цифровой преобразователь; ЦАП – цифро-аналоговый преобразователь; T – период замыкания идеальных импульсных элементов (ключей); \bar{v} , \bar{e} , \bar{y} , \bar{u} – сигналы, представленные в цифровой форме; $y(t)$, $v(t)$ – непрерывные сигналы; u^* – последовательность прямоугольных модулированных по амплитуде импульсов; $W_\Phi(s)$ – передаточная функция формирующего устройства; $K(z)$ – математическая модель, отражающая алгоритм функционирования ЦВУ.

АЦП и ЦАП на рис. 1.10 выделены в самостоятельные функциональные блоки, хотя на практике они могут непосредственно являться узлами ЦВУ. Каждый из них представлен в виде идеального квантователя и нелинейной статической характеристики, характеризующей процесс. Период замыкания ключей везде одинаковый и равен $T = \text{const}$ (обычно задается ЦВУ). ЦВУ осуществляет операцию сравнения двух сигналов в цифровой форме $\bar{e} = \bar{v} - \bar{y}$ и преобразование их по определенному алгоритму в соответствии с выражением $K(z)$ в цифровое значение \bar{u} , которое преобразуется в сигнал u^* .

Рассмотрим особенности процессов квантования по времени и уровню в цифровой САУ. Пусть оба ключа АЦП замыкаются в момент времени $t = kT$

и измеряют значения $v(kT)$ и $y(kT)$. Далее требуется определенное время на преобразование этих значений в цифровую форму \bar{v} , \bar{y} , определение разности $\bar{e} = \bar{v} - \bar{y}$, преобразование \bar{e} в \bar{u} и, наконец, преобразование \bar{u} в аналоговое (постоянное) значение u^* . Обозначим это время через t_3 . Таким образом, постоянное значение на выходе ЦАП по отношению к моменту съема информации АЦП появляется с задержкой на время t_3 . Обычно формирующее устройство является фиксатором нулевого порядка, т.е. постоянное значение сигнала u^* держится до момента следующего замыкания ключа. Очевидно, период замыкания T не может быть меньше t_3 , т.е. всегда выполняется условие $T \geq t_3$.

Итак, из рассмотренного следует, что ключ ЦАП замыкается с задержкой на время t_3 по отношению к моментам kT замыкания ключей АЦП.

Время t_3 зависит от быстродействия АЦП, ЦАП и ЦВУ и длительности (сложности) обработки программы преобразования \bar{e} в \bar{u} . Быстродействие современных вычислительных средств достаточно велико и непрерывно повышается, а алгоритмы обработки информации в ЦВУ обычно простые. В силу этого время t_3 достаточно малое.

В процессе квантования по уровню весь диапазон изменения аналоговой величины, например $y(t)$, разбивается на μ_1 равных частей (квантов), тогда величина

$$\delta_1 = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{\mu_1}$$

определяет разрешающую способность АЦП.

Каждому кванту из μ_1 интервалов присваивается определенное число (двоичный код). Для однозначности такого присвоения (кодирования) должно выполняться условие

$$\mu_1 = 2^{\alpha_1} - 1,$$

где α_1 – число двоичных разрядов без учета знакового разряда. В АЦП обычно число разрядов велико (8–32 и более) и величина μ_1 также большая, т.е. число ступеней нелинейной характеристики большое. Например, если $\alpha_1 = 10$, то $\mu_1 = 1023$ и при $-10\text{В} \leq y \leq 10\text{В}$ величина $\delta_1 = 0,02\text{В}$.

При условии $\mu_1 \gg 1$ нелинейную характеристику АЦП заменяют линейной с коэффициентом передачи $k_1 = 1/\delta_1$, т.е. $\bar{y} = k_1 y(kT)$.

ЦАП с числом разрядов α_2 имеет на выходе число уровней напряжения, равное

$$\mu_2 = 2^{\alpha_2} - 1,$$

а величина $\delta_2 = \frac{u_{\max}^* - u_{\min}^*}{\mu_2}$. При большом числе μ_2 ступенчатую характеристику заменяют на линейную с коэффициентом передачи $k_2 = \delta_2$.

Считая, что ЦВУ реализует линейный алгоритм, т.е. является линейным, исходную структуру можно преобразовать к виду, изображенному на рис. 1.11.

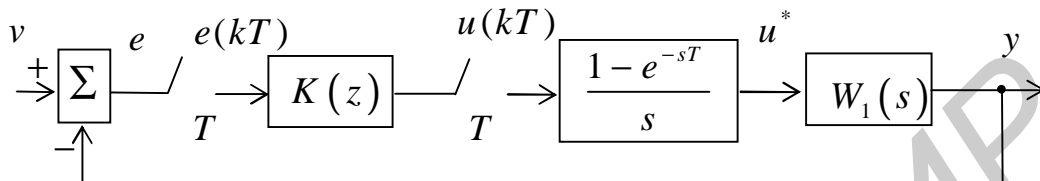


Рис. 1.11

На этом рисунке $W_1(s) = k_1 k_2 e^{-st_3} W_0(s)$, где учитывают коэффициенты передачи АЦП и ЦАП, а множитель e^{-st_3} – время запаздывания, необходимое на обработку информации в цифровых элементах.

Считаем t_3 малой величиной, тогда $e^{-st_3} \approx 1$, а $k_1 k_2 = 1$ при идентичных характеристиках АЦП и ЦАП. В дальнейшем можно полагать $W_1(s) = W_0(s)$.

1.15. Исследование цифровых систем автоматического управления

В первом приближении без учета нелинейностей характеристик АЦП и ЦАП и считая запаздывание малым ($t_3 \approx 0$), структура цифровой системы сводится к структуре системы с АИМ-1, к которой возможно применение всех изложенных выше методов анализа и синтеза импульсных систем.

Более подробно остановимся на функциях ЦВУ, которыми являются реализация дискретных алгоритмов управления и дискретной коррекции. Будем рассматривать линейные модели, реализуемые ЦВУ.

В общем случае такой моделью является линейное разностное уравнение

$$\begin{aligned} u(k+m) + \alpha_1 u(k+m-1) + \dots + \alpha_n u(k) = \\ = \beta_0 e(k+p) + \beta_1 e(k+p-1) + \dots + \beta_p e(k), \end{aligned} \quad (1.96)$$

где переменные $u(k)$, $e(k)$ представлены в виде цифровых кодов.

Применяя к (1.96) Z-преобразование, получим

$$U(z) = \frac{\beta_0 z^p + \beta_1 z^{p-1} + \dots + \beta_p}{z^m + \alpha_1 z^{m-1} + \dots + \alpha_m} E(z) = K(z) E(z), \quad (1.97)$$

где $K(z)$ – передаточная функция ЦВУ.

Линейное разностное уравнение (1.96) представляет собой алгоритм работы ЦВУ и может быть записано в виде

$$u(k+m) = -\alpha_1 u(k+m-1) - \dots - \alpha_n u(k) + \beta_0 e(k+p) + \dots + \beta_p e(k). \quad (1.98)$$

Задавая $k = 0, 1, \dots$, можно последовательно находить $u(m), u(m+1), \dots$, используя найденные на предыдущих этапах значения $e(k)$ и $u(k)$. При таком подходе ЦВУ осуществляет три операции: умножение чисел, сложение чисел и запоминание чисел. Алгоритм возможен (реализуем) только при условии $p \leq m$. Если $p > m$, то для вычисления текущего значения $u(k)$ следует знать ряд будущих значений входа, что физически невозможно. Итак, при $p \leq m$ передаточную функцию $K(z)$ будем называть физически реализуемой.

Рассмотрим несколько возможных алгоритмов управления и найдем для них передаточные функции.

1. Пропорциональный закон (по отклонению) $u(t) = k_1 e(t)$.

В дискретном случае $u(k) = k_1 e(k)$, $K_1(z) = k_1$. Это наиболее простой алгоритм. При этом ЦВУ выступает в роли элемента сравнения (сумматора), осуществляя операцию вычитания $u(k) = k_1 (v(k) - y(k))$ в цифровой форме.

2. Дифференциальный закон (по производной от отклонения) $u(t) = k_2 \frac{de(t)}{dt}$. Найдем дискретный аналог этого закона:

$$u(t) = k_2 \lim_{T \rightarrow 0} \frac{e(t) - e(t - kT)}{T} \approx k_2 \frac{e(t) - e(t - kT)}{T}.$$

Полагая $t = kT$, получим

$$u(k) = \frac{k_2}{T} [e(k) - e(k-1)]. \quad (1.99)$$

Применяя Z-преобразование, найдем передаточную функцию:

$$K_2(z) = \frac{k_2}{T} \frac{z-1}{z}. \quad (1.100)$$

3. Интегральный закон (по интегралу от отклонения) $u(t) = k_3 \int e(t) dt$. В зависимости от способа вычисления интеграла рассмотрим два варианта дискретных аналогов:

– по методу Эйлера

$$u(k) = u(k-1) + k_3 T e(k-1), \quad K_3(z) = \frac{k_3 T z}{z-1}; \quad (1.101)$$

– по методу трапеций

$$u(k) = u(k-1) + \frac{k_3 T}{2} [e(k) - e(k-1)], \quad K_3(z) = \frac{k_3 T}{2} \frac{z+1}{z-1}. \quad (1.102)$$

Комбинируя рассмотренные законы 1, 2, 3, можно получить: пропорционально-интегральный закон $K(z) = K_1(z) + K_3(z)$, пропорционально-дифференциальный закон $K(z) = K_1(z) + K_2(z)$ и пропорционально-интегрально-дифференциальный $K(z) = K_1(z) + K_2(z) + K_3(z)$.

Кроме реализации законов управления в дискретной форме ЦВУ используется также для реализации цифровой коррекции, т.е. синтеза передаточной функции $K(z)$, обеспечивающей цифровой системе заданные свойства.

Синтез цифровых САУ при их сведении к структуре рис. 1.11 может производиться тремя способами: при заданной $K(z)$ введением непрерывной коррекции, т.е. изменением передаточной функции $W_0(s)$; при заданной $W_0(s)$ отысканием дискретной коррекции $K(z)$; применением обоих подходов. О проблемах, связанных с этими путями коррекции, говорилось при рассмотрении линейных импульсных систем.

Пример 1.14. Пусть в цифровой САУ $W_0(s) = \frac{k_0}{T_1 s + 1}$. Требуется, чтобы в замкнутой системе ошибка по положению (статическая ошибка) была равна нулю, а скоростная при $v(k) = v_1 k$ была меньше заданной величины \bar{e} . Передаточная функция $W_1(z) = Z\{W_\Phi(s)W_0(s)\}$ для данного случая при $\gamma = 1$ получена в примерах 1.3, 1.6 и имеет вид

$$W_1(z) = \frac{k_0(1-d)}{z-d}, \quad d = e^{-\frac{T}{T_1}}.$$

Исходная система является статической и ошибка по положению не равна нулю. Для выполнения заданных требований реализуем на ЦВУ интегратор с передаточной функцией

$$K(z) = \frac{k_1 T z}{z-1},$$

тогда передаточная функция разомкнутой системы будет

$$W(z) = W_1(z)K(z) = \frac{k_0 k_1 T (1-d) z}{(z-1)(z-d)}.$$

Для такой системы в соответствии с результатом подразд. 1.8 статическая ошибка равна нулю, а скоростная будет

$$e(\infty) = \frac{v_1}{k_0 k_1 T}.$$

Из условия $e(\infty) \leq \bar{e}$ находим:

$$k_0 k_1 T \geq \frac{v_1}{\bar{e}}. \quad (1.103)$$

Если взять цифровой интеграл в виде $K(z) = \frac{k_1 T}{2} \frac{z+1}{z-1}$, то получим тот же результат (1.103).

При выборе $k_0 k_1 T$ следует также учесть условия устойчивости для данной системы. Характеристическое уравнение замкнутой системы будет $z^2 + [k_0 k_1 T(1-d) - (1+d)]z + d = 0$. Применяя критерий (1.55), нетрудно получить условие устойчивости:

$$k_0 k_1 T < \frac{2(1+d)}{1-d}. \quad (1.104)$$

Таким образом, величина $k_0 k_1 T$ выбирается исходя из заданной точности и обеспечения устойчивости из неравенства

$$\frac{v_1}{\bar{e}} \leq k_0 k_1 T < \frac{2(1+d)}{1-d}. \quad (1.105)$$

Соотношение (1.105) при известных $v_1, \bar{e}, T, T_1, k_0$ позволяет выбрать k_1 . Пусть $\bar{e} = 5\% v_1, T = 0,1 T_1, T_1 = 1, k_0 = 1$, тогда $20 \leq k_1 < 40$. Так как проектируемая система должна обладать запасами устойчивости в пределах (6–20) дБ, что соответствует возможности увеличить коэффициент усиления в (2–10) раз без потерь устойчивости, то следует выбрать величину k_1 для данного примера близкой к двадцати.

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Общие сведения о нелинейных системах

Система автоматического управления относится к классу нелинейных систем автоматического управления (НСАУ), если хотя бы одно из ее звеньев описывается нелинейным уравнением, связывающим вход и выход звена (рис. 2.1).

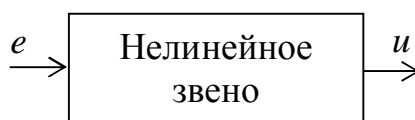


Рис. 2.1

Различают статические и динамические нелинейности. В первом случае связь u и e описывается алгебраическим уравнением $u = f(e)$, а в случае динамической нелинейности переменные u и e связаны дифференциальным, разностным или интегральным уравнением. Например, зависимость $u^{(1)} = f(e, u)$ будет характеризовать нелинейное динамическое звено, где $u^{(1)}$ – производная по времени.

Нелинейные звенья во многих случаях появляются в САУ объективно, т.к. многие реальные элементы нелинейны (усилители, реле, исполнительные двигатели, редукторы, элементы рассогласования и т.п.). С другой стороны, нелинейные элементы могут специально вводиться в систему для придания ей определенных показателей качества. Во многих случаях для построения оптимальных САУ требуется введение законов управления, реализуемых с помощью нелинейных элементов.

В отличие от линейных систем, процессы, протекающие в НСАУ, более сложны и многообразны, в связи с чем более сложными оказываются и методы их исследования. Поэтому при анализе НСАУ наиболее часто используют два этапа. На первом этапе, если это возможно, все нелинейные элементы линеаризуют [1], сводят систему к линейной (линеаризованной) и исследуют ее линейными методами. На втором этапе пытаются при анализе учесть те или иные свойства нелинейных элементов. Однако в случае существенных нелинейностей, особенно разрывных (релейных), линеаризация часто оказывается недопустимой и САУ изначально следует рассматривать как нелинейную.

Количество линейных и нелинейных элементов, их типы, а также места включения в системе могут быть разнообразными. В рамках излагаемого материала будут рассматриваться только нелинейные САУ с одним нелинейным элементом статического типа и остальными линейными элементами.

Структура такой системы представлена на рис. 2.2, где НЭ – нелинейный элемент статического типа, ЛЧС – линейная часть системы.

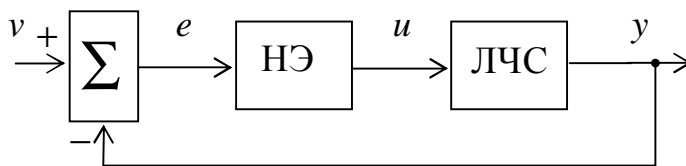


Рис. 2.2

К структуре НСАУ рис. 2.2 можно свести многие нелинейные системы. Эту структуру будем рассматривать как базовую при исследовании нелинейных САУ. Линейная часть системы (ЛЧС) описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами или, как принято в теории автоматического управления, передаточной функцией $W(s)$ [1].

Нелинейные зависимости $u = f(e)$ могут быть непрерывными, разрывными, периодическими и т.п. На рис. 2.3 в качестве иллюстрации представлены две нелинейные характеристики: а – реального усилительного звена с насыщением и б – элемента сравнения фаз двух гармонических сигналов (фазового детектора).

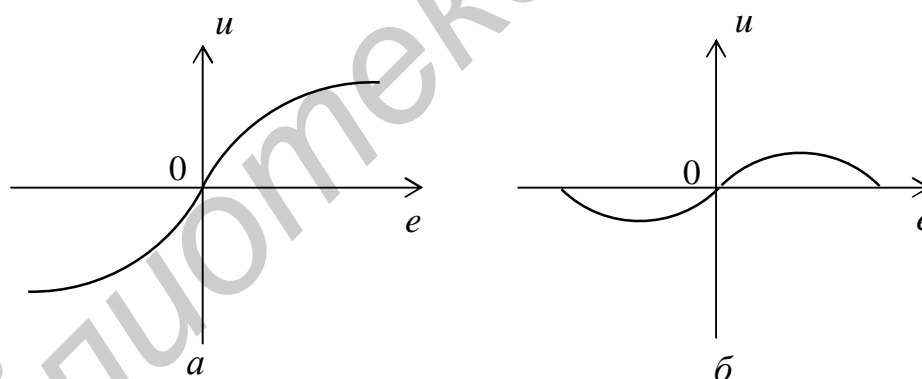


Рис. 2.3

Реальные характеристики нелинейного элемента $u = f(e)$ могут иметь сложный вид и сложные математические выражения. Поэтому в теории НСАУ их часто заменяют на идеализированные, аппроксимируя реальные кривые отрезками прямых линий. На рис. 2.4 представлены некоторые из таких идеализированных характеристик.

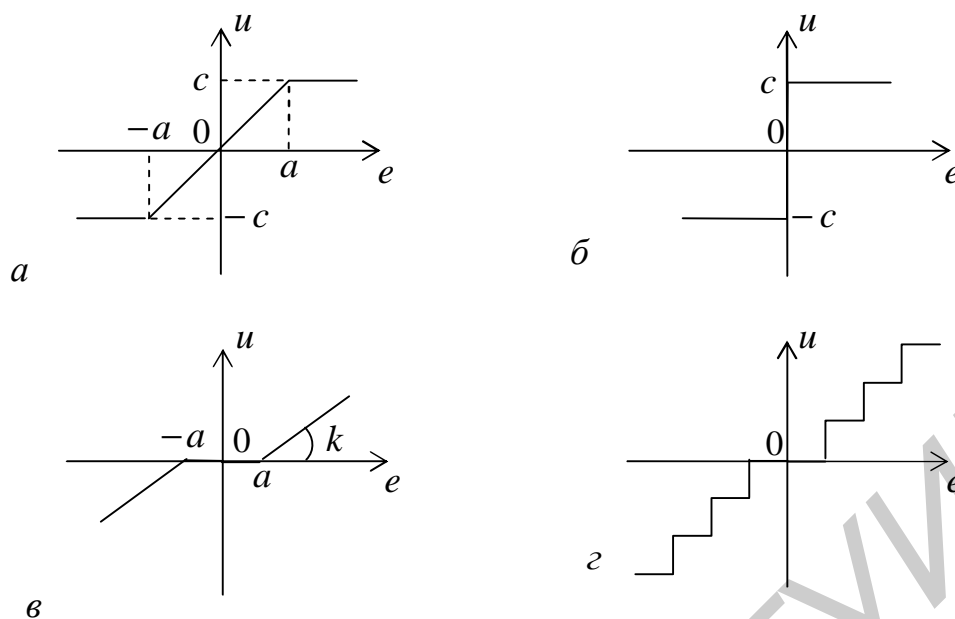


Рис. 2.4

Характеристика на рис. 2.4, *a* является идеализированной по отношению к реальной характеристике рис. 2.3, *a* и характеризует так называемое «насыщение». Аналитическое выражение для этой характеристики будет

$$u = \begin{cases} c, & e \geq a, \\ ke, & |e| < a, \\ -c, & e \leq -a, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $k = c/a$.

Характеристика на рис. 2.4, *б* – это характеристика идеального реле $u = c \operatorname{sign} e$, или

$$u = \begin{cases} c, & e > 0, \\ -c, & e < 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Характеристика на рис. 2.4, *в* характеризует так называемую зону «нечувствительности» при $|e| \leq a$:

$$u = \begin{cases} 0, & |e| \leq a, \\ k(e - a \operatorname{sign} e), & |e| > a. \end{cases} \quad (2.3)$$

Характеристика на рис. 2.4, *г* характерна, например, для аналого-цифрового преобразователя. Нелинейные характеристики других видов можно найти в литературе по теории автоматического управления, например в [6].

2.2. Математические модели замкнутых нелинейных систем автоматического управления

Рассмотрим нелинейную САУ, структура которой представлена на рис. 2.2. Пусть линейная часть системы описывается передаточной функцией

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{Y(s)}{U(s)}, \quad (2.4)$$

используя которую нетрудно получить дифференциальное уравнение, связывающее переменные $y(t)$ и $u(t)$:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = b_0 u^{(m)}(t) + \dots + b_m u(t), \quad (2.5)$$

где $y^{(i)}(t)$, $u^{(i)}(t)$ – производные по времени.

В соответствии со структурой нелинейной САУ рис. 2.2 нелинейный элемент имеет характеристику $u = f(e)$, где $e = v - y$. Итак, с учетом (2.5) математической моделью замкнутой нелинейной САУ будет следующая система уравнений:

$$a_0 y^{(n)} + \dots + a_n y = b_0 u^{(m)} + \dots + b_m u, \quad u = f(e), \quad e = v - y, \quad (2.6)$$

где $f(e)$ – функция, характеризующая нелинейную зависимость.

Другой вариант модели можно получить, используя уравнение состояния [1]. По передаточной функции $W(s)$ или по дифференциальному уравнению (2.5) можно связать координаты $y(t)$ и $u(t)$ с помощью векторно-матричных уравнений

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где A – матрица размерностью $n \times n$, B – вектор-столбец, C – вектор-строка, x – вектор состояния с координатами x_1, \dots, x_n .

В этом случае с учетом $u = f(e)$, $e = v - y$ получим векторно-матричную модель или уравнения состояния нелинейной системы:

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= Ax(t) + Bf(v - y), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Наконец, иногда рассматривают смешанную модель вида

$$Y(s) = W(s)U(s), \quad u = f(y - v), \quad (2.9)$$

где $Y(s)$, $U(s)$ – изображения, а $u(t)$, $y(t)$, $v(t)$ – функции времени (оригиналы).

Объектом дальнейшего рассмотрения являются модели вида (2.6), (2.8) или (2.9). При этом можно выделить следующие возможные направления исследований:

1. Функция $u = f(e)$ в окрестностях исследуемого режима (обычно это положение равновесия) является достаточно гладкой и допускает линеаризацию (разложение ее в ряд Тейлора). Тогда при достаточно малых отклонениях от установившегося режима уравнения (2.6) и (2.8) заменяются на линеаризованные и исследуются линейными методами [1].

2. Линеаризация в соответствии с п. 1 допустима, но отклонения от установившегося режима большие. В этом случае САУ надо рассматривать как нелинейную.

3. Линеаризация по п. 1 недопустима, особенно в случае разрывных нелинейных характеристик. САУ следует рассматривать только как нелинейную.

Излагаемое далее будет относиться к двум последним случаям.

Методы анализа нелинейных САУ, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями (2.6), (2.8), условно можно разделить на точные и приближенные. В свою очередь и в тех и в других можно выделить аналитические, графические и графоаналитические методы расчета и анализа. Широкие возможности дают методы с использованием компьютерного моделирования.

При исследовании процессов в НСАУ можно выделить два направления: исследование собственных процессов в НСАУ при $v(t) = 0$ и исследование вынужденных режимов, возникающих при внешних воздействиях $v(t) \neq 0$. Кроме этого, большое значение имеют задачи, связанные с отысканием периодических режимов, автоколебательных режимов и анализом устойчивости процессов в НСАУ.

Пример 2.1. В НСАУ рис. 2.2 линейная часть описывается передаточной функцией $W(s) = k(\tau_1 s + 1) / [s(T_1 s + 1)]$. Найдем математические модели системы. Смешанная форма будет

$$Y(s) = \frac{k(\tau_1 s + 1)}{s(T_1 s + 1)} U(s), \quad u = f(v - y).$$

Уравнения (2.6) имеют вид

$$y^{(2)} + \frac{1}{T_1} y^{(1)} = \frac{k}{T_1} (\tau_1 u^{(1)} + u), \quad u = f(v - y).$$

Используя передаточную функцию $W(s)$, найдем уравнения состояния линейной части в канонической форме:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 1]x,$$

где $b_1 = k$; $b_2 = k(\tau_1 - T_1)$; x – вектор с координатами x_1, x_2 .

С учетом уравнения замыкания получим модель (2.7):

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} k \\ k(\tau_1 - T_1) \end{bmatrix} f(v - y), \quad y = [1 \quad 1]x.$$

2.3. Исследование нелинейных систем методом фазовой плоскости

2.3.1. Основные понятия

Метод фазовой плоскости обычно применяется для анализа нелинейных систем второго порядка при исследовании в них собственных процессов ($v(t) = 0$) или вынужденных при $v = \text{const}$. Пусть в нелинейной системе рис. 2.2 передаточная функция имеет вид

$$W(s) = \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}. \quad (2.10)$$

Используем модели (2.7), (2.8) для данного случая и запишем уравнения (2.7) в нормальной форме [1]:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - a_1 b_1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 0]x.$$

Уравнение замкнутой системы (2.8) будет

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - a_1 b_1 \end{bmatrix} f(v - y), \quad y = x_1.$$

Будем полагать, что $v = 0$, а нелинейность обладает свойством симметрии относительно начала координат (см. рис. 2.3, 2.4), т.е. $f(-e) = -f(e)$.

В этом случае уравнения примут вид

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= x_2 - b_1 f(x_1) = f_1(x_1, x_2), \\ x_2^{(1)} &= -a_2 x_1 - a_1 x_2 - (b_2 - a_1 b_1) f(x_1) = f_2(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где f_1, f_2 – нелинейные функции.

Частным случаем уравнения (2.11) является случай, когда $b_1 = 0$:

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= x_2, \\x_2^{(1)} &= -a_2x_1 - a_1x_2 - b_2f(x_1) = F(x_1, x_2),\end{aligned}\tag{2.12}$$

который встречается довольно часто.

Характерной особенностью (2.11), (2.12) является то, что координата x_2 является скоростью изменения координаты $x_1 = y$, т.е. $x_2 = \frac{d}{dt}x_1 = \frac{d}{dt}y$.

Пусть при заданных начальных условиях $x_1(0)$, $x_2(0)$ определено конкретное (частное) решение $x(t)$ уравнения (2.11). В трехмерном пространстве с координатами x_1 , x_2 , t это решение можно изобразить в виде некоторой кривой, которую называют интегральной кривой. Проекция этой кривой на плоскость с координатами x_1 , x_2 также будет некоторой кривой или траекторией, которую будем называть траекторией состояния, или фазовой траекторией.

Совокупность фазовых траекторий на плоскости с координатами x_1 , x_2 будем называть фазовым портретом системы, а саму плоскость – фазовой плоскостью.

При $n > 2$ все вышесказанное можно обобщить, однако ввиду сложной геометрической интерпретации фазовое пространство и фазовые траектории для этого случая применяются редко.

Найдем уравнения, определяющие фазовые траектории. Для этого в (2.11) разделим почленно второе уравнение на первое, тогда с учетом $x_1^{(1)}(t) = dx_1/dt$, $x_2^{(1)}(t) = dx_2/dt$ получим

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}.\tag{2.13}$$

Уравнение (2.13) является нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка, в котором x_1 является аргументом (независимой переменной). Решение этого уравнения $x_2(x_1)$ и является искомой фазовой траекторией. Так как в конечном итоге координаты x_1 и x_2 зависят от времени t , то с течением времени точка на фазовой траектории, которую назовем изображающей точкой, будет двигаться по фазовой траектории.

Для частного случая (2.12) уравнения фазовых траекторий будут иметь вид

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{F(x_1, x_2)}{x_2}.\tag{2.14}$$

Правила движения изображающей точки по фазовым траекториям на фазовой плоскости x_1Ox_2 , где Ox_1 – ось абсцисс, Ox_2 – ось ординат, следующие:

а) если $x_2 > 0$, то по фазовой траектории изображающая точка движется слева направо в сторону увеличения x_1 , т.к. скорость $\dot{x}_1 > 0$;

б) если $x_2 < 0$, то наоборот – справа налево;

в) ось x_1 фазовая траектория пересекает под прямым углом (свойство справедливо только для уравнения (2.14)).

Рассмотрим качественное соответствие характера поведения интегральной кривой (координат $x_1(t), x_2(t)$) и соответствующих фазовых траекторий.

На рис. 2.5 показаны 5 видов процессов $x_1(t)$: 1 – периодический, 2 – возрастающий колебательный, 3 – затухающий колебательный, 4 – монотонный возрастающий, 5 – монотонный затухающий. На рис. 2.6 для каждого из них показаны фазовые траектории.

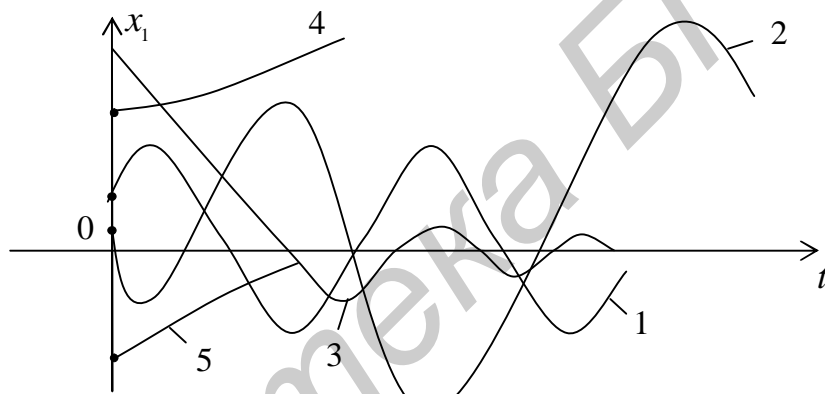


Рис. 2.5

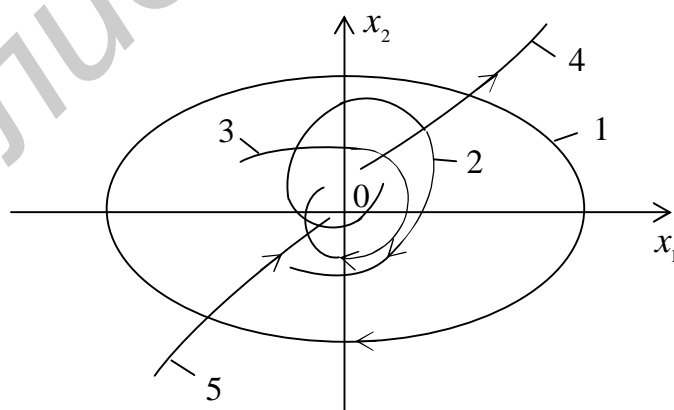


Рис. 2.6

Итак, если известен фазовый портрет системы, то можно качественно оценить характер протекающих в системе процессов: являются ли они зату-

хающими и стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ либо нет; как именно затухают – с колебаниями либо монотонно; являются ли периодическими и т.п.

2.3.2. Классификация фазовых портретов

В первую очередь выделяются точки равновесного состояния системы, в которых (см. 2.11) $x_1^{(1)}(t) = dx_1/dt = x_2^{(1)}(t) = dx_2/dt = 0$ и которые определяются из решения системы нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В этих точках правая часть уравнения (2.13) является неопределенностью вида $0/0$. Поэтому точки равновесного состояния еще называют особыми точками на фазовой плоскости. Особые точки классифицируются по их типу для линейных систем. В линейном случае в (2.10) $f_1(x_1, x_2) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$, $f_2(x_1, x_2) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$, где a_{ij} – постоянные коэффициенты, и особая точка будет единственной $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, т.е. будет началом координат фазовой плоскости. Тип особой точки определяют корнями характеристического уравнения линейной системы

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - s & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - s \end{bmatrix} = s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \quad (2.16)$$

Различают восемь типов особых точек:

- 1) устойчивый узел – два различных действительных отрицательных корня;
- 2) вырожденный устойчивый узел – два равных действительных отрицательных корня;
- 3) устойчивый фокус – два комплексно-сопряженных корня с отрицательными действительными частями;
- 4) центр – два чисто мнимых корня;
- 5) неустойчивый узел – два различных действительных положительных корня;
- 6) вырожденный неустойчивый узел – два равных действительных положительных корня;
- 7) неустойчивый фокус – два комплексно-сопряженных корня с положительными действительными частями;
- 8) седло – два различных действительных корня с разными знаками.

Фазовые портреты линейных систем с соответствующим типом особой точки приводятся в [4, 6, 7]. Например, для точки типа «центр» фазовые тра-

ектории – это симметричные эллипсы на плоскости $x_1 O x_2$, охватывающие начало координат. Для точек типа «устойчивый и неустойчивый фокус» – это логарифмические спирали, соответственно скручивающиеся к началу координат и раскручивающиеся.

Отметим, что первые три типа точек соответствуют устойчивой линейной системе, четвертый тип – нейтральной или находящейся на границе устойчивости системе, а все точки, начиная с четвертого типа и далее, относятся к неустойчивой линейной системе.

Классификацию особых точек нелинейных систем производят по линеаризованной модели нелинейной системы вблизи исследуемой особой точки. Из уравнений (2.15) после их решения находим координаты особой точки $x_1^* = \text{const}$, $x_2^* = \text{const}$ (таких точек может быть от нескольких до бесчисленного множества).

Исходное уравнение (2.11) подвергается линеаризации относительно найденных координат x_1^* , x_2^* путем разложения функций f_1 , f_2 в ряд Тейлора [1]. В результате будем иметь уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned}\Delta x_1^{(1)} &= a_{11}\Delta x_1 + a_{12}\Delta x_2, \\ \Delta x_2^{(1)} &= a_{21}\Delta x_1 + a_{22}\Delta x_2,\end{aligned}$$

где $\Delta x_1 = x_1 - x_1^*$, $\Delta x_2 = x_2 - x_2^*$, а коэффициенты a_{ij} определяются следующим образом:

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i(x_1, x_2)}{\partial x_j} \right|_{\substack{x_1 = x_1^* \\ x_2 = x_2^*}}. \quad (2.17)$$

Подставляем найденные a_{ij} в (2.16), определяем вид корней уравнения (2.16) и тип особой точки нелинейной системы. Если особых точек несколько, процедуру проделываем для каждой особой точки.

Кроме особых точек фазовые портреты нелинейных систем могут иметь и особые кривые (траектории), что не характерно для линейных систем. Из особых кривых выделим, в первую очередь, два типа: сепаратрисы и предельные циклы. Сепаратриса – это особая кривая, которая разделяет на фазовой плоскости области с разными типами фазовых траекторий. Предельные циклы – это замкнутые кривые, соответствующие периодическим процессам.

Предельный цикл называется устойчивым предельным циклом, в том случае если все фазовые траектории, начинающиеся внутри и за пределами предельного цикла с течением времени стремятся к нему (навиваются на него изнутри и снаружи). Если фазовые траектории снаружи либо изнутри с течением времени удаляются от него, то будем иметь неустойчивый предельный цикл.

Устойчивый предельный цикл (устойчивый периодический процесс) физически соответствует возникновению в системе автоколебаний, которые могут возникать при отсутствии внешнего воздействия, причем их амплитуда и частота не зависят от начальных условий, а определяются внутренними свойствами.

Например, в линейной системе возможен периодический (гармонический) режим (рис. 2.5, 2.6, кривые 1), однако он не является автоколебанием, т.к. его амплитуда зависит от начальных условий.

На рис. 2.7 представлены примеры фазовых портретов нелинейной системы, где жирными линиями выделены предельные циклы. На рис. 2.7, *а* предельный цикл является устойчивым (автоколебание), а положение равновесия (начало координат) неустойчиво. Вариант рис. 2.7, *б* дает неустойчивый предельный цикл, а положение равновесия устойчиво. Наконец, в варианте рис. 2.7, *в* внешний предельный цикл устойчив (автоколебание), внутренний неустойчив, положение равновесия устойчиво.

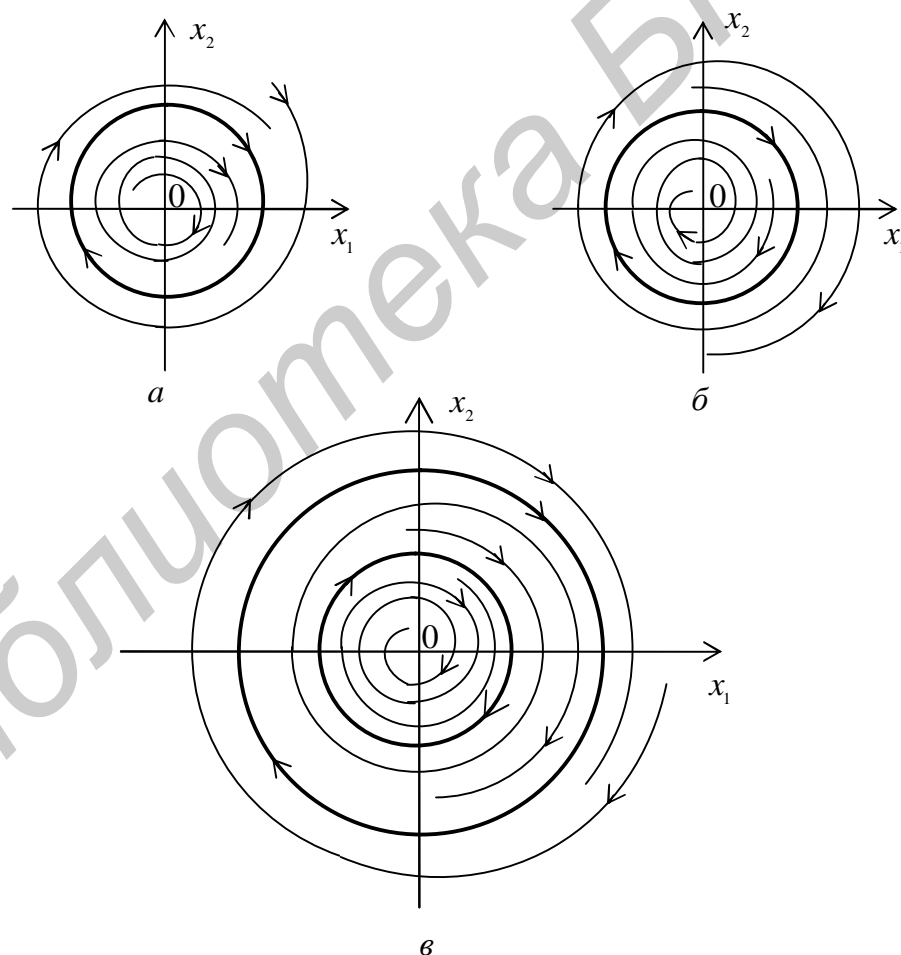


Рис. 2.7

Пример 2.2. Рассмотрим нелинейную систему [7], описываемую уравнениями

$$\dot{x}_1^{(1)} = -x_1(1+x_1^2) - 2x_2,$$

$$\dot{x}_2^{(1)} = x_1 + x_2.$$

Уравнения фазовых траекторий будут

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1 + x_2}{-x_1(1+x_1^2) - 2x_2}.$$

Особые точки найдем из решения системы уравнений

$$x_1(1+x_1^2) + 2x_2 = 0,$$

$$x_1 + x_2 = 0.$$

Это особые точки с координатами $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$.

Исследуем первую особую точку (начало координат) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, для которой нетрудно найти (2.17) $a_{11} = -1$, $a_{12} = -2$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 1$, а уравнение (2.16) соответственно будет $s^2 + 1 = 0$.

Корни этого уравнения будут чисто мнимые $s_1 = -j$, $s_2 = j$. В соответствии с классификацией особая точка – начало координат будет типа «центр». Аналогично можно показать, что две другие особые точки $(1, -1)$, $(-1, 1)$ будут типа «седло». На рис. 2.8 дан общий фазовый портрет системы, где жирным выделены кривые, которые являются сепаратрисами.

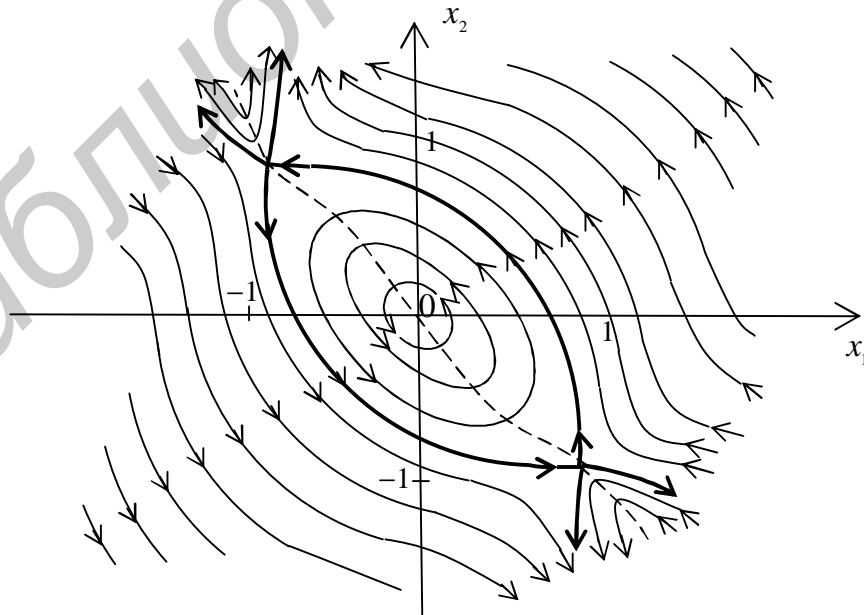


Рис. 2.8

2.3.3. Построение фазовых траекторий

Аналитическое выражение для фазовой траектории является решением нелинейных дифференциальных уравнений (2.13), (2.14) и найти его в общем случае невозможно. Однако если представить реальные нелинейные характеристики в виде идеальных, т.е. аппроксимированных на отдельных участках прямыми линиями, то возможно применение аналитических методов решения. Суть такого подхода заключается в следующем. Пусть идеальная нелинейность на некотором интервале $x_1' \leq x_1 \leq x_2''$ описывается линейной характеристикой $f(x_1) = gx_1 + e$, где g, e – заданные коэффициенты. В этом случае уравнение (2.13) для фазовых траекторий будет иметь вид

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{ax_1 + bx_2 + c}{\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma}, \quad (2.18)$$

где $a = g(a_1b_1 - b_2) - a_2$, $b = -a_1$, $c = e(a_1b_1 - b_2)$, $\alpha = -b_1g$, $\beta = 1$, $\gamma = -b_1$.

Уравнение (2.18) является частным случаем уравнения Якоби и может быть проинтегрировано, т.е., задавая начальные значения x_{10} , x_{20} , можно найти вид фазовой траектории $x_2(x_1)$ при условии, что $x_1' \leq x_1 \leq x_2''$.

Таким образом, разбивая всю ось x_1 на ряд интервалов $-\infty \leq x_1^1 \leq x_1^2 \leq \dots \leq x_1^r \leq \infty$ и аппроксимируя нелинейность $f(x_1)$ линейной зависимостью $f(x_1) = g_i x_1 + e_i$ на каждом интервале, получим свое уравнение (2.18), решение которого даст на этом интервале некоторую фазовую траекторию. Линии, соответствующие равенствам $x_1 = x_1^i$ на плоскости $x_1 O x_2$, разделяют ее на ряд областей. Эти линии, границы областей, будем называть линиями переключения.

При попадании изображающей точки фазовой траектории на линию переключения конечные значения этой фазовой траектории, т.е. значения координат x_1 и x_2 , на ее конце принимаются за начальные условия для фазовой траектории в смежной области. Такой метод решения дифференциального уравнения называют методом сшивания, склеивания или припасовывания решений.

Другой способ построения фазовых траекторий – это метод изоклин, который является графическим методом. В уравнении для фазовых траекторий (2.13) правая часть в каждой точке фазовой плоскости с координатами x_1 , x_2 определяет скорость движения изображающей точки, т.е. определяет угол наклона касательной к фазовой траектории в этой точке. Уравнение

$$\frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = c, \quad (2.19)$$

где $c = \text{const}$ произвольное число, определяет линию на фазовой плоскости равных значений производных или углов наклона касательной. Эту линию и называют изоклиной.

Изобразив на фазовой плоскости несколько изоклин с соответствующими направлениями касательных, можно приближенно представить вид фазовых траекторий и вид фазового портрета.

Наконец, возможно построение фазового портрета путем моделирования уравнений фазовых траекторий и их решения на компьютере.

2.3.4. Скользящие режимы в нелинейных системах

Рассмотрим нелинейную САУ [7], изображенную на рис. 2.9, где $f(x) = \text{sign}x$ – модель идеального реле: $\text{sign}x = c$ при $x > 0$, $\text{sign}x = -c$ при $x < 0$.

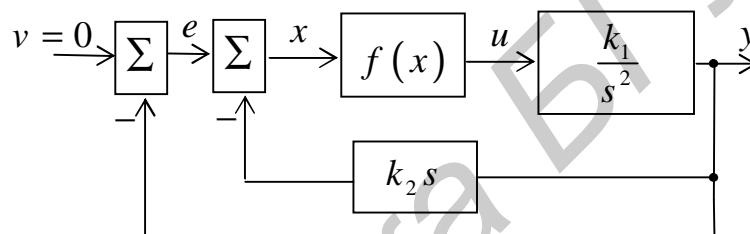


Рис. 2.9

В соответствии с рис. 2.9 уравнение системы будет

$$y^{(2)} = k_1 \text{sign}(-y - k_2 y^{(1)}) = -k_1 \text{sign}(y + k_2 y^{(1)}).$$

Вводя новые переменные $x_1 = y$, $x_2 = y^{(1)}$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= x_2, \\ x_2^{(1)} &= -k_1 \text{sign}(x_1 + k_2 x_2), \end{aligned}$$

из которой находим уравнения для фазовых траекторий:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{k_1}{x_2} \text{sign}(x_1 + k_2 x_2). \quad (2.20)$$

Уравнение линии переключения получим из условия $x_1 + k_2 x_2 = 0$, т.е.

$$x_2 = -\frac{1}{k_2} x_1. \quad (2.21)$$

В области фазовой плоскости при $x_1 + k_2 x_2 > 0$ уравнение (2.20) имеет вид

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{k_1 c}{x_2}, \quad (2.22)$$

а там где $x_1 + k_2 x_2 < 0$, уравнение (2.20) будет

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{k_1 c}{x_2}. \quad (2.23)$$

Решения уравнений (2.22), (2.23) соответственно имеют вид

$$x_2^2 = -2k_1 c x_1 + c_1, \quad (2.24)$$

$$x_2^2 = 2k_1 c x_1 + c_2, \quad (2.25)$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные, которые определяются начальными условиями x_{10}, x_{20} .

Уравнения (2.24), (2.25) на фазовой плоскости определяются парабололами. Уравнение (2.24) справедливо справа от линии переключения (2.21), а (2.25) – слева.

На рис. 2.10 изображен фазовый портрет нелинейной системы, из которого следует, что на линии переключения существует отрезок AB , на который с двух сторон сходятся все фазовые траектории. Изображающая точка, попав на этот отрезок, далее с течением времени обязана двигаться по нему к началу координат (положению равновесия). Такой режим называется скользящим режимом, а отрезок AB – отрезком скольжения. На рис. 2.10 начальная точка $M_0(t_0)$ переходит по фазовым траекториям в точку M_2 , затем в M_3 (попадает на отрезок скольжения) и далее по линии переключения обязана двигаться к началу координат, т.е. в системе возникает режим скольжения.

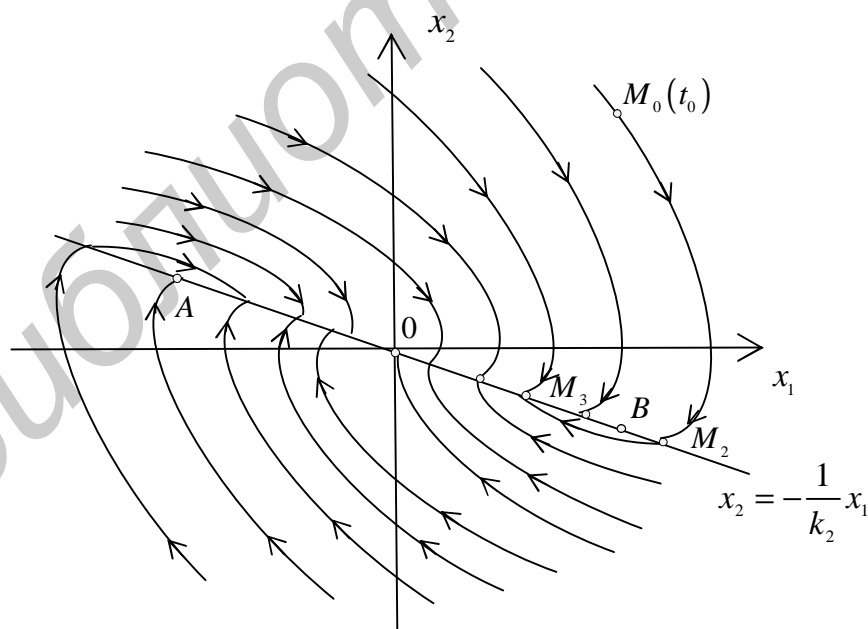


Рис. 2.10

Найдем координаты точек A, B , т.е. длину отрезка скольжения. В точке A касательная к параболе должна совпадать с линией переключения, т.е. $dx_2/dx_1 = -1/k_2$. Тогда с учетом (2.22) будем иметь $-k_1c/x_2 = -1/k_2$, т.е. ордината точки A будет $x_2 = k_1k_2c$.

Аналогично ордината точки B будет $x_2 = -k_1k_2c$. Таким образом, длина отрезка AB будет тем больше, чем больше k_1 или k_2 .

Найдем закон движения в скользящем режиме. На линии переключения (2.21) $x_2 = -x_1/k_2$, но $x_2 = x_1^{(1)}$, откуда можно получить следующее уравнение:

$$x_1^{(1)} + \frac{1}{k_2}x_1 = 0, \quad (2.26)$$

определяющее закон движения в скользящем режиме. Решение уравнения

$$(2.26) \text{ имеет вид } x_1(t) = x_{10}e^{-\frac{t}{k_2}}.$$

Таким образом, на линии скольжения исходная нелинейная система второго порядка вырождается в линейную систему первого порядка (2.26), причем параметры процесса скольжения не зависят от параметров прямой цепи (k_1). Меняя k_2 , можно менять время попадания изображающей точки в начало координат, т.е. фактически менять время регулирования. Чем меньше величина k_2 , тем меньше время регулирования.

2.3.5. Система с переменной структурой

Структура нелинейной САУ изображена на рис. 2.11.

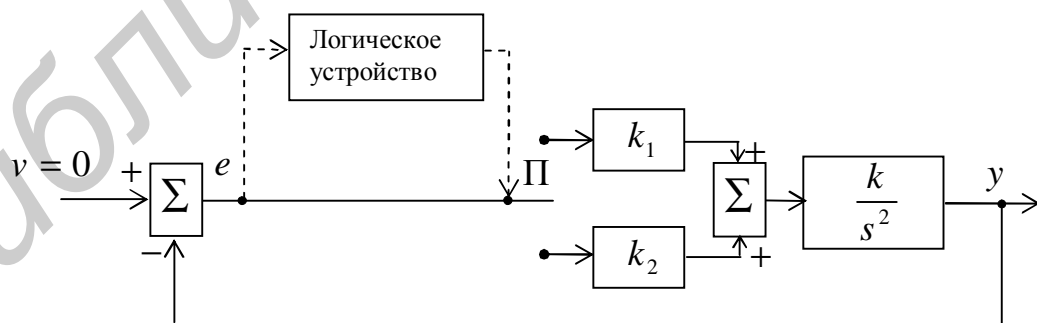


Рис. 2.11

На этом рисунке нелинейным элементом является логическое устройство, которое на основе измерения сигнала e управляет по определенному закону ключом Π , так что передаточная функция разомкнутой системы может быть либо kk_1/s^2 , либо kk_2/s^2 , т.е. система в процессе работы меняет свою

структуру. При включении верхнего звена уравнение замкнутой системы имеет вид

$$y^{(2)} + k_1 k y = 0, \quad (2.27)$$

а при включении нижнего звена

$$y^{(2)} + k_2 k y = 0. \quad (2.28)$$

Характеристическое уравнение такой замкнутой системы будет $s^2 + k_i k = 0$ и, если $k > 0$, $k_i > 0$, имеет два комплексных корня, это значит, что система является нейтральной или находится на границе устойчивости. Такая система является неработоспособной.

Обозначим $y = x_1$, $y^{(1)} = x_2$, тогда уравнения для фазовых траекторий будут

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -k_i k \frac{x_1}{x_2}, \quad i = 1, 2. \quad (2.29)$$

Решая уравнения (2.29), получим на фазовой плоскости семейство эллипсов

$$x_2^2 + k_i k x_1^2 = c_1,$$

где c_1 – произвольная постоянная.

Путем подбора k_1 , k_2 сделаем одни эллипсы сжатыми вдоль оси x_1 , а другие вдоль оси x_2 , как это изображено на рис. 2.12.

Закон переключения ключа выберем следующий: если $x_1 x_2 > 0$, то перед нами цепь с коэффициентом k_1 (см. рис. 2.12, а), если $x_1 x_2 < 0$ – цепь с коэффициентом k_2 (рис. 2.12, б). Линиями переключения будут координатные оси фазовой плоскости $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Итак, если изображающая точка находится, например, в первом квадранте, то с течением времени она движется вниз вдоль эллипса до линии переключения $x_1 = 0$ (см. рис. 2.12, а) и далее при $x_2 < 0$ вдоль эллипса, сжатого относительно оси x_1 , и т.д. Таким образом, с течением времени изображающая точка будет стремиться к началу координат.

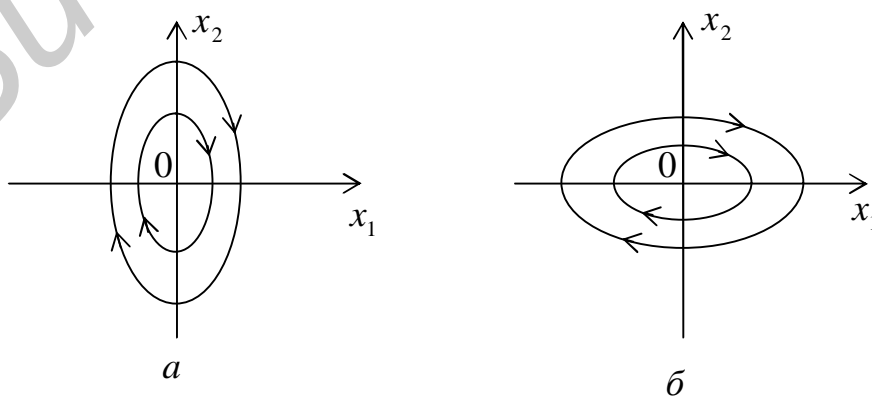


Рис. 2.12

В рассмотренном случае процесс будет колебательным. Однако организовать скользящий режим в такой системе возможно. Пусть в структуре рис. 2.11 $k_2 = -k_1$, тогда уравнения для фазовых траекторий будут

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -k_1 k \frac{x_1}{x_2}, \quad \frac{dx_2}{dx_1} = k_1 k \frac{x_1}{x_2},$$

первое из которых при $k_1 > 0$, $k > 0$ описывает эллипсы, а второе при $k_1 > 0$, $k < 0$ – гиперболы на фазовой плоскости. Первый контур соответствует, как и раньше, нейтральной системе, а второй – неустойчивой системе. Переключение организуем следующим образом: если $(x_2 + cx_1)x_1 > 0$, работает верхняя цепь (коэффициент k_1), а если $(x_2 + cx_1)x_1 < 0$, работает нижняя цепь (коэффициент $-k_1$). Таким образом, линиями переключения будут $x_1 = 0$ (ось ординат) и прямая $x_2 = -cx_1$, где c – параметр, который можно выбирать. Линия скольжения в данном случае не ограничена конечным отрезком, а является всей прямой $x_2 = -cx_1$. Фазовый портрет изображен на рис. 2.13, где волнистая линия – это линия переключения.

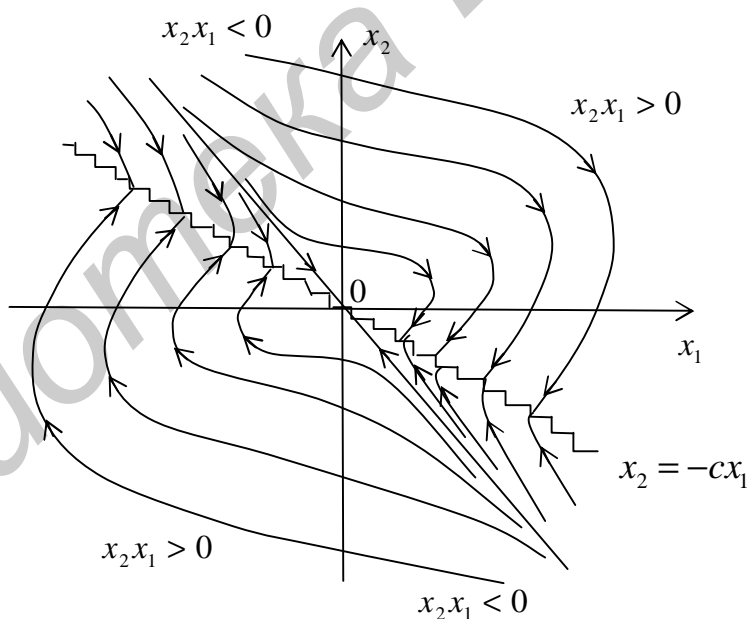


Рис. 2.13

2.4. Метод припасовывания

Этот метод применяется для случая, когда нелинейная характеристика $u = f(e)$ в САУ рис. 2.2 представляется в виде кусочно-линейной, т.е. на отдельных участках изменения переменной e нелинейная характеристика аппроксимируется линейной зависимостью. Теоретически этот подход можно

применять для систем любого порядка при вычислении как свободных ($v = 0$), так и вынужденных процессов ($v \neq 0$).

Основная идея подхода следующая. Диапазон изменения переменной e на входе нелинейности разбивается на ряд интервалов, так что в i -м интервале $e_i < e < e_{i+1}$ нелинейная функция $f(e)$ заменяется линейной $u = k_i e + b_i$. Тогда в i -м интервале уравнения (2.6), (2.8) или (2.9) становятся линейными и теоретически можно найти общее решение соответствующих линейных дифференциальных уравнений при заданном входе $v(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t, c_1, \dots, c_n), \\ y^{(1)}(t) &= y^{(1)}(t, c_1, \dots, c_n), \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(t) &= y^{(n-1)}(t, c_1, \dots, c_n), \end{aligned} \tag{2.30}$$

где c_i – произвольные постоянные.

Задавая начальные условия для частного (конкретного решения) $y(t_0), y^{(1)}(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)$ при условии $e_i < e(t_0) = v(t_0) - y(t_0) < e_{i+1}$ и полагая в (2.30) $t = t_0$, находим произвольные постоянные и соответствующие частные решения $y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$, которые справедливы только при $e_i < v(t) - y(t) < e_{i+1}$.

Далее находим значение момента времени t_1 , при котором $e(t) = v(t) - y(t) = e_i$, либо $e(t) = v(t) - y(t) = e_{i+1}$. При $t = t_1$ по выражениям (2.30) вычисляем конечные значения решения и его производных $y(t_1), y^{(1)}(t_1), \dots, y^{(n-1)}(t_1)$, которые принимаем за начальные значения решения в следующем ($i-1$) или ($i+1$) интервале. Далее процесс поинтервального решения повторяется.

Итак, для каждого i -го интервала изменения переменных системы имеем свою линейную модель, которая дает определенное решение, справедливое только для i -го интервала. На границах интервалов, там, где $e_i = \text{const}$, производится припасовывание решений: конечные значения решений для i -го интервала становятся начальными значениями искомого решения для следующего интервала. Отсюда и название метода – метод припасовывания решений. Фактически он уже применялся для нахождения решений дифференциальных уравнений фазовых траекторий в п. 2.3.3. Границы интервалов $e_i = \text{const}$ являются линиями переключения.

Пример 2.3. Пусть в нелинейной системе рис. 2.2 $W(s) = k/(Ts + 1)$, а нелинейность имеет вид рис. 2.4, а, которая описывается уравнением

$$u = f(e) = \begin{cases} c, & e \geq a, \\ \frac{c}{a}e = k_1 e, & |e| < a, \\ -c, & e \leq -a. \end{cases} \quad (2.31)$$

Исходная система нелинейных уравнений будет иметь вид

$$y^{(1)} + \frac{1}{T}y = \frac{k}{T}u, \quad u = f(e), \quad e = v - y. \quad (2.32)$$

Исследуем процессы в системе при входном сигнале $v(t) = v^* = const$. Тогда из (2.32) с учетом (2.31) получим три модели системы для трех интервалов:

$$\begin{aligned} y^{(1)} + \frac{1}{T}y &= \frac{k}{T}c, & y < v^* - a; \\ y^{(1)} + \frac{1+kk_1}{T}y &= \frac{kk_1}{T}v^*, & v^* - a < y < v^* + a; \\ y^{(1)} + \frac{1}{T}y &= -\frac{k}{T}c, & y > v^* + a. \end{aligned}$$

Общее решение в каждом случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{-\frac{t}{T}} + kc, & y < v^* - a; \\ y(t) &= c_1 e^{-\frac{(1+kk_1)t}{T}} + \frac{kk_1}{1+kk_1}v^*, & v^* - a < y < v^* + a; \\ y(t) &= c_1 e^{-\frac{t}{T}} - kc, & y > v^* + a. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Пусть $v^* > a$, $y(0) = 0$, тогда из первого уравнения (2.33) найдем $c_1 = -kc$ и решение будет $y(t) = -kce^{-\frac{t}{T}} + kc$. Найдем момент времени t_1 , когда $y(t) = v^* - a$. Это вытекает из решения уравнения $v^* - a = kc \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$ при условии $kc > v^* - a$. Момент t_1 определится по формуле

$$t_1 = -T \ln \left(1 - \frac{v^* - a}{kc}\right).$$

По первой формуле (2.33) определяем

$$y(t_1) = kc \left(1 - e^{-\frac{t_1}{T}} \right) = d.$$

Конечное значение процесса $y(t_1) = d$ принимаем за начальное для второй формулы (2.33), тогда получим $c_1 = d - \frac{kk_1}{1 + kk_1} v^*$ и

$$y(t) = d e^{-\frac{(1+kk_1)}{T}(t-t_1)} + \frac{kk_1}{1 + kk_1} v^* \left(1 - e^{-\frac{(1+kk_1)}{T}(t-t_1)} \right). \quad (2.34)$$

Итак, закон изменения координаты $y(t)$ при $y(0) = 0$ и $kc < v^* - a$

$$y(t) = kc \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right), \quad t > 0. \quad (2.35)$$

Если же $kc > v^* - a$, то при $0 < t < t_1$ выход будет изменяться по закону (2.35), а далее при $t > t_1$ закон изменения будет (2.34).

При $t \rightarrow \infty$ в первом случае на выходе имеем установившееся значение $y(\infty) = kc$, а во втором $y(\infty) = \frac{kk_1}{1 + kk_1} v^*$.

2.5. Метод точечного преобразования

Метод точечного преобразования является усовершенствованным методом припасовывания с привлечением геометрического аппарата фазовой плоскости и применяется в основном для анализа свободных режимов в системах второго порядка.

Пусть система описывается уравнениями (2.11), а уравнения для фазовых траекторий будут (2.13). На фазовой плоскости нарисуем отрезок линии OB , как показано на рис. 2.14, который пересекается фазовыми траекториями в одном направлении. Пусть Q – начальная точка пересечения фазовой траекторией этого отрезка, а Q' – последующая точка при движении по данной фазовой траектории. Обозначим через s и s' соответствующие расстояния точек Q и Q' до точки O (начала координат). Точка Q' называется последующей по отношению к исходной (предыдущей) точке Q . Зависимость

$$s' = f(s) \quad (2.36)$$

будем называть функцией последования, которая определяет закон точечного преобразования вдоль отрезка OB .

Так как фазовые траектории всюду плотно заполняют фазовое пространство, то исходные и последующие точки всюду плотно заполняют отрезок OB .

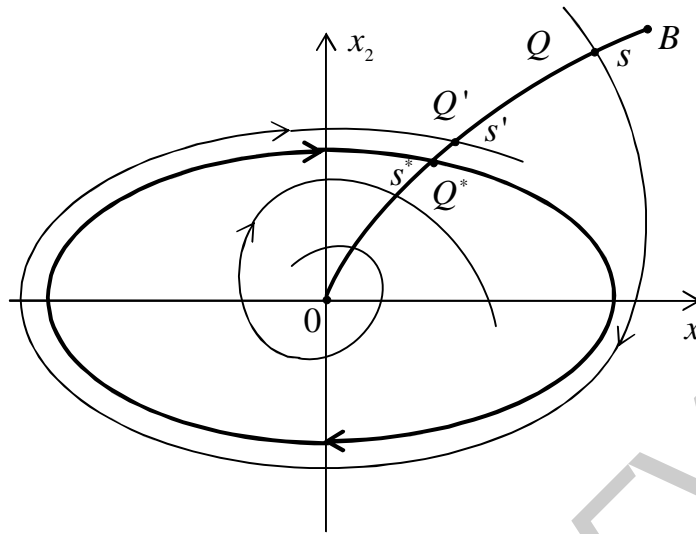


Рис. 2.14

По виду функции последования $s' = f(s)$ можно качественно судить о поведении фазовых траекторий и виде фазового портрета, а в ряде случаев и определить количественные характеристики процессов в системе.

В соответствии, например, с рис. 2.14 можно сделать ряд следующих выводов. Если величина $s' < s$, то фазовые траектории приближаются к началу координат. Если $s' > s$, то все фазовые траектории удаляются от начала координат. Если в процессе точечного преобразования $s' = s = s^*$, то на фазовой плоскости существует замкнутая кривая, соответствующая предельному циклу.

Исследование поведения системы с помощью точечного преобразования удобно проводить, используя график функции $s' = f(s)$. На рис. 2.13 изображен график функции $s' = f(s)$ и через начало координат проведена прямая, совпадающая с биссектрисой первого квадранта плоскости $s'O_s$.

Ход точечного преобразования следующий. Выбираем исходную точку на оси s – точку b , для нее находим координату последующей точки на кривой $f(s)$. Далее используем найденную последующую, принимаем ее за исходную и находим опять последующую. Ход точечного преобразования из точки b показан стрелками. Итак, по ходу стрелок видно, что мы приближаемся к точке L , в которой $s' = s$. Для исходной точки a картина точечного преобразования повторяется. Таким образом, в точке L существует устойчивый предельный цикл (автоколебания). Обратная картина будет относительно точки M , где есть предельный цикл, но он неустойчив.

Графики, подобные приведенному на рис. 2.15, называются диаграммами точечного преобразования.

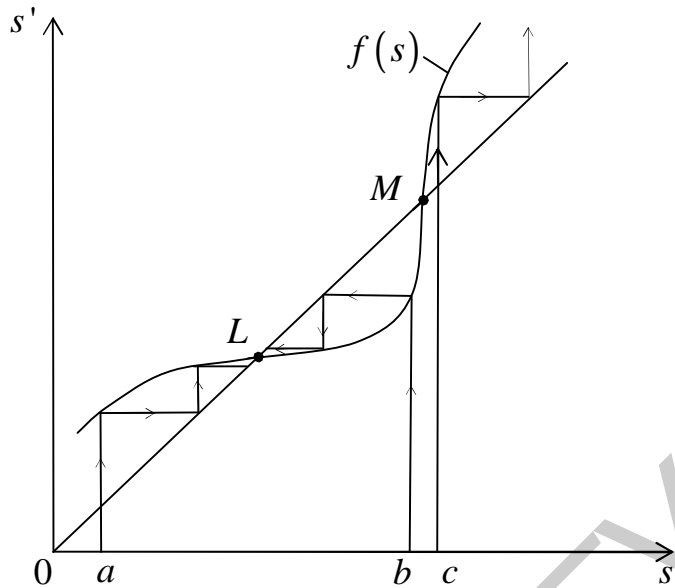


Рис. 2.15

Определение функции $s' = f(s)$ часто трудоемкая задача. Проще эту функцию задать в параметрической форме, когда s' и s зависят от некоторого параметра. В качестве такого параметра выбирают величину τ – время прохождения из точки Q в последующую точку Q' по ходу фазовой траектории. Итак, находят уравнения

$$s = f_1(\tau), \quad s' = f_2(\tau), \quad (2.37)$$

которые являются параметрической формой задания зависимости $s' = f(s)$.

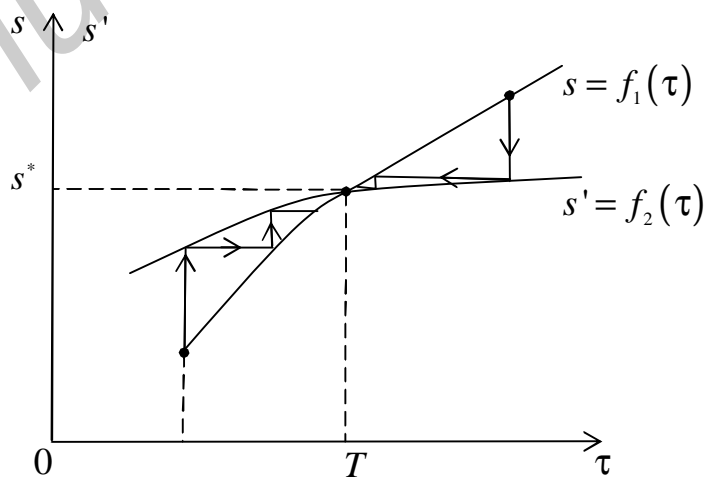


Рис. 2.16

На рис. 2.16 приведен пример точечного преобразования при параметрической форме задания кривых (2.37). Точка с координатами T, s^* соответствует наличию устойчивого предельного цикла (автоколебаний). При этом величина T – период автоколебаний. Конкретные примеры применения точечного преобразования можно найти в [6, 7].

2.6. Метод гармонической линеаризации

2.6.1. Исходные положения метода гармонической линеаризации

Метод гармонической линеаризации (метод гармонического баланса) – это приближенный (инженерный) метод, позволяющий исследовать собственные и вынужденные колебания, а также устойчивость нелинейных систем. Метод не имеет ограничений на порядок системы. Этот метод до настоящего времени строго не обоснован. Однако длительная практика применения доказала его эффективность.

Пусть имеем нелинейное звено (см. рис. 2.1) с нелинейной статической характеристикой

$$u = f(e), \quad (2.38)$$

на вход которого подается гармонический сигнал $e(t) = a \sin \omega t$. Сигнал на выходе нелинейного звена будет не гармоническим, однако периодическим с тем же самым периодом $T = 2\pi/\omega$, т.е. $u = f(a \sin \omega t)$.

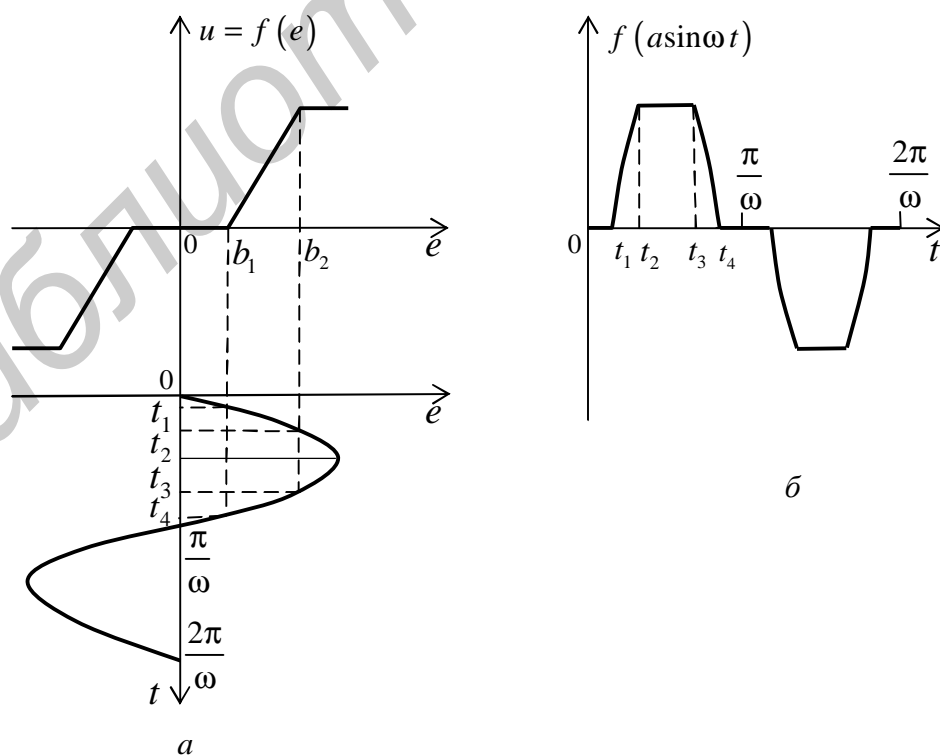


Рис. 2.17

На рис. 2.17 дана графическая иллюстрация преобразования гармонического сигнала нелинейной характеристикой, имеющей зону нечувствительности и насыщения.

Так как сигнал $u = f(asin\omega t)$ является периодическим с периодом $T = 2\pi/\omega$, то разложим его в ряд Фурье:

$$u = f(asin\omega t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t), \quad (2.39)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^T f(asin\omega t) dt, \\ A_k &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^T f(asin\omega t) \cos k\omega t dt, \\ B_k &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^T f(asin\omega t) \sin k\omega t dt. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Коэффициенты ряда Фурье A_i , B_i вычисляются по известной нелинейности $f(e)$. Обычно амплитуды первой гармоники A_1, B_1 значительно больше амплитуд высших гармоник частот $2\omega, 3\omega, \dots$.

Сигнал с выхода нелинейного элемента в соответствии со структурой замкнутой системы рис. 2.2 поступает на вход линейной части систем с передаточной функцией $W(s) = R(s)/Q(s)$ или с соответствующей АФЧХ $W(j\Omega)$. Будем считать, что степень полинома $R(s)$ меньше степени полинома $Q(s)$, что соответствует физически реализуемой системе. В этом случае $|W(j\Omega)|$ (АЧХ) с ростом Ω обязательно будет стремиться к нулю. Вид АЧХ приведен на рис. 2.18, где кривая 1 соответствует статической, а 2 – астатической системе. Здесь же приведены спектральные составляющие входного сигнала основной частоты ω и высших гармоник $2\omega, 3\omega, \dots$ в соответствии с (2.39).

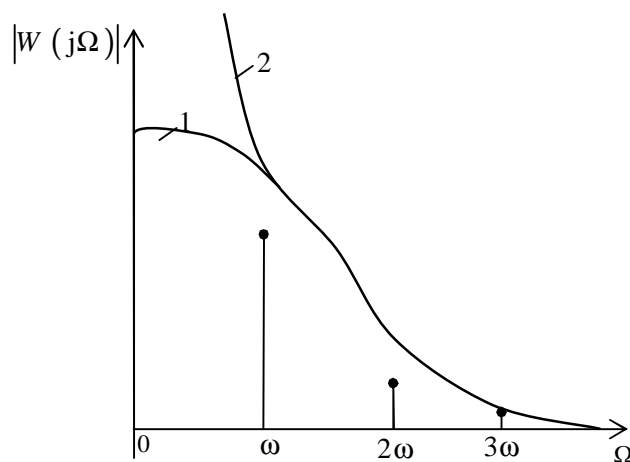


Рис. 2.18

В соответствии с рис. 2.18 линейная система отфильтрует высокочастотные составляющие и на выходе линейной части будет сигнал, близкий к гармоническому $y(t) = a \sin \omega t$. Такое свойство линейной части будем называть свойством фильтра. Таким образом, если линейная часть системы является низкочастотным фильтром (выполняется гипотеза фильтра), то при определенных условиях в замкнутой системе при $v(t) = 0$ сигнал $e(t) = -y(t)$ в установившемся режиме будет гармоническим или достаточно близким к гармоническому:

$$y(t) = a \sin \omega t. \quad (2.41)$$

Выяснение выполнения таких условий и определение амплитуды a и частоты ω гармонического режима, возникающего в замкнутой системе, и составляет суть метода гармонического баланса. Колебания вида (2.41) будем называть симметричными. Они обычно возникают при отсутствии внешнего воздействия ($v(t) = 0$), т.е. являются собственными, и при нечетной нелинейности $f(e) = -f(-e)$. При $v(t) = v = \text{const}$ либо при несимметричных нелинейностях относительно начала координат в разложении (2.39) появляется постоянная составляющая и появляются несимметричные колебания

$$y(t) = y_0 + a \sin \omega t, \quad (2.42)$$

в которых определению подлежат три параметра: y_0 , a , ω .

Рассмотрим связь входа и выхода нелинейного элемента в предположении, что на входе действует сигнал $e(t) = a \sin \omega t$, а на выходе сигнал (2.39) без учета высших гармоник, т.е.

$$u = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t. \quad (2.43)$$

Первоначально будем рассматривать случай симметричных колебаний, т.е. считать $A_0 = 0$. Обозначим $\frac{B_1}{a} = q(a)$, $\frac{A_1}{a} = q'(a)$, тогда

$$u = q(a) a \sin \omega t + q'(a) a \cos \omega t. \quad (2.44)$$

С учетом того, что $a \sin \omega t = e(t)$, $a \cos \omega t = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} e(t) = \frac{1}{\omega} p e(t)$, где $p = \frac{d}{dt}$, получим

$$u = \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] e, \quad (2.45)$$

$$q(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(asin\psi) \sin\psi d\psi, \quad (2.46)$$

$$q'(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(acos\psi) \cos\psi d\psi. \quad (2.47)$$

Выражение (2.45) является уравнением гармонической линеаризации нелинейности, а $q(a)$ (2.46) и $q'(a)$ (2.47) называются коэффициентами гармонической линеаризации.

Из (2.45), приняв $p = s$, находим гармонически линеаризованную передаточную функцию нелинейного элемента:

$$W_H(a, s) = \frac{U(s)}{E(s)} = q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} s, \quad (2.48)$$

а при $s = j\omega$ – амплитудно-фазовую характеристику нелинейного элемента:

$$W_H(a) = q(a) + jq'(a). \quad (2.49)$$

Особенностью (2.48), (2.49) является то, что передаточная функция зависит от амплитуды и частоты входного сигнала, а АЧХ не зависит от частоты, но зависит от амплитуды a . Выражения (2.45), (2.48), (2.49) справедливы только для определенного типа входного сигнала – гармонического $e(t) = asin\omega t$ и при условии отсутствия высших гармоник на выходе нелинейного элемента. Последнее, предположительно, будет выполняться в замкнутой нелинейной САУ при выполнении гипотезы фильтра.

В случае несимметричных колебаний сигнал на выходе нелинейного элемента будет иметь вид

$$e(t) = e_0 + e^*, \quad e^* = asin\omega t,$$

а выражения (2.45), (2.46), (2.47) будут следующими:

$$u = q_0(e_0, a) + \left[q(a, e_0) + \frac{q'(a, e_0)}{\omega} p \right] e^*, \quad (2.50)$$

$$q_0(e_0, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e_0 + asin\psi) d\psi, \quad (2.51)$$

$$q(e_0, a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(e_0 + asin\psi) \sin\psi d\psi, \quad (2.52)$$

$$q'(e_0, a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(e_0 + asin\psi) \cos\psi d\psi. \quad (2.53)$$

2.6.2. Вычисление коэффициентов гармонической линеаризации

Если нелинейная характеристика представлена в виде кусочно-линейной, то получить коэффициенты гармонической линеаризации несложно. Отметим общие свойства этих коэффициентов. Если $f(e)$ является нечетно-симметричной однозначной характеристикой, то всегда $q'(0)$, а (2.46) будет иметь вид

$$q(a) = \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi/2} F(asin\psi) \sin\psi d\psi. \quad (2.54)$$

Для петлевых нечетно-симметричных характеристик можно в интегралах (2.46), (2.47) брать пределы интегрирования от 0 до π и удвоить полученные результаты.

Рассмотрим простейший случай. Пусть $u = f(e) = c \operatorname{sign} e$, т.е. рассматривается идеальное реле. Так как $f(e)$ – однозначная нечетно-симметричная нелинейность, то $q' = 0$, а

$$q(a) = \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi/2} c \sin\psi d\psi = \frac{4c}{\pi a}. \quad (2.55)$$

Для этой же характеристики для случая несимметричных колебаний можно получить

$$q_0(e_0, a) = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{e_0}{a}, \quad q(e_0, a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{e_0}{a}\right)^2}. \quad (2.56)$$

В литературе [6, 7] можно найти аналитические выражения коэффициентов гармонической линеаризации q_0 , q , q' практически для любых видов нелинейностей, а также графики их зависимостей от величины амплитуды a .

2.6.3. Алгебраический метод определения симметричных колебаний

Пусть нелинейная система, изображенная на рис. 2.2, имеет $v(t) = 0$ и передаточную функцию линейной части $W(s) = R(s)/Q(s)$. Полагаем, что выполняется гипотеза фильтра, т.е. АЧХ является фильтром низких частот, а нелинейность – нечетно-симметричной, т.е. $u = f(e) = -f(-e)$. В этом случае имеем следующую модель системы:

$$Q(p)y = R(p)u, \quad u = f(-y) = -f(y), \quad p = \frac{d}{dt}.$$

Уравнение замкнутой системы будет

$$Q(p)y + R(p)f(y) = 0. \quad (2.57)$$

Полагаем, что нелинейное уравнение (2.57) имеет решение $y = a \sin \omega t$, где a , ω следует определить. После гармонической линеаризации

$$f(y) = \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] y,$$

так что с учетом этого уравнение (2.57) будет

$$\left\{ Q(p) + R(p) \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] \right\} y = 0. \quad (2.58)$$

Уравнение (2.58) является гармонически линеаризованным уравнением замкнутой системы. Это линейное дифференциальное уравнение, коэффициенты которого зависят от двух постоянных a и ω – параметров искомого гармонического режима $x = a \sin \omega t$, оно справедливо только для решений подобно типа.

Характеристическое уравнение замкнутой системы будет

$$Q(s) + R(s) \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} s \right] = 0. \quad (2.59)$$

Линейное дифференциальное уравнение имеет гармоническое решение вида $y = a \sin \omega t$ только в том случае, если его характеристическое уравнение содержит пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$, т.е., подставляя в (2.59) $s = j\omega$, получим условие существования гармонического решения

$$Q(j\omega) + R(j\omega) \left[q(a) + jq'(a) \right] = 0. \quad (2.60)$$

Выделяя в (2.60) действительную $X(a, \omega)$ и мнимую $Y(a, \omega)$ части, и приравнявая их к нулю, получим условия существования периодического решения

$$X(a, \omega) = 0, \quad Y(a, \omega) = 0. \quad (2.61)$$

Уравнения (2.61) представляют собой систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными a , ω и могут: а) не иметь решения – периодический режим вида $y = a \sin \omega t$ не существует, б) иметь единственное решение, что соответствует существованию единственного периодического решения с амплитудой a и частотой ω , и, наконец, в) иметь несколько решений (бесчисленное множество).

Полагая периодический режим с найденными амплитудой $a = a^*$ и частотой $\omega = \omega^*$ существующим, рассмотрим вопрос об устойчивости этого режима. Предполагается приближенный способ оценки устойчивости периодического режима. Найдем для функций $X(a, \omega)$ и $Y(a, \omega)$ частные производные по a и ω :

$$A(a, \omega) = \frac{\partial X(a, \omega)}{\partial a}, \quad B(a, \omega) = \frac{\partial X(a, \omega)}{\partial \omega},$$

$$C(a, \omega) = \frac{\partial Y(a, \omega)}{\partial a}, \quad D(a, \omega) = \frac{\partial Y(a, \omega)}{\partial \omega}.$$

В полученных выражениях положим $a = a^*$, $\omega = \omega^*$, тогда получим

$$A^* = A(a^*, \omega^*), \quad B^* = B(a^*, \omega^*), \quad C^* = C(a^*, \omega^*), \quad D^* = D(a^*, \omega^*).$$

Периодический режим с параметрами a^* , ω^* будет устойчивым, если выполняется неравенство

$$A^*D^* - C^*B^* > 0 \quad (2.62)$$

при условии, что для коэффициентов многочлена

$$\frac{Q(s) + R(s) \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} s \right]}{s^2 + \omega^2} \quad (2.63)$$

выполняется условие критерия Гурвица [7].

Если найденный периодический режим устойчив, то в системе существуют автоколебания гармонической формы с параметрами a^* , ω^* ; если неустойчив, то автоколебаний нет, хотя периодический режим существует.

Предложенный подход можно применить и для анализа несимметричных колебаний. При этом вместо системы двух уравнений (2.61) получим систему из трех уравнений для определения параметров a , ω , y_0 .

Пример 2.4. Пусть в нелинейной САУ рис. 2.2 нелинейный элемент – идеальное реле с характеристикой $u(t) = c \operatorname{sign} e$, а передаточная функция линейной части имеет вид

$$W(s) = \frac{k}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}.$$

Для нелинейного элемента имеем $q'(a) = 0$, а $q(a) = 4c/(\pi a)$ (2.55). Уравнение (2.60) имеет вид

$$T_1 T_2 (j\omega)^3 + (T_1 + T_2)(j\omega)^2 + j\omega + \frac{4kc}{\pi a} = 0,$$

из которого получаем уравнения (2.61):

$$\frac{4kc}{\pi a} - (T_1 + T_2)\omega^2 = 0, \quad \omega - T_1 T_2 \omega^3 = 0.$$

Решая полученные уравнения, найдем амплитуду и частоту периодического режима:

$$\omega^* = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}, \quad a^* = \frac{4kc T_1 T_2}{\pi(T_1 + T_2)}.$$

Нетрудно проверить, что для найденных a^* , ω^* условия (2.62), (2.63) выполняются, т.е. в системе возникают автоколебания и

$$y(t) = \frac{4kc T_1 T_2}{\pi_1(T_1 + T_2)} \sin \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} t.$$

2.6.4. Частотный метод определения симметричных колебаний

Передаточная функция разомкнутой нелинейной САУ рис. 2.2 будет $W(s)W_H(a,s)$, где $W_H(a,s)$ имеет вид (2.48), а АФЧХ разомкнутой системы соответственно будет $W(j\omega)W_H(a,j\omega) = W(j\omega)W_H(a)$, где $W_H(a)$ имеет вид (2.49), т.е.

$$W(j\omega)W_H(a,j\omega) = W(j\omega)[q(a) + jq'(a)].$$

Наличие в характеристическом уравнении пары чисто мнимых корней $\pm j\omega$, соответствующих периодическому режиму $y = a \sin \omega t$, в соответствии с критерием устойчивости Найквиста будет иметь место в том случае, если АФЧХ разомкнутой системы в комплексной плоскости пройдет через точку с координатами $(-1, j0)$, т.е. должно выполняться условие

$$W(j\omega)W_H(a) = -1,$$

или

$$W(j\omega) = -\frac{1}{W_H(a)}, \quad (2.64)$$

где $W_H(a) = q(a) + jq'(a)$.

Решение уравнения (2.64), если оно существует, определяет амплитуду a и частоту ω искомого периодического режима. Это уравнение можно решить аналитически, приравняв действительные части левой и правой харак-

теристик и приравняв мнимые части этих характеристик. В случае графического решения на комплексной плоскости наносится АФЧХ линейной части $W(j\omega)$ и обратная амплитудно-фазовая характеристика нелинейности с обратным знаком $-1/W_H(a)$. В точке их пересечения по кривой $W(j\omega)$ находится частота ω^* , а по кривой $-1/W_H(a)$ амплитуда a^* искомого периодического режима, как это изображено на рис. 2.19.

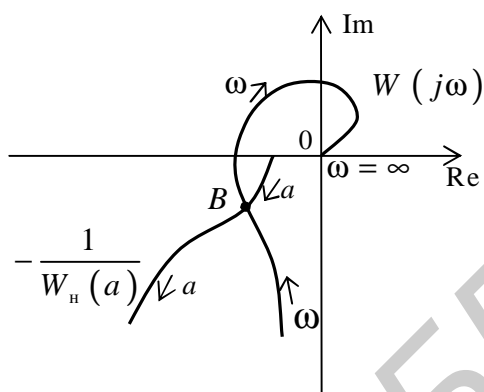


Рис. 2.19

Для определения периодического режима можно воспользоваться логарифмическими характеристиками. Из (2.64) можно получить

$$|W(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{q^2(a) + [q'(a)]^2}},$$

$$\varphi(\omega) = -\pi - \operatorname{arctg} \frac{q'(a)}{q(a)}.$$

Вводя логарифмическую характеристику $L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|$, можно записать

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{q^2(a) + [q'(a)]^2}, \quad (2.65)$$

$$\varphi(\omega) = -\pi - \operatorname{arctg} \frac{q'(a)}{q(a)}. \quad (2.66)$$

Выражения (2.65) и (2.66) называют балансом амплитуд и фаз.

В соответствии с (2.65), (2.66) строятся четыре графика: $L(\omega)$, $\varphi(\omega)$, соответствующие линейной части, и $-20\lg\sqrt{q^2(a)+[q'(a)]^2}$, $-\pi - \arctg\frac{q'(a)}{q(a)}$, соответствующие нелинейному элементу. Частота ω откладывается в логарифмическом масштабе, амплитуда a в обычном. Далее находятся такие a и ω , при которых (2.65), (2.66) выполняются. Наиболее просто a и ω определяются для однозначных нечетно-симметричных нелинейностей, для которых $q'(a) = 0$.

Для определения устойчивости периодического режима, если он существует, можно воспользоваться следующим приближенным правилом [3]: если при движении по кривой $-1/W_H(a)$ в сторону возрастания величины a пересечение кривой $W(j\omega)$ происходит изнутри наружу, то найденный режим устойчив, если наоборот, то неустойчив. На рис. 2.17 показан случай устойчивого периодического режима.

Отметим следующую особенность возникновения периодических режимов, исходя из изложенного метода гармонического баланса. Для нелинейностей, у которых $q'(a) = 0$, характеристика $-1/W_H(a)$ совпадает с отрезком, лежащим на отрицательной полуоси действительной оси. Ввиду этого, если $W(j\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ полностью находится в третьем и четвертом квадрантах комплексной плоскости, т.е. АФЧХ не пересекает отрицательную полуось, то периодические режимы в такой системе невозможны. Например, если передаточная функция линейной части имеет вид

$$W(s) = \frac{(s+a)(s+b)}{(s+d)(s+c)},$$

то при $a, b, c, d \geq 0$ в случае $q'(a) = 0$ периодических режимов в системе не будет.

Пример 2.5. Рассмотрим систему с нелинейностью в виде идеального реле с зоной нечувствительности, для которой

$$f(e) = \begin{cases} c & \text{при } e > b, \\ 0 & \text{при } |e| \leq b, \\ -c & \text{при } e < -b, \end{cases}$$

а передаточная функция нелинейной части имеет вид

$$W(s) = \frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}.$$

Для данного вида нелинейности $q' = 0$, а коэффициент q определяется выражением

$$q = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad a > b.$$

Зависимость $-\frac{1}{W_H(a)} = -\frac{\pi a^2}{4c\sqrt{a^2 - b^2}}$.

На рис. 2.20 изображены графики $W(j\omega)$ и $-1/W_H(a)$. Последняя характеристика имеет две ветви, совпадающие с отрицательным отрезком действительной оси. При изменении a от b до $b\sqrt{2}$ происходит движение изображений точки слева направо по верхней ветви кривой $-1/W_H(a)$, а при $a > b\sqrt{2}$ – вдоль нижней ветви кривой. При $a = b\sqrt{2}$ выполняется соотношение $-1/W_H(a) = -\frac{\pi b}{2c}$.

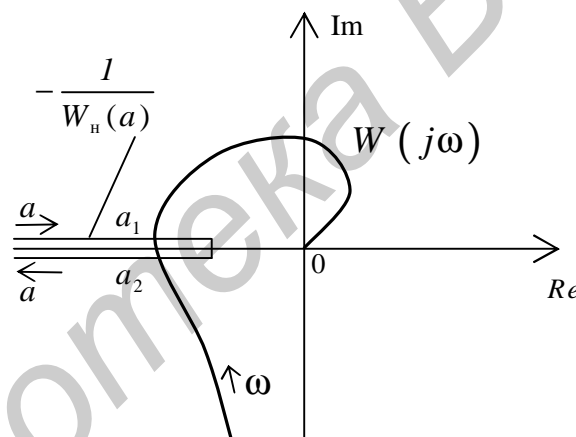


Рис. 2.20

Выражения АЧХ и ФЧХ линейной части системы имеют вид

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{k}{\omega \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1} \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}},$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg T_1 \omega - \arctg T_2 \omega.$$

АФЧХ пересекает отрицательную полуось при $\varphi(\omega) = -\pi$, что дает значение частоты $\omega^* = 1/\sqrt{T_1 T_2}$. При этой частоте модуль АЧХ будет равен

$A(\omega^*) = k \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$. В системе невозможны периодические режимы, если $kT_1 T_2 / (T_1 + T_2) < \pi b / (2c)$, т.е. при

$$k < \frac{\pi b}{2c} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right).$$

Если последнее неравенство не выполняется, то в системе возможны два периодических режима с амплитудами a_1 и a_2 , $a_1 < a_2$, как показано на рис. 2.18. Амплитуды a_1 и a_2 определяются из решения уравнения

$$k \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} = \frac{\pi a^2}{4c \sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Применяя предложенный выше критерий устойчивости периодического режима, приходим к выводу, что режим с частотой ω^* и амплитудой a_2 будет устойчивым, т.е. в системе возникнут автоколебания.

2.6.5. Вынужденные колебания в нелинейных системах

Рассмотрим НСАУ, структурная схема которой приведена на рис. 2.2, в режиме вынужденных движений, когда на вход системы подается сигнал $v(t) = V_m \sin \omega t$. Будем искать решение в виде $e(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$.

Для гармонически линеаризованной системы используем связь изображения ошибки $E(a, s)$ и входного воздействия $V(s)$ через передаточную функцию замкнутой системы по ошибке $\Phi_e(a, s)$. Сделав замену $s = j\omega$ и подставив значения $E(a, j\omega)$ и $V(j\omega)$ в показательной форме, получим

$$ae^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{1}{1 + W_n(a)W(j\omega)} V_m e^{j\omega t}.$$

После очевидных преобразований имеем

$$a[1 + W_n(a)W(j\omega)] = V_m e^{-j\varphi}. \quad (2.67)$$

Здесь e – основание натурального логарифма.

Для определения решений (2.67) в системе координат линейной части системы строится зависимость, соответствующая левой части (2.67) (обозначим ее A) и окружность радиусом V_m с центром в начале координат (рис. 2.21, a). Точка пересечения 1 дает искомые значения a и ω . Колебания будут устойчивы, если при росте V_m возрастает значение a .

В нелинейных системах наличие вынужденных колебаний зависит от величины внешнего воздействия. Если кривая A начинается не в начале координат, то режим в НСАУ зависит от пороговой величины внешнего воздействия V_{mn} (рис. 2.21, б).

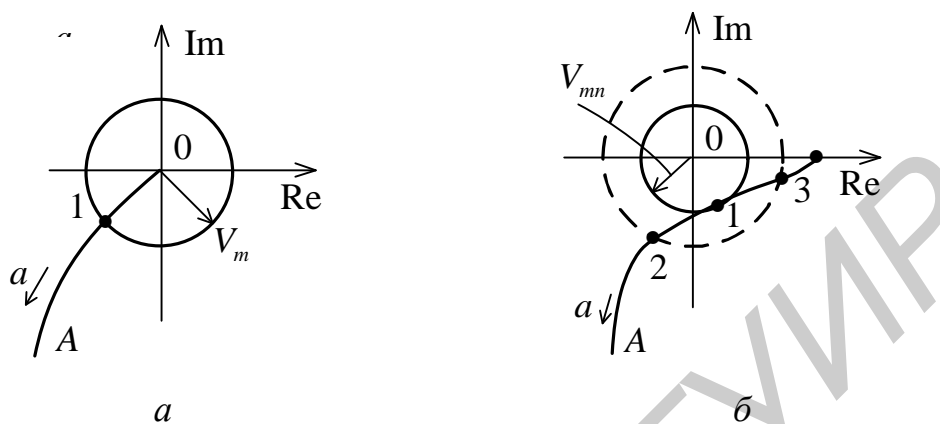


Рис. 2.21

Значение $V_m = V_{mn}$ соответствует точке 1 касания окружности линии A . Пороговая величина V_{mn} является границей раздела движений на колебания (автоколебания), когда $V_m < V_{mn}$, и вынужденные колебания, когда $V_m > V_{mn}$. Они могут быть устойчивыми (точка 2) и неустойчивыми (точка 3).

2.7. Устойчивость процессов в нелинейных системах

2.7.1. Основные понятия и определения

Раздел, посвященный анализу устойчивости систем автоматического управления, является традиционным при изложении курса ТАУ. Объясняется это тем, что системы управления с обратными связями (кибернетические системы) склонны к неустойчивости. Устойчивостью любого явления в природе называют его способность достаточно длительно сохранять те формы своего существования, при утрате которых явление перестает существовать. Применительно к САУ этими явлениями будут протекающие в них процессы.

Основные определения и методы анализа устойчивости были даны в работах крупнейшего российского математика А. М. Ляпунова.

Рассмотрим простейший случай нелинейной системы первого порядка рис. 2.2, которая описывается нелинейным дифференциальным уравнением

$$y^{(1)}(t) = f(y(t), v(t)), \quad (2.68)$$

где $v(t)$ – входное воздействие, $y(t)$ – исследуемая координата.

Пусть при $t = t_0$ задано начальное значение искомого решения $y(t_0) = y^*$ и задано определенное входное воздействие $v^*(t)$ при $t \geq t_0$. В этом случае

уравнение (2.68) имеет определенное решение $y^*(t)$, которое будем называть невозмущенным процессом (решением, движением). Любое другое решение, обусловленное другими начальными условиями $y(t_0) \neq y^*$, при том же воздействии $v^*(t)$ будем называть возмущенным и обозначать $y(t)$. Задача ставится следующим образом: как ведет себя возмущенное движение $y(t)$ относительно невозмущенного $y^*(t)$ с течением времени, т.е. при $t \rightarrow \infty$, или как ведет себя отклонение $x(t) = y(t) - y^*(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Решение этой задачи и составляет предмет математической теории устойчивости.

Анализ поведения решений исходного уравнения можно заменить анализом тривиального решения $x = 0$ уравнения

$$x^{(1)}(t) = F(t, x(t)), \quad (2.69)$$

полученного из (2.68) заменой $y = x + y^*$.

Уравнение (2.68) называется уравнением возмущенного движения в отклонениях. Это уравнение всегда имеет решение $x = 0$.

Рассмотрим общий случай нелинейной системы произвольного порядка, для которой уравнения возмущенного движения в отклонениях имеют вид

$$x_i^{(1)} = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.70)$$

где при $x_i = 0$ функции $F_i(0, \dots, 0) = 0$.

Дадим ряд понятий и определений устойчивости, следуя работам Ляпунова.

Невозмущенное решение $x_i^* = 0$ (положение равновесия) называется устойчивым, если при заданном $\varepsilon > 0$, сколь бы оно мало ни было, существует такое $\delta > 0$, в общем случае зависящее от ε , что при начальных отклонениях $|x_i(t_0)| < \delta, i = 1, \dots, n$ будет выполняться условие $|x_i(t)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n$ при $t_0 \leq t < \infty$.

Невозмущенное решение $x_i^* = 0$ называется неустойчивым, если хотя бы для одного $x_i(t)$ условие $|x_i(t)| < \varepsilon$ не выполняется.

Если решение $x_i^* = 0$ устойчиво и дополнительно при $t \rightarrow \infty$ $x_i(t) \rightarrow 0, i = 1, \dots, n$, то невозмущенное решение $x_i^* = 0$ будем называть асимптотически устойчивым.

Если положение равновесия асимптотически устойчиво при любых начальных отклонениях $x_i(t_0)$, т.е. $\delta = \infty$, то говорят об устойчивости в целом. Если известна величина $\delta < \infty$, то говорят об устойчивости в большом или об устойчивости в области. Если известно, что величина δ существует и может быть сколь угодно малой, то говорят об устойчивости в малом.

Наконец, если положение равновесия асимптотически устойчиво в целом при любых нелинейных функциях $F_i(x_1, \dots, x_n)$ из заданного класса, то говорят об абсолютной устойчивости нелинейной системы (2.70).

Отметим, что в случае линейной системы положение равновесия устойчиво (асимптотически устойчиво) при любых отклонениях, т.е. устойчиво в целом. Кроме этого, следует помнить, что устойчивость линейных систем не зависит от характера внешних воздействий, т.е. в этом плане устойчивость (неустойчивость) линейных систем является ее внутренним свойством.

2.7.2. Теоремы Ляпунова

Кроме определений Ляпуновым были разработаны два метода анализа устойчивости решений дифференциальных уравнений.

Суть первого метода заключается в замене нелинейной системы (2.70) линейной (линеаризованной) путем разложения правых частей уравнений (2.70) в ряды Тейлора относительно начала координат $x_i = 0$ и отбрасывания всех нелинейных членов. В результате получаются линейные уравнения (уравнения первого приближения)

$$x_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i=1, \dots, n, \quad (2.71)$$

где a_{ij} – постоянные коэффициенты.

Ляпуновым доказана следующая основная теорема первого метода, которую приведем в упрощенной форме: если линейная система (2.71) асимптотически устойчива, то положение равновесия нелинейной системы (2.70) будет асимптотически устойчивым в малом, если система (2.71) неустойчива, то положение равновесия (2.70) будет неустойчивым.

По первому методу, исключая так называемые критические случаи, задача анализа устойчивости нелинейной системы сведена к более простой задаче анализа линейной системы. Первый метод Ляпунова не позволяет исследовать устойчивость в большом, целом или абсолютную устойчивость. Для этих целей Ляпуновым был разработан второй метод, или прямой метод анализа устойчивости.

Введем в рассмотрение непрерывную функцию $V(x_1, \dots, x_n)$ n переменных, такую, что $V = 0$ при $x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, т.е. обращающуюся обязательно в ноль в начале координат.

Если в некоторой области переменных x_i функция $V > 0$ или $V < 0$, то ее называют знакоопределенной: соответственно положительно определенной или отрицательно определенной. Если функция $V(x_1, \dots, x_n)$ сохраняет свой знак, но может обращаться в ноль не только в начале координат, то ее

называют знакопостоянной (положительной или отрицательной). Такие функции в дальнейшем будем называть функциями Ляпунова. Примеры функций: $V(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2$ – положительно определенная; $V(x) = -x_1^2 - x_2^2$ – отрицательно определенная; $V(x) = (x_1 + x_2)^2 + 4x_3^2$ – знакопостоянная функция (положительная).

Наконец, функция V называется знакопеременной, если в рассматриваемой области она меняет свой знак. Например, $V(x) = x_1 + x_2$.

Приведем три основные теоремы Ляпунова второго метода.

1. Если для системы уравнений (2.70) существует знакоопределенная функция $V(x_1, \dots, x_n)$, производная которой $dV/dt = W(x_1, \dots, x_n)$ является знакопостоянной противоположного знака, то решение $x_i = 0$ устойчиво.

2. Если в предыдущем случае производная $W(x_1, \dots, x_n)$ будет знакоопределенной, но противоположного знака, то решение $x_i = 0$ будет устойчивым асимптотически.

3. Если для системы уравнений (2.70) существует функция $V(x_1, \dots, x_n)$, производная которой $dV/dt = W(x_1, \dots, x_n)$ является знакоопределенной функцией, причем в любой сколь угодно малой окрестности начала координат имеется область, в которой знаки V и W совпадают, то решение $x_i = 0$ системы (2.70) неустойчиво.

Отметим, что приведенные в теоремах условия являются только лишь достаточными и эффективность их будет зависеть от выбранной функции Ляпунова V . Не существует в общем случае методик выбора функций Ляпунова, дающих необходимые и достаточные условия.

Довольно часто в качестве функций Ляпунова применяют квадратичные формы, для которых, используя известные критерии, можно сравнительно легко определять знак.

2.7.3. Абсолютная устойчивость

Рассмотрим понятие абсолютной устойчивости применительно к структуре нелинейной системы рис. 2.2.

Уравнения, описывающие поведение системы при $\nu = 0$, имеют в соответствии с (2.8) вид

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= Ax(t) + Bf(e(t)), \\ y(t) &= Cx(t), \quad e(t) = -y(t). \end{aligned} \tag{2.72}$$

Будем полагать, что $f(0) = 0$, тогда уравнения имеют тривиальное решение $e = 0$, $u = 0$, $y = 0$, т.е. в системе существует положение равновесия, устойчивость которого будем исследовать.

Если положение равновесия системы (2.72) асимптотически устойчиво в целом при любом виде функции $f(\mathbf{g})$ из заданного класса, то САУ называется абсолютно устойчивой в этом классе.

Будем рассматривать класс функций $f(\mathbf{g})$, удовлетворяющих секторным ограничениям, т.е. с характеристикой $u = f(e)$, построенной на плоскости (e, u) , которая полностью укладывается в угловом секторе, образованном двумя прямыми $u = k_1 e$ и $u = k_2 e$, $k_2 > k_1$.

Итак, рассматривается класс нелинейных функций, удовлетворяющих условиям

$$k_1 \leq \frac{f(e)}{e} \leq k_2 \text{ для } e \neq 0, f(0) = 0. \quad (2.73)$$

При этом вид функции $f(e)$ неизвестен, а нелинейность будет относиться к классу (k_1, k_2) . Возможны также дополнительные ограничения, например, функция $f(e)$ должна быть непрерывной или другие.

Из класса (2.73) выделяют два подкласса: $k_1 = 0$ и $k_1 = 0, k_2 = \infty$.

Анализ абсолютной устойчивости возможен с помощью функций Ляпунова, а также частотных критериев абсолютной устойчивости. Рассмотрим последние как наиболее практичные.

Круговой критерий устойчивости

Для нелинейностей из класса (k_1, k_2) достаточным условием абсолютной устойчивости является выполнение неравенства

$$1 + (k_1 + k_2)P(\omega) + k_1 k_2 (P^2(\omega) + Q^2(\omega)) \geq 0, \quad (2.74)$$

где $P(\omega) = \operatorname{Re}W(j\omega)$, $Q(\omega) = \operatorname{Im}W(j\omega)$, $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ – АФЧХ линейной части системы (см. рис. 2.2).

Неравенство (2.74) определяет область на комплексной плоскости, в которой должна лежать АФЧХ линейной части системы, чтобы нелинейная система была абсолютно устойчива.

Заменяя в (2.74) знак неравенства на знак равенства, получим границу этой области. Это будет уравнение окружности с центром на вещественной оси в точке $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$ и проходящей через точки $-1/k_1$ и $-1/k_2$ на оси P .

Неравенство (2.74) требует, чтобы АФЧХ при всех ω располагалась вне круга, ограниченного этой окружностью. На рис. 2.22 приведены запретные области (заштрихованные) для характеристики $f(e)$ и характеристики $W(j\omega)$.

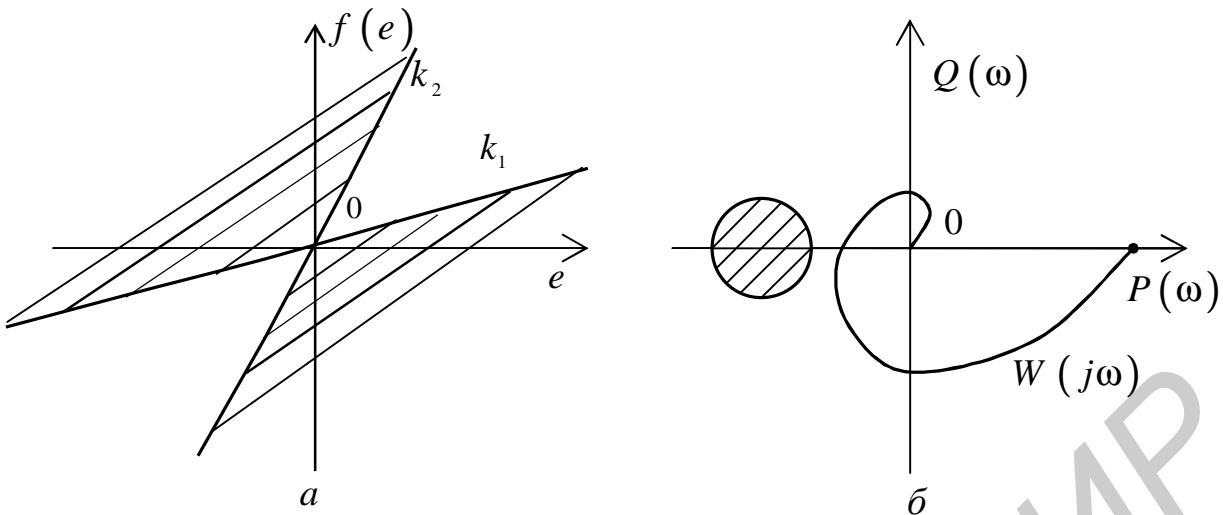


Рис. 2.22

В [4] даются более подробные случаи для разных классов (k_1, k_2) .

Вторым распространенным частотным критерием является критерий В. М. Попова. Рассмотрим его формулировку для класса нелинейных характеристик $(0, k_2)$: система будет абсолютно устойчивой для нелинейностей из класса $(0, k_2)$, если через точку $-1/k_2$ можно провести прямую так, что она не пересечет модифицированную частотную характеристику (последняя лежит справа от прямой).

В этом критерии под модифицированной частотной характеристикой понимается характеристика $W_M(j\omega) = P_M(\omega) + jQ_M(\omega)$, где $P_M(\omega) = P(\omega)$, $Q_M(\omega) = \omega Q(\omega)$.

Рис. 2.23, а удовлетворяет критерию абсолютно устойчивой системы, а рис. 2.23, б при заданном k_2 не удовлетворяет этому критерию.

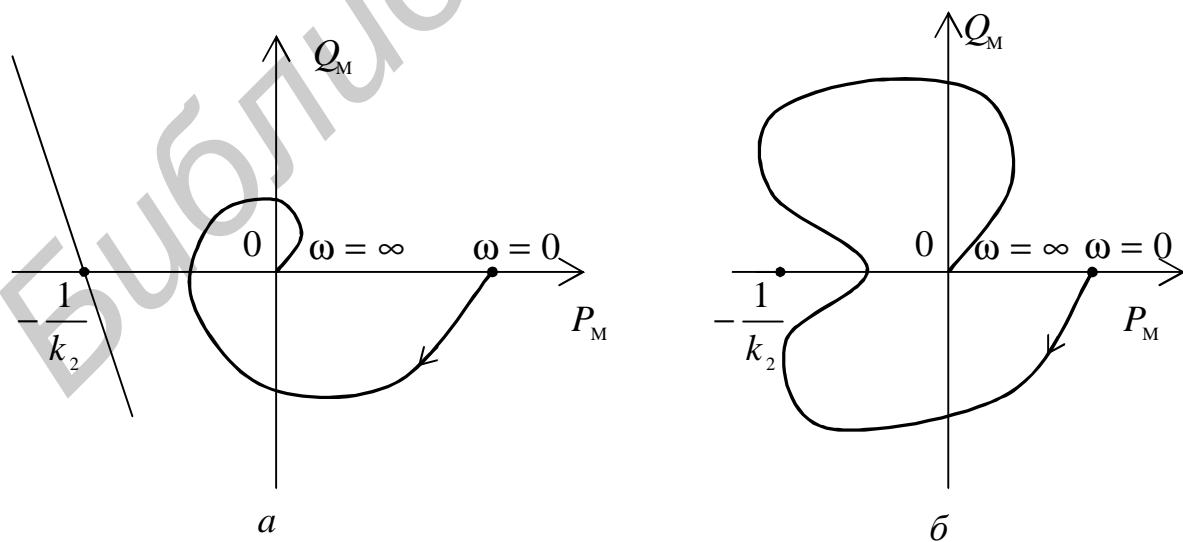


Рис. 2.23

В заключение отметим, что все критерии абсолютной устойчивости, в том числе частотные, дают только лишь достаточные условия абсолютной устойчивости.

2.8. Коррекция нелинейных систем

При синтезе нелинейных систем кроме классической задачи коррекции САУ по точности, устойчивости, качеству решаются специфические задачи: подавление автоколебаний или организация колебаний с определенными значениями амплитуды и частоты. При этом применяются цепи обратной связи, вибрационное сглаживание, другие методы.

2.8.1. Коррекция нелинейной системы с помощью обратной связи

Рассмотрим метод подавления автоколебаний, основанный на введении обратной связи, охватывающей нелинейный элемент и часть линейной системы (рис. 2.24). Предполагается, что НЭ относится к статическому типу.

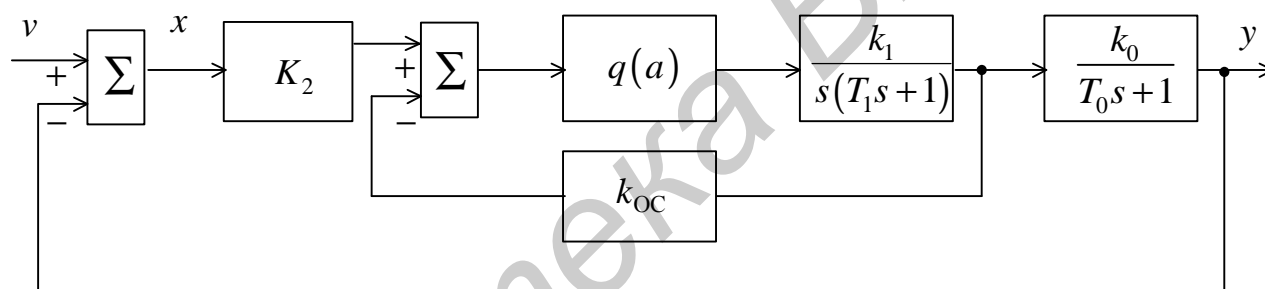


Рис. 2.24

Запишем характеристическое уравнение гармонически линеаризованной замкнутой системы:

$$T_0 T_1 s^3 + (T_0 + T_1) s^2 + (1 + T_0 q(a) k_1 k_{OC}) s + q(a) k_1 (k_{OC} + k_2 k_0) = 0, \quad (2.75)$$

где $q(a)$ – гармонически линеаризованный коэффициент усиления нелинейного элемента.

В соответствии с критерием устойчивости Гурвица система третьего порядка будет находиться на границе устойчивости при условии

$$(T_0 + T_1)(1 + T_0 q(a) k_1 k_{OC}) = T_0 T_1 q(a) k_1 (k_{OC} + k_2 k_0). \quad (2.76)$$

По данному выражению можно построить границу устойчивости системы в области интересующих параметров, задаваясь максимальным значением характеристики нелинейного элемента. Например, для идеального двухпози-

ционного реле $q(a)_{\max} = \frac{4c}{\pi a}$, и тогда максимальное значение k_{OC}^* , соответствующее границе устойчивости НСАУ, войдет в соотношения:

$$k_1 = \frac{\pi a (T_0 + T_1)}{4c T_0 (T_1 k_2 k_0 - T_0 k_{\text{OC}}^*)}, \quad k_{\text{OC}}^* = k_2 k_0 \frac{T_1}{T_0}. \quad (2.77)$$

Из (2.77) при известных значениях, например, k_0, k_1, T_0 и T_1 находятся предельные значения k_{OC}^* и k_2^* . Для обеспечения устойчивости НСАУ значения k_{OC} и k_2 должны быть выбраны так, чтобы они попали в область, соответствующую отсутствию автоколебаний.

2.8.2. Коррекция нелинейной системы с помощью вибрационного сглаживания

Вибрационное сглаживание (вибрационная линеаризация) применяется для подавления автоколебаний и устранения влияния нелинейностей типа люфт, зона насыщения, реле и др.

Пусть на вход НЭ (рис. 2.25) подан дополнительный сигнал $x(t) = x_0(t) + a \sin \omega t$, причем медленно меняющаяся составляющая $x_0(t)$ удовлетворяет условию $x_0\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) - x_0(t) = x_0(t)$, а частота ω находится за полосой пропускания линейного звена $K_{\text{Л2}}(s)$.

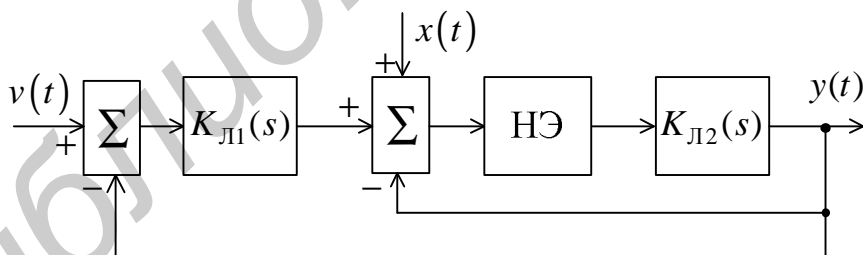


Рис. 2.25

Сигнал на выходе НЭ содержит две составляющие

$$F(x) = F^o(a, x_0) + \left[q(a, x_0) + \frac{q'(a, x_0)}{\omega} p \right] x, \quad (2.78)$$

где постоянная составляющая (функция смещения), например, для идеально-го двухпозиционного реле

$$F^o(a, x_0) = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x_0}{a}. \quad (2.79)$$

Зависимость (2.79) имеет вид, приведенный на рис. 2.26. При малых значениях x_0 – это линейная зависимость $F^o(x_0) \approx K_n x_0$, где $K_n = \operatorname{tg} \alpha$.

Для указанного НЭ

$$q(a, x_0) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}, \quad q'(a, x_0) = 0.$$

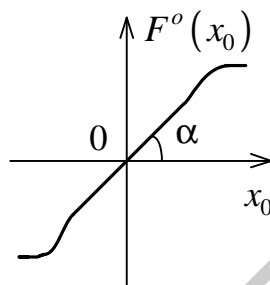


Рис. 2.26

Однако в силу принятых допущений $K_{Л2}(s)$ не пропускает гармонику, т.е. колебания локализируются во внутреннем контуре. Так осуществляется вибрационное сглаживание.

При этом частота дополнительного сигнала, как отмечалось ранее, ω ? $\omega_{п.л2}$, где $\omega_{п.л2}$ – полоса пропускания линейного звена $K_{Л2}(s)$, а амплитуда a должна выбираться из условия $\arcsin \frac{x_0}{a} \approx \frac{x_0}{a}$. Дополнительный сигнал

вводят, применяя специальный генератор синусоидальных колебаний, либо организуя собственные колебания путем введения местной гибкой отрицательной обратной связи.

В зависимости от структуры системы и типа нелинейных элементов применяются и другие способы построения регуляторов.

3. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

3.1. Случайные процессы и их характеристики

Прежде чем дать определение случайного процесса, напомним основные понятия из теории случайных величин. Как известно, случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, заранее неизвестное. Различают дискретные и непрерывные случайные величины. Основной характеристикой случайной величины является закон распределения, который может быть задан в виде графика или в аналитической форме. При интегральном законе распределения функция распределения $F(x) = P(x_i < x)$, где $P(x_i < x)$ – вероятность того, что текущее значение случайной величины x_i меньше некоторого значения x . При дифференциальном законе распределения используют плотность вероятности

$w(x) = \frac{dF(x)}{dx}$. Численными характеристиками случайных величин являются

так называемые моменты, из которых наиболее употребительны момент первого порядка – среднее значение (математическое ожидание) случайной величины и центральный момент второго порядка – дисперсия. В случае, если имеется несколько случайных величин (система случайных величин), вводится понятие корреляционного момента.

Обобщением понятия случайной величины является понятие случайной функции, т.е. функции, которая в результате опыта может принять тот или иной вид, неизвестный заранее. Если аргументом функции является время t , то её называют случайным или стохастическим процессом.

Конкретный вид случайного процесса, полученный в результате опыта, называется реализацией случайного процесса и является обычной неслучайной (детерминированной) функцией. С другой стороны, в фиксированный момент времени имеем так называемое сечение случайного процесса в виде случайной величины.

Для описания случайных процессов обобщаются естественным образом понятия теории случайных величин. Для некоторого фиксированного момента времени t_1 случайный процесс $x(t)$ превращается в случайную величину $x_1(t_1)$, для которой можно ввести функцию $w(x_1, t_1)$, называемую одномерным законом распределения случайного процесса $x(t)$. Одномерный закон распределения $w(x, t)$ не является исчерпывающей характеристикой случайного процесса. Он, например, не характеризует корреляцию (связь) между отдельными сечениями случайного процесса. Если взять два разных момента времени t_1 и t_2 , можно ввести двумерный закон распределения $w(x_1, x_2, t_1, t_2)$ и т.д. В пределах нашего дальнейшего рассмотрения будем ограничиваться в основном одномерным и двумерным законами.

Рассмотрим простейшие характеристики случайного процесса, аналогичные числовым характеристикам случайной величины. Математическое ожидание или среднее по множеству

$$\bar{x}(t) = M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x,t)dx \quad (3.1)$$

и дисперсию

$$D(t) = D[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x}(t))^2 w(x,t) dx. \quad (3.2)$$

Математическое ожидание $\bar{x}(t)$ – это некоторая средняя кривая, вокруг которой группируются отдельные реализации случайного процесса, а дисперсия $D(t)$ характеризует в каждый момент времени разброс возможных реализаций. Иногда используется среднеквадратичное отклонение $\sigma(t) = \sqrt{D(t)}$.

Для характеристики внутренней структуры случайного процесса вводится понятие корреляционной (автокорреляционной) функции

$$R(t, t_1) = M[x(t)x(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t_1)w(x, x_1, t, t_1) dx dx_1. \quad (3.3)$$

Наряду с математическим ожиданием (среднее по множеству) (3.1) вводится ещё одна характеристика случайного процесса – среднее значение случайного процесса для отдельной реализации (среднее по времени):

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (3.4)$$

Для двух случайных процессов можно также ввести понятие взаимной корреляционной функции по аналогии с (3.3).

Одним из частных случаев случайного процесса, находящих широкое применение на практике, является стационарный случайный процесс – это случайный процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. Итак, для стационарного случайного процесса $\bar{x} = \text{const}$, $D = \text{const}$, а корреляционная функция $R(t, t_1)$ зависит от разности $t_1 - t = \tau$, т.е. является функцией одного аргумента $R(\tau)$.

Стационарный случайный процесс в какой-то мере аналогичен установившимся процессам в системах управления.

Стационарные случайные процессы обладают интересным свойством, которое называется эргодической гипотезой. Для стационарного случайного процесса всякое среднее по множеству равно среднему по времени. В част-

ности, например, $\overset{\circ}{x} = \bar{x}$. Это свойство позволяет часто упростить физическое и математическое моделирование систем при случайных воздействиях.

Как известно, при анализе детерминированных сигналов широкое применение находят их спектральные характеристики на базе ряда или интеграла Фурье. Аналогичное понятие можно ввести и для случайных стационарных процессов. Отличие будет заключаться в том, что для случайного процесса амплитуды гармонических составляющих будут случайными, а спектр стационарного случайного процесса будет описывать распределение дисперсий по различным частотам.

Спектральная плотность $S(\omega)$ стационарного случайного процесса связана с его корреляционной функцией $R(\tau)$ преобразованиями Фурье [6]:

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (3.5)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (3.6)$$

где корреляционную функцию $R(\tau)$ будем трактовать как оригинал, а $S(\omega)$ – как изображение.

Существуют таблицы, связывающие оригиналы и изображения [6]. Например, если $R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, то $S(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$.

Отметим связь спектральной плотности и корреляционной функции с дисперсией D :

$$D = R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (3.7)$$

В заключение рассмотрим свойства «белого шума». Под белым шумом понимают случайный процесс, спектральная плотность которого постоянна при всех частотах от $-\infty$ до $+\infty$, т.е. $S(\omega) = N$ (рис. 3.1, а).

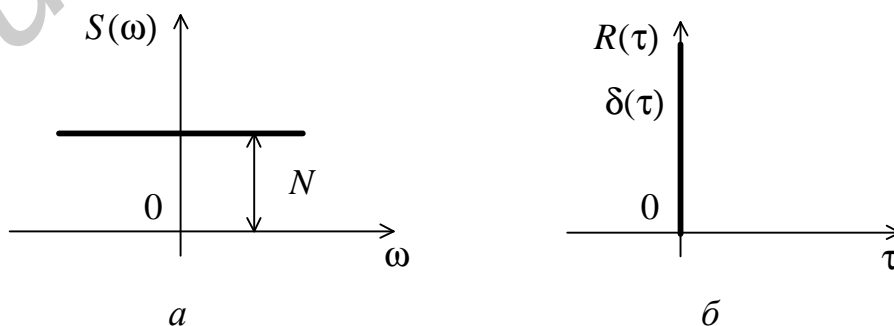


Рис. 3.1

Корреляционная функция в соответствии с (3.6)

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} N \cos \omega \tau d\omega = N\delta(\tau). \quad (3.8)$$

График $R(\tau)$ приведен на рис. 3.1, б.

Пример 3.1. Для стационарного случайного процесса со свойствами белого шума в ограниченной полосе частот от $-\omega_n$ до $+\omega_n$ (рис. 3.2, а) определить дисперсию и корреляционную функцию.

На основании (3.7) $D = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_n}^{+\omega_n} N \frac{2\omega_n}{2\pi} = \frac{\omega_n}{\pi}$.

Корреляционная функция в силу (3.6) $R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_n} N \cos \omega \tau d\omega = \frac{N}{\pi \tau} \sin \omega_n \tau$.

Её график изображён на рис. 3.2, б.

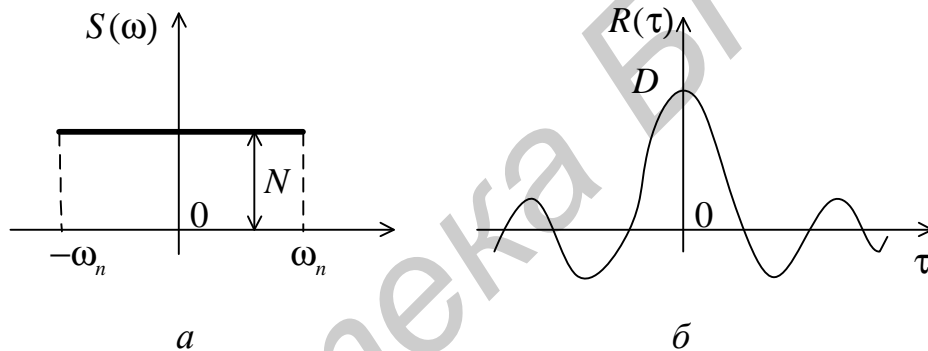


Рис. 3.2

В [4] приводятся графики зависимостей $R(\tau)$ и $S(\omega)$ для различных реализаций случайных процессов.

3.2. Прохождение случайных сигналов через линейную непрерывную систему автоматического управления

При анализе САУ со случайными воздействиями необходимо оценить изменения характеристик случайных процессов при прохождении случайных сигналов через динамическую систему. Рассмотрим эту задачу в простейшем варианте, когда имеется сигнал $x_1(t)$ на входе системы (звена), $x_2(t)$ – на её выходе, а сама система описывается передаточной функцией $W(s)$, т.е. является линейной. Будем полагать, что на входе системы действуют стационарные случайные сигналы с известными характеристиками: математическим ожиданием $\overset{\circ}{x}_1$, дисперсией D_1 , корреляционной функцией $R_1(\tau)$ и спектральной плотностью $S_1(\omega)$.

Далее предположим, что после затухания переходных процессов на выходе системы имеем установившиеся процессы (это предполагает асимптотически устойчивую систему), т.е. процесс на выходе будем считать стационарным случайным процессом. В этом случае основные характеристики стационарного случайного сигнала $x_2(t)$ на выходе могут быть вычислены по формулам

$$\dot{x}_2 = W(0)\dot{x}_1, \quad (3.9)$$

$$S_2(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_1(\omega), \quad (3.10)$$

$$R_2(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_2(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (3.11)$$

$$D_2 = R_2(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(\omega) d\omega, \quad (3.12)$$

где $|W(j\omega)|$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), получаемая из $W(s)$ при $s = j\omega$.

Для вычисления дисперсии D_2 по выражению (3.12) разработаны специальные методы и таблицы.

Отметим два важных частных случая, когда $W(s)$ является передаточной функцией идеального дифференцирующего звена i -го порядка $W(s) = s^i$ или идеального интегрирующего звена i -го порядка $W(s) = \frac{1}{s^i}$, тогда для первого случая $S_2(\omega) = \omega^{2i} S_1(\omega)$, а для второго $S_2(\omega) = \frac{S_1(\omega)}{\omega^{2i}}$.

Рассмотрим анализ замкнутых линейных систем автоматического управления, стандартная структура для которых имеет вид, представленный на рис. 3.3.

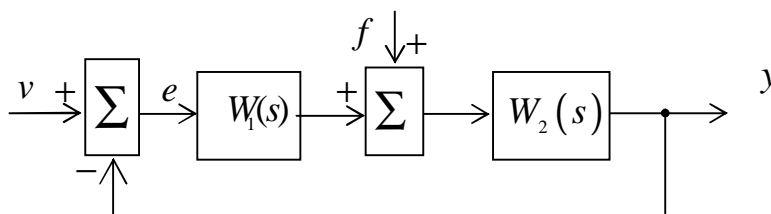


Рис. 3.3

Переменные e , v и f в области изображений связаны соотношениями

$$Y(s) = \Phi(s)V(s) + \Phi_f(s)F(s), \quad (3.13)$$

$$E(s) = \Phi_e(s)V(s) - \Phi_f(s)F(s), \quad (3.14)$$

где главная передаточная функция замкнутой системы $\Phi(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)}$;

передаточная функция замкнутой систем по возмущению $\Phi_f(s) = \frac{W_2(s)}{1+W(s)}$;

передаточная функция замкнутой системы по ошибке $\Phi_e(s) = \frac{1}{1+W(s)}$;

передаточная функция разомкнутой системы $W(s) = W_1(s)W_2(s)$.

По передаточным функциям несложно найти АЧХ как $|\Phi(j\omega)|$, $|\Phi_f(j\omega)|$ и $|\Phi_e(j\omega)|$. Полагая входной сигнал v и возмущение f случайными стационарными процессами и задавая их характеристики $\overset{\circ}{v}$, $S_v(\omega)$, $R_v(\tau)$, D_v , $\overset{\circ}{f}$, $S_f(\omega)$, $R_f(\omega)$, D_f , по формулам (3.9) – (3.12) можно получить характеристики случайных сигналов $y(t)$ и $e(t)$. При этом следует различать два случая, когда случайные сигналы $v(t)$ и $f(t)$ не коррелированы между собой и когда они коррелированы.

Если случайные сигналы некоррелированные, то, например, для первого соотношения (3.13) получим

$$\overset{\circ}{y} = \Phi(0)\overset{\circ}{v} + \Phi_f(0)\overset{\circ}{f}, \quad (3.15)$$

$$S_y(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 S_v(\omega) + |\Phi_f(j\omega)|^2 S_f(\omega), \quad (3.16)$$

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 S_v(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_f(j\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega. \quad (3.17)$$

Аналогично можно получить характеристики случайного сигнала ошибки $e(t)$.

В случае коррелированных случайных сигналов $v(t)$ и $f(t)$ следует дополнительно знать их взаимные корреляционные функции $R_{vf}(\tau)$ и $R_{fv}(\tau)$, а также взаимные спектральные плотности $S_{vf}(\omega)$ и $S_{fv}(\omega)$. При этом, например, в (3.17) появятся ещё два слагаемых, соответствующих спектральным плотностям $S_{vf}(\omega)$ и $S_{fv}(\omega)$ [6].

Приведенное выше касается вопросов анализа САУ, т.е. определения характеристик случайных процессов в самой системе при заданных структуре системы (рис. 3.3), передаточных функциях $W_1(s)$, $W_2(s)$ и характери-

ках случайных сигналов $v(t)$ и $y(t)$. Теоретически эта задача решается с использованием изложенных аналитических методов.

3.3. Расчёт точности системы при случайных воздействиях

Рассмотрим расчёт среднеквадратичной ошибки на примере системы, структурная схема которой имеет вид, изображённый на рис. 3.4.

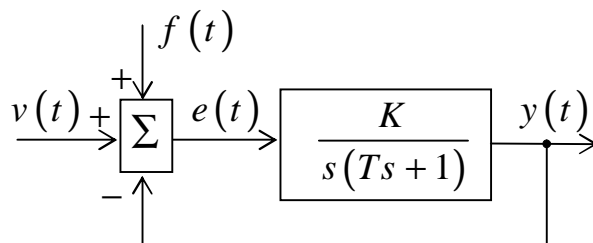


Рис. 3.4

Пусть на вход системы поступают регулярный сигнал $v(t) = 1 + t$ и помеха $f(t)$ типа «белый шум» со спектральной плотностью $S_f(\omega) = N = 0,01 \frac{\text{В}^2}{\text{Гц}}$. Параметры передаточной функции: $K = 10 \text{ 1/с}$, $T = 0,1 \text{ с}$.

Необходимо определить среднеквадратичную ошибку. Средний квадрат ошибки $\overline{e^2} = e_p^2 + \overline{e_c^2}$, где e_p^2 – квадрат регулярной составляющей ошибки, а $\overline{e_c^2}$ – средний квадрат случайной составляющей ошибки.

Составляющая e_p находится по известной формуле $e_p = c_0 v(t) + c_1 v^{(1)}(t) + \frac{c_2}{2!} v^{(2)}(t) + \dots$

Коэффициенты ошибок c_i определяются при разложении в ряд Маклорена передаточной функции системы по ошибке $\Phi_e(s) = \frac{1}{1 + W(s)}$. В нашем

$$\text{случае } \Phi_e(s) = \frac{s + Ts^2}{Ts^2 + s + K} = \frac{1}{K} s + \frac{KT - 1}{K^2} s^2 + \dots = c_0 + c_1 s + \frac{c_2}{2!} s^2 + \dots$$

Так как $v(t) = 1 + t$, то надо вычислить лишь первую производную $v^{(1)}(t) = 1$.

Следовательно, $e_p = 0 \cdot v(t) + \frac{1}{K} v^{(1)}(t) + 0 \cdot v^{(2)}(t)$. При учёте численных значений $e_p \pm = 0,1 \text{ В}$, а $e_p^2 = 0,01 \text{ В}^2$.

Определим среднее значение квадрата случайной составляющей $\overline{e_c^2}$. Как показано в [4],

$$\overline{e_c^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega. \quad (3.18)$$

Для преодоления трудностей при вычислении интеграла (3.18) его представляют в виде

$$J_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|B(j\omega)|^2}{|H(j\omega)|^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(j\omega)}{H(j\omega)H(-j\omega)} d\omega, \quad (3.19)$$

где $M(j\omega) = b_0(j\omega)^{2(n-1)} + b_1(j\omega)^{2(n-2)} + \dots + b_{n-1}$;

$H(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n$.

Формулы для вычисления интегралов по коэффициентам a_i и b_i для соответствующих значений n сведены в таблицы. Приведём их для n от 1 до 3 [6]:

$$n=1; \quad J_1 = b_0 / (2a_0a_1);$$

$$n=2; \quad J_2 = \left(-b_0 + \frac{a_0b_1}{a_2} \right) / (2a_0a_1);$$

$$n=3; \quad J_3 = \left(-a_2b_0 + a_0b_1 - \frac{a_0a_1b_2}{a_3} \right) / [2a_0(a_0a_3 - a_1a_2)].$$

В нашем случае $\overline{e_c^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K^2 N}{|T(j\omega)^2 + j\omega + K|^2} d\omega; \quad M(j\omega) = K^2 N;$

$H(j\omega) = T(j\omega)^2 + j\omega + K$. Коэффициенты: $a_0 = T, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = K, \quad b_0 = 0,$

$b_1 = K^2 N$. Интеграл $J_2 = \left(-0 + \frac{TK^2N}{K} \right) / (2T) = \frac{KN}{2} = \frac{10 \cdot 0,01}{2} = 0,05 \text{ В}^2$.

Среднеквадратичная ошибка $e_{\text{ско}} = \sqrt{\overline{e_c^2}}$. С учётом численных значений $e_{\text{ско}} = \sqrt{0,01 + 0,05} = 0,245 \text{ В}$.

3.4. Особенности синтеза систем автоматического управления

При синтезе систем со случайными воздействиями решается задача определения динамических характеристик системы, наилучшим образом обеспечивающих выполнение определённого статистического критерия оптимальности. Наиболее часто применяется критерий минимума среднеквадратичной ошибки системы. В простейшем случае, когда на систему воздейст-

вуют некоррелированные стационарные полезный сигнал $v(t)$ и помеха $f(t)$, среднее значение квадрата ошибки $\overline{e^2} = \overline{e_v^2} + \overline{e_f^2}$.

Графики зависимости составляющих ошибки от коэффициента передачи разомкнутой системы (см. рис. 3.3) могут иметь вид, изображенный на рис. 3.5 [4].

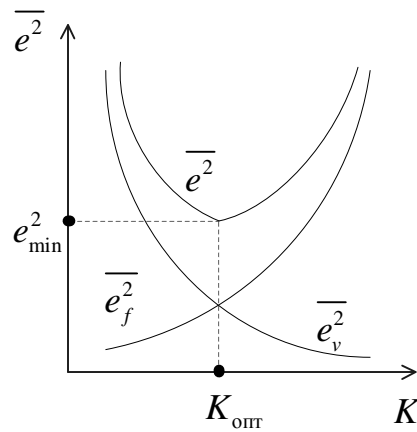


Рис. 3.5

Этот рисунок показывает, что ошибка системы по входному воздействию уменьшается с увеличением K , но при этом растет ошибка по возмущению. Поэтому при одновременном воздействии на систему полезного сигнала и помехи необходимо находить оптимальное значение параметра, например $K_{\text{опт}}$, доставляющего ошибке минимальное значение $\overline{e_{\text{мин}}^2}$.

При синтезе САУ возможны два вида задач: синтез при заданной структуре системы и синтез при произвольной структуре системы.

При решении первой задачи задаются структура системы, её передаточная функция, статистические характеристики полезного сигнала и помехи. Находятся оптимальные параметры регулятора (коэффициент передачи, постоянные времени), при которых обеспечивается минимум среднеквадратичной ошибки.

Задача решается так: находится средний квадрат ошибки $\overline{e^2}$, аналогично рассмотренному в подразд. 3.3; далее дифференцируют $\overline{e^2}$ по l интересующим параметрам и приравнивают нулю эти частные производные; решая систему из l уравнений, находят оптимальные значения этих параметров.

$$\text{Для рассмотренного примера } e_{\text{ско}}^2 = e_p^2 + \overline{e_c^2} = \frac{1}{K^2} + \frac{KN}{2} = \frac{2 + K^3N}{2K^2};$$

$$\frac{de_{\text{ско}}^2}{dK} = \frac{K^3N - 4}{4K^3} = 0; K_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{4}{N}} = \sqrt[3]{400} \approx 7,4; e_{\text{ско}_{\text{мин}}}^2 = \frac{2 + 7,4^3 \cdot 0,01}{2 \cdot 7,4^2} = 0,055;$$

$$e_{\text{ско}_{\text{мин}}} = \sqrt{0,055} = 0,235 \text{ В.}$$

В случае синтеза САУ при её произвольной структуре чаще всего рассматривают приложение воздействий к одной точке (рис. 3.6) [4].

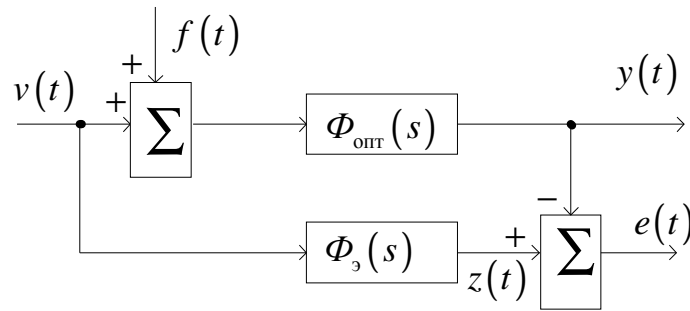


Рис. 3.6

На этой схеме $\Phi_3(s)$ – передаточная функция эталонной модели, $\Phi_{\text{опт}}(s)$ – искомая передаточная функция замкнутой системы, обеспечивающая минимум среднему значению квадрата суммарной ошибки $e(t)$:

$$\overline{e^2} = \overline{\{z(t) - y(t)\}^2} = \min.$$

При этом заданными считаются $\Phi_3(s)$, статистические характеристики полезного сигнала $v(t)$ и помехи $f(t)$.

Как показано в [4],

$$\Phi_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{S_v(\omega)}{S_v(\omega) + S_f(\omega)} \Phi_3(j\omega), \quad (3.20)$$

где $S_v(\omega)$ и $S_f(\omega)$ – соответственно спектральные плотности полезного сигнала и помехи.

Однако частотную передаточную функцию (3.19) практически реализовать невозможно [4]. Для реализации функции, близкой к оптимальной, разлагают $S_v(\omega) + S_f(\omega)$ на комплексные множители:

$$S_v(\omega) + S_f(\omega) = |\psi(j\omega)|^2 = \psi(j\omega)\psi(-j\omega), \quad (3.21)$$

где $\psi(j\omega)$ – функция, все нули и полюсы которой лежат в верхней полуплоскости комплексной переменной $j\omega$, а $\psi(-j\omega)$ – функция, комплексносопряжённая с $\psi(j\omega)$, все нули и полюсы которой лежат в нижней полуплоскости переменной $j\omega$. Эту операцию называют «факторизацией».

Далее осуществляют операцию «расщепления», т.е. разделение $\Phi_{\text{опт}}(j\omega)$ на реализуемые и нереализуемые части:

$$\Phi_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{1}{\Psi(j\omega)} \left[\frac{S_v(\omega)\Phi_3(j\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right]_+ + \frac{1}{\Psi(j\omega)} \left[\frac{S_v(\omega)\Phi_3(j\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right]_-, \quad (3.22)$$

где реализуемая часть обозначена знаком «+», а нереализуемая – знаком «-». К нереализуемой части относят члены, содержащие звенья, у которых есть правые полюсы.

Нереализуемую часть отбрасывают. Близкая к оптимальной реализуемая частотная передаточная функция системы

$$\Phi_{\text{опт}}(j\omega) \approx \frac{1}{\Psi(j\omega)} \left[\frac{S_v(\omega)\Phi_3(j\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right]_+. \quad (3.23)$$

Заменяя в (3.23) $j\omega$ на s , окончательно получают передаточную функцию замкнутой системы $\Phi_{\text{опт}}(s)$, из которой можно получить передаточную функцию разомкнутой системы $W_{\text{опт}}(s)$ и выбрать её элементы.

3.5. Случайные процессы в импульсных системах

Будем рассматривать стационарные эргодические случайные дискретные (решётчатые) процессы $x(n)$ как совокупность решётчатых реализаций $x_i(n)$. Здесь решётчатая реализация $x_i(n)$ понимается как последовательность ординат, совпадающих с соответствующими значениями непрерывной реализации $x_i(t)$ в дискретные моменты времени $n = \frac{t}{T}$, где T – период квантования (дискретизации).

По аналогии с непрерывными системами вводятся статистические характеристики импульсных систем [4].

Среднее значение (математическое ожидание)

$$M[x(n)] = \overline{x(n)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n), \quad (3.24)$$

где $x(n)$ – реализация дискретного процесса.

Дисперсия дискретного случайного процесса

$$D(n) = D[x(n)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^2(n). \quad (3.25)$$

Корреляционная функция

$$R(n, m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n)x(n+m), \quad (3.26)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$ – дискретные значения относительного времени.

При наличии двух случайных процессов вводят взаимную корреляционную функцию.

Спектральная плотность дискретного случайного процесса

$$S^*(\bar{\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R(n, m) e^{-j\bar{\omega}n}, \quad (3.27)$$

где $\bar{\omega} = \omega T$ – относительная частота.

Спектральная плотность $S^*(\bar{\omega})$ дискретного случайного процесса связана со спектральной плотностью $S(\bar{\omega})$ соответствующего непрерывного случайного процесса формулой

$$S^*(\bar{\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\bar{\omega} + 2\pi k). \quad (3.28)$$

Спектральная плотность и корреляционная функция связаны с дисперсией:

$$D = R(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} S^*(\bar{\omega}) d\bar{\omega}. \quad (3.29)$$

Расчёт импульсных систем при случайных воздействиях аналогичен расчёту непрерывных систем с учётом дискретных статистических характеристик. Чаще всего оценивают среднее значение квадрата дискретной ошибки. Если на вход импульсной системы поступают некоррелированные стационарные полезный сигнал $v(t)$ и помеха $f(t)$, то спектральная плотность дискретной случайной ошибки

$$S_e^*(\bar{\omega}) = |\Phi_e^*(j\bar{\omega})|^2 S_v^*(\bar{\omega}) + |\Phi(j\omega)|^2 S_f^*(\bar{\omega}), \quad (3.30)$$

где $\Phi_e^*(j\bar{\omega})$ и $\Phi^*(j\omega)$ – частотные передаточные функции замкнутой импульсной системы по ошибке и замкнутой импульсной системы, а $S_v^*(\bar{\omega})$ и $S_f^*(\bar{\omega})$ – дискретные спектральные плотности полезного сигнала и помехи.

Среднее значение квадрата дискретной ошибки:

$$\overline{e^2(n)} = m_e^2(n) + D_e, \quad (3.31)$$

где $m_e^2(n)$ – регулярная составляющая ошибки, а D_e – дисперсия ошибки.

Поскольку вычисления, связанные с оптимизационными задачами, громоздки, то эти исследования целесообразно проводить с помощью компьютерного моделирования.

3.6. Случайные процессы в нелинейных системах

Нелинейные элементы искажают входные случайные сигналы. В связи с тем, что в НСАУ не применим принцип суперпозиции, при одновременном поступлении полезного сигнала и помехи влияние последней может существенно ослабить действие полезного сигнала и ухудшить качество функционирования системы. Поскольку общие точные методы исследования НСАУ со случайными воздействиями отсутствуют, прибегают к статистической линеаризации нелинейных элементов, что позволяет затем использовать известные методы расчёта линейных систем.

Рассмотрим кратко метод статистической линеаризации. Он основан на замене нелинейных преобразований статистически эквивалентными преобразованиями. На рис. 3.7 изображены нелинейный (НЭ) и линейный (ЛЭ) элементы.

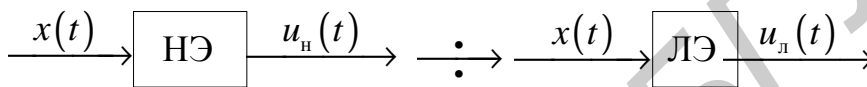


Рис. 3.7

Процессы на входе и на выходе НЭ представляют в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= m_x(t) + \overset{\circ}{x}(t), \\ u_n(t) &= m_{ин}(t) + \overset{\circ}{u}_n(t), \end{aligned} \quad (3.32)$$

где $m_x(t)$ и $m_{ин}(t)$ – математические ожидания, а $\overset{\circ}{x}(t)$ и $\overset{\circ}{u}_n(t)$ – центрированные (у которых матожидание равно 0) составляющие процессов $x(t)$ и $u_n(t)$.

При статистической линеаризации нелинейное преобразование $u_n(t) = \varphi(x)$ заменяют линейным вида

$$u_n(t) = k_0 m_x(t) + k_1 \overset{\circ}{x}(t). \quad (3.33)$$

Коэффициенты k_0 и k_1 выбираются так, чтобы выполнялись определённые критерии статистической эквивалентности нелинейного и линейного преобразований.

Первый критерий заключается в равенстве математических ожиданий и дисперсий процессов на выходе НЭ и ЛЭ. Второй связан с минимизацией среднего квадрата разности процессов на выходе этих элементов.

На основании первого критерия

$$k_0 = \frac{m_{\text{ин}}}{m_x} = \frac{1}{m_x} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) w(x) dx, \quad (3.34)$$

$$k_1 = k_1^1 = \frac{1}{\sqrt{D_{\text{ин}}}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) w(x) dx - m_{\text{ин}}^2 \right\}^{1/2}. \quad (3.35)$$

Здесь k_1^1 соответствует первому критерию эквивалентности.

По второму критерию

$$M \left\{ [u_{\text{н}}(t) - u_{\text{л}}(t)]^2 \right\} = \overline{[u_{\text{н}}(t) - u_{\text{л}}(t)]^2} = \min. \quad (3.36)$$

После преобразований уравнения (3.36) с учётом (3.32) и (3.33) и исследования на \min

$$k_0 = \frac{m_{\text{ин}}}{m_x}, \quad (3.37)$$

$$k_1 = k_1^2 = \frac{1}{D_x} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) \varphi(x) w(x) dx. \quad (3.38)$$

Из сопоставления выражений (3.37) и (3.34), а также (3.38) и (3.35) следует, что коэффициенты k_0 , найденные по различным критериям, совпадают, а k_1 – различаются.

Для получения достоверных результатов принимают

$$k_1 = \frac{k_1^1 + k_1^2}{2}. \quad (3.39)$$

Следует заметить, что коэффициенты линеаризации зависят от закона распределения $w(x)$. Он обычно неизвестен. Как правило, при расчётах его полагают нормальным. Кроме того, коэффициенты k_0 и k_1 для типовых нелинейностей можно рассчитать предварительно.

При расчётах статистически линеаризованной нелинейной системы исходная одноконтурная система заменяется эквивалентной двухконтурной (рис. 3.8) [4].

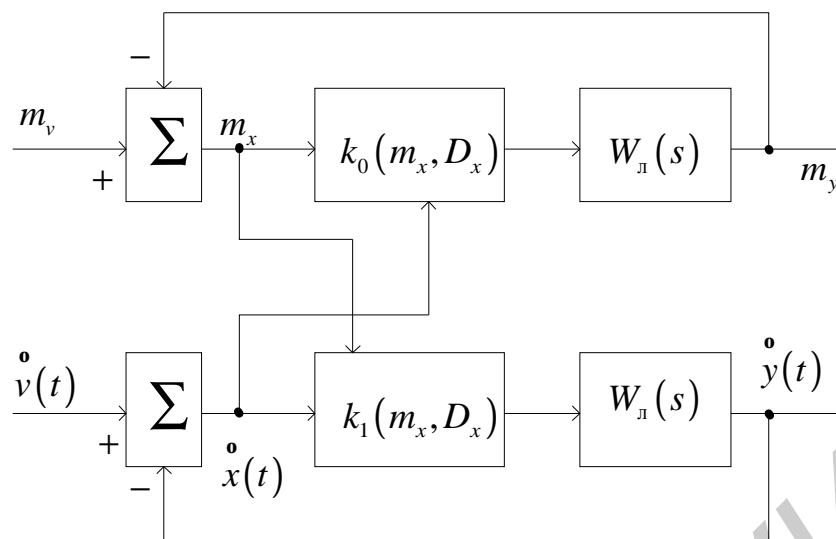


Рис. 3.8

Задающими воздействиями являются для верхнего канала – математическое ожидание m_v , а для нижнего – центрированная случайная составляющая входного сигнала $v(t)$. Входной сигнал может быть линейной комбинацией полезного сигнала и помехи. Здесь $W_{\text{л}}(s)$ – передаточная функция линейной части системы.

Для верхнего канала записывают уравнение по теореме о предельном значении функции:

$$m_x = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + k_0(m_x, D_x)W_{\text{л}}(s)} m_v, \quad (3.40)$$

а для нижнего канала – уравнение для D_x :

$$D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1 + k_1(m_x, D_x)W_{\text{л}}(j\omega)} \right|^2 S_v(\omega) d\omega. \quad (3.41)$$

Решая систему (3.40) и (3.41), находят m_x и D_x .

Конкретные примеры исследования статистически линеаризованных НСАУ рассматриваются в [4, 8].

4. ЭЛЕМЕНТЫ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Классическая теория автоматического управления рассматривает широкий класс систем, их статические и динамические характеристики, методы анализа и синтеза применительно к управлению «в малом». При таком подходе считается, что известны свойства и параметры объекта, режимы технологического процесса и зачастую структура системы. Определение программы управления связано, как правило, с разрешением противоречий между устойчивостью и качеством системы.

В последние десятилетия усилия исследователей все больше направляются на управление «в большом», т.е. управление при существенных изменениях параметров объекта управления и внешних воздействий, а также на управление при неполной информации о технологическом процессе. При этом возникают задачи оценивания характеристик и параметров в процессе эксплуатации системы в реальном времени, что требует применения новейших информационных технологий. Кроме того, приходится обеспечивать так называемую живучесть системы при ее реконфигурации.

4.1. Оптимальное управление

При создании оптимальных систем все чаще используется адаптивное управление. Укрупненная структура такой адаптивной оптимальной системы может быть реализована на основе самоорганизующегося оптимального регулятора с экстраполяцией [8]. В такой системе осуществляется адаптивное управление при заранее неизвестной структуре объекта за счет применения наблюдателей в виде фильтра Калмана – Бьюси, устройств экстраполяции и блока нахождения модели. При этом применяется неклассический обобщенный функционал, учитывающий затраты на синтезируемое управление и на оптимальное управление.

Современным направлением является создание синергетических оптимальных систем. Под синергетикой понимают совместные действия различных динамических систем [8]. Основные положения этой теории состоят в том, что в фазовом пространстве образуются аттракторы (инвариантные многообразия), объединяющие макропеременные, к которым притягиваются траектории системы. Примером такого аттрактора в оптимальной по быстродействию системе второго порядка является линия переключения. Правильным выбором макропеременных можно обеспечить высокие качественные показатели системы при значительных отклонениях изображающей точки фазового пространства от наперед заданных значений.

4.2. Интеллектуальные САУ

Большой класс современных систем составляют интеллектуальные САУ. Под интеллектуальной системой понимают [8, 9] объединённую информационной технологией совокупность технических средств и программного обеспечения, функционирующую во взаимосвязи с человеком или автономно, способную на основе соответствующих знаний при наличии мотивации синтезировать цель, вырабатывать решения и находить рациональные способы достижения цели.

Структурная схема интеллектуальной системы [9] представлена на рис. 4.1.

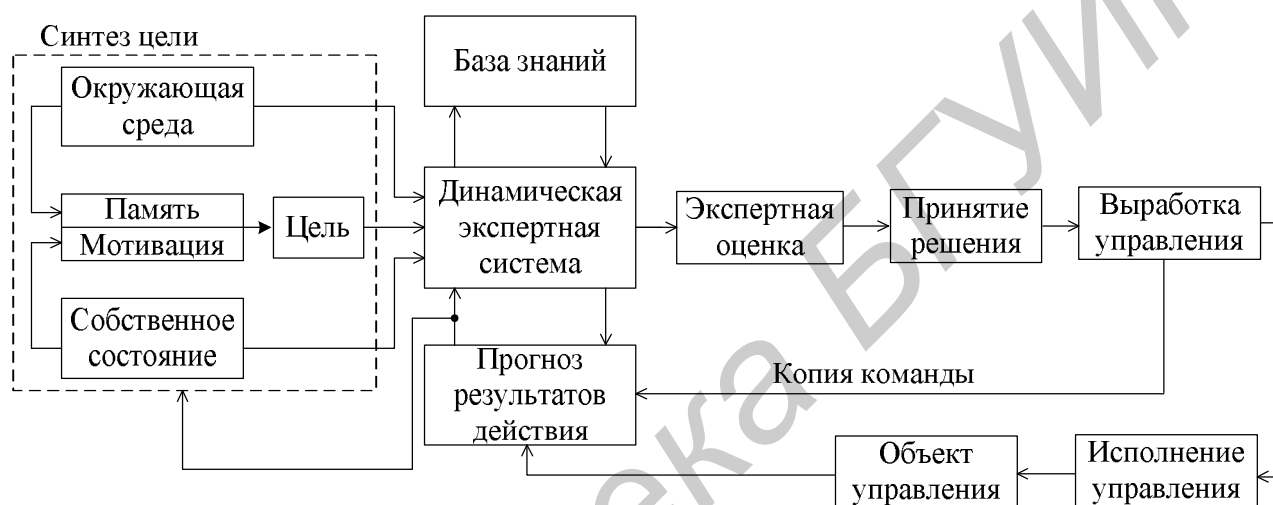


Рис. 4.1

Эта структура инвариантна к объекту управления. Однако для её реализации необходимо решить ряд проблем, разработать новые подходы и методы, математические модели протекающих технологических процессов.

К настоящему времени выделились четыре интеллектуальные технологии [8]: экспертных систем; нейросетевых структур; ассоциативной памяти; нечёткой логики.

4.2.1. Экспертные информационные системы

Такие системы могут создаваться по схемам построения адаптивных систем. Наиболее приемлемой является схема с эталонной моделью. Функционирование динамической структурной экспертной системы происходит в несколько этапов. На первом осуществляется проектирование системы управления, включающее выбор структуры модели объекта, идентификацию его параметров, определение закона управления, синтез и предварительную настройку параметров этого закона. На втором этапе производится обучение системы, отсеиваются отклонения от заданных режимов, формируются данные о взаимосвязи параметров среды с параметрами системы и её модели. На

третьем этапе реализуется управление на основе сопоставления имеющейся теоретической информации, полученной на предыдущих этапах, с реальными данными от датчиков о состоянии объекта управления и внешней среды.

Важнейшей составляющей экспертной системы является база знаний об идентификации объекта и синтезе алгоритмов управления. При идентификации объекта используются частотные, статистические и другие подходы. Для создания базы данных о синтезе алгоритмов управления применяют различные критерии: интегральный квадратичный, максимальной степени устойчивости, с использованием показателей качества системы в переходном режиме и т.п. В случае нелинейных алгоритмов рассматриваются методы Ляпунова и Лагранжа.

4.2.2. Нейросетевые САУ

Нейросетевые технологии в интеллектуальных системах позволяют решать ряд задач в управлении, когда информация об объекте неполная и неточная [9]. В таких случаях мощные традиционные информационные средства, такие как система моделирования Matlab + Simulink, не дают нужного результата. Так как искусственные нейронные сети строятся на принципах биологических сетей, то они обладают важными свойствами последних, склонны к обучению и обобщению. За счёт распараллеливания информации они обладают высоким быстродействием. Схема искусственного нейрона приведена на рис. 4.2.

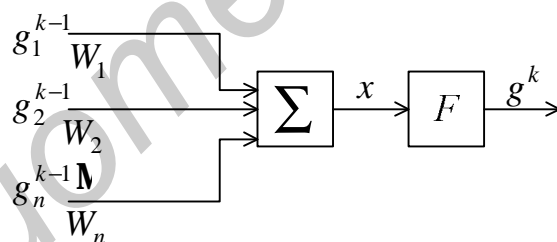


Рис. 4.2

На нейрон подаются сигналы $g_1^{k-1}, \dots, g_n^{k-1}$, после умножения на свой вес (W_1, \dots, W_n) они суммируются. Сигнал x модифицируется специальной функцией $F(x)$ так, что выходной сигнал нейрона [9]

$$g^k = \frac{1}{1 + e^{-x}}. \quad (4.1)$$

В интеллектуальных системах наибольшее распространение получила многослойная сеть прямого распространения (рис. 4.3). На этой схеме прямоугольниками показаны отдельные нейроны.

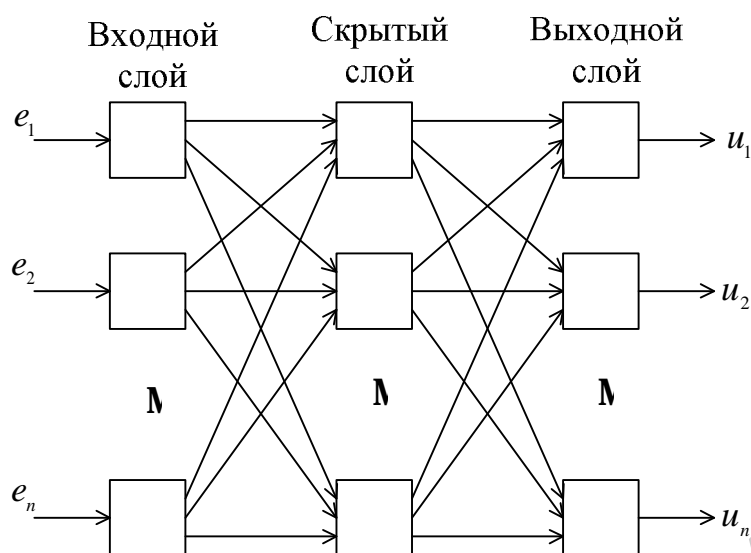


Рис. 4.3

В такой сети скрытых слоёв может быть несколько. Число нейронов во входном и выходном слоях определяется количеством входных и выходных координат. Число нейронов в скрытых слоях подбирается опытным путём.

При обучении сети решается ряд задач по коррекции весовых коэффициентов отдельных нейронов. Некоторые подходы изложены в [9].

Наиболее применяемая область для нейронных сетей – распознавание образов. Возможно их использование в системах управления производственными объектами [9].

4.2.3. САУ с ассоциативной памятью

В системах управления может быть организована и использована ассоциативная память. Ассоциативная память – это средство хранения информации на основе ассоциации, т.е. её извлечение по сочетанию определённых признаков.

Различают [8] пирамидальную (иерархическую), матричную и самоорганизующуюся память.

Пирамидальная память осуществляет классификацию входного информационного вектора по одному признаку, затем по-другому и так до тех пор, пока все признаки не совпадут с какой-либо классификационной группой.

Матричная память – это один уровень пирамидальной ассоциативной памяти. Она реализуется на логических элементах и нейросетях.

Самоорганизующаяся память хранит информацию в виде аттракторов, на один из которых выходит система.

Интеллектуальные системы с ассоциативной памятью могут работать в условиях предсказуемой и непредсказуемой неопределённости. В первом случае обучение системы происходит автоматически, поскольку заранее известна ин-

формация о поле, в котором меняются координаты объекта управления. Во втором случае в процессе первичного обучения участвует оператор. После того как произведено первичное обучение, ассоциативная память заменяет человека и далее осуществляется автоматическая подстройка структуры и параметров объекта управления. При использовании ассоциативной памяти уменьшается её объём и повышается быстродействие системы в целом.

4.2.4. Системы управления с нечёткой логикой

Рассмотрим особенности систем управления с нечёткой логикой [8, 9]. Системы с нечёткой логикой (Fussy-Logic) создаются для управления сложными трудно формализуемыми и слабо структурированными процессами. При этом используется опыт специалистов-экспертов.

К основным понятиям фаззи-логики относятся нечёткое множество и лингвистическая переменная.

Под нечётким множеством M понимают подмножество x множества X , которое определяется непрерывной функцией принадлежности $\mu_M(x)$, могущей принимать значения от 0 до 1. Нечеткое множество M может задаваться так:

$$M = \{(x, \mu_M(x)); x \in X\}. \quad (4.2)$$

Лингвистическая переменная – это переменная, которая задаётся нечёткими словами или предложениями. Отдельное лингвистическое значение (терм) определяется одной функцией принадлежности. Для описания лингвистических переменных в ТАУ может применяться набор до семи термов, созданных словами: отрицательный (negative), нулевой (zero), положительный (positive), большой (big), средний (middle), малый (small), изображённых треугольными и трапецидальными функциями принадлежности на рис. 4.4.

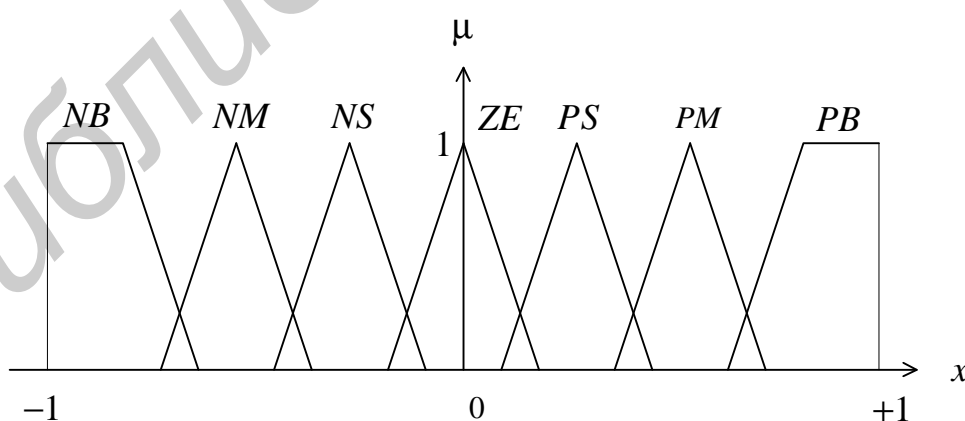


Рис. 4.4

Минимальный набор термов – три: N , ZE , P , но при этом осуществляется грубая декомпозиция входного пространства на подмножества.

Процедуру определения значения функции принадлежности $\mu_M(x_i)$, соответствующего конкретному значению x_i переменной x , называют фаззификацией. Другими словами: под фаззификацией понимают преобразование чётких значений переменных в нечёткие.

Операции с нечёткими множествами используют известные в алгебре чёткой логики операции «И», «ИЛИ», «НЕ» с той разницей, что вместо истинности переменных (0 и 1) применяют функции принадлежности.

Операция конъюнкция («И») осуществляется с помощью минимизации:

$$\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad (4.3)$$

где нечёткое множество C называется фаззи-пересечением нечётких множеств A и B :

$$C = A \cap B = \{[x, \mu_C(x)]; x \in X\}. \quad (4.4)$$

Операция дизъюнкции («ИЛИ») осуществляется с помощью максимизации:

$$\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad (4.5)$$

где нечётное множество C – фаззи-объединение нечётких множеств A и B :

$$C = A \cup B = \{[x, \mu_C(x)]; x \in X\}. \quad (4.6)$$

На рис. 4.5, а показана функция принадлежности фаззи-пересечения множеств ZE и P , а на рис. 4.5, б – функция принадлежности фаззи-объединения этих множеств.

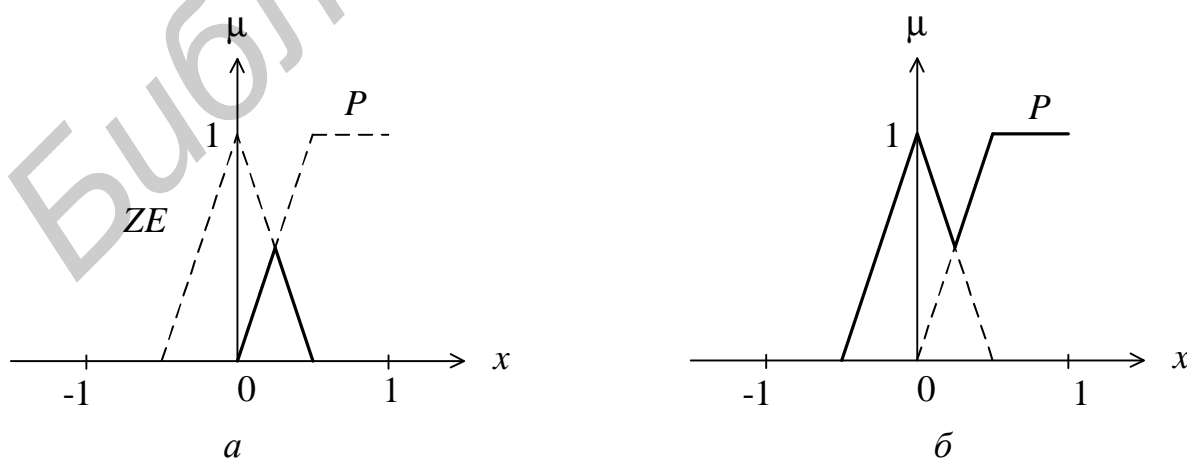


Рис. 4.5

Важнейшей операцией фаззи-логики является операция нечёткого вывода. Она основана на ряде композиционных операторов. Рассмотрим операцию импликации (связывания). Она заключается в соединении двух нечётких множеств A и B по правилу «ЕСЛИ A , ТО B », причём множества A (посылка) и B (заключение) определены на разных базисных множествах $x \in X$ и $y \in Y$.

Множество, соответствующее правилу «ЕСЛИ A , ТО B », образуется из пар (x, y) , относящихся к новому базисному множеству

$$P = A \times B = \{(x, y); x \in A, y \in B\}. \quad (4.7)$$

Связь между множествами A и B устанавливается с помощью отношения

$$R = \{[(x, y), \mu_R(x, y)]; (x, y) \in A \times B\}, \quad (4.8)$$

где $\mu_R(x, y)$ – функция принадлежности пар (x, y) из декартова произведения $A \times B$ к подмножеству, образованному по определённому правилу R_{xy} .

Функцию принадлежности $\mu_R(x, y)$ можно определить с помощью операции минимизации:

$$\mu_R(x, y) = \min_{A \times B} \{\mu_A(x), \mu_B(y)\}. \quad (4.9)$$

Функцию принадлежности $\mu_{B_i}(y)$ при конкретном значении $x = x_i$ можно определить двумя способами:

$$\mu_{B_i}(y) = \mu_R(x_i, y) = \min_{y \in B} \{\mu_A(x_i), \mu_B(y)\}, \quad (4.10)$$

$$\mu_{B_i}(y) = \mu_A(x_i) \cdot \mu_B(y). \quad (4.11)$$

Рис. 4.6 иллюстрирует эти случаи: трапеция 1 соответствует формуле (4.10), а треугольник 2 – формуле (4.11).

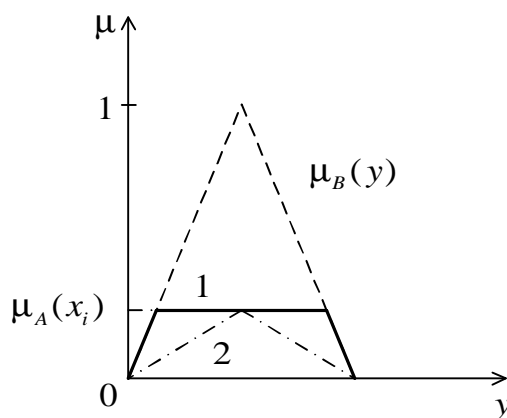


Рис. 4.6

Нечёткое множество A может представлять также пересечение или объединение нескольких множеств.

Рассмотрим следующую операцию – агрегирование, т.е. композицию нескольких правил «ЕСЛИ A , ТО B », связанных через «ИЛИ». Оно осуществляется максимизацией функций принадлежности всех объединённых правил.

Результирующая функция принадлежности нечёткого множества B_{ip} величины y при $x = x_i$:

$$\mu_{B_{ip}}(y) = \max_j \{ \mu_{B_{ij}}(y) \} = \max_j \{ \min[\mu_{A_j}(x_i), \mu_{B_j}(y)] \}, \quad (4.12)$$

где $j = 1, \dots, k$ – номер правила; $\mu_{B_{ij}}(y)$ – функция принадлежности заключения B j -го правила, ограниченная значением $\mu_{A_j}(x_i)$ (рис. 4.6); $\mu_{A_j}(x_i)$ и $\mu_{B_j}(y)$ – функции принадлежности соответственно посылки A и заключения B j -го правила.

Для определения конкретных значений y по полученной результирующей функции принадлежности (4.12) проводится дефаззификация. Дефаззификация преобразует нечёткие величины в чёткие. В настоящее время при дефаззификации чаще всего используют два метода: метод центра тяжести и метод максимума [9].

В первом случае чёткое значение выходной переменной

$$y_{pi} = \frac{\int \mu_{B_{ip}}(y) y dy}{\int \mu_{B_{ip}}(y) dy}, \quad (4.13)$$

а для дискретных пространств

$$y_{pi} = \frac{\sum_{j=1}^k \mu_{B_{ip}}(y_j) y_j}{\sum_{j=1}^k \mu_{B_{ip}}(y_j)}. \quad (4.14)$$

Во втором случае (метод максимума)

$$y_{pi} = \sum_{j=1}^l \frac{y_j}{l}, \quad (4.15)$$

где u_j – выходная переменная, для которой функция принадлежности достигла максимума, а l – число таких величин.

Из этих двух методов первый даёт приемлемые результаты для установившихся режимов, а второй – для переходных режимов [9].

Простейшие примеры реализации основных процедур фаззи-логики применительно к нечётким системам управления приведены в [8, 9].

В настоящее время в теории систем управления развиваются и другие подходы. Среди них выделяются теории катастроф и детерминированного хаоса.

Теория катастроф основана на объединении теории гладких отображений и теории устойчивости и бифуркаций динамических систем. Теория катастроф изучает зависимость качественного характера решения уравнений от значений параметров этих уравнений. Применительно к САУ на основании теории катастроф можно исследовать, например, потерю устойчивости при постепенном изменении какого-либо параметра, когда возникают бифуркации. Такой пример с исследованием летательного аппарата приводится в [9].

В нелинейных системах возможен режим хаотической динамики, когда траектории систем сильно зависят от начальных условий. Такие режимы возможны в механических системах с зазорами, трением скольжения, нелинейными обратными связями. Основами теории хаоса являются так называемое логистическое уравнение и «странный» аттрактор (внутри которых нельзя предугадать поведение траекторий на длительный интервал). Изучение таких режимов позволяет глубже понять процессы в НСАУ и научно обосновать законы управления ими.

Для глубокого изучения методов современной теории автоматического управления могут быть использованы книги [8, 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов, В. П. Теория автоматического управления. Конспект лекций: учеб.-метод. пособие. В 2 ч. Ч. 1 : Линейные непрерывные системы / В. П. Кузнецов, С. В. Лукьянец, М. А. Крупская. – Минск : БГУИР, 2007. – 132 с.
2. Кузнецов, В. П. Линейные непрерывные системы : тексты лекций по курсу «Теория автоматического управления» для студ. спец. «Автоматика и управление в технических системах» / В. П. Кузнецов. – Минск : БГУИР, 1995. – 180 с.
3. Иванов, В. А. Теория дискретных систем автоматического управления / В. А. Иванов, А. С. Ющенко. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
4. Теория автоматического управления. В 2 ч. / под ред. А. А. Воронова. – М.: Высш. шк., 1986. Ч. 1 – 362 с. Ч. 2. – 382 с.
5. Кузнецов, В. П. Линейные импульсные системы : математическое описание : тексты лекций по курсу «Теория автоматического управления» для студ. спец. «Автоматика и управление в технических системах» / В. П. Кузнецов. – Минск : БГУИР, 1996. – 70 с.
6. Бесекерский, В. А. Теория автоматического управления / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – СПб. : Профессия, 2004. – 752 с.
7. Попов, Е. П. Теория нелинейных систем автоматического управления / Е. П. Попов. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
8. Теория автоматического управления : учеб. пособие / М. М. Савин, В. С. Елсуков, О. Н. Пятин; под ред. В. И. Лачина. – Ростов н/Д. : Феникс, 2007. – 469 с.
9. Методы классической и современной теории автоматического управления : учебник. В 5 т. Т. 5 / под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ, 2004. – 784 с.

Учебное издание

**Кузнецов Владимир Петрович
Лукьянец Степан Валерьянович
Крупская Марина Александровна**

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Конспект лекций

В 2-х частях

Часть 2

Дискретные системы, нелинейные системы, случайные процессы в системах автоматического управления

Редактор *Т. Н. Крюкова*
Корректор *Е. Н. Батурчик*

Подписано в печать 14.12.2009. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Печать ризографическая. Усл. печ. л. 8,02. Уч.-изд. л. 7,7. Тираж 150 экз. Заказ 390.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6