

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра систем управления

А. А. Лобатый, Л. В. Русак, О. А. Чумаков

РАСЧЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Конспект лекций
для студентов специальности
I-53 01 07 «Информационные технологии и управление
в технических системах»
дневной формы обучения

В 2-х частях

Часть 2

Минск 2008

УДК 681.511 (075.8)

ББК 32.965 я 73

Л 68

Рецензент

д-р техн. наук, проф. В. Н. Ярмолик

Лобатый, А. А.

Л 68 Расчет систем управления при случайных воздействиях: конспект лекций для студ. спец. I-53 01 07 «Информационные технологии и управление в технических системах» днев. формы обуч. : В 2 ч. Ч. 2 / А. А. Лобатый, Л. В. Русак, О. А. Чумаков. – Минск : БГУИР, 2008. – 55 с. : ил.

ISBN 978-985-488-281-9 (ч. 2)

В конспекте лекций рассмотрены вопросы статистического анализа и синтеза линейных и некоторых нелинейных систем автоматического управления. Во второй части издания приведены основные формы представления случайных процессов, интегральные и спектральные уравнения связи входных и выходных сигналов, методы определения ошибок систем автоматического управления, обусловленных случайными сигналами; описаны методики статистического синтеза непрерывных и дискретных систем автоматического управления при заданной структуре.

Часть 1 издана в БГУИР в 2006 г.

УДК 681.511 (075.8)

ББК 32.965 я 73

ISBN 978-985-488-281-9 (ч. 2)

ISBN 985-444-989-0

ISBN 978-985-444-989-0

© Лобатый А. А., Русак Л. В.,
Чумаков О. А., 2008

© УО «Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники», 2008

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	6
1. КАНОНИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	7
1.1. Представление случайного процесса в виде канонического разложения	7
1.2. Интегральное каноническое представление случайного процесса	10
1.3. Полиномиальное представление случайного процесса	10
2. ПРОХОЖДЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ	12
2.1. Структура стохастической системы автоматического управления	12
2.2. Случайные процессы и возмущения в автоматических системах	14
2.3. Реакция динамической системы на случайное возмущение	17
2.4. Критерии точности системы	19
2.5. Характеристики выходных сигналов систем, заданных весовыми функциями	20
2.6. Корреляционный анализ систем, заданных дифференциальными уравнениями	22
3. РАСЧЕТ УСТАНОВИВШИХСЯ ОШИБОК АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ	25
3.1. Установившийся режим работы систем	25
3.2. Определение установившихся систематических ошибок стационарных линейных систем	26
3.3. Определение установившейся дисперсии выходной переменной стационарной линейной системы	29
3.4. Законы распределения выходных сигналов линейных систем	31
4. РАСЧЕТЫ ПО МИНИМУМУ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ ОШИБКИ	33
4.1. Критерии оптимальности автоматических систем	33
4.2. Условие минимума среднеквадратичной ошибки	34
4.3. Уравнение оптимальной линейной системы	35
4.4. Определение оптимальной передаточной функции стационарной линейной системы	36
4.5. Определение весовой функции оптимальной линейной системы	39
4.6. Синтез оптимальной стационарной линейной системы методом логарифмических частотных характеристик	40
4.7. Определение оптимальной линейной системы методом канонических разложений	42
4.8. Оптимальные системы, описываемые дифференциальными уравнениями	43
5. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ	46
5.1. Дискретные случайные функции	46
5.2. Линейные операции над дискретными случайными функциями	47
5.3. Стационарные дискретные случайные процессы	48
5.4. Эргодические дискретные случайные процессы	50
5.5. Статические характеристики дискретных случайных процессов	51
5.6. Корреляционный анализ дискретных систем, заданных разностными уравнениями	52
5.7. Оптимальные системы, описываемые разностными уравнениями	53

ВВЕДЕНИЕ

В связи с тем что при работе систем автоматического управления в реальных условиях некоторые задающие и многие возмущающие воздействия могут быть описаны только статистически, применяют статистические методы анализа и синтеза автоматических систем. Эти методы позволяют произвести количественную оценку влияния различных случайных воздействий на качество управления и определить оптимальные структуру и параметры системы.

Статистические методы исследования автоматических систем являются важным разделом теории автоматического управления. Разработка и внедрение в инженерную практику статистических методов исследования линейных и нелинейных систем автоматического управления явились одним из важнейших достижений в теории автоматического управления за последние 30 лет XX века.

Методы линейной теории используют для исследования тех реальных автоматических систем, которые можно считать приближённо линейными; методы нелинейной теории – для исследования динамических свойств систем, содержащих существенные нелинейности.

Конспект лекций состоит из двух частей. В первой части систематизированы и с единых методологических позиций изложены современные подходы к анализу систем управления, подверженным случайным воздействиям. Дается представление об основных понятиях и определениях, используемых в дисциплине; рассматриваются случайные процессы, происходящие в системах управления, их особенности и характеристики; изучаются корреляционные функции и спектральные плотности случайных процессов, их свойства и взаимосвязи. Во второй части дается представление о каноническом разложении случайных процессов; рассматривается прохождение случайного сигнала через линейные системы, рассматривается корреляционный анализ систем, заданных дифференциальными уравнениями; приводится расчет установившихся ошибок автоматических систем; показан расчет минимума среднеквадратичной ошибки; рассмотрены случайные процессы в дискретных системах.

1. КАНОНИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1. Представление случайного процесса в виде канонического разложения

В практических расчётах и теоретических исследованиях случайные процессы представляют в аналитическом виде. Существует несколько способов аналитического представления случайных процессов. Удобно использовать так называемую *элементарную случайную функцию*, которая представляется в виде

$$x(t) = V \cdot j(t), \quad (1.1)$$

где V – случайная величина, $j(t)$ – некоторая известная неслучайная функция времени (синусоида, экспонента, степенная функция и т.п.).

Если математическое ожидание величины $V = 0$, то и математическое ожидание случайной функции $M[x(t)] = 0$.

Корреляционная функция в этом случае

$$R_x(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{V}j(t_1) \cdot \overset{\circ}{V}j(t_2)] = D \cdot j(t_1) \cdot j(t_2), \quad (1.2)$$

где $D = M[V^2]$.

Рассмотрим случайную функцию (процесс) $X(t)$, представленную в виде суммы её математического ожидания m_x и элементарных случайных функций,

$$x_k(t) = V_k \cdot j_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (1.3)$$

$$M[V_k] = 0, \quad R_{V_k V_j} = M[\overset{\circ}{V}_k \cdot \overset{\circ}{V}_j] = 0; \quad D[V_k] = D_k. \quad (1.4)$$

Координатные функции $j_k(t)$ – неслучайные функции времени (в том числе и комплексные)

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^n V_k \cdot j_k(t). \quad (1.5)$$

Таким образом, «случайность» сосредотачивается в коэффициентах V_k , а «зависимость от времени» – в координатных функциях $j_k(t)$.

Пример:

$$j_k(t) = \sin w_k t.$$

График представлен на рис. 1.1.

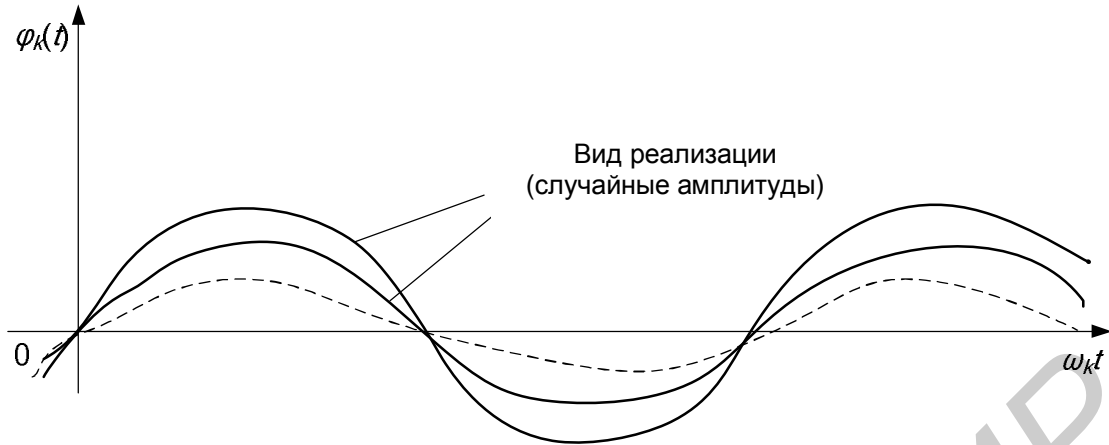


Рис. 1.1. Каноническое представление случайного процесса

Характеристики случайного процесса, заданного каноническим разложением, определим с помощью общих методов. Так как коэффициенты V_k – центрированные случайные величины, то

$$M[X(t)] = m_x(t). \quad (1.6)$$

Для нахождения корреляционной функции и дисперсии $X(t)$ определим центрирование функции:

$$\overset{\circ}{X}(t_1) = X(t_1) - m_x(t_1) = \sum_{k=1}^n V_k \cdot j_k(t_1), \quad (1.7)$$

$$\overset{\circ}{X}(t_2) = X(t_2) - m_x(t_2) = \sum_{k=1}^n V_k \cdot j_k(t_2). \quad (1.8)$$

В общем случае коэффициенты разложения и координатные функции могут быть комплексными, поэтому используем формулу

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= M \left[\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overline{\overset{\circ}{X}(t_2)} \right] = M \left[\sum_{k,j} V_k \cdot \overline{V_j} \cdot \varphi_k(t_1) \cdot \overline{\varphi_j(t_2)} \right] = \\ &= \sum_{k,j} M [V_k \cdot \overline{V_j}] \cdot \varphi_k(t_1) \cdot \overline{\varphi_j(t_2)}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Корреляционные моменты под знаком суммы определяются следующим образом:

$$M[V_k \overline{V_j}] = \begin{cases} M[|V_k|^2] = D_k, & \text{при } k = j, \\ M[V_k V_j] = R_{V_k V_j} = 0, & \text{при } k \neq j. \end{cases} \quad (1.10)$$

С учётом (1.10) получим

$$R_x(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^n D_k \cdot j_k(t_1) \cdot \overline{j_k(t_2)}. \quad (1.11)$$

При $t_1 = t_2 = t$ получим выражение для дисперсии:

$$D_x(t) = \sum_{k=1}^n D_k |j_k(t)|^2. \quad (1.12)$$

Для действительных случайных функций формулы (1.11) и (1.12) имеют вид

$$R_x(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^n D_k j_k(t_1) j_k(t_2),$$

$$D_x(t) = \sum_{k=1}^n D_k \cdot j_k^2(t). \quad (1.13)$$

Формулы (1.13) дают **каноническое разложение корреляционной функции** случайного процесса $X(t)$. Каноническое разложение было предложено В. С. Пугачёвым. Частным случаем канонического разложения случайного процесса является разложение его в ряд Фурье по гармоникам со случайными амплитудами:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (Z_k \cdot \sin w_k t + V_k \cdot \cos w_k t), \quad (1.14)$$

где Z_k, V_k – некоррелированные центрированные случайные величины (амплитуды колебаний).

Каноническим разложением является также входящая в (1.14) случайная синусоидальная функция частоты w (гармоника).

$$X_k(t) = Z_k \sin w_k t + V_k \cos w_k t. \quad (1.15)$$

Для стационарного случайного процесса $X(t)$ корреляционная функция имеет вид

$$R_x(t_1, t_2) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} d_k \cdot e^{jw_k t}. \quad (1.16)$$

Выражение (1.16) является каноническим разложением корреляционной функции.

При использовании канонического разложения значительно упрощается выполнение различных операций над случайными функциями (дифференцирование, интегрирование, решение линейных дифференциальных уравнений и т.п.).

Так, например, производная от (1.5) будет

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{dm_x(t)}{dt} + \sum_{k=1}^n V_k \cdot \frac{dj_k(t)}{dt}. \quad (1.17)$$

Аналогичным образом интегрирование (1.5) даёт

$$\int_0^t X(t) dt = \int_0^t m_x(t) dt + \sum_{k=1}^n V_k \int_0^t j_k(t) dt. \quad (1.18)$$

1.2. Интегральное каноническое представление случайного процесса

$$X(t) = m_x(t) + \int_{\Omega} V(I) \cdot j(t, I) dI, \quad (1.19)$$

где Ω – область изменения параметра I , $V(I)$ – белый шум, $R_v(I_1, I_2) = G(I) d(I_1, I_2)$, $I \in \Omega$; $\varphi(t, I)$ – координатная функция (например e^{jIt}) – функция переменной t при различных значениях параметра I .

Выведем формулу для интегрального канонического представления корреляционной функции:

$$\bar{X} = \int_{\Omega} V(I) \cdot j(t, I) \cdot dI. \quad (1.20)$$

Учитывая, что подынтегральные функции $V(I)\varphi(t, I)dI$ могут быть комплексными, имеем

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} M[V(I_1)\overline{V(I_2)}] \cdot j(t_1, I_1) \overline{j(t_2, I_2)} dI_1 dI_2 = \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} G(I_1) \cdot d(I_1 - I_2) \cdot j(t_1, I_1) \overline{j(t_2, I_2)} dI_1 dI_2 = \int_{\Omega} G(I) j(t_1, I) \cdot \overline{j(t_2, I)} dI. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Полагая в (1.21) $t_1 = t_2 = t$, получим дисперсию

$$D_x(t) = \int_{\Omega} G(I) \cdot |j(t, I)|^2 \cdot dI. \quad (1.22)$$

Выражения (1.21) и (1.22) – интегральные канонические представления корреляционной функции и дисперсии.

Частным случаем интегрального канонического представления случайного процесса является спектральное разложение стационарного случайного процесса:

$$X(t) = m_x + \int_{-\infty}^{\infty} V(w) \cdot e^{jw t} dw. \quad (1.23)$$

Вероятностные характеристики случайного процесса в форме канонического разложения были получены ранее.

1.3. Полиномиальное представление случайного процесса

Это представление выражается формулой

$$X(t) = \sum_{r=0}^n U_r \cdot t^r, \quad (1.24)$$

где U_r – случайные величины с математическими ожиданиями $M[U_r] = m_r$, дисперсиями $D_r = M\left[\left|U_r^{\circ}\right|^2\right]$ и корреляционными моментами $M[U_r^{\circ} U_p^{\circ}] = R_{rp}$.

Вероятностные характеристики легко определяются по общим формулам и имеют следующий вид:

$$M[x(t)] = \sum_{r=0}^n m_r t^r, \quad (1.25)$$

$$R_x(t_1, t_2) = \sum_{r,p=0}^n R_{rp} \cdot t_1^r \cdot t_2^p, \quad (1.26)$$

Формулы (1.25) и (1.26) получаются по тем же правилам, что и предыдущие (студентам рекомендуется вывести их самостоятельно).

2. ПРОХОЖДЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

2.1. Структура стохастической системы автоматического управления

Современные технические системы автоматического управления отличаются большим разнообразием принципов построения и структур. Наиболее представительным классом являются системы с обратными связями. К ним, в частности, относятся следящие системы.

На рис. 2.1 представлена следящая система с обратной связью, на которую действуют случайные возмущения $x_i = x_i(t)$ ($i = \overline{1,6}$).

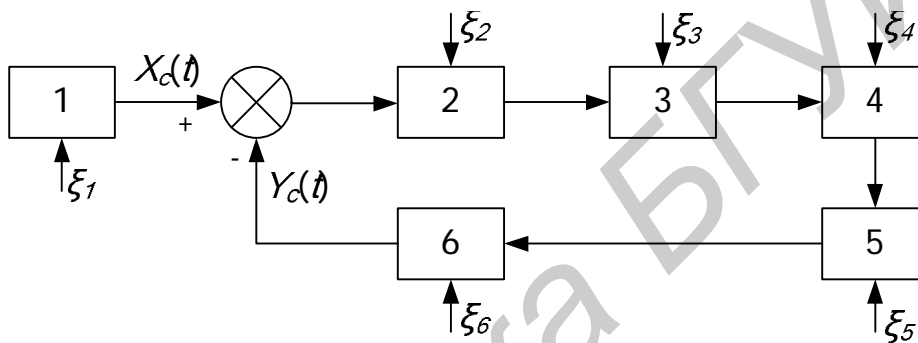


Рис. 2.1. Стохастическая система автоматического управления:

- 1 – источник информации о требуемом состоянии; 2 – измеритель рассогласования;
- 3 – функциональный преобразователь; 4 – исполнительное устройство;
- 5 – объект управления, источник информации о реальном состоянии

Входным сигналом системы является $X_c(t)$.

Выходной сигнал (реакция) $Y_c(t)$ является результатом преобразования сигнала $X_c(t)$ следящей системой как единым динамическим звеном.

Если A_c – оператор следящей системы, то можно записать

$$Y_c(t) = A_c \cdot X_c(t). \quad (2.1)$$

При исследовании систем автоматического управления интересуются не только конечным эффектом, но и характером текущих преобразований, происходящих на различных этапах прохождения входного сигнала к выходу.

Каждый элемент системы или некоторая её цепь могут рассматриваться отдельно. При этом, в частности, оценивается влияние данного элемента или некоторой цепи на общие характеристики системы.

За входной сигнал $X_i(t)$, действующий на данный i -й элемент (цепь), принимается выходной сигнал $Y_i(t)$ предыдущего элемента цепи.

Выходной сигнал $Y_i(t)$ данного элемента (цепи) будет входным сигналом последующего элемента (цепи).

Если A_i – оператор данного элемента, то

$$Y_i(t) = A_i \cdot X_i(t). \quad (2.2)$$

Пользуясь операторами, структурную схему системы управления (см. рис. 2.1) можно представить в виде, показанном на рис. 2.2, где обозначены соответствующие операторы.

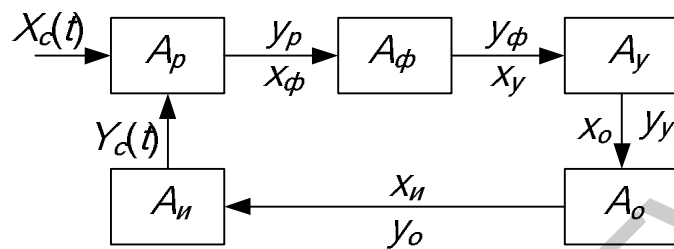


Рис. 2.2. Структурная схема системы управления:

A_p – оператор измерителя рассогласования, A_ϕ – оператор функционального преобразователя, A_y – оператор исполнительного устройства, A_o – оператор объекта управления, A_u – оператор источника информации о реальном состоянии объекта

Обобщая выражения (2.1) и (2.2), запишем

$$Y(t) = A \cdot X(t),$$

где A – оператор динамической системы (или звена), $X(t)$, $Y(t)$ – входной и выходной сигналы (рис. 2.3).

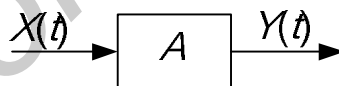


Рис. 2.3. Структурная схема динамической системы

Оператор A может иметь различную форму. В соответствии с этим по-разному задаются динамические системы.

Системы могут быть заданы:

- дифференциальными и разностными уравнениями,
- весовыми функциями,
- передаточными функциями,
- частотными характеристиками.

Дифференциальными уравнениями задаются линейные и нелинейные, стационарные и нестационарные непрерывные динамические системы.

Разностными уравнениями задаются линейные и нелинейные, стационарные и нестационарные дискретные динамические системы.

Весовыми функциями могут быть заданы линейные стационарные и нестационарные непрерывные и дискретные динамические системы.

Передачными функциями и частотными характеристиками задаются линейные стационарные непрерывные и дискретные динамические системы.

Системы с одним входом и одним выходом называются одномерными. С несколькими входами и выходами – многомерными.

Система называется автоматической, если в решении задач, поставленных перед ней, не принимает участие человек.

Когда отдельные операции выполняются человеком, система называется полуавтоматической (автоматизированной). Характерная особенность полуавтоматических систем – неопределённость их динамических характеристик.

2.2. Случайные процессы и возмущения в автоматических системах

Всякая реальная автоматическая система подвержена воздействию случайных возмущений (ошибки измерений, случайные силы и моменты, другие элементы системы и т. д.).

Вследствие случайных внешних воздействий сами процессы управления в автоматической системе приобретают случайный (стохастический) характер. Такие системы называются стохастическими.

Если учесть случайные возмущения, то появляется возможность исследовать точность автоматических систем.

Основы теории стохастических систем были разработаны А. Н. Колмогоровым, В. С. Пугачёвым, Н. Винером, Р. Е. Калманом.

Возмущения, действующие в автоматических системах, являются случайными непрерывными или дискретными величинами и случайными функциями времени.

Непрерывнозначная случайная величина a характеризуется плотностью распределения вероятности $w(a)$, а дискретная $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ – вероятностями её значений.

На практике применяют более простые (неполные) характеристики: математическое ожидание (среднее значение) m_a и дисперсию D_a .

Случайная функция (процесс) $X(t)$ полностью характеризуется конечномерными плотностями распределения вероятности $w(x(t_1), \dots, x(t_m))$ при $m \rightarrow \infty$.

Марковские случайные процессы полностью характеризуются плотностью вероятности состояния $w(x, t)$ и условной плотностью вероятности перехода $w(x, t | x', t')$.

Дискретная случайная последовательность полностью характеризуется заданием конечномерных вероятностей того, что в дискретные моменты времени t_k случайный процесс принимает значение $X^{(r)}(k), r = 1, \dots, N$.

Для полного описания марковского дискретного процесса достаточно иметь вероятности каждого значения $P(X^{(r)}, k)$ и условной вероятности перехода

$$P(X^{(r)}, k | X^{(q)}, l), r, q = \overline{1, N}, \quad k, l = 0, 1, \dots$$

Практически в инженерных расчётах для описания непрерывных случайных функций ограничиваются двумя вероятностными моментами:

- математическим ожиданием $m_x(t) = M[X(t)]$,
- корреляционной функцией $R_x(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)]$,

где $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$ – центрированная случайная функция.

При $t_1 = t_2$; $K_x(t, t) = D_x(t)$ – дисперсия случайной функции.

Для дискретных случайных процессов применяют аналогичные характеристики:

- математическое ожидание $m_x(k) = M[X(k)]$,
- корреляционную функцию $R_x(k, l) = M[\overset{\circ}{X}(k) \cdot \overset{\circ}{X}(l)]$.

При $l = k$; $R_x(k, k) = D_x(k)$ – дисперсия.

Для описания векторных случайных процессов в статистической динамике автоматических систем применяют те же характеристики, но вместо скалярных – векторные и матричные: вектор математического ожидания и матрицу корреляционных функций.

$$m_x(t) = [m_{x_1}(t), \dots, m_{x_n}(t)]^T = [m_1(t), \dots, m_n(t)]^T, \quad (2.3)$$

$$R_x(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}^T(t_2)] = \begin{bmatrix} R_{11}(t_1, t_2) \dots R_{1n}(t_1, t_2) \\ \dots \dots \dots \\ R_{n1}(t_1, t_2) \dots R_{nn}(t_1, t_2) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

где $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$ – центрированный вектор; T – знак транспонирования; $R_{ij}(t_1, t_2) = R_{ji}(t_1, t_2)$ – компоненты корреляционной матрицы

При $t_1 = t_2, i = j, R_x(t, t) = D_x(t)$ – дисперсионная матрица.

Аналогично корреляционные моменты рассматриваются для дискретных (импульсных) векторных последовательностей, квантованных по времени.

$t_k = kT_n, k = 0, 1, \dots, T_n$ – интервал дискретности.

Случайные процессы могут быть эргодическими и стационарными.

Стационарные случайные процессы характеризуются также спектральными плотностями, связанными с корреляционными функциями преобразованиями Фурье:

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt; \quad (2.5)$$

$$R_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega.$$

Для дискретных процессов аналогично

$$s_x^d(\omega) = \frac{1}{2p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_x(n) \cdot e^{-j\omega n}, \quad (2.6)$$

$$R_x(k) = \int_{-\frac{p}{T_n}}^{\frac{p}{T_n}} s_x^d(\omega) \cdot e^{j\omega k T_n} \cdot d\omega.$$

Для векторных процессов $X(t)$ и $X(k)$ формулы (2.5) и (2.6) имеют тот же вид, но входящие в них компоненты являются матрицами.

Важное значение имеют случайные процессы $x(t), x(k)$, называемые соответственно непрерывным и дискретным белым шумом с корреляционными функциями вида

$$K_x(t_1, t_2) = M \left[\overset{\circ}{x}(t_1) \cdot \overset{\circ}{x}(t_2) \right] = G(t_1) d(t_1 - t_2), \quad (2.7)$$

$$K_x(q, l) = M \left[\overset{\circ}{x}(q) \cdot \overset{\circ}{x}(l) \right] = G^*(q) \cdot d_{ql},$$

где $G(t)$ – интенсивность белого непрерывного шума; $G^*(q)$ – интенсивность (дисперсия) импульсов дискретной случайной последовательности; $d(t_1 - t_2)$ –

дельта-функция Дирака, $d_{ql} = \begin{cases} 1, & l = q, \\ 0, & l \neq q. \end{cases}$ – символ Кронекера.

Для векторных белых шумов $G(t)$ – матрица интенсивностей, $G^*(q)$ – дисперсионная (ковариационная) матрица.

Случайный небелый шум $\overset{\circ}{X}(t)$ с заданной спектральной плотностью может быть получен из белого шума, если воспользоваться формирующим фильтром.

Случайные возмущения, действующие на автоматическую систему, оказывают различное влияние. Особенно вредными являются возмущения, действующие на различные измерители.

Устранить их влияние на результат управления в автоматической системе принципиально невозможно, так как они порождаются часто теми же физическими явлениями, которые используются в управлении. Поэтому важно уметь оценивать влияние помех на точность работы автоматических систем.

2.3. Реакция динамической системы на случайное возмущение

Для одномерной линейной системы (рис. 2.4) имеем

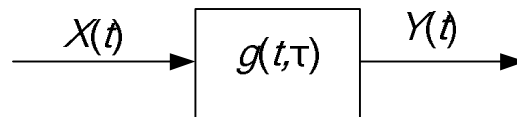


Рис. 2.4. Одномерная линейная система

На вход такой системы действует возмущение $X(t)$, реакция $Y(t)$ выражается формулой Дюамеля

$$Y(t) = \int_{t_0}^t g(t, \tau) \cdot X(\tau) \cdot d\tau, \quad (2.8)$$

где $g(t, \tau)$ – весовая функция системы.

Для системы с n входами и m выходами (рис. 2.5)



Рис. 2.5. Многомерная линейная система

реакция $Y_k(t)$ на k -м выходе равна

$$Y_k(t) = \sum_{h=1}^n \int_{t_0}^t g_{kh}(t, \tau) \cdot X_h(\tau) \cdot d\tau, \quad (2.9)$$

$$(k = 1, \dots, m)$$

где $g_{kh}(t, \tau)$ – весовая функция системы для h -го входа и k -го выхода, $X_h(t)$ – возмущение, действующее на h -й вход системы.

Формулы (2.8) и (2.9) справедливы для нулевых начальных условий. В действительности этот частный случай встречается редко.

Учёт ненулевых начальных условий производится следующим образом. Инерционная линейная динамическая система любой сложности может быть описана системой уравнений вида

$$\dot{Y}_k(t) = \sum_{l=1}^n a_{kl} Y_l(t) + X_k(t), \quad (2.10)$$

$(k = 1, \dots, n)$

с начальными условиями, равными $Y_k(t_0) = Y_{k0}$.

Коэффициенты a_{kl} могут быть постоянными или переменными.

В выражении (2.10) принято $n = m$. В действительности для некоторых значений k функции $X_k(t)$ могут быть равными нулю, тогда $m \neq n$.

Пользуясь свойством d -функции вместо (2.10) можно записать

$$\dot{Y}_k(t) = \sum_{l=1}^n a_{kl} \cdot Y_l(t) + X_k(t) + Y_{k0} d(t_0 - t). \quad (2.11)$$

Решение системы уравнений (2.11) при начальных условиях $Y_k(t_0) = Y_{k0}$ тождественно равно решению системы уравнений (2.10), при начальных условиях $Y_k(t_0) = 0; (k = 1, \dots, n)$

Принимая за возмущение сумму

$$X_k(t) + Y_{k0} \cdot d(t_0 - t),$$

вместо выражения (2.9) запишем

$$Y_k(t) = \sum_{h=1}^n \int_{t_0}^t g_{kh}(t, h) \cdot [X_h(t) + Y_{h0} \cdot d(t_0 - t)] \cdot dt, \quad (2.12)$$

где $g_{kh}(t, t)$ – весовые функции системы, описываемой уравнениями (2.10).

Если одномерная система описывается дифференциальным уравнением n -го порядка

$$\sum_{r=0}^n a_r \cdot Y^{(r)} = X(t), \quad (2.13)$$

где $Y^{(r-1)}(t_0) = Y_{r0}$ при $r > 0$, то его можно привести к системе уравнений вида (2.10), в которой (форма Коши) $X_k(t) = f_k \cdot X(t)$, f_k – постоянные или переменные коэффициенты, а затем и к виду (2.11).

Явным выражением реакции системы на случайное возмущение пользуются в приближённых исследованиях автоматических систем.

Для нелинейных систем сложной структуры реакцию системы в аналитическом виде получить нельзя.

2.4. Критерии точности системы

Выходные переменные любой автоматической системы закономерно связаны с входными переменными. Эта закономерность нарушается помехами, действующими на систему.

Разность между фактической выходной переменной $y(t)$ одномерной системы и соответствующей теоретической величиной $y_T(t)$ представляет собой ошибку системы $e(t)$:

$$e(t) = y(t) - y_T(t) = m_e(t) + \overset{\circ}{e}(t). \quad (2.14)$$

Задача исследования точности автоматической системы состоит в определении систематической ошибки, т.е. её математического ожидания $m_e(t)$ и рассеивания, т.е. дисперсии величины $\overset{\circ}{e}(t)$:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{e}(t) &= e(t) - m_e(t), \\ D_e(t) &= M \left[(e(t) - m_e(t))^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

При детерминированном $y_T(t)$:

$$m_e(t) = m_y(t) - y_T(t); \quad \overset{\circ}{e}(t) = \overset{\circ}{y}(t), \quad (2.16)$$

где $m_y(t) = M[y(t)]$.

Дисперсия ошибки $D_e(t)$ в этом случае равна

$$D_e(t) = D_y(t) = M \left[(\overset{\circ}{y}(t))^2 \right].$$

Таким образом, задача исследования точности автоматической системы сводится к определению математического ожидания $m_y(t)$ и дисперсии $D_y(t)$ выходной переменной $y(t)$.

Для количественной оценки точности автоматической системы применяют величины $s_e = \sqrt{D_e(t)}$ – среднеквадратичное отклонение или $h(t) = m_e^2(t) + D_e(t)$ – средний квадрат ошибки.

Для дискретных систем эти же величины рассматриваются в дискретные моменты времени

$$t_k = k \cdot T_{II}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Для оценки точности многомерной системы, имеющей n -мерный вектор выходных переменных $Y(t)$, систематическая ошибка также векторная:

$$M_e(t) = M(t) - Y_T(t), \quad (2.17)$$

или в скалярном виде

$$m_{ei}(t) = m_i(t) - y_{it}(t), \quad (2.18)$$

$$i = \overline{1, n}.$$

Вместо одной дисперсии следует рассматривать корреляционную (дисперсионную) матрицу вида

$$\Theta(t) = \left[\overset{\circ}{Y}(t) \cdot \overset{\circ}{Y}^T(t) \right] = \begin{bmatrix} \Theta_{11}(t) \dots \dots \Theta_{1n}(t) \\ \Theta_{21}(t) \dots \dots \Theta_{2n}(t) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Theta_{n1}(t) \dots \dots \Theta_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

где $\Theta_{ij}(t) = M \left[\overset{\circ}{y}_i(t) \cdot \overset{\circ}{y}_j(t) \right], \quad i, j = \overline{1, n}.$

Для оценки точности многомерной системы часто применяют скалярную величину $h_e(t)$:

$$h_e(t) = M \left[e^T(t) \cdot \Gamma \cdot e(t) \right], \quad (2.20)$$

где Γ – матрица заданных весовых коэффициентов.

Если $\Gamma = 1$ – единичная диагональная матрица, то h_e представляет собой сумму диагональных элементов матрицы $M \left[e(t) \cdot e^T(t) \right]$:

$$h_e(t) = M \left[e^T(t) \cdot I e(t) \right] = \sum_{i=1}^n (m_i^2(t) + \Theta_{ii}(t)). \quad (2.21)$$

Вероятностный анализ автоматических систем, содержащий определение математических ожиданий и корреляционных моментов выходных переменных, называется корреляционным анализом.

Для определения этих величин необходимо знать, как данная система преобразует входные переменные, т.е. должен быть задан оператор системы.

2.5. Характеристики выходных сигналов систем, заданных весовыми функциями

Для одномерной линейной системы интегральный оператор, связывающий выходную переменную $y(t)$ с входной $x(t)$ и начальным y_0 , имеет вид

$$y(t) = \int_{t_0}^t g(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (2.22)$$

$$y(t_0) = y_0,$$

где $g(t, \tau)$ – весовая функция.

Если $x(t)$ – случайная функция, а y_0 – случайная величина, то выходная переменная $y(t)$ – случайная.

Для определения математического ожидания выходной переменной $m_y(t)$ применим к (2.22) операцию математического ожидания:

$$M[y(t)] = \int_{t_0}^t g(t, \tau) M[x(\tau)] d\tau. \quad (2.23)$$

По определению $M[y(t)] = m_y(t)$; $M[x(t)] = m_x(t)$, т.е.

$$m_y(t) = \int_{t_0}^t g(t, \tau) m_x(\tau) d\tau. \quad (2.24)$$

Для определения корреляционной функции выходной переменной вычислим центрированную функцию путём вычитания из (2.22) формулы (2.24).

$$\overset{\circ}{y}(t) = \int_{t_0}^t g(t, \tau) \cdot \overset{\circ}{x}(\tau) d\tau. \quad (2.25)$$

Вычислим произведение $\overset{\circ}{y}(t_1) \cdot \overset{\circ}{y}(t_2)$ и применим операцию математического ожидания:

$$R_y(t_1, t_2) = \iint_{t_0}^{t_1, t_2} g(t_1, \tau_1) \cdot g(t_2, \tau_2) R_x(t_1, t_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (2.26)$$

Для определения дисперсии выходной переменной следует в формуле (2.26) считать $t_1 = t_2$:

$$D_y(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t g(t, \tau_1) \cdot g(t, \tau_2) R_x(t_1, t_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (2.27)$$

Таким образом, для вычисления вероятностных характеристик выходной переменной в данном случае достаточно знать математическое ожидание и корреляционную функцию входной переменной.

Формулы (2.26), (2.27) упрощаются, если случайное возмущение $\overset{\circ}{x}(t)$ – белый гауссов шум с корреляционной функцией $R_x(t_1, t_2) = G\delta(t_1 - t_2)$.

$$R_y(t_1, t_2) = G \int_{t_0}^{\max(t_1, t_2)} g(t_1, \tau) \cdot g(t_2, \tau) d\tau, \quad (2.28)$$

$$D_y(t) = G \int_{t_0}^t g^2(t, \tau) d\tau. \quad (2.29)$$

Формулы (2.24), (2.26), (2.27) обобщаются на многомерные системы, если в них $g(t, \tau)$ – матрица весовых функций (переходная матрица или матрицант); $m_y(t)$ – вектор математических ожиданий выходных переменных; $R_x(t_1, t_2)$ – матрица корреляционных функций входных переменных.

Обобщённые на векторные переменные формулы принимают вид:

$$m_y(t) = \int_{t_0}^t g(t, \tau) m_x(\tau) d\tau, \quad (2.30)$$

$$R_y(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} g(t_1, t_1) R_x(t_1, t_1) g^T(t_2, t_2) dt_1 dt_2. \quad (2.31)$$

Для стационарных автоматических систем в формулах следует рассматривать разность аргументов $t_1 - t_1$, $t_2 - t_2$.

Приведенные формулы справедливы для дискретных систем при замене весовых функций на весовые коэффициенты и интегралов – на суммы.

$$m_y(t_l) = \sum_{t_0 \leq t_k \leq t_l} g_k(t_l) \cdot m_x(t_k), \quad (2.32)$$

$$R_y(t_r, t_l) = \sum_{t_0 \leq t_k \leq t_l} \sum_{t_0 \leq t_h \leq t_r} g_k(t_l) \cdot g_r(t_r) \cdot R_x(t_k, t_h), \quad (2.33)$$

где $t_k = k \cdot T_{II}$, $t_l = l \cdot T_{II}$, $k, l = 0, 1, \dots$.

Аналогично обобщаются формулы для многомерной системы.

2.6. Корреляционный анализ систем, заданных дифференциальными уравнениями

Корреляционный анализ линейных нестационарных систем удобно проводить методом моментов.

Для этого автоматическая система для случайной векторной переменной $Y^T = [y_1 \dots y_n]$ должна быть представлена в форме стохастических уравнений вида (форма Ланжевена):

$$\dot{Y}(t) = A(t) \cdot Y(t) + N(t)U(t) + F(t)x(t); \quad Y(t_0) = Y_0, \quad (2.34)$$

где $A(t)$, $N(t)$ – матрицы заданных коэффициентов; $U(t)$ – детерминированный вектор (управления); $x(t) = m_x(t) + \overset{\circ}{x}(t)$, где $\overset{\circ}{x}(t)$ – белый гауссов шум с интенсивностью $G(t)$; Y_0 – случайный начальный вектор.

Сущность метода моментов заключается в составлении дифференциальных уравнений для вероятностных моментов вектора состояния системы и интегрирования их при заданных начальных условиях.

Данный метод позволяет получить точные дифференциальные уравнения для вероятностных моментов всех порядков линейных нестационарных систем.

Пример

Применим операцию математического ожидания почленно к правой и левой частям уравнения (2.34). Получим векторное дифференциальное уравнение для математических ожиданий.

$$\begin{aligned} \dot{m}_y(t) &= A(t) \cdot m_y(t) + N(t) \cdot U(t) + F(t) \cdot m_x(t); \\ m_y(t_0) &= m_{y0}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

где $m_y(t) = M[y(t)]$ – вектор математических ожиданий.

Получим дифференциальные уравнения для матрицы

$$\Theta(t) = M[\overset{\circ}{Y}(t) \cdot \overset{\circ}{Y}^T(t)]. \quad (2.36)$$

Чтобы получить уравнения для центрированных значений $\overset{\circ}{Y}(t)$, вычтем почленно из уравнения (2.34) уравнение (2.35).

$$\overset{\circ}{\dot{Y}}(t) = A(t) \cdot \overset{\circ}{Y} + F(t) \cdot \overset{\circ}{X}(t); \quad \overset{\circ}{Y}(t_0) = \overset{\circ}{Y}_0. \quad (2.37)$$

Продифференцируем выражение (2.36) по t :

$$\dot{q} = M[\overset{\circ}{\dot{Y}}(t) \cdot \overset{\circ}{Y}^T(t)] + M[\overset{\circ}{Y}(t) \cdot \overset{\circ}{\dot{Y}}^T(t)] \quad (2.38)$$

Подставив в правую часть (2.36) выражения для $\overset{\circ}{Y}(t)$ и $\overset{\circ}{Y}^T(t)$, после соответствующих преобразований получим векторное дифференциальное уравнение для матрицы $q(t)$:

$$\dot{q}(t) = A(t) \cdot q(t) + q(t) \cdot A^T(t) + F(t) \cdot G(t) \cdot F^T(t), \quad q(t_0) = q_0. \quad (2.39)$$

В координатной (скалярной) форме для компонент m_r и q_{rl} уравнения имеют вид

$$\dot{m}_r = \sum_{j=1}^n a_{rj} \cdot m_j + \sum_{j=1}^n n_{ri} \cdot U_j + \sum_{j=1}^n F_{rj} \cdot m_{xj}; \quad m_r(t_0) = m_{r0}, \quad (2.40)$$

$$\dot{q}_{rl} = \sum_{j=1}^n (a_{rj} q_{jl} + q_{rj} a_{lj}) + \sum_{q,j=1}^n F_{rq} \cdot F_{lj} \cdot G_{qj}, \quad (2.41)$$

$$q_{rl}(t_0) = q_{rl0}.$$

Вследствие симметрии корреляционных функций (ковариаций) $q_{rl}(t) = q_{lr}(t)$, число независимых уравнений в (2.41) равно $\frac{n(n+1)}{2}$, где n – порядок исходной линейной системы (2.34).

Изложенный метод анализа является универсальным, он применим к стационарным и нестационарным системам и позволяет в результате однократного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений определить компоненты вектора математического ожидания и корреляционной матрицы фазовых координат.

Для применения метода необходимо, чтобы случайный входной вектор возмущений был белым шумом или близок к нему.

Практически это означает, что корреляционная функция $R_x(t_1, t_2)$ должна быть близкой к δ -функции, т.е. функция спектральной плотности должна быть широкополосной и больше полосы пропускания системы.

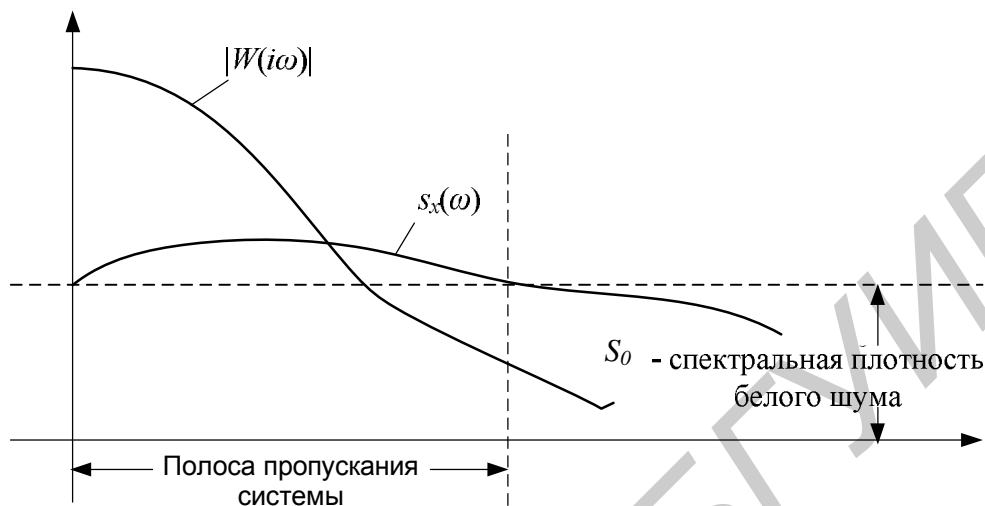


Рис. 2.6. Постоянство спектральной плотности в пределах полосы пропускания

Если в автоматической устойчивой стационарной системе существует установившейся режим, то из уравнений (2.35), (2.38) можно определить установившиеся значения моментов

$$Am + Nu + Fm_x = 0; \quad (2.42)$$

$$Aq + qA^T + FGF^T = 0. \quad (2.43)$$

Эти уравнения – алгебраические, из них определяются все вероятностные моменты фазовых координат до второго порядка.

3. РАСЧЕТ УСТАНОВИВШИХСЯ ОШИБОК АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3.1. Установившийся режим работы систем

Ранее в предыдущих темах были рассмотрены *общие методы* определения вероятностных характеристик выходных сигналов, пригодные для исследования как стационарных, так и нестационарных линейных динамических систем. Общие методы позволяют, в частности, анализировать переходные процессы.

Поставленные задачи решаются различными способами в зависимости от того, какие характеристики линейной системы заданы (т.е. как задан её оператор).

Если известна весовая функция физически возможной линейной системы $g(t, t)$, то её выходная переменная на основании общей формулы определяется следующим образом:

$$Y(t) = \int_{t_0}^t g(t, t) \cdot X(t) \cdot dt. \quad (3.1)$$

В практических исследованиях часто интересуются вероятностными характеристиками сигналов в установившихся режимах работы.

Эти характеристики можно получить по приведенным ранее формулам, полагая, что $t_0 = -\infty$.

Однако при исследовании стационарных систем такой путь не является рациональным. В этом случае пользуются более удобными и простыми формулами, полученными при использовании в качестве динамических характеристик стационарных систем *передаточных функций* или *частотных характеристик*.

Будем полагать, что стационарная система задана передаточной функцией $\Phi(P)$ или частотной характеристикой $\Phi(j\omega)$ (рис. 3.1).

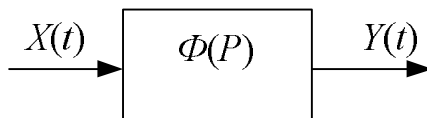


Рис. 3.1. Структурная схема стационарной системы

На вход системы действует сигнал $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t)$ и корреляционной функцией $R_x(t_1, t_2)$.

Требуется определить математическое ожидание $m_y(t)$ и дисперсию $D_y(t)$ выходного сигнала $Y(t)$.

3.2. Определение установившихся систематических ошибок стационарных линейных систем

Рассмотрим устойчивую стационарную линейную систему, работающую в установившемся режиме (т.е. когда переходный процесс закончился).

Полагая в формуле (3.1) $t_0 = -\infty$ и принимая во внимание, что для стационарной системы $g(t, t) = g(t - t)$, получим выражение для математического ожидания выходного сигнала системы:

$$m_y(t) = \int_{-\infty}^t g(t-t) \cdot m_x(t) \cdot dt. \quad (3.2)$$

Обозначим $t-t = s$; $t = t-s$.

Тогда $dt = -ds$, верхний предел интегрирования будет равен $t-t = 0$, а нижний $-t + \infty = \infty$.

Изменяя пределы интегрирования, запишем

$$m_y(t) = \int_0^{\infty} g(s) \cdot m_x(t-s) \cdot ds. \quad (3.3)$$

Разложим функцию $m_x(t-s)$ в ряд Тейлора относительно $m_x(t)$ (относительно точки t).

Обозначив $m_x^{(r)}(t) = \frac{d^r}{dt^r} m_x(t)$, получим

$$m_x(t-s) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{m_x^{(r)}(t)}{r!} s^r. \quad (3.4)$$

Подставляя выражение (3.4) в формулу (3.3), получим

$$m_y(t) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{m_x^{(r)}(t)}{r!} \cdot \int_0^{\infty} s^r \cdot g(s) \cdot ds. \quad (3.5)$$

Величины

$$m_r = \int_0^{\infty} s^r g(s) ds \quad (3.6)$$

называются моментами r -го порядка весовой функции стационарной линейной системы.

Покажем, что моменты весовой функции очень просто выражаются через значения передаточной функции системы и её производных.

Для этого воспользуемся формулой преобразования Лапласа, связывающей весовую функцию с передаточной:

$$\int_0^{\infty} g(s) \cdot e^{-ps} \cdot ds = \Phi(P). \quad (3.7)$$

Полагая в формуле (3.7) $P = 0$ (установившийся режим), находим момент нулевого порядка весовой функции стационарной линейной системы.

$$m_0 = \int_0^{\infty} g(s) \cdot ds = \Phi(0). \quad (3.8)$$

Дифференцируя формулу (3.7) r раз по P , получим

$$(-1)^r \int_0^{\infty} s^r g(s) \cdot e^{-ps} \cdot ds = \Phi^{(r)}(P). \quad (3.9)$$

Полагая в (3.9) $P = 0$, находим момент r -го порядка весовой функции стационарной линейной системы

$$m_r = \int_0^{\infty} s^r g(s) \cdot ds = (-1)^{-r} \cdot \Phi^{(r)}(0); \quad (3.10)$$

$(r = 1, 2, \dots).$

Подставляя полученные выражения для моментов весовой функции в формулу (3.5), получим

$$m_y(t) = \sum_0^{\infty} \frac{\Phi^{(r)}(0)}{r!} \cdot m_x^{(r)}(t). \quad (3.11)$$

Формула (3.11) является расчётной. При этом $\Phi(P)$ – передаточная функция замкнутой системы от входа X до выхода y .

В частности, если $m_x = const$ ($r = 0$), то из (3.11) следует

$$m_y = \Phi(0) \cdot m_x. \quad (3.12)$$

Систематическая ошибка системы определяется как разность между математическим ожиданием выходной переменной m_y и требуемым её значением

$$e(t) = m_y(t) - y_T(t). \quad (3.13)$$

Если система должна выполнять заданную линейную операцию L над входным полезным сигналом, то

$$e(t) = m_y(t) - Lm_x(t). \quad (3.14)$$

На основании (3.11) имеем

$$y_T = Lm_x(t) = \sum_0^{\infty} \frac{\Phi_T(0)}{r!} \cdot m_x^{(L)}(t), \quad (3.15)$$

где $\Phi_T(P)$ – передаточная функция идеальной (требуемой) системы.

Следовательно,

$$e(t) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} [\Phi^{(r)}(0) - \Phi_T^{(r)}(0)] \cdot m_x^{(r)}(t). \quad (3.16)$$

Величины

$$C_r = \frac{1}{r!} [\Phi^{(r)}(0) - \Phi_T^{(r)}(0)]; (r = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.17)$$

называются **коэффициентами ошибок**. Таким образом, систематическая ошибка системы равна

$$m_e(t) = e(t) = \sum_0^{\infty} C_r \cdot m_x^{(r)}(t). \quad (3.18)$$

Первые три коэффициента ошибок в соответствии с их физическим смыслом имеют ещё специальные названия:

$C_0 = \Phi(0) - \Phi_T(0)$ – коэффициент ошибки по положению;

$C_1 = \Phi'(0) - \Phi_T'(0)$ – коэффициент ошибки по скорости;

$C_2 = \frac{1}{2} [\Phi''(0) - \Phi_T''(0)]$ – коэффициент ошибки по ускорению.

В частном случае для **следающей системы** требуемый выходной сигнал системы тождественно равен полезному входному сигналу и формула для ошибки имеет вид

$$e(t) = m_y(t) - m_x(t). \quad (3.19)$$

Если следящая система задана в виде структурной схемы, представленной на рис. 3.2,



Рис. 3.2. Структурная схема следящей системы

то передаточная функция от входа x к выходу y имеет вид

$$\Phi_e(P) = \frac{1}{1 + W(P)}. \quad (3.20)$$

Для следящей системы $\Phi_T(P) = 1$ и формулы для коэффициентов ошибок принимают вид

$$C_0 = \Phi(0) - 1; C_r = \frac{1}{r!} \Phi^{(r)}(0); \quad (3.21)$$

$$(r = 1, 2, \dots).$$

Систематическая ошибка следящей системы определяется по формуле

$$m_e(t) = (\Phi(0) - 1) \cdot m_x + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \Phi_e^{(r)}(0) \cdot m_x^{(r)}, \quad (3.22)$$

где $\Phi_e(P)$ вычисляется по формуле (3.20).

3.3. Определение установившейся дисперсии выходной переменной стационарной линейной системы

Для определения установившейся дисперсии выходной переменной (одномерной) стационарной линейной системы воспользуемся формулой для установившегося значения случайной центрированной составляющей.

$$\overset{\circ}{y}(t) = \int_{-\infty}^t g(t-t) \cdot \overset{\circ}{x}(t) \cdot dt. \quad (3.23)$$

Заменяя переменные интегрирования $t-t = t_1$ и пределы интегрирования, получаем

$$\overset{\circ}{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, t_1) \cdot \overset{\circ}{x}(t-t_1) \cdot dt_1. \quad (3.24)$$

Дисперсию переменной $\overset{\circ}{y}(t)$ вычислим по известной формуле

$$D_y(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(t_1, t_2) \cdot g(t_1, t_2) \cdot R_x(t_1 - t_2) \cdot dt_1 \cdot dt_2, \quad (3.25)$$

где

$$R_x(t_1 - t_2) = M \left[\overset{\circ}{x}(t-t_1) \cdot \overset{\circ}{x}(t-t_2) \right]. \quad (3.26)$$

Корреляционная функция $R_x(t_1 - t_2)$ стационарного случайного процесса связана со спектральной плотностью формулой преобразования Фурье.

$$R_x(t_1 - t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) \cdot e^{j\omega(t_1 - t_2)} \cdot d\omega. \quad (3.27)$$

Подставляя (3.27) в (3.25), получим

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} g(t, t_1) \cdot e^{j\omega t_1} \cdot dt_1 \right) \left(\int_0^{\infty} g(t, t_2) \cdot e^{-j\omega t_2} \cdot dt_2 \right) \cdot s_x(\omega) d\omega. \quad (3.28)$$

По определению (преобразование Лапласа)

$$\int_0^{\infty} g(t, t_1) \cdot e^{j\omega t_1} dt_1 \stackrel{\Delta}{=} \Phi(-j\omega); \quad \int_0^{\infty} g(t_1, t_2) \cdot e^{-j\omega t_2} \cdot dt_2 \stackrel{\Delta}{=} \Phi(j\omega).$$

Тогда формула (3.28) принимает вид

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 \cdot s_x(\omega) \cdot d\omega, \quad (3.29)$$

где $|\Phi(j\omega)|^2 = \Phi(j\omega) \cdot \Phi(-j\omega)$ – квадрат модуля частотной характеристики.

В соответствии с формулой (3.29) установившаяся дисперсия выходного сигнала постоянна.

С другой стороны, ранее была получена формула

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} s_y(w) \cdot dw. \quad (3.30)$$

Сравнивая правые части формул (3.29) и (3.30), получим связь спектральной плотности $s_y(w)$ выходного сигнала со спектральной плотностью $s_x(w)$ входного сигнала, действующего на стационарную систему с частотной характеристикой $\Phi(jw)$:

$$S_y(w) = |\Phi(jw)|^2 \cdot S_x(w). \quad (3.31)$$

Частотная характеристика $\Phi(jw)$ физически возможной устойчивой системы, заданной, например, дифференциальными уравнениями, представляет собой дробно-рациональную функцию частоты, т.е.

$$\Phi(jw) = \left| \frac{H(jw)}{F(jw)} \right|^2, \quad (3.32)$$

где $H(jw)$, $F(jw)$ – полиномы относительно jw с постоянными коэффициентами.

Спектральная плотность $s_x(w)$ стационарного случайного процесса также может быть аппроксимирована или представлена в виде

$$s_x(w) = \left| \frac{M(jw)}{N(jw)} \right|^2, \quad (3.33)$$

где $M(jw)$, $N(jw)$ – полиномы относительно jw с постоянными коэффициентами.

Из формул (3.32) и (3.33) следует, что при определенных условиях подынтегральное выражение в формуле (3.29) является дробно-рациональной функцией w и его можно привести к виду

$$\begin{aligned} |\Phi(jw)|^2 s_x(w) &= \frac{[H(jw)]^2 \cdot [M(jw)]^2}{[F(jw) \cdot N(jw)][F(-jw) \cdot N(-jw)]} = \\ &= \frac{B_n(jw)}{A_n(jw)A_n(-jw)}; \end{aligned} \quad (3.34)$$

где $A_n(jw) = F(jw) \cdot N(jw) = a_0(jw)^n + a_1(jw)^{n-1} + \dots + a_n$;

$$B_n(jw) = H^2(jw) \cdot M^2(jw) = b_0(jw)^{2n-2} + b_1(jw)^{2n-4} \dots + b_{n-1}.$$

Подставляя выражение (3.34) в (3.29), приводим его к виду

$$D_y = 2p \cdot I_n; \quad I_n = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_n(jw)}{A_n(jw)A_n(-jw)} dw. \quad (3.35)$$

Для интегралов I_n составлены таблицы, при помощи которых их значения выражаются через параметры функций $A_n(i\omega)$ и $B_n(i\omega)$.

Например,

$$I_1 = \frac{b_0}{2a_0a_1}; I_2 = \frac{-b_0 + \frac{a_0b_1}{a_2}}{2a_0a_1} \dots \text{и так далее.}$$

Часто встречаются случаи, когда полоса пропускания $\Delta\omega$ стационарной системы мала по сравнению с шириной спектра возмущения (рис. 3.3).

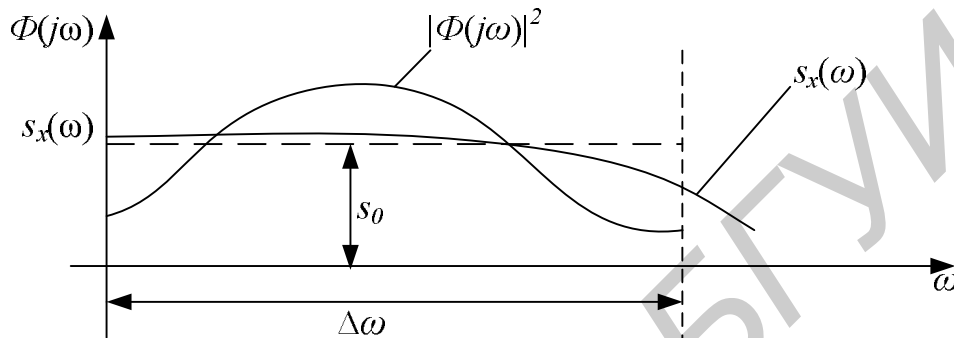


Рис. 3.3. Эффективная полоса пропускания системы

В таких случаях оказывается возможным в формуле (3.29) функцию $s_x(\omega)$ в пределах полосы пропускания заменить средним значением s_0 и вынести за знак интеграла.

При этом

$$D_y \approx s_0 \cdot \Delta\omega, \tag{3.36}$$

где

$$\Delta\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 d\omega. \tag{3.37}$$

Величина $\Delta\omega$ называется **эффективной полосой пропускания системы**.

Заметим, что применение формулы (3.36) вместо (3.29) равноценно замене реального возмущения $\overset{\circ}{X}(t)$ белым шумом.

3.4. Законы распределения выходных сигналов линейных систем

Эксперименты показывают, что сигналы, действующие на входы большинства автоматических систем, имеют, как правило, нормальное распределение. Покажем это.

Если на вход линейной системы действует нормально распределённый сигнал, то выходной сигнал системы также будет нормально распределён.

Действительно, если $X(t)$ на отрезке времени $t - t_0 = T$ является нормально распределённой случайной функцией, то значения $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ – сечения процесса при любом выборе аргументов t_1, t_2, \dots, t_n имеют нормальное распределение.

Если интервал T разбить на N участков, то при достаточно большом N вместо интеграла Дюамеля можно записать формулу

$$Y(t) = \sum_{k=1}^N g(t, t_k) \cdot x(t_k) \cdot \frac{T}{N}. \quad (3.38)$$

Система случайных величин $X(t_k), (k = \overline{1, N})$ является нормальной, так как функция $X(t)$ имеет нормальное распределение. Система случайных величин $g(t, t_1) \cdot X(t_1) \frac{T}{N}, \dots, g(t, t_k) X(t_k) \frac{T}{N}, \dots, g(t, t_n) X(t_n) \cdot \frac{T}{N}$ – также нормально распределена при любом фиксированном значении t , так как умножение случайной величины на постоянный коэффициент не изменяет характера её распределения.

Сумма нормально распределённых случайных величин подчиняется нормальному закону распределения. Следовательно, при любом фиксированном значении t случайная величина $Y(t)$ имеет нормальный закон распределения. Это является необходимым и достаточным условием нормальности выходного сигнала $Y(t)$.

Для многомерных линейных систем с независимыми входами можно сформулировать следующее положение.

Распределение сигнала на любом из выходов системы близко к нормальному при любом распределении входных сигналов.

Сигнал на k -м выходе многомерной системы с n входами в соответствии с приведённой ранее формулой можно записать в виде

$$Y_k(t) = \sum_{h=1}^n Z_{kh}(t), \quad (3.39)$$

где

$$Z_{kh}(t) = \int_{t_0}^t g_{kh}(t, \tau) \cdot X_h(\tau) \cdot d\tau. \quad (3.40)$$

Если функции $X_h(t); (h = 1, \dots, n)$ независимы, то для любого t случайные величины $Z_{kh}(t); (h = 1, \dots, n)$ будут независимы.

Сумма даже небольшого числа независимых случайных величин имеет закон распределения, близкий к нормальному (доказано в теории вероятностей).

4. РАСЧЕТЫ ПО МИНИМУМУ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ ОШИБКИ

4.1. Критерии оптимальности автоматических систем

Оптимальная автоматическая система в отличие от неоптимальной обладает наиболее высокой эффективностью при заданных ограничениях.

В состав ограничений входят заданная структура системы, диапазоны условий применения и другие элементы.

Понятие оптимальной системы, выбранный критерий эффективности или критерий качества имеют экстремальное значение – минимум или максимум в зависимости от смысла.

Условием оптимальности стохастической автоматической системы в целом может быть максимум вероятности выполнения ею своего предназначения (событие Q – получение максимальной производительности, прибыли и т. д.)

$$P(Q) = \max. \quad (4.1)$$

Для оптимальных систем обнаружения критерий оптимальности – минимум ошибки обнаружения цели

$$P_{ou} = \min \quad (4.2)$$

или минимум ошибки обнаружения цели при заданной вероятности ложной тревоги (критерий Неймана–Пирсона):

$$P(B|\bar{A}) = P_{.m}; P_{ou} = \min. \quad (4.3)$$

Если на автоматическую систему действуют одновременно полезный сигнал и помеха, то возникает задача оптимального расчёта системы для получения наименьшей результирующей ошибки.

С точки зрения наилучшего воспроизведения полезного сигнала система должна иметь возможно большую полосу пропускания, а с точки зрения наилучшего подавления помехи система, наоборот, должна иметь меньшую полосу пропускания. Критерием получения оптимального решения здесь будет минимальное значение результирующей ошибки системы, определяемой полезным сигналом и помехой.

Для случайных величин наиболее просто определить *среднеквадратичную ошибку*, поэтому её и используют для оценки точности автоматической системы.

Минимум среднеквадратичной ошибки определяется выражением

$$M[(Y - Y_T)^2] = \min, \quad (4.4)$$

где Y – выходной сигнал системы; Y_T – требуемый выходной сигнал; M – символ математического ожидания.

Определением характеристик систем по заданным критериям оптимальности занимается *теория оптимальных систем*.

Так как критерии оптимальности различны по физическому смыслу и математическому описанию, то и методы расчёта оптимальных систем различны.

Рассмотрим расчёт системы по критерию *минимума среднеквадратичной ошибки*, так как данный критерий достаточно распространен в теории оптимальных систем.

4.2. Условие минимума среднеквадратичной ошибки

Задача оптимизации формулируется следующим образом.

Имеется система автоматического управления заданной структуры. Необходимо так выбрать параметры этой системы, чтобы получить минимум среднеквадратичной ошибки при заданных статистических характеристиках полезного сигнала и помехи.

Обозначим $Y_0(t)$ – выходной сигнал системы, оптимальной по критерию минимума среднеквадратичной ошибки.

Если $Y(t)$ – выходной сигнал любой другой системы данного класса (неоптимальной), то

$$M[(Y_0 - Y_T)^2] \leq M[(Y - Y_T)^2], \quad (4.5)$$

где $Y_T(t)$ – требуемый выходной сигнал (аргумент t для простоты записи опущен).

Добавляя $(Y_0 - Y_0)$ в скобки правой части неравенства (4.5), получим

$$M[(Y - Y_0 + Y_0 - Y_T)^2] = M[(Y - Y_0)^2 + (Y_0 - Y_T)^2 + 2(Y - Y_0)(Y_0 - Y_T)]. \quad (4.6)$$

Следовательно, из (4.5) и (4.6):

$$M[(Y - Y_T)^2] = M[(Y_0 - Y_T)^2] + \Delta, \quad (4.7)$$

где

$$\Delta = M[(Y - Y_0)^2] + 2M[(Y - Y_0)(Y_0 - Y_T)]. \quad (4.7)$$

Из равенства (4.7) следует, что для выполнения неравенства (4.5) необходимо, чтобы

$$\Delta > 0; \quad (4.8)$$

$$M[(Y_0 - Y_T)^2] \neq \infty. \quad (4.9)$$

Так как первое слагаемое в правой части равенства (4.7) всегда положительно, то для выполнения требования (4.8) достаточно приравнять нулю второе слагаемое равенства (4.7):

$$M[(Y - Y_0)(Y_0 - Y_T)] = 0. \quad (4.10)$$

Требование (4.9) по физическому смыслу говорит о том, что величина среднеквадратичной ошибки оптимальной системы всегда конечна. Формально это значит, что в состав сигнала $Y_0(t)$ не должен входить белый шум.

Равенство (4.10) вместе с ограничением по виду выходного сигнала оптимальной системы является **общим условием минимума** среднеквадратичной ошибки.

4.3. Уравнение оптимальной линейной системы

Получим уравнение, определяющее оптимальную линейную систему.

Примем за динамическую характеристику линейной оптимальной системы весовую функцию $g_0(t, t)$.

Выходной сигнал оптимальной системы определяется формулой

$$Y_0(t) = \int_0^T g_0(t, t) \cdot X(t) \cdot dt, \quad (4.11)$$

где $X(t)$ – входной сигнал системы; T – время наблюдения входного сигнала (здесь и далее полагается $t_0 = 0$).

Весовую функцию произвольной линейной системы представим в виде

$$g(t, t) = g_0(t, t) + h(t, t). \quad (4.12)$$

Тогда сигнал на выходе произвольной системы будет равен

$$Y(t) = \int_0^T [g_0(t, t) + h(t, t)] \cdot X(t) \cdot dt. \quad (4.13)$$

Критерием оптимальности данной системы будем считать минимум среднеквадратичной ошибки.

В соответствии с полученным условием (4.10) и с учётом (4.13) запишем

$$M \left[\int_0^T h(t, I) \cdot X(I) \cdot dI \left(\int_0^T g_0(t, t) \cdot X(t) \cdot dt - Y_T(t) \right) \right] = 0. \quad (4.14)$$

После умножения выражения в круглых скобках на $X(I)$ и выполнения операции математического ожидания получаем

$$\int_0^T h(t, I) \left(\int_0^T g_0(t, t) \cdot R_X(t, I) \cdot dt - R_{YTX}(t, I) \right) \cdot dI = 0, \quad (4.15)$$

где обозначено

$$R_X(t, I) = M [X(t) \cdot X(I)]; R_{YTX}(t, I) = M [Y_T(t) \cdot X(I)]. \quad (4.16)$$

В общем случае, когда $Y(t) \neq Y_0(t)$ и функция $h(t, I) \neq 0$, равенство (4.15) будет удовлетворяться при условии, что равно нулю выражение в скобках, т.е.

$$\int_0^T g_0(t, t) \cdot R_X(t, l) \cdot dt = R_{YTX}(t, l). \quad (4.17)$$

Выражение (4.17) и есть уравнение, определяющее оптимальную линейную систему. Оно называется интегральным уравнением Винера–Хопфа и получено из условия (4.10).

4.4. Определение оптимальной передаточной функции стационарной линейной системы

Интегральное уравнение Винера–Хопфа является основным уравнением статистической теории оптимальных систем, и методы решения этого уравнения составляют основу теории оптимальных систем.

Нетрудно видеть, что уравнение Винера–Хопфа (4.17) легко решается в случае, когда случайная функция $X(t)$ (входной сигнал системы) представляет собой *белый шум*.

В этом случае корреляционная функция $R_X(t, l)$ выражается через δ -функцию и уравнение (4.17) превращается в алгебраическое.

Действительно, подставляя в уравнение (4.17) выражение корреляционной функции белого шума $X(t)$:

$$R_X(t, l) = G(l) \cdot d(t - l) \quad (4.18)$$

и вспоминая, что интеграл от произведения d -функции на любую функцию равен значению этой функции в точке разрыва d -функции, получаем

$$G(l) \cdot g_0(t, l) = R_{YTX}(t, l), (0 \leq l \leq T). \quad (4.19)$$

Решая это уравнение и заменяя букву l буквой t , получим

$$g_0(t, t) = \frac{R_{YTX}(t, t)}{G(t)}; \quad (4.20)$$

$$0 \leq t \leq T.$$

Вне интервала $[0, T]$ функцию $g_0(t, t)$ следует принять равной нулю.

Простота решения уравнения Винера–Хопфа в случае, когда $X(t)$ – белый шум, приводит к следующей идее решения этого уравнения в общем случае, когда $X(t)$ не является белым шумом.

Если найти линейную систему, преобразующую данную случайную функцию $X(t)$ в белый шум $V(t)$, а затем найти оптимальную систему для случая белого шума $V(t)$ на входе, то последовательное соединение этих двух систем и будет представлять собой оптимальную линейную систему для случайной функции $X(t)$ на входе.

Пусть устойчивая стационарная линейная система, преобразующая случайную функцию $X(t)$ в белый шум с единичной спектральной плотностью $S_V = 1$ и интенсивностью $G = 2p \cdot S_V = 2p$, имеет передаточную функцию

$$y^{-1}(P) = \frac{1}{y(P)},$$

где $y(P)$ преобразует $V(t)$ в $X(t)$; $y^{-1}(P)$ – обратная передаточная функция.

Обозначим через $g_V(t, \tau)$ неизвестную весовую функцию оптимальной системы для случая белого шума $V(t)$ на входе. Тогда оптимальной системой для входной случайной функции $X(t)$ будет последовательное соединение системы с передаточной функцией $1/y(P)$ и системы с весовой функцией $g_V(t, \tau)$ (передаточной функцией $1/\Phi_V(P)$) (рис 4.1).

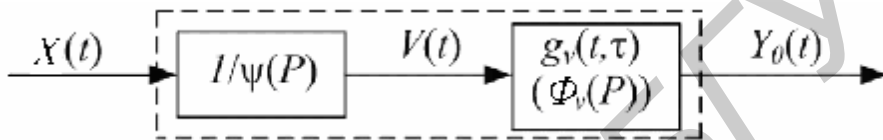


Рис. 4.1. Структурная схема оптимальной системы

Для определения весовой функции $g_V(t, \tau)$ оптимальной линейной системы для случая белого шума $V(t)$ на входе используем уравнение Винера–Хопфа (4.17) при $T = \infty$. При этом правая часть уравнения (4.17) представляет собой взаимную корреляционную функцию $R_{YTV}(t - I)$ требуемого выходного сигнала $Y_T(t)$ системы и белого шума $V(I)$ с $G = 2ps_0 = 2p$ при $s_0 = 1$.

Применяя формулу (4.20), получим

$$g_V(t, \tau) = \frac{1}{2p} R_{YTV}(t - \tau) = g_V(t - \tau). \quad (4.21)$$

Так как оптимальная линейная система для белого шума $V(t)$ на входе стационарна, то её передаточная функция $\Phi_V(P)$ связана с весовой функцией преобразованием Лапласа.

$$\Phi_V(P) = \int_0^{\infty} g_V(s) \cdot e^{-P(s)} \cdot ds = 2p \int_0^{\infty} R_{YTV}(s) e^{-ps} \cdot ds, \quad (4.22)$$

где обозначено $s = t - \tau$.

Так как передаточная функция последовательного соединения линейных систем равна произведению передаточных функций соединяемых систем, то передаточная функция оптимальной линейной системы для входной случайной функции $X(t)$ определяется формулой

$$\Phi_0(P) = \frac{\Phi_V(P)}{y(P)}. \quad (4.23)$$

Для полного решения задачи необходимо найти взаимную корреляционную функцию $R_{YTV}(t-t) = R_{YTV}(s)$.

В теории случайных функций доказано, что взаимная спектральная плотность выходной переменной Y стационарной линейной системы с любой стационарной случайной функцией Z равна взаимной спектральной плотности входной переменной X со случайной функцией Z , умноженной на частотную характеристику системы:

$$s_{YZ}(w) = s_{XZ}(w) \cdot \Phi(-jw). \quad (4.24)$$

Так как в нашей задаче белый шум $V(t)$ есть результат преобразования случайной функции $X(t)$ системой с передаточной функцией $\frac{1}{y(P)}$, то для определения взаимной спектральной плотности $s_{YTV}(w)$ случайной функции $Y_T(t)$ и белого шума $V(t)$ применим формулу (4.24):

$$s_{YTV}(w) = \frac{s_{YTX}(w)}{y(-jw)}. \quad (4.25)$$

Зная взаимную спектральную плотность случайных функций $Y_T(t)$ и $V(t)$, можно найти их взаимную корреляционную функцию по известной формуле (преобразование Фурье):

$$R_{YTV}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{YTV}(w) e^{jw t} dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_{YTX}(w)}{y(-jw)} e^{jw t} dw. \quad (4.26)$$

Подставляя выражение (4.26) в (4.22) и после этого подставляя полученное выражение в (4.23), заменяя при этом s на t , получим следующую формулу для передаточной функции оптимальной линейной системы:

$$\Phi_0(P) = \frac{1}{2py(P)} \int_0^{\infty} e^{-Pt} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_{YTX}(w)}{y(-jw)} e^{jw t} dw. \quad (4.27)$$

Формула (4.27) является основной формулой теории экстраполяции, интерполяции и сглаживания случайных функций, разработанной Винером.

Двойной интеграл в формуле (4.27) во многих случаях легко вычисляется.

Например, этот интеграл легко вычисляется, если отношение $\frac{s_{YTX}}{y(-jw)}$ является дробно-рациональной функцией. Это имеет место в частном случае так называемого оптимального сглаживания, когда требуемый выходной сигнал равен входному:

$$Y_T(t) = X(t).$$

В этом случае, полагая в (4.27) $P = j\omega$ и выполняя интегрирование, получим следующую формулу для частотной характеристики оптимальной линейной системы:

$$\Phi_0(j\omega) = \frac{1}{Y(j\omega)} \cdot \left[\frac{s_{YTX}(w)}{Y(-j\omega)} \right]_+,$$

где квадратные скобки со знаком + внизу означают, что рациональная дробь, заключённая в эти скобки, должна быть разложена на простые дроби и отброшены все простые дроби, соответствующие корням знаменателя, при которых система неустойчива (этот вопрос рассматривается в теории устойчивости.).

Необходимо заметить, что нахождение оптимальной передаточной функции ещё не означает, что реальная автоматическая система может быть выполнена оптимальной, так как реализация её может быть сопряжена с большими трудностями.

Оптимальную передаточную функцию, за исключением простейших случаев, следует считать идеальной функцией, к которой по возможности надо стремиться при создании реальной автоматической системы.

Развивающаяся теория оптимальных систем даёт возможность решить ряд практических задач.

4.5. Определение весовой функции оптимальной линейной системы

Предполагается, что мы умеем найти $g^{-1}(t, t)$ – весовую функцию системы, преобразующую данную случайную функцию $X(t)$ в белый шум $V(t)$.

При этом известна весовая функция обратной системы $g(t, t)$, формирующей $X(t)$ из белого шума $V(t)$, т.е.

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_{t_0}^t g^{-1}(t, t) X(t) dt; \\ X(t) &= \int_{t_0}^t g(t, t) \cdot V(t) dt. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Обозначим весовую функцию оптимальной линейной системы для белого шума $V(t)$ на входе через $g_v(t, t)$.

Искомая оптимальная система представляет собой последовательное соединение линейных систем с весовыми функциями $g^{-1}(t, t)$ и $g_v(t, t)$ (рис. 4.2).

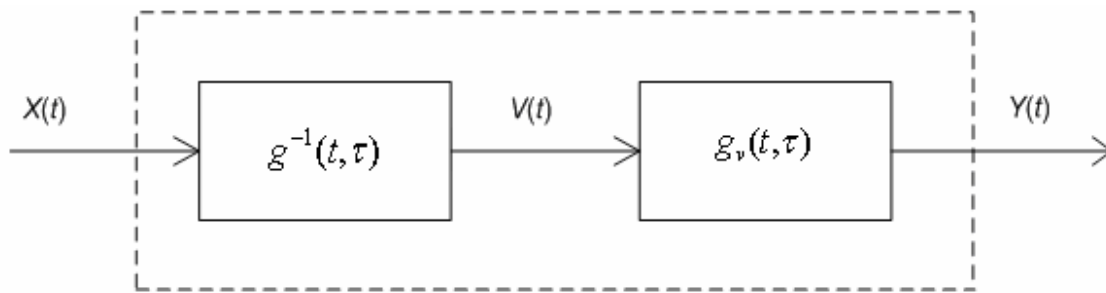


Рис. 4.2. Оптимальная система

Ранее была получена формула для $g_v(t, t)$.

$$g_v(t, t) = \frac{R_{Y,V}(t, t)}{G(t)}, \quad (4.29)$$

где $G(t)$ – интенсивность белого шума $V(t)$.

По формуле для последовательного соединения систем, описываемых весовыми функциями, имеем

$$g_{\text{опт}}(t, t) = \int_t^t g_v(t, s) \cdot g^{-1}(s, t) ds.$$

В данном случае s – переменная интегрирования $t < s < t$, t – момент действия на систему d -функции (входного сигнала).

Существуют аналитические методы решения задачи, когда функция $X(t)$ стационарна и имеет дробно-рациональную спектральную плотность.

4.6. Синтез оптимальной стационарной линейной системы методом логарифмических частотных характеристик

В данном случае оптимизация системы проводится введением в ее структурную схему корректирующей цепи, структура которой и параметры подбираются соответствующим образом.

Корректирующая цепь может быть последовательной (рис. 4.3) и параллельной (рис. 4.4).

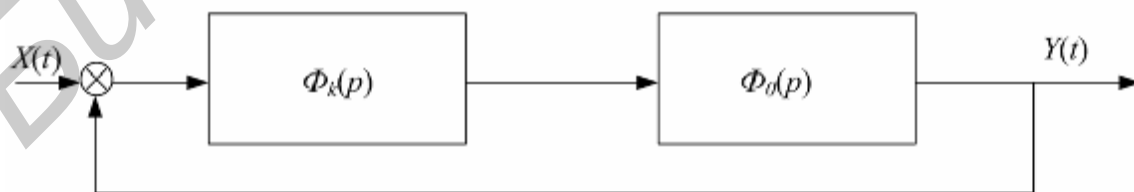


Рис. 4.3. Последовательная корректирующая цепь

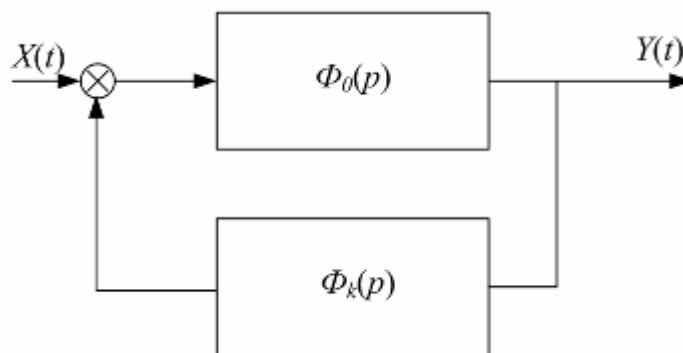


Рис. 4.4. Параллельная корректирующая цепь

$\Phi_0(p)$ – передаточная функция заданной части системы (например – объекта управления); $\Phi_k(p)$ – передаточная функция корректирующей цепи, которую требуется определить.

Сущность метода состоит в том, что по найденной передаточной функции оптимальной стационарной линейной системы и передаточным функциям известных звеньев проектируемой системы $\Phi_0(p)$ определяется оптимальная передаточная функция корректирующей цепи $\Phi_k(p)$.

Например, если определена оптимальная передаточная функция системы с обратной связью, представленная на рис. 4.4 (обозначим ее $\Phi_{\text{опт}}(p)$ – система с жесткой отрицательной обратной связью):

$$\Phi_{\text{опт}}(p) = \frac{\Phi_k(p) \cdot \Phi_0(p)}{1 + \Phi_k(p)\Phi_0(p)}, \quad (4.30)$$

то передаточная функция корректирующего звена на основании (4.30) будет

$$\Phi_k(p) = \frac{\Phi_{\text{опт}}(p)}{\Phi_0(p)(1 - \Phi_{\text{опт}}(p))}. \quad (4.31)$$

Алгоритм определения $\Phi_k(p)$ следующий:

1. Построение логарифмической амплитудной частотой характеристики (ЛАЧХ $L(w)$) разомкнутой части системы.
2. Построение теоретической (желаемой) ЛАЧХ $L_{\text{жс}}(w)$ разомкнутой системы.
3. Построение ЛАЧХ корректирующей цепи $L_k(w) = L_{\text{жс}}(w) - L(w)$.
4. Определение по $L_k(w)$ передаточной функции корректирующей цепи (звена) и реализация ее в системе.

4.7. Определение оптимальной линейной системы методом канонических разложений

Ранее было получено уравнение Винера–Хопфа, определяющее оптимальную линейную систему

$$\int_0^T g_0(t, t) R_x(t, l) dt = R_{YtX}(t, l). \quad (4.32)$$

Уравнение (4.32) может быть в общем случае решено методом канонических разложений. При этом решение получается в форме бесконечного ряда, конечным отрезком которого можно пользоваться для приближенного определения оптимальной линейной системы.

Представим входной сигнал $X(t)$ каноническим разложением на интервале наблюдения $t - T \leq t \leq t$:

$$X(t) = \sum_n V_n x_n(t). \quad (4.33)$$

Задаётся система пар функций $a_n(t)$ и $x_n(t)$, удовлетворяющих условиям

$$\int_{t-T}^t x_n(t) \cdot \overline{a_m(t)} dt = d_{nm}; \quad (4.34)$$

$$x_n(t) = \frac{1}{D_n} \int_{t-T}^t R_x(t, s) a_n(s) ds; \quad (4.35)$$

$$d_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \quad (4.36)$$

где D_n – дисперсия $x_n(t)$

Решение уравнения (4.32) ищется в форме ряда

$$g_0(t, t) = \sum_n h_n \cdot \overline{a_n(t)}, \quad (4.37)$$

где коэффициенты h_n определяются выражением

$$h_n = \frac{1}{D_n} \int_{t-T}^t a_n(s) \cdot R_{YtX}(t, s) \cdot ds. \quad (4.38)$$

При этом $R_{YtX}(t, s)$ представляется разложением

$$R_{YtX}(t, s) = \sum_n D_n h_n \overline{x_n(s)}; \quad (t - T \leq s \leq t), \quad (4.39)$$

где $\overline{a_n(t)}$ – в общем случае комплексно-сопряжённая $a_n(t)$ функция; $\overline{x_0(t)}$ – сопряжённая $X(t)$ координатная функция.

Если функция $R_{YRX}(t, \mathcal{S})$ не может быть представлена разложением (4.39), то уравнение (4.32) решения не имеет.

Рассмотренные выше методы при определённых условиях могут быть применены и для оптимизации дискретных систем.

4.8. Оптимальные системы, описываемые дифференциальными уравнениями

Общая постановка задачи следующая: имеется система с измерителем и блоком оценки (рис. 4.5).

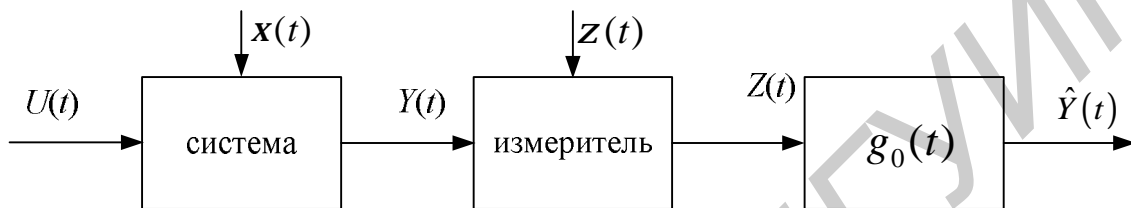


Рис. 4.5. Система с измерителем и блоком оценки:

$U(t)$ – входной сигнал системы; $Y(t)$ – выходной сигнал системы; $\hat{Y}(t)$ – оценка сигнала $Y(t)$; $x(t)$ и $z(t)$ – соответственно шумы, действующие на систему и измеритель; $g_0(t)$ – весовая функция блока оценки выходного сигнала (неизвестная)

Задача состоит в получении оценки \hat{Y} – наилучшей по точности, т.е. критерий оптимизации – среднеквадратичная ошибка.

$$M[(\hat{Y} - Y)^2] = \min. \quad (4.40)$$

Уравнение Винера–Хопфа в данном случае имеет вид:

$$\int_0^T g_0(t, l) R_Z(t, l) dt = R_{\hat{Y}Z}(t, l), \quad (4.41)$$

где $R_z(t, l) = M[Z(t), Z(l)]$; $R_{\hat{Y}Z}(t, l) = M[\hat{Y}(t) \cdot Z(l)]$.

Для системы, записанной в форме дифференциальных уравнений, и линейного измерителя на основе интегрального уравнения Винера–Хопфа задача впервые была решена Калманом.

При этом оператор оптимальной системы записывается также в форме дифференциальных уравнений и носит название фильтр Калмана (Калмана–Бьюси).

Рассмотрим задачу в классической постановке.

Автоматическая система (объект управления) описывается линейными дифференциальными уравнениями в векторно-матричной форме вида (индекс t опустим для простоты)

$$\dot{Y} = AY + NU + FX; \quad Y(t_0) = Y_0, \quad (4.42)$$

где $U = U(t)$ – детерминированный входной сигнал (управление); $X = X(t)$ – гауссов векторный белый шум с матрицей интенсивностей $G = G(t)$; A, N, F – зависящие от времени матрицы коэффициентов.

Вектор $Y(t)$ не доступен наблюдению, а наблюдается (измеряется) вектор $Z = Z(t)$.

$$Z = CY + \mathfrak{Z}, \quad (4.43)$$

где $C = C(t)$ – известная матрица, $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(t)$ – центрированный гауссов белый шум с матрицей интенсивностей $Q = Q(t)$.

Считаем, что шумы $x(t)$ и $z(t)$ не коррелированы.

Структурная схема объекта управления и измерителя при такой постановке задачи изображена на рис. 4.6.

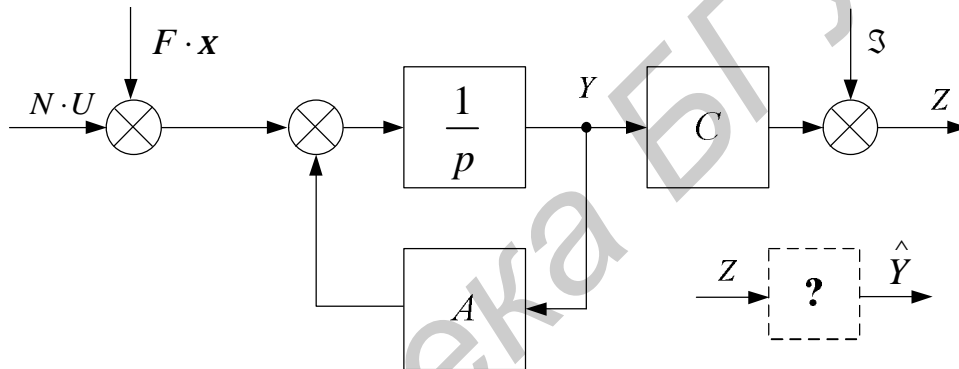


Рис. 4.6. Структурная схема объекта управления и измерителя

Необходимо определить структурную схему оптимального блока оценки выходного сигнала \hat{Y} .

Существует несколько способов вывода уравнения фильтра Калмана, структурная схема которого изображена на рис. 4.7.

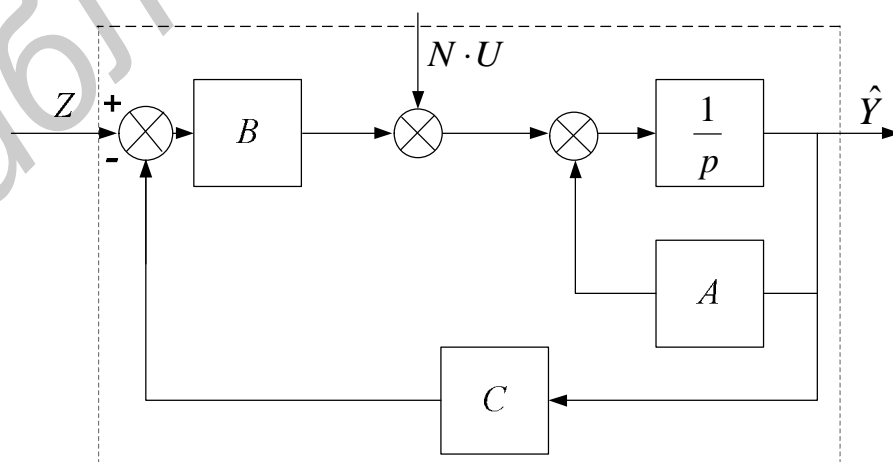


Рис. 4.7. Структурная схема оптимального блока оценки

Уравнение фильтра Калмана имеет вид

$$\dot{\hat{Y}} = A\hat{Y} + NU + B(Z - C\hat{Y}); \quad \hat{Y}(t_0) = \hat{Y}_0, \quad (4.44)$$

где

$$B = R \cdot C^T \cdot Q^{-1}, \quad (4.45)$$

$$\dot{R} = A \cdot R + R \cdot A^T - BCR + F \cdot G \cdot F^T; \quad R(t_0) = R_0, \quad (4.46)$$

где $R = M[\Delta \cdot \Delta^T]$, $\Delta = \hat{Y} - Y$. Уравнение (4.46) – матричное уравнение Риккати.

Фильтр Калмана может быть использован для экстраполяции оцениваемой переменной по априорным данным. В этом случае не используются последние изменения – функция невязки (обновляющийся процесс по другой терминологии, $(Z - C\hat{Y})$ – функция невязки), т.е. функция невязки (невязка) для последнего момента времени в фильтре отсутствует.

Уравнение оптимального экстраполятора для прогноза, описываемого уравнением (4.42), следующее:

$$\dot{\hat{Y}}_s(t) = A(t) \cdot \hat{Y}_s(t) + N(t) \cdot U, \quad \hat{Y}_s(t_0) = \hat{Y}(t_0). \quad (4.47)$$

Как видно из (4.47), уравнение оптимального экстраполятора аналогично уравнению фильтра.

В заключение необходимо отметить следующее.

Для построения оптимального фильтра Калмана необходимо точно знать математические модели оцениваемого процесса измерителя, а также интенсивности шумов процесса и измерителя.

Расширением вектора фазовых координат небелые (цветные) шумы могут быть сведены к белым.

На основе классической постановки задачи получены различные фильтры – для нелинейных систем, с небелыми шумами, фильтры экстраполяторы и т. д.

Теория оптимальной фильтрации в настоящее время разрабатывается.

5. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ

5.1. Дискретные случайные функции

Наряду с функциями, определенными на вещественной прямой t , можно рассматривать функции, которые определены только в некоторых точках t_1, t_2, \dots .

Такие функции называются *решетчатыми*.

Решетчатые функции определены только в равноотстоящих точках $t = nT$, где n – любое целое число, T – период дискретности. Такие функции обозначают $f(nT)$ или $f(n)$.

Система автоматического управления считается дискретной, если хотя бы в одном из ее элементов применяется дискретный способ передачи и преобразования сигнала.

Сигналы в дискретных системах описываются дискретными функциями времени (решетчатыми функциями). В этом основное их отличие от непрерывных систем.

Общность непрерывных и дискретных систем определяется одинаковыми принципами их построения. В связи с этим дискретные системы имеют характеристики, аналогичные характеристикам непрерывных систем. Области применения дискретных систем непрерывно расширяются: радиосвязь, телевидение, радиолокация, радиотелеуправление и т. д.

Аналог производных непрерывных функций – конечные разности решетчатых функций:

$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ – конечная разность первого порядка (первая разность – аналог первой производной).

Первая разность от решетчатой функции $\Delta f(n)$ называется разностью второго порядка (второй разностью – аналог второй производной) $\Delta^2 f(n) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n)$ и т. д.

Так же как динамика непрерывных систем описывается дифференциальными уравнениями, динамика (изменение во времени) дискретных систем описывается с помощью разностных уравнений.

Если дискретная функция является случайной, то она называется *дискретной случайной функцией*, или *случайной последовательностью*.

Аргументом дискретной случайной функции (случайной последовательности) является индекс при аргументе времени t_n и вида $X(t_n) = X(n)$, ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Для того чтобы задать дискретную случайную функцию, как и для непрерывной функции, необходимо задать n -мерные плотности распределения вероятностей.

На практике для исследования случайных последовательностей применяется теория случайных функций, основанная на знании двух моментов – математического ожидания и корреляционной функции.

Математическое ожидание дискретной случайной последовательности $X[n]$ – такая неслучайная числовая последовательность $m_x[n]$, значение которой при каждом фиксированном n равно математическому ожиданию случайной величины $X[n]$:

$$m_x[n] = M[X(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} X w(x, n) \cdot dx, \quad (5.1)$$

где $w(x, n)$ – одномерная плотность распределения вероятностей случайной последовательности $X(n)$. Функция

$$\overset{\circ}{X}(n) = X(n) - m_x(n) \quad (5.2)$$

называется центрированной дискретной случайной функцией.

Корреляционной функцией дискретной случайной последовательности называется дискретная функция двух переменных $R_x(n, l)$, значения которой равны корреляционным моментам случайных величин $X(n)$ и $X(l)$ при всех значениях n и l .

$$R_x(n, l) = M[\overset{\circ}{X}(n) \cdot \overset{\circ}{X}(l)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x(n) - m_x(n))(x'(l) - m_x(l)) \cdot w_2(x, x', n, l) dx dx', \quad (5.3)$$

где $w_2(x, x', n, l)$ – двумерная плотность распределения вероятностей случайной последовательности $X(n)$ ($n, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Начальный момент второго порядка $\Gamma_x(n, l)$ для дискретной случайной последовательности определяется выражением

$$\Gamma_x(n, l) = M[X(n) \cdot \overline{X(l)}]. \quad (5.4)$$

Для двух дискретных случайных последовательностей $X(n)$ и $Y(n)$ их взаимная корреляционная функция $R_{XY}(n, l)$ определяется равенством

$$R_{XY}(n, l) = M[\overset{\circ}{X}(n) \cdot \overset{\circ}{Y}(l)]. \quad (5.5)$$

Основные свойства математического ожидания и корреляционных функций, полученные для непрерывных процессов, справедливы и для дискретных случайных последовательностей.

5.2. Линейные операции над дискретными случайными функциями

Первая разность $\Delta X(n)$ дискретной случайной функции $X(n)$ – функция вида

$$\Delta X(n) = X(n+1) - X(n). \quad (5.6)$$

Разность порядка K дискретной случайной функции вычисляется по формуле

$$\Delta^k X(n) = \Delta^{k-1} X(n+1) - \Delta^{k-1} X(n). \quad (5.7)$$

Определим статистические характеристики конечных разностей дискретных случайных функций.

Применим к выражению (5.6) операцию математического ожидания:

$$M[\Delta X(n)] = M[X(n+1) - X(n)] = m_x(n+1) - m_x(n) = \Delta m_x(n). \quad (5.8)$$

То есть математическое ожидание первой разности равно первой разности математического ожидания случайной функции. Это справедливо и для разностей любого порядка:

$$M[\Delta^k (X_n)] = \Delta^k m_x(n). \quad (5.9)$$

Корреляционная функция первой разности $\Delta X(n)$ равна

$$\begin{aligned} R_{\Delta x}(n, l) &= M[(\Delta_n X(n) - m_{\Delta x}(n))(\Delta_l X(l) - m_{\Delta x}(l))] = \\ &= M[\Delta_n (X(n) - m_x(n))(\Delta_l (X(l) - m_x(l)))] = \Delta_n \cdot \Delta_l \cdot R_x(n, l), \end{aligned} \quad (5.10)$$

где Δ_n и Δ_l обозначают операции взятия первой разности по индексам n и l соответственно.

Аналогично можно получить взаимную корреляционную функцию случайной функции $X(n)$ и ее первой разности:

$$R_{x\Delta x}(n, l) = \Delta_l \cdot R_x(n, l). \quad (5.11)$$

Аналогом интегрирования для дискретных случайных функций, как и для неслучайных решетчатых функций, является операция суммирования.

5.3. Стационарные дискретные случайные процессы

Определение стационарных дискретных случайных процессов (в некоторых источниках они называются непрерывными случайными последовательностями) не отличается от определения непрерывных (математическое ожидание постоянно, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов).

$$m_x(n) = const, \quad R_x(n, l) = R_x(n-l) = R_x(r), \quad (5.12)$$

где $r = n-l$, $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Все свойства математического ожидания и корреляционной функции стационарных непрерывных процессов справедливы и для дискретных стационарных процессов.

Поставим в соответствие непрерывному случайному стационарному процессу $X(t)$ дискретный процесс, полученный из $X(t)$ заменой $t = nT$.

Если задана спектральная плотность $s_x(w)$ случайного процесса $X(t)$, то корреляционная функция вычисляется как обратное преобразование Фурье от

спектральной плотности для всех значений t , в том числе и для $t = r \cdot T$, следовательно,

$$R_x(rT) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(w) \cdot e^{jwrT} \cdot dw. \quad (5.13)$$

Разобьем ось w на отрезки длиной $\frac{2p}{T}$ и представим интеграл (5.13) в виде

$$R_x(rT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(2k-1)\frac{p}{T}}^{(2k+1)\frac{p}{T}} s_x(w) \cdot e^{jwrT} \cdot dw. \quad (5.14)$$

Введем новую переменную $w_1 = w - \frac{2pk}{T}$. (5.15)

Учитывая, что при $w = 2pk$ $e^{j2pk} = 1$ (так как $e^{jw} = \cos w + j \sin w$) и изменяя порядок интегрирования и суммирования, получим

$$\begin{aligned} R_x(rT) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{p}{T}}^{\frac{p}{T}} s_x(w_1 + \frac{2pk}{T}) \cdot e^{jw_1 r T} \cdot e^{j2pk r} \cdot dw_1 = \\ &= \int_{-\frac{p}{T}}^{\frac{p}{T}} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} s_x(w_1 + \frac{2pk}{T}) \right] \cdot e^{jw_1 r T} \cdot dw_1 = \int_{-\frac{p}{T}}^{\frac{p}{T}} s_x^*(w_1) \cdot e^{jw_1 r T} \cdot dw_1, \end{aligned} \quad (5.16)$$

где $s_x^*(w_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_x(w_1 + \frac{2pk}{T}) = s_x^*(w)$. (5.17)

Функция $s_x^*(w)$ называется **спектральной плотностью** дискретного случайного процесса $X(n, T)$.

$s_x^*(w)$ – периодическая функция с периодом $\frac{2p}{T}$, она может быть разложена в ряд Фурье, т.е.

$$s_x^*(w) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r e^{-jTwr}, \quad (5.18)$$

где $c_r = \frac{T}{2p} \int_{-\frac{p}{T}}^{\frac{p}{T}} s_x^*(w) \cdot e^{jTwr} \cdot dw$. (5.19)

Сравнивая равенства (5.16) и (5.19), имеем

$$c_r = \frac{T}{2p} \cdot R_x(rT). \quad (5.20)$$

Окончательно из выражения (5.17) получим

$$s_x^*(w) = \frac{T}{2p} \sum_{r=-\infty}^{\infty} R_x(rT) \cdot e^{jwrT}. \quad (5.21)$$

Равенства (5.16) и (5.21) выражают связь между корреляционной функцией и спектральной плотностью дискретного случайного процесса $X(nT)$.

При нулевом аргументе получим выражение для дисперсии

$$R_x(0) = D[X(nT)].$$

На основе формулы (5.16) имеем

$$D[X(nT)] = R_x(0) = \int_{-\frac{p}{T}}^{\frac{p}{T}} s_x^*(w) \cdot dw. \quad (5.22)$$

В теории автоматического управления часто используют дискретную случайную функцию, представляющую последовательность **независимых** случайных величин $X(n)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) с нулевым математическим ожиданием.

Такой процесс называют **дискретным белым шумом**.

Корреляционная функция такого процесса имеет вид

$$R_x(nT, mT) = M[X(nT) \cdot \overline{X(mT)}] = D_x(n) \cdot d_{nm}; \quad (5.23)$$

$$d_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{при } n = m, \\ 0, & \text{при } n \neq m, \end{cases} \quad (5.24)$$

где d_{nm} – символ Кронекера.

$D(n) = R_x(nT, nT) = D[X(n)]$ – дисперсия дискретного белого шума.

Спектральная плотность дискретного белого шума на основе выражений (5.23) и (5.21) будет

$$s_x^*(w) = \frac{T}{2p} \sum_{r=-\infty}^{\infty} R_x(rT) \cdot e^{jwrT} = \frac{D_x \cdot T}{2p}. \quad (5.25)$$

Процессы, близкие к белому шуму, моделируются в ЦВМ с помощью независимых случайных чисел, т.е. аппроксимируются дискретным белым шумом.

5.4. Эргодические дискретные случайные процессы

Понятие эргодичности, определенное для непрерывных процессов, применимо и к дискретным случайным процессам.

Случайный процесс $X(n)$ является эргодическим по отношению к математическому ожиданию, если среднее его значение, равное

$$m^* = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N X(n), \quad (5.26)$$

при $N \rightarrow \infty$ совпадает с его математическим ожиданием.

Случайный процесс $X(n)$ – эргодический по отношению к **корреляционной функции**, если при $N \rightarrow \infty$ оценка

$$R_x^*(r) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \overset{\circ}{X}(0) \cdot \overset{\circ}{X}(n-r) \quad (5.27)$$

совпадает с корреляционной функцией этого процесса.

Эти условия являются необходимыми.

Достаточным условием по отношению к математическому ожиданию и корреляционной функции является

$$\lim_{r \rightarrow \infty} R^*(r) = 0. \quad (5.28)$$

В этом случае m^* и $R_x^*(r)$ могут быть найдены по одной реализации по формулам (5.26), (5.27).

5.5. Статические характеристики дискретных случайных процессов

Вычислим статические характеристики конечных сумм дискретных случайных функций (процессов) с весом $g(n, l)$ (весовым коэффициентом).

Аналог интеграла Дюамеля для дискретных процессов – выражение, связывающее входной сигнал с выходным:

$$Y(n) = \sum_{l=0}^n X(l) \cdot g(n, l), \quad (5.29)$$

где $g(n, l)$ – неслучайная решетчатая функция двух переменных (весовой коэффициент); $X(l)$ – дискретная случайная функция.

Применим к выражению (5.29) операцию математического ожидания:

$$M[Y(n)] = \sum_{l=0}^n m_x(l) \cdot g(n, l) = m_y(n). \quad (5.30)$$

Вычислим корреляционную функцию случайной функции $Y(n)$:

$$\begin{aligned} R_Y(n, l) &= M\left[\left(\sum_{r=0}^n X(r)g(n, r) - m_y(n)\right) \cdot \left(\sum_{s=0}^l x(s)g(l, s) - m_y(s)\right)\right] = \\ &= M\left[\left(\sum_{r=0}^n (X(r) - m_x(r))g(n, r)\right) \cdot \left(\sum_{s=0}^l (x(s) - m_x(s))g(l, s)\right)\right] = \\ &= \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^l R_x(r, s) \cdot g(n, r) \cdot g(l, s). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Аналогично находятся выражения для взаимных корреляционных функций.

Заметим, что конечная сумма (5.31) является линейной комбинацией конечного числа случайных величин $X(n)$, поэтому написанные выше статистические характеристики можно рассматривать как характеристики линейных комбинаций случайных величин $X(n)$.

Выражения (5.30) и (5.31) позволяют определить статистические характеристики выходного сигнала системы по статистическим характеристикам входного сигнала.

5.6. Корреляционный анализ дискретных систем, заданных разностными уравнениями

Как и для непрерывных систем, здесь удобно использовать метод моментов. Для этого уравнение многомерной дискретной автоматической системы в векторно-матричной форме представляется в виде

$$Y(k+1) = A(k) \cdot Y(k) + N(k) \cdot U(k) + F(k) \cdot x(k); \quad (5.32)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots; Y(0) = Y_0; x = m_x + \overset{\circ}{x},$$

где $Y(k)$ – n -мерный вектор; $\overset{\circ}{x}(k)$ – дискретный гауссов центрированный белый шум с матрицей дисперсий $G(k)$; $U(k)$ – детерминированная последовательность (управляющее воздействие); A, N, F – заданные (известные) матрицы коэффициентов.

Применяя операцию математического ожидания к правой и левой частям выражения (5.32), получаем разностное уравнение для вектора математического ожидания:

$$m_y(k+1) = A(k) \cdot m_y(k) + N(k) \cdot U(k) + F(k) \cdot m_x(k). \quad (5.33)$$

Вычитая почленно из уравнения (5.32) уравнение (5.33), получаем уравнение для центрированного вектора:

$$\overset{\circ}{Y}(k+1) = A(k) \cdot \overset{\circ}{Y}(k) + F(k) \cdot \overset{\circ}{x}(k); \quad \overset{\circ}{Y}(0) = \overset{\circ}{Y}_0. \quad (5.34)$$

Выражение для корреляционной матрицы процесса $Y(k)$ имеет вид

$$\Theta(k+1) = M \left[\overset{\circ}{Y}(k+1) \cdot \overset{\circ}{Y}^T(k+1) \right]. \quad (5.35)$$

Подставив в (5.35) выражение (5.34) для $\overset{\circ}{Y}(k+1)$ и соответственно для $\overset{\circ}{Y}^T(k+1)$:

$$\overset{\circ}{Y}^T(k+1) = \overset{\circ}{Y}^T(k) \cdot A^T(k) + \overset{\circ}{x}^T(k) \cdot F^T(k) \quad (5.36)$$

и выполнив соответствующие преобразования, получим разностное уравнение для корреляционной матрицы $\Theta(k+1)$:

$$\Theta(k+1) = A(k) \cdot \Theta(k) A^T(k) + F(k) \cdot G(k) \cdot F^T(k). \quad (5.37)$$

В уравнении (5.37) учтено, что $\overset{\circ}{Y}(k)$ и $\overset{\circ}{x}(k)$ независимы (некоррелированы).

Для установившегося режима в стационарной дискретной системе (если такой существует) из выражений (5.33) и (5.37) получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$m(k+1) = m(k) = m = Am + NU + Fm, \quad (5.38)$$

$$\Theta(k+1) = \Theta(k) = \Theta = A\Theta A^T + FGF^T. \quad (5.39)$$

Из алгебраических уравнений (5.38) и (5.39) определяются установившиеся значения $m(k) = m$ и $\Theta(K) = \Theta$.

Для определения установившихся значений m и Θ могут использоваться рассмотренные ранее методы, основанные на заданных известных характеристиках входного сигнала и заданной передаточной функции системы (требуемой передаточной функции).

При этом необходимо учесть особенности и свойства передаточных функций дискретных систем.

5.7. Оптимальные системы, описываемые разностными уравнениями

Задачу синтеза оптимальной линейной системы, описываемой разностными уравнениями, сформулируем следующим образом.

Имеется автоматическая система, описываемая разностным рекуррентным векторно-матричным уравнением вида

$$Y(k+1) = A(k) \cdot Y(k) + N(k) \cdot U(k) + F(k) \cdot x(k), \quad (5.40)$$

где n – размерность вектора $Y(k)$; $x(k)$ – дискретный белый шум.

Остальные компоненты описаны ранее.

В дискретные моменты времени t_k наблюдается (безынерционно измеряется) вектор $Z(k)$, который в общем случае m -мерный, где $m \leq n$.

$$Z(k+1) = C(k+1) \cdot Y(k+1) + z(k+1), \quad (5.41)$$

где $z(k)$ – дискретный белый шум, для которого

$$M[z(k) \cdot z^T(k)] = Q(k) \cdot d_{hk}, \quad (5.42)$$

где d_{hk} – символ Кронекера; $Q(k)$ – дисперсионная матрица.

Случайные последовательности $x(k)$ и $z(k+1)$ для упрощения задачи примем между собой некоррелированными.

Начальные условия процесса $Y(k)$ будем считать гауссовыми.

Структурная схема дискретного объекта управления и измерителя изображена на рис. 5.1.

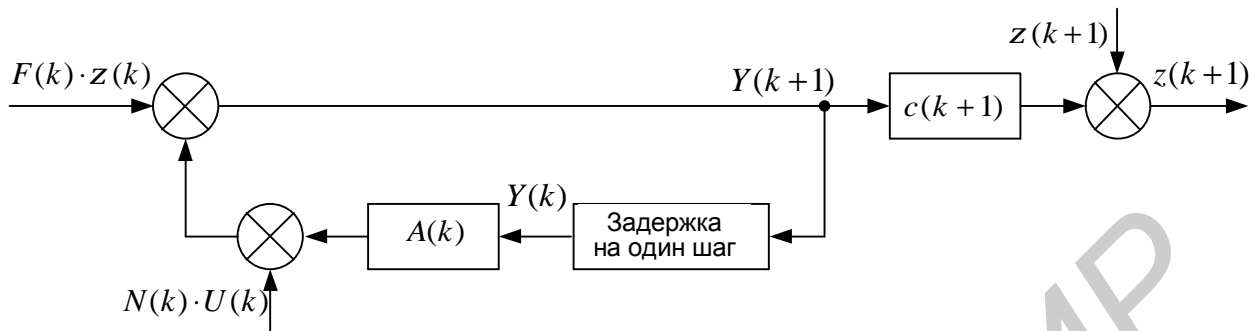


Рис. 5.1. Структурная схема объекта управления и измерителя

Задача состоит в определении наилучшей оптимальной апостериорной оценки $\hat{Y}(k)$ в смысле минимума среднеквадратичной ошибки, которая имеет вид

$$M \left[\left(\hat{Y}(k) - Y(k) \right)^T \cdot \left(\hat{Y}(k) - Y(k) \right) \right] \rightarrow \min. \quad (5.43)$$

Это известная задача фильтрации (оценивания). В то же время, с другой стороны, задача может формулироваться как определение оптимальной структуры системы, обеспечивающей минимум ошибки выходного сигнала.

Для модели случайного процесса (5.40) и измерителя (5.41) аналитически получен алгоритм линейного фильтра, состоящей из рекуррентных уравнений (фильтр Калмана приведён без вывода):

$$\hat{Y}(k+1) = \hat{Y}'(k+1) + B(k+1) \left[Z(k+1) - C(k+1) \cdot \hat{Y}'(k+1) \right], \quad (5.44)$$

где

$$\hat{Y}'(k+1) = A(k) \cdot \hat{Y}(k) + N(k) \cdot U(k). \quad (5.45)$$

$\hat{Y}'(k+1) = \hat{Y}(k+1|k)$ – одношаговое предсказание \hat{Y} .

Формулы для матрицы $B(k+1)$ и рекуррентных уравнений корреляционной матрицы ошибки имеют вид

$$B(k+1) = R(k+1)C(k+1)Q^{-1}(k+1); \quad (5.46)$$

$$R(k+1) = R'(k+1) - R'(k+1)C^T(k+1) \times \\ \times \left\{ C(k+1)R'(k+1)C^T(k+1) + Q(k+1) \right\}^{-1} \cdot C(k+1) \cdot R'(k+1); \quad (5.47)$$

$$R'(k+1) = A(k) \cdot R(k)A^T(k) + F(k) \cdot G(k) \cdot F^T(k). \quad (5.48)$$

где $R'(k+1) = R(k+1|k)$ – одношаговое предсказание матрицы ошибки, которая имеет вид

$$R(k) = M \left[e(k) \cdot e^T(k) \right], \quad (5.49)$$

где $e(k) = \hat{Y}(k) - Y(k)$ – ошибка оценки.

Рекуррентному алгоритму (5.44) – (5.48) соответствует структурная схема оптимальной системы (рис. 5.2).

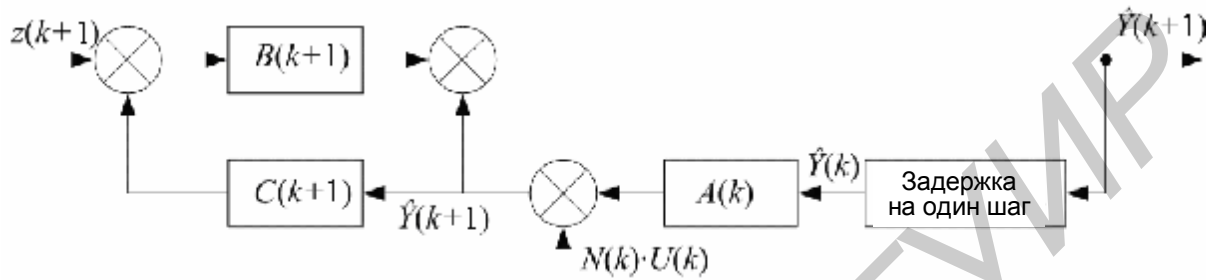


Рис. 5.2. Структурная схема оптимальной системы

Таким образом, приведённые уравнения описывают алгоритм оптимального оценивания, а также оптимальную структурную схему системы.

Кроме того, фильтр Калмана может рассматриваться как апостериорные уравнения вероятностных моментов.

ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ

1. Бесекерский, В. А. Теория систем автоматического управления / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – 4-е изд. перераб. и доп. – СПб.: Профессия, 2004.
2. Пугачёв, В. С. Теория стохастических систем / В. С. Пугачёв, И. Н. Синицин. – М.: Логос, 2004.
3. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / под ред. В. А. Бесекерского. – М.: Наука, 1987.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

4. Андреев, И. И. Теория статистически оптимальных систем управления / И. И. Андреев. – М.: Наука, 1985.
5. Астапов, Ю.М. Статистическая теория систем автоматического регулирования и управления / Ю. М. Астапов, В. С. Медведев. – М.: Наука, 1987.
6. Прикладные математические методы анализа в радиотехнике / под ред. Г. В. Образцова. – М.: Высш. шк., 1989.
7. Шахтарин, Б. И. Случайные процессы в радиотехнике / Б. И. Шахтарин. – М.: Радио и связь, 2000.
8. Пугачёв, В. С. Основы автоматического управления / В. С. Пугачёв. – М.: Наука, 1974.
9. Казаков, И. Е. Анализ систем случайной структуры / И. Е. Казаков, В. М. Артемьев, В. А. Бухалёв. – М.: Физматлит, 1993.
10. Андриевский, Б.Р. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB-5 и Scilab / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков. – СПб. : Наука, 2000.

Учебное издание

Лобатый Александр Александрович
Русак Леонид Владимирович
Чумаков Олег Анатольевич

РАСЧЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Конспект лекций
для студентов специальности
I-53 01 07 «Информационные технологии и управление
в технических системах»
дневной формы обучения

В 2-х частях

Часть 2

Редактор Т. П. Андрейченко
Корректор Е. Н. Батурчик
Компьютерная верстка Е. Г. Бабичева

Подписано в печать 06.03.2008.
Гарнитура «Таймс».
Уч.-изд. л. 3,3.

Формат 60x84 1/16.
Печать ризографическая.
Тираж 120 экз.

Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 3,37.
Заказ 7.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП №02330/0131666 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6