УДК 517.925.7

О ПРИВОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ХАОТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ К АВТОМОДЕЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ КУРАМОТО – СИВАШИНСКОГО

В.В. ЦЕГЕЛЬНИК

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
ул. П. Бровки, 6, г. Минск, 220013, Республика Беларусь
tsegvv@bsuir.by

Показано, что нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка, к которому приводятся известные динамические системы с хаотическим поведением (системы из списка Спротта, тороидальная система Рёсслера), есть точная автомодельная редукция известного уравнения Курамото – Сивашинского.

Ключевые слова: системы с хаотическим поведением, уравнение Курамото – Сивашинского.

В работе рассматриваются системы [1]

$$\dot{x} = -z,\ \dot{y} = -x^2 - y,\ \dot{z} = \alpha + \beta x + y, \tag{1}$$

$$\dot{x} = -z,\ \dot{y} = x - y,\ \dot{z} = \alpha x + y^2 + \beta z, \tag{2}$$

$$\dot{x} = -x - \alpha y,\ \dot{y} = x + z^2,\ \dot{z} = \beta + x \tag{3}$$

и система [2]

$$\dot{x} = -y - z,\ \dot{y} = x,\ \dot{z} = \alpha(y - y^2) - \beta z \tag{4}$$

с произвольными фиксированными параметрами α и β.

Системы (1) – (3) являются обобщениями систем *M*, *Q*, *S* из списка Спротта [2]. Система (4) обобщает известную тороидальную систему Рёсслера [3].

Характерной (с качественной точки зрения) особенностью систем (1) – (4) является их хаотическое поведение при определенных значениях входящих в них параметров, в частности, наличие странных аттракторов.

Интерес к построению и исследованию таких систем связан с их приложениями в различных разделах науки, техники, экономики и т. д. [3]. В частности, системы с хаотическим поведением используются при защите информации в телекоммуникациях.

В работе [4] показано, что каждая из систем (1) – (4) с точностью до линейного преобразования одной из неизвестных компонент эквивалентна уравнению

$$\dddot{q} = k_1\ddot{q} + k_2\dot{q} + q^2 + k_3, \tag{5}$$

в котором коэффициенты $k_i\ (i = \overline{1,3})$ являются функциями параметров α, β.

Несложно убедиться, что уравнение (5) представляет собой автомодельную редукцию хорошо известного уравнения Курамото – Сивашинского [5]

$$p_s + \nu\, p_{\tau\tau\tau\tau} + b_{\tau\tau\tau} + \mu\, p_{\tau\tau} + pp_\tau, \tag{6}$$

в переменных бегущей волны. Действительно, полагая $p(s,\tau) = c + p(t),\ t = \tau - cs$ относительно $p(t)$ получим дифференциальное уравнение $\nu \ddddot{p} + b\dddot{p} + \mu\, \ddot{p} + p\dot{p} = 0$, первым интегралом которого является уравнение

$$\nu \dddot{p} + b\,\ddot{p} + \mu\,\dot{p} + \frac{p^2}{2} + A = 0, \tag{7}$$

с произвольной постоянной A. Легко видеть, что уравнение (7) с точностью до обозначений совпадает с (6). Отметим, что в (6) v, b, μ – произвольные фиксированные действительные параметры, причем $v \neq 0$.

В [6] показано, что уравнение (7) не проходит формальный тест Пенлеве. Установлено, что системы (1) – (4) также не проходят тест Пенлеве при наличии хаотического поведения.

Проведен Пенлеве-анализ уравнений

$$\dddot{q} = k_1\ddot{q} + k_2 q + q\dot{q} + k_3, \tag{8}$$

$$\dddot{q} = k_1\ddot{q} + k_2\dot{q} + k_3 q^2 + \dot{q}q + k_4, \tag{9}$$

$$\dddot{q} = k_1\ddot{q} + k_2\dot{q} + k_3 q^2 + q\ddot{q} + k_4, \tag{10}$$

$$\dddot{q} = k_1\dot{q} + k_2 q^2 + k_3\dot{q}^2 + q\ddot{q}, \tag{11}$$

$$\dddot{q} = k_1\ddot{q} + k_2\dot{q} + k_3 q^2 + k_4\dot{q}^2 + q\ddot{q} + k_5, \tag{12}$$

$$\dddot{q} = k_1\ddot{q} + k_2\dot{q} + k_3 q^2 + k_4\dot{q}^2 + k_5 q\dot{q} + q\ddot{q} + k_6 \tag{13}$$

с коэффициентами $k_i (i = \overline{1,6})$, зависящими от параметров α, β. Уравнениям (8) – (13) эквивалентны группы или отдельные системы, приведенные в [1]. Установлено, что ни одно из уравнений не удовлетворяет тесту Пенлеве.

Список литературы

1. *Eichhorn R., Linz S.J., Hänggi P.* // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58, № 6. P. 7151 – 7164.
2. *Sprott J.C.* // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 50, № 2. P. R 647 – R 650.
3. *Rössler O.E.* // Ann. (N.Y) Acad. Sci. 1979. Vol. 316. P. 376 – 392.
4. *Chen G.* Controlling chaos and bifurcations in engeneering systems. CR C Press. Boca Raton. FL. 1999.
5. *Kuramoto Y., Tsuzuki T.* // Prog. Theor. Phys. 1976. Vol. 55, № 2. P. 356 – 369.
6. *Конт Р., Мюзетт М.* Метод Пенлеве и его приложения. Москва – Ижевск, 2011.