ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕПЛООБМЕНА В МНОГОСЛОЙНЫХ МИКРОЭЛЕКТРОННЫХ СТРУКТУРАХ

ПЕТРОВ С. И., МАТВЕЕВ А. В.[1]

1 - БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Рассмотрена сущность вариационного принципа. Осуществлен поиск решения краевой задачи эквивалентен минимизации специально построенного функционала.

Сущность вариационного принципа заключается в переходе от краевых задач расчета температурных полей к задачам минимизации специально построенного функционала.

Уравнение (1) вместе с граничными условиями (2) – (4) и начальным условием (5) однозначно определяет задачу расчета температурного поля в фиксированном слое микроэлектронной структуры. Однако возможна и вариационная формулировка задачи (1) – (5). Рассмотрим задачу минимизации функционала:

$$F = \int_V f(x, y, z, T, T_x, T_y, T_z)\,dV + \int_V \beta T_l\,dV + \int_{S_2 \cup S_3} \left(QT + \frac{\alpha T_2}{2} \right) dS \qquad (1)$$

в декартовой системе координат (x, y, z).

Рассмотрим произвольную вариацию неизвестной функции F:

$$\delta F = \int_V \left(\frac{\partial f}{\partial T}\delta T + \frac{\partial f}{\partial T_x}\delta T_x + \frac{\partial f}{\partial T_y}\delta T_y + \frac{\partial f}{\partial T_z}\delta T_z \right) dV + \int_V \beta T_l \delta T_1\,dV + \int_{S_2 \cup S_3} \left(Q\delta T + \alpha T \delta T \right) dS. \qquad (2)$$

Учитывая, что

$$\delta T_x = \delta\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\delta T, \delta T_y = \delta\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\delta T, \delta T_z = \delta\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\delta T, \qquad ()$$

выражение (2.27) можно переписать в виде:

$$\delta F = \int_V \left(\frac{\partial f}{\partial T}\delta T + \frac{\partial f}{\partial T_x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta T) + \frac{\partial f}{\partial T_y}\frac{\partial}{\partial y}(\delta T) + \frac{\partial f}{\partial T_z}\delta T_z + \right.$$
$$\left. \frac{\partial f}{\partial T_z}\frac{\partial}{\partial z}(\delta T_z) \right) dV + \int_V \beta T_l \delta T dV + \int_{S_2 \cup S_3} (Q\delta T + \alpha T \delta T) dS. \qquad (2.29)$$

В точке минимума (стационарной точке) вариация функционала равна нулю

$$\delta F = 0. \qquad (5)$$

Применяя ко второму слагаемому в выражении (1.29) формулу Грина, получаем:

$$\int_V \left(\frac{\partial f}{\partial T}\delta T + \frac{\partial f}{\partial T_x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta T) + \frac{\partial f}{\partial T_y}\frac{\partial}{\partial y}(\delta T) + \frac{\partial f}{\partial T_z}\delta T_z + \right.$$
$$\left. \frac{\partial f}{\partial T_z}\frac{\partial}{\partial z}(\delta T_z) \right) dV + \int_V \beta T_l \delta T dV + \int_{S_2 \cup S_3} (Q\delta T + \alpha T \delta T) dS, \qquad (6)$$

где $1_x = cos\alpha$ – косинус угла между внешней нормалью к поверхности $S_2 \cup S_3$ и осью Ox.

Преобразовав таким же образом третье и четвертое слагаемое в выражении (2.29), получим окончательно:

$$\delta F = \int_V \left[\frac{\partial f}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial T_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial T_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial T_z}\right) \right] dV +$$
$$\int_V \delta T \beta T_l dV \delta T + \int_{S_2} \delta T \left[Q + \alpha T + l_x \frac{\partial f}{\partial T_x} +_x \frac{\partial f}{\partial T_y} + l_z \frac{\partial f}{\partial T_z} \right] dS = 0. \qquad (7)$$

Второй интеграл в выражении (2.32) берется только по части поверхности S – S_2 и S_3, так как на остальной поверхности £ значения функции заданы и поэтому $\delta T = 0$.

Так как равенство (2.32) должно выполняться при произвольной вариации δT, то везде в области V должно выполняться условие (уравнение Эйлера) :

$$\frac{\partial f}{\partial T}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial T_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial T_y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial T_z}\right)+\beta\frac{\partial T}{\partial t}=0, \qquad (8)$$

а на границе ^ и 65 должно выполняться условие:

$$Q+\alpha T+l_x\frac{\partial f}{\partial T_x}+{}_x\frac{\partial f}{\partial T_y}+l_z\frac{\partial f}{\partial T_z}=0. \qquad (9)$$

Таким образом, можно сказать

– что если функция *T* удовлетворяет уравнениям (8), (9), то она минимизирует функционал ;

– что постановки задач, использующие соотношения (1) – (5) и (6) эквивалентны.

Список использованных источников

1. Гурьянова, Ф. А. Приближенный метод расчета температуры в микросхеме / Ф. А. Гурьянова, С. А Никитин // Вопр. радиоэлектроники. Сер. ТРТО. – 1970. –Вып. 3.–С. 14–18.
2. Боскис, И. А. К расчету стационарных температурных полей в элементах и узлах микроминиатюрной РЭА / И. А. Боскис, Л. Б Гидалевич // Вопр. радиоэлектроники. Сер. ТРТО. – 1973. – Вып. 3. – С. 89–102.
3. Боскис, И. А. К расчету нестационарных температурных полей в элементах и узлах микроминиатюрной РЭА / И. А Боскис, JI. Б. Гидалевич // Вопр. радиоэлектроники. Сер. ТРТО. – 1974. – Вып. 1. – С. 88–96.