О ВЫБОРЕ ПРЕДСТАВИТЕЛЯ ОРБИТЫ КЭМЕРОВСКИХ МАТРИЦ

В. А. Липницкий, Н. В. Спичекова
Кафедра высшей математики, Военная академия Республики Беларусь, кафедра высшей математики,
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектороники
Минск, Республика Беларусь
E-mail: valipnitski@yandex.ru, n.spichekova@gmail.com

Обсуждаются подходы к выбору наиболее характерного представителя орбиты множества кэмеровских $(0,1)-$матриц относительно квадрата симметрической группы S_n. В качестве наиболее естественного (с математической точки зрения) представителя орбиты предлагается выбирать матрицу, имеющую квази-жорданову форму.

Введение

Пусть P_n — множество всех квадратных $(0,1)-$ матриц порядка n, содержащих в точности n единиц. На строках и столбцах этих матриц действует группа, переставляющая строки и столбцы матрицы, — квадрат $S_n^2 = S_n \times S_n$ симметрической группы S_n. Преобразующиеся при этом друг в друга матрицы называют эквивалентными. Эквивалентные матрицы собираются в непересекающиеся классы — орбиты. Задача классификации образующихся при указанном действии орбит возникает в различных областях науки и практики — в теории графов и теории групп подстановок [1, 2], в проблеме распознавания образов и в помехоустойчивом кодировании [3 - 5].

При изучении множества орбит, на которые разбивается P_n под действием группы S_n^2, возникает две задачи:

- вычислить количество получившихся орбит;
- найти единственный, но наиболее характерный представитель каждой орбиты.

Первая задача имеет длительную и весьма интересную историю (см. [6]) и составляет суть третьей из 27 открытых проблем П. Кэмерона в теории групп подстановок [1]. Поэтому рассматриваемые $(0,1)-$матрицы правомерно называть кэмероновскими в честь П. Кэмерона, первым обратившего внимание на важность данного класса матриц.

К решению второй задачи возможны различные подходы.

I. Геометрический подход

Задача выбора характерного представителя орбиты возникает при создании библиотеки орбит множества P_n для фиксированного n. Любая $(0,1)-$матрица имеет физический прототип – она является моделью квадратного экрана, состоящего из n^2 пикселей, на котором «вспыхнуло» в точности n точек. С учетом физической природы исходной задачи при выборе характерного представителя орбиты естественным представляется использование геометрического подхода, суть которого заключается в выборе в качестве представителя орбиты матрицы, которому соответствует однозначно идентифицируемый геометрический образ. Однако на практике использование геометрического подхода к выбору характерного представителя орбиты сопряжено со значительными трудностями, обусловленными сложностью визуального анализа большого количества образов. Так, уже при $n = 8$ среди 558 орбит множества P_n имеется несколько орбит мощности 67 737 600. Выбор характерного представителя орбиты можно осуществлять и исходя из других соображений. Более подробно геометрический подход обсуждается в [7].

II. Связные компоненты и квази-диагональная форма $(0,1)-$ матриц.

С каждой матрицей $A \in P_n$ естественным и однозначным образом связывается неориентированный двудольный граф X_A достаточно специфического вида: одной его доле (будем считать ее левой) принадлежит n вершин, соответствующих, скажем, n строкам матрицы A; правой его доле принадлежит также n вершин, соответствующих столбцам матрицы A; граф X_A содержит n ребер, соответствующих единицам матрицы A; если единица расположена в $i-$й строке и $j-$м столбце матрицы A, то соответствующее ей ребро соединяет, очевидно, $i-$ю вершину левой доли с $j-$й вершиной правой доли в графе X_A. Степень вершины графа X_A равна весу соответствующей строки или столбца матрицы A и равна количеству единиц в этой строке или в этом столбце.

С матрицей $A \in P_n$ можно связать еще один граф, который будем обозначать символом Y_A. Это, вообще говоря, не двудольный граф. Он содержит в точности n вершин, ими являются все единицы матрицы A. Соседние единицы одной строки (одного столбца) соединяются ребром. Если в данной строке (столбце) имеется $i, i >= 2$, единиц, то их последовательно соединяют $i-1$ ребер. Граф X_A в действительности никогда не является связным. Граф Y_A , наиборот, может быть связным при любом значении n.

Связность вершин определяет отношение эквивалентности на множестве вершин любого графа. Тем самым каждый граф, в том числе и графы X_A (а также и граф Y_A), разбивается в непересекающееся объединение своих связных компонент ([8], теорема 2.2.1). Каждая вершина графа и каждое его ребро принадлежат одной, однозначно определенной связной компоненте. Среди этих компонент могут быть и нуль-связные, то есть не имеющие ни одного ребра, иными словами, состоящие из изолированных вершин. В графе X_A они соответствуют нулевым строкам и столбцам матрицы A , обязательно существующим при условии $rank(A) < n$. В графе Y_A нуль-связными компонентами являются единицы, в единственном числе стоящие в конкретной строке и в конкретном столбце, то есть единицы с весовым содержанием (1;1) по терминологии из [5], глава 4. Отсюда следует, что граф Y_A всякой матрицы $A \in P_n$ рангом n состоит в точности из нуль-связных компонент.

Для определенности связные компоненты X_A^i, $1 <= i <= t < n$ множества X_A^{sv} действительно связных компонент (содержащих не менее двух вершин и не менее одного ребра) упорядочим по убыванию количества s_i ребер в них. При одинаковом количестве ребер порядок компонент определяет нумерующий. Нумерация нуль-связных компонент – по остаточному принципу.

Также, чтобы придерживаться какой-то определенности, перенумеруем вершины обеих долей графа X_A , переходя постепенно от первой компоненты ко второй с продолжением нумерации, и так далее. Вершины каждой из долей каждой связной компоненты графа нумеруем в порядке убывания их степеней. Пусть v_i и w_i количество вершин в левой и правой долях компоненты X_A^i, $1 <= i <= t$. Тогда $n >= s_1 >= s_2 >= ... >= s_t >= 1$; $s_1 + s_2 + ... + s_t = n$; $v_1 + v_2 + ... + v_t = k; w_1 + w_2 + ... + w_t = m$.

Соответствующую перестройку произведем и в матрице A. Строки и столбцы в ней переставим в соответствии с проведенной перенумерацией вершин графа X_A. В результате, в S_n^2−орбите $< A >$, порождённой матрицей A, найдем матрицу A' с клеточно-диагональным расположением единиц:

$$A' = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 & 0\dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 & 0\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D_t & 0\dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Здесь D_i, $1 <= i <= t$, является $(v_i \times w_i)$−матрицей, соответствующей связной компоненте X_A^i по описанной выше взаимосвязи матрицы A и графа X_A. Матрица A' получается перестановкой строк и столбцов матрицы A. Тем самым доказано

Утверждение. Всякая матрица $A \in P_n$ рангом $rank(A) < n$ и с упаковочными параметрами k и m S_n^2−эквивалентна матрице A' из формулы (1). Количество клеток D_i в ней равно количеству связных компонент X_A^i в X_A^{sv}, размеры этих клеток совпадают с мощностями долей графов X_A^i.

Матрицу A' (формула (1)) будем называть квази-жордановой канонической формой матрицы A.

В отличие от графа X_A граф Y_A строится легко – прямо на матрице A единицы механически соединяются отрезками горизонтальных и вертикальных прямых. Связные компоненты Y_A^i в точности соответствуют компонентам X_A^i из X_A^{sv} и получаются аналогичным начертанием отрезков прямых на соответствующих подматрицах D_i.

В качестве наиболее характерного (с математической точки зрения) представителя орбиты мы предлагаем взять матрицу, принадлежащую орбите и имеющую квази-жорданову форму.

Список литературы

1. Cameron, P. J. // Problems on permutation groups [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.matchs.qmul.ac.uk/ pjc/pgprob.html. Дата доступа: 15.12.2013.
2. Cameron, P. J., Gewurz, D. A., Merola, F. // Discrete Math., 2008. № 308. P. 386–394.
3. Конопелько, В. К., Липницкий, В. А., Спичекова, Н. В. // Доклады БГУИР, 2010. – №8(54). – С. 127—131.
4. Липницкий, В. А., Сергей, А. И., Спичекова, Н. В. // Технические средства защиты информации: Тезисы докладов XI Белорусско-российской научно-технической конференции, 5-6 мая 2013 г. Минск. – Минск: БГУИР, 2013 – С. 42.
5. Цветков, В. Ю., Конопелько, В. К., Липницкий, В. А. // Предсказание, распознавание и формирование образов многораурсных изображений с подвижных объектов. Мн.: Изд. центр БГУ, 2014.
6. The-Line Encyclopedia of Integer Sequences [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://oeis.org/. Дата доступа: 15.12.2013.
7. Конопелько, В. К., Липницкий, В. А., Спичекова, Н. В. Красота реперных множеств. – Международная научно-техническая конференция, приуроченная к 50-летию МРТИ-БГУИР (Минск, 18 19 марта 2014 г): материалы конф. В 2 ч. Ч. 1 / редкол.: А.А. Кураев [и др.] – Минск: БГУИР, 2014. – 539 с. – С. 241–242.
8. Оре, О. // Теория графов. – М.: Наука, 1980. – 336 с.