О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ПРОСТЕЙШЕГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

М. А. Лёшин
Кафедра веб-технологий и компьютерного моделирования, Белорусский государственный университет
Минск, Республика Беларусь
E-mail: leshinmaxim@gmail.com, l_ma@tut.by

Рассмотрено приближённое решение простейшего сингулярного интегрального уравнения первого рода методом ортогональных многочленов в различных классах функций по Мусхелишвили. Предварительно получены разложения сингулярного интеграла с корневыми особенностями по многочленам Чебышёва первого и второго рода. На их основании построены вычислительные схемы приближённого решения простейшего сингулярного интегрального уравнения первого рода в разных классах функций. Вычислительные схемы запрограммированы в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica в виде стандартных модулей. Проверена эффективность полученных вычислительных схем на модельных примерах и погрешность отображена в виде графиков и таблиц.

Сингулярное интегральное уравнение первого рода имеет вид:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)\frac{dt}{t-x}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}k(x,t)\varphi(t)dt=f(x), \quad (1)$$

$$-1<x<1,$$

где f, k - заданные гёльдеровские функции, $\varphi(x)$ - неизвестная гёльдеровская функция и широко применяется в механике (см., например [4]).

Теория сингулярных интегральных уравнений изложена в [2], [3].

Известны спектральные соотношения [1]:

$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}T_{k+1}(t)\frac{dt}{t-x}=U_k\left(x\right), \quad k\geq 0,$ и

$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}U_{k-1}(t)\frac{dt}{t-x}=-T_k(x),\ k\geq 1,$

на основании которых можно построить вычислительные схемы для уравнения (1).

Используя спектральные соотношения для характеристического оператора с произвольными коэффициентами [5] получены другие спектральные соотношения для сингулярных интегралов с корневой особенностью:

– 1. $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}U_{k+1}(t)\frac{dt}{t-x}=2\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}U_{k-2j}(x),$ $k\geq 0;$

  2. $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}T_{k+1}(t)\frac{dt}{t-x}=2\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}{}^{0}T_{k-2j}(x),$ $k\geq 0;$

  3. $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}U_{k+1}(t)\frac{dt}{t-x}=$ $=4\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}{}^{0}(j+1)T_{k-2j}(x), k\geq 0.$

– 1. $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}T_0(t)\frac{dt}{t-x}=-U_0(x),$

  $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}T_1(t)\frac{dt}{t-x}=U_0(x)-\frac{1}{2}U_1(x),$

  $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}T_k(t)\frac{dt}{t-x}=$ $=-\frac{1}{2}U_{k-2}(x)+U_{k-1}(x)-\frac{1}{2}U_k(x), k\geq 2;$

  2. $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}U_k(t)\frac{dt}{t-x}=2\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^jU_j(x)-$ $-U_k(x),\ k\geq 0;$

  3. $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}T_k(t)\frac{dt}{t-x}=2\sum_{j=0}^{k-1}{}^{0}(-1)^jT_{k-1-j}(x)-$ $-T_k(x),\ k\geq 0;$

  4. $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}U_k(t)\frac{dt}{t-x}=$ $=2\sum_{j=0}^{k}{}^{0}(-1)^{j+1}(j+1)\ T_{k-j}(x), k\geq 0.$

– 1. $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}T_0(t)\frac{dt}{t-x}=U_0(x),$

  $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}T_1(t)\frac{dt}{t-x}=U_0(x)+\frac{1}{2}U_1(x),$

  $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}T_k(t)\frac{dt}{t-x}=\frac{1}{2}U_{k-2}(x)+$ $+U_{k-1}(x)+\frac{1}{2}U_k(x), \quad k\geq 2;$

  2. $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}U_k(t)\frac{dt}{t-x}=2\sum_{j=0}^{k-1}U_j(x)+$ $+U_k(x), k\geq 0;$

  3. $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}T_k(t)\frac{dt}{t-x}=2\sum_{j=0}^{k-1}{}^{0}T_j(x)+$ $+T_k(x), k\geq 0;$

  4. $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}U_k(t)\frac{dt}{t-x}=2\sum_{j=0}^{k}{}^{0}(j+1)\ T_{k-j}(x),$ $k\geq 0.$

– 1. $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}U_0(t)\frac{dt}{t-x}=$ $=-\frac{1}{2}U_1(x),$

  $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}U_{k-1}(t)\frac{dt}{t-x}=\frac{1}{2}U_{k-2}(x)-$ $-\frac{1}{2}U_k(x), k\geq 2.;$

  2. $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}T_0(t)\frac{dt}{t-x}=-\frac{1}{2}U_1(x),$

$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}T_1(t)\frac{dt}{t-x} = \frac{1}{4}U_0(x) - -\frac{1}{4}U_2(x)$,

$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}T_2(t)\frac{dt}{t-x} = \frac{1}{2}U_1(x) - -\frac{1}{4}U_3(x)$,

$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}T_{k-1}(t)\frac{dt}{t-x} = -\frac{1}{4}U_{k-4}(x) + +\frac{1}{2}U_{k-2}(x) - \frac{1}{4}U_k(x)$, $k \geq 4$;

3. $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}T_0(t)\frac{dt}{t-x} = -T_1(x)$,

$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}T_1(t)\frac{dt}{t-x} = -\frac{1}{2}T_2(x)$,

$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}T_{k-1}(t)\frac{dt}{t-x} = \frac{1}{2}T_{k-2}(x) - \frac{1}{2}T_k(x), k > 2$.

На основании данных спектральных соотношений построены вычислительные схемы приближённого решения простейшего сингулярного интегрального уравнения первого рода ($k(x,t) \equiv 0$) в разных классах функций по Мусхелишвили. Схемы запрограммированы в СКМ Wolfram Mathematica в виде стандартных модулей. Проверена эффективность полученных вычислительных схем на модельных примерах.

Вычислительная схема получается на основании интерполирования функции $f(x)$ многочленами Чебышева первого или второго рода ($f_n(x)$) и точного решения приближенного уравнения:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} p(t)u_{n-(\alpha+\beta)}(t)\frac{dt}{t-x} = f_n(x), \qquad (2)$$

где $p(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, |\alpha| = |\beta| = \frac{1}{2}$,

$$u_{n-(\alpha+\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x) \qquad (3)$$

или

$$u_{n-(\alpha+\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k U_k(x). \qquad (4)$$

Так как решение уравнения зависит от класса функций по Мусхелишвили, то в классах неограниченных функций ($\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$) для численного решения СИУ ставится задача единственности.

Используя приведённые разложения сингулярного интеграла, построены 16 вычислительных схем численного решения уравнения (2) в четырех разных классах функций по Мусхелишвили.

В СКМ Wolfram Mathematica данные вычислительные схемы представлены в виде стандартных модулей:

- класс 1 (в окрестности точек $x = \pm 1$ допускается интегрируемая особенность);
- класс 2 (искомое решение ограничено вблизи точек $x = \pm 1$);
- класс 3 (интегрируемая неограниченность в окрестности точки $x = 1$);
- класс 4 (интегрируемая неограниченность в окрестности точки $x = -1$).

Прототип модуля для класса 1:

$$Name[ff\_, N\_, \alpha 0\_, x\_]$$

где:

N – количество узлов интерполирования,

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$,

$\alpha 0$ – заданная константа единственности α_0,

x - массив точек-аргументов, в которых ищется решение.

Возвращаемое значение: $u_{n-(\alpha+\beta)}(x)$ по формуле (3) или (4) в зависимости от вычислительной схемы.

$Name$ может принимать следующие значения: $Fck\alpha 1$, $Fck\rho 1$, $Fck\gamma 1$, $Fck\eta 1$.

Прототип модуля для классов 2 – 4:

$Name[ff\_, N\_, x\_]$

$Name$ может принимать следующие значения: $Fck\alpha 0$, $Fck\rho 0$, $Fck\gamma 0$, $Fck\eta 0$, $Fck\beta$, $Fck\sigma$, $Fck\mu$, $Fck\delta$.

Например, рассмотрим использование указанных модулей в системе Wolfram Mathematica на конкретном примере.

Пусть

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}u(t)\frac{dt}{t-x} = \frac{1-x}{\sqrt{2}(1+x^2)}, \quad -1 < x < 1.$$

Известно, что решением является функция $u(t) = \frac{t}{1+t^2}$.

В таблице приведены результаты абсолютных погрешностей по вычислительным схемам в системе точек от -0,99 до 0,99 с шагом 0,01

Таблица 1 –

n	5	15	25	35
$Fck\alpha 0$	2E-2	3.2E-6	4.7E-10	7.2E-14
$Fck\rho 0$	3.8E-2	5.8E-6	7.1E-10	1.6E-14
$Fck\gamma 0$	2E-2	3.2E-6	4.7E-10	7.2E-14
$Fck\eta 0$	3.8E-2	5.8E-6	7.1E-10	1.6E-14

Список литературы

1. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции : в 2 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. —. М., 1966. —Т. 2.
2. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. — Москва: Наука, 1977.
3. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. — М., 1968.
4. Панасюк, В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В. В. Панасюк. — Киев: Наукова думка, 1968.
5. Расолько, Г. А. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши методом ортогональных многочленов [Электронный ресурс] / Г. А. Расолько. — Минск: БГУ, 2015. —262 с. http://elib.bsu.by/handle/123456789/118113.