СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ОСНОВЕ БАЙЕСОВСКОГО ПОДХОДА

В. И. Лобач
Кафедра математического моделирования и анализа данных, Белорусский государственный университет
Минск, Республика Беларусь
E-mail: lobach@bsu.by

Рассматривается метод робастизации фильтра Калмана на основе байесовского подхода. Приводятся рекуррентные формулы для оценивания ненаблюдаемых компонент вектора состояния системы.

Введение

Важной проблемой в теории временных рядов является оценивание состояния системы, изменяющегося во времени, используя данные наблюдений. В математической форме эта проблема может быть сформулирована следующим образом.

Пусть дана модель наблюдений:

$$\theta_t = f(\theta_{t-1}) + \varepsilon_t, \tag{1}$$

$$y_t = g(\theta_t) + \vartheta_t, \tag{2}$$

где первое уравнение представляет изменение во времени состояния системы, оно называется уравнением состояния. Это уравнение показывает, что будущие состояния системы не могут быть точно определены из-за наличия эффектов воздействия неизвестных факторов, влияние которых описывается случайной переменной ε_t. Второе уравнение представляет собой канал наблюдений, случайная переменная ϑ_t описывает ошибки наблюдений. Цель анализа состоит в оценивании состояния θ_{t+k} по множеству наблюдений $y_1, y_2, \ldots, y_t$. Если $k > 0$, мы имеем задачу прогнозирования, при $k = 0$ – задачу фильтрации, при $k < 0$ – задачу сглаживания. Рекуррентная форма решения представляет особый интерес, поскольку она является очень удобной для компьютерной реализации алгоритма оценивания. Очевидный первый шаг для решения этой проблемы состоит в том, чтобы использовать линейное приближение разложения в ряд Тейлора функций f и g в (1), (2). Калман [1] предложил рекуррентный алгоритм оценивания состояния системы θ_t. Однако при наличии нарушений модельных предложений, в частности, когда ε_t и ϑ_t не являются нормально распределенными случайными величинами, алгоритм Калмана теряет свою эффективность [2].

Представление модели в пространстве состояний и идея рекуррентного оценивания является основой для байесовского подхода в теории оценивания. В данной работе в предположении наличия «выбросов» в наблюдениях рассматривается применение байесовского подхода к построение робастного фильтра для решения проблемы оценивания.

I. Фильтр Калмана

Пусть ненаблюдаемый вектор состояний θ_t подчиняется уравнению

$$\theta_t = \Omega_t \theta_{t-1} + \varepsilon_{1t},\ \varepsilon_{1t} \sim N(0,\, R_t), \tag{3}$$

где Ω – $(r \times r)$ известная матрица, R_t – $(r \times r)$ неотрицательно определенная матрица, y_t – $(r \times 1)$ вектор наблюдений удовлетворяет уравнению

$$y_t = A_t \theta_t + \varepsilon_{2t},\ \varepsilon_{2t} \sim N(0,\, C_t), \tag{4}$$

где A_t – $(p \times r)$ известная матрица, ε_{2t} – случайные величины, распределенные по нормальному закону с ковариационной матрицей C_t. Фильтр Калмана представляет собой систему рекуррентных уравнений для оценивания θ_t при наличии вновь поступающих наблюдений. Уравнения (3), (4) можно рассматривать как линейное приближение уравнений (1), (2).

Приведем структуру фильтра Калмана в рамках байесовского подхода к решению задач статистического оценивания. В момент $t = 1$ нет наблюдений, и мы имеем априорное распределение вектора θ_0, которое является нормальным со средним μ_0 и ковариационной матрицей V_0. Используя распределение вектора состояний в этот момент времени, получим, что θ_t должен быть нормальным с параметрами:

$$E\{\theta_t | \bar{y}_{t-1}\} = \mu_{t|t-1} = \Omega_t \mu_{t-1}, \tag{5}$$

$$\mathrm{var}\{\theta_t | \bar{y}_{t-1}\} = \Omega_t V_{t-1} \Omega_t^T + R_t, \tag{6}$$

Здесь мы использовали обозначения: $\bar{y}_t = \{y_1, y_2, \ldots, y_t\}$, $\mu_{t|t-1}$ – условное математическое ожидание вектора θ_t при условии, что наблюдается $\bar{y}_{t-1} = \{y_1, \ldots, y_{t-1}\}$.

Следующий шаг состоит в предсказании ожидаемых значений новых наблюдений, которые в условиях линейных соотношений и нормальности наблюдений должны быть нормальными с параметрами

$$E\{y_t | y_{t-1}\} = \hat{y}_t = A_t \mu_{t|t-1}, \tag{7}$$

$$\mathrm{var}\{y_t | y_{t-1}\} = M_t = A_t V_{t|t-1} A_t^T + C_t. \tag{8}$$

Когда новое наблюдение y_t поступает, распределение вектора θ_t вычисляется согласно формуле Байеса

$$P(\theta_t|\bar{y}_t) \sim P(y_t|\theta_t) \cdot P(\theta_t|\bar{y}_{t-1}), \qquad (9)$$

и в соответствии с байесовской теорией оценивания должно быть нормальным с параметрами

$$\mu_{t|t} = \mu_{t|t-1} + V_{t|t-1} A_t^T M_t^1 (y_t - A_t \mu_{t|t-1}), \quad (10)$$

$$V_{t|t}^{-1} = A_t^T C_t^{-1} A_t + V_{t|t-1}^{-1}. \qquad (11)$$

Нетрудно проверить, что

$$V_{t|t}^1 = V_{t|t-1} - V_{t|t-1} A_t^T M_t^{-1} A_t V_{t|t-1},$$

где матрица M_t определена в (8).

Формулы (5)–(11) определяют фильтр Калмана, который получен на основании байесовского подхода к теории оценивания.

II. Байесовское прогнозирование

Рассмотрим решение задачи байесовского прогнозирования, основанного на робастном алгоритме фильтрации [3].

Пусть $A_t = 1$, $\Omega_t = 1$, y_t и θ_t – скаляры, тогда $\mu_{t|t1} = \mu_{t1}$, $V_{t|t-1} = R_t + V_{t-1}$, $R_t = R$, $C_t = C$.

Предположим также, что $C_1{=}\sigma^2$, $C_2{=}k^2\sigma^2$, тогда

$$\mu_t = \mu_{t-1} +$$
$$+(R+V_{t-1}) \left(\frac{\alpha_{t,1}}{\sigma^2 + R + V_{t-1}} + \frac{\alpha_{t,2}}{k\sigma^2 + R + V_{t-1}} \right) \times$$
$$\times (y_t - \mu_{t-1}).$$

Пусть $V_t = V_{t-1} = a$, $\theta_1 = \sigma^2(\sigma^2 + R + a)^{-1}$, $\theta_2 = k\sigma^2(k^2\sigma^2 + R + a)^{-1}$, тогда

$$\mu_t = (\alpha_{t,1}\theta_1 + \alpha_{t,2}\theta_2)\mu_{t-1} +$$
$$+[(1-\theta_1)\alpha_{t,1} + (1-\theta_2)\alpha_{t,2}] y_t.$$

Решив это рекуррентное уравнение

$$\mu_t = \sum_{i=0}^{n} \frac{1-\theta_{(t-i)}}{\theta_{(t-1)}} y_{(t-i)} \left(\prod_{j=0}^{i} \theta_{(t-j)} \right).$$

Если обозначить через $w(r;,i,j,k,\ldots,h)$ – вероятность того, что r выбросов наблюдений $i,j,k,\ldots,h$, то

$$w(r;i,j,k,\ldots,h) = \left(\prod_{\substack{t=1 \\ t\neq i,\,j,\,\ldots,\,h}}^{n} \alpha_{t,\,1} \right) \alpha_{i,2}\alpha_{j,2}\ldots\alpha_{h,2}.$$

Пусть $\hat{\mu}_t(r;i,j,k,\ldots,h)$ – среднее, которое равно $\mu_t{=}\theta_{(1)}\mu_{t-1} + (1-\theta_{(1)})y_t$, если $t{\neq}i,j,k,\ldots,h$ и $\mu_t{=}\theta_{(2)}\mu_{t-1} + (1-\theta_{(2)})y_t$, если $t{=}i,j,k,\ldots,h$, тогда

$$\mu_t{=}\Sigma w(r;i,j,k,\ldots,h)\hat{\mu}_t(r;i,j,k,\ldots,h),$$

где сумма берется по всем 2^t возможным комбинациям наблюдений, выбранных из $y-1,\ \ldots,\ y_t$.

1. Брамлеф, К., Зиффлинг, Г. Фильтр Калмана – Бьюси / К. Брамлеф, Г. Зиффлинг // М.: Наука, 1982. – 276 с.
2. Ершов, А. А., Липцер, Р. Ш. Робастный фильтр Калмана в дискретном времени / А. А. Ершов, Р. Ш. Липцер // Автоматика и телемеханика. – 1978. – Т. 39. – С. 359–367.
3. Masereliez, A., Martin, D. Robust Bayssian estimation for linear model and robustifying the Kalman filter / A. Masereliez, D. Martin // JIEEE Trans. Automat. Control. Ae-22. – 1977. – P. 361–371.