Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра технической механики

В.Г. Назаренко

ДИНАМИКА МЕХАНИЗМОВ

тексты лекций по курсу «Техническая механика»

для студентов специальности 53 01 03

Минск 2002

УДК 621.01 (075.8)
ББК 30.12 я 73
Н 19

Рецензент: Вышинский Н.В., профессор ВГКС.

Назаренко В.Г.

Н 19 Динамика механизмов: Тексты лекций по курсу «Техническая механика» для студентов спец. 53 01 03 / В.Г. Назаренко. – Мн.: БГУИР, 2002. – 24 с.

В работе приведены тексты лекций по разделу «Динамика механизмов» курса «Техническая механика». Рассмотрена методика решения задачи динамического анализа механизмов, даны поясняющие примеры.

УДК 621.01 (075.8)
ББК 30.12 я 73

ISBN 985-444-390-6

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Динамика механизмов является разделом механики, в котором изучается движение механизмов с учетом действующих на них сил. В этом разделе устанавливаются общие зависимости между кинематическими параметрами механизма (обобщенными координатами, скоростями и ускорениями), массами и моментами инерции его звеньев и действующими на него силами. При использовании дифференциальных уравнений движения можно решить две основные задачи динамики механизмов: динамического анализа и динамического синтеза [1].

Задача динамического анализа – найти закон движения звеньев механизма по заданным силам и моментам сил, массам и моментам инерции звеньев. Кинематические характеристики механизма (функция положения и передаточные функции) определяют предварительно в ходе кинематического анализа.

Обратная задача – динамический синтез, при котором требуется обеспечить заданное движение рабочих звеньев, подбирая их инерционные параметры, силовые воздействия и кинематические характеристики.

Эти задачи возникают при обосновании мощности двигателей систем автоматики и робототехники, регулировании скорости движения звеньев механизма, расчете быстродействия, определении действующих на звенья сил, используемых при выборе рациональных конструктивных форм деталей механизма, их прочности и жесткости.

Методы решения задач динамики могут быть аналитическими, графоаналитическими и экспериментальными. Они основываются на энергетическом анализе механической системы, применении принципа Даламбера или уравнений Лагранжа.

Для удобства выполнения динамического анализа многозвенный механизм заменяют расчетной динамической моделью, которая может содержать одно или несколько звеньев приведения в зависимости от числа степеней свободы механизма (количества ведущих звеньев). Звено приведения условно считают обладающим приведенной массой или приведенным моментом инерции и движущимся под действием приведенной силы или приведенного момента сил. С помощью уравнений Лагранжа II рода находят закон движения ведущего звена, а законы движения ведомых звеньев определяют кинематически по известным функциям положения и передаточным функциям. При этом пренебрегают деформациями звеньев и влиянием зазоров в соединениях.

1. Силы инерции и моменты сил инерции звеньев механизма

Сила инерции звена – это реакция, возникающая при изменении относительного движения, т.е. при наличии ускорения. Величины и направление векторов сил и моментов сил инерции зависят от характера движения звена механизма, поэтому при определении этих параметров все звенья делят на три группы [2]:

1) движущиеся поступательно;

2) вращающиеся относительно неподвижной оси;

3) совершающие плоскопараллельное движение.

Все эти движения совершают звенья кривошипно-ползунного механизма, изображенного на рис.1.1.

При поступательном движении все точки звена (на рис.1.1 – ползуна В) описывают одинаковые траектории и в данный момент времени имеют равные скорости и ускорения. В этом случае возникает сила инерции, которую считают приложенной в центре масс С звена и направленной противоположно его ускорению:

$$\overline{F}_{и} = -m \cdot \overline{a}_{c}, \qquad (1.1)$$

где m – масса звена; $\overline{a}_{c}$ - абсолютное ускорение его центра масс.

Ползун В совершает прямолинейное движение, при котором угловое ускорение $\varepsilon = 0$, поэтому момент сил инерции $M_и = 0$.

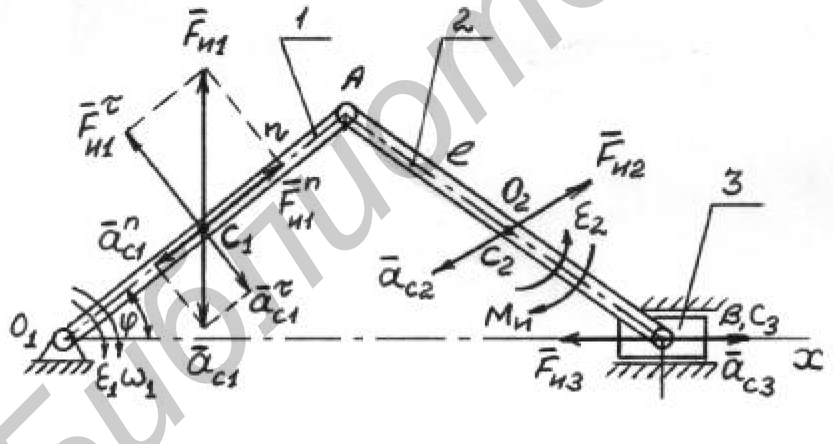

Рис.1.1

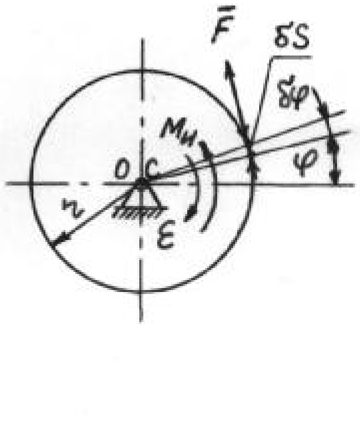

Рис.1.2

При вращательном движении звена (на рис.1.2 – колеса) вокруг оси, проходящей через масс звена, сила инерции $\overline{F}_{и} = 0$, так как ускорение $\overline{a}_{c} = 0$. Действует пара сил инерции с моментом

$$M_{и} = -J_{c} \cdot e, \qquad (1.2)$$

направленным противоположно угловому ускорению ε. Здесь J_c – момент инерции звена относительно центра масс.

Звено, у которого центр масс С совпадает с центром вращения О (рис.1.2), называется статически уравновешенным. Такое звено, установленное в любом произвольном положении, не будет вращаться под действием собственного веса.

В случае вращения звена вокруг оси, перпендикулярной к плоскости движения и не проходящей через его центр масс (на рис. 1.1 – кривошипа O_1A), воздействие сил инерции на звено может быть представлено в виде силы инерции

$$\overline{F}_и = -m \cdot \overline{a}_c$$

и пары сил инерции с моментом

$$M_и = -J_c \cdot e \ .$$

Сила инерции содержит нормальную $\overline{F}_и^n$ и тангенциальную $\overline{F}_и^t$ составляющие

$$\overline{F}_и = \overline{F}_и^n + \overline{F}_и^t = -m\overline{a}_c^n - m\overline{a}_c^t = -m(\overline{a}_c^n + \overline{a}_c^t) = -m\overline{a}_c . \qquad (1.3)$$

Значения нормального a_c^n и тангенциального (касательного) a_c^t ускорений определяются по формулам

$$a_c^n = w^2 \cdot OC, \qquad \overline{a}_c^t = e \cdot OC, \qquad (1.4)$$

где w и e - угловые скорость и ускорение звена соответственно; ОС – расстояние от центра масс до оси вращения.

Модуль силы инерции равен

$$F_и = \sqrt{(F_и^n)^2 + (F_и^t)^2} = m \cdot \boldsymbol{OC}\sqrt{w^4 + e^2} . \qquad (1.5)$$

При равномерном вращении звена $e = 0, \quad \overline{a}_C^t = 0, \quad \overline{F}_и^t = 0$ и

$$\overline{F}_и = \overline{F}_и^n = -m\overline{a}_c^n = -m\overline{a}_c . \qquad (1.6)$$

Сложное плоскопараллельное движение шатуна АВ (см. рис.1.1) можно рассматривать как состоящее из двух движений: переносного поступательного вместе с центром масс C_2 и относительного вращательного вокруг подвижной оси O_2, проходящий через центр масс C_2, с угловым ускорением ε_2.

Сила инерции звена АВ в переносном движении

$$\overline{F}_{и_2} = -m_2\overline{a}_{C_2} . \qquad (1.7)$$

Сила инерции в относительном движении звена АВ вокруг центра масс C_2 равна нулю, так как центр масс находится на подвижной оси вращения O_2 ($O_2C_2 = 0$).

Момент сил инерции вычисляется так же, как и при вращении звена вокруг неподвижной оси:

$$M_и = -J_{C_2} \cdot e_2 \,. \quad (1.8)$$

Действие сил и моментов сил инерции увеличивает потери энергии на трение, уменьшает быстродействие, вызывает упругие колебания и может стать причиной разрушения звеньев. Поэтому при конструировании механизмов инерционные нагрузки стремятся уменьшить. Этой цели служит статическая и динамическая балансировка отдельных звеньев и уравновешивание механизмов в целом с помощью специальных корректирующих масс.

2. Принцип Даламбера и общее уравнение динамики

С помощью принципа Даламбера уравнениям динамики по форме придается вид уравнений статики [3]. Сначала запишем уравнение движение отдельной материальной точки относительно выбранной системы отсчета под действием равнодействующих активных сил $\overline{F}$ и реакций связей $\overline{R}$

$$m\overline{a} = \overline{F} + \overline{R} \,. \quad (2.1)$$

Под **связями** будем понимать условия, ограничивающие свободу перемещения точек механической системы.

Заменим произведение $m\overline{a}$ на силу инерции $\overline{F}_и = -m\overline{a}$. Тогда уравнение

$$\overline{F} + \overline{R} + \overline{F}_и = 0 \quad (2.2)$$

и будет выражать **принцип Даламбера**: при движении материальной точки активные силы, реакции связей и силы инерции точки образуют уравновешенную систему сил. Другими словами, система всех этих сил может рассматриваться как находящаяся в равновесии.

В проекциях на координатные оси получаем три условия равновесия сил:

$$\begin{aligned} F_x + R_x + F_{иx} &= 0\,, \\ F_y + R_y + F_{иy} &= 0\,, \\ F_z + R_z + F_{иz} &= 0\,. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Далее рассмотрим систему n материальных точек. К каждой точке системы в общем случае приложены равнодействующая активных сил и равнодействующая реакций связей. Применяя принцип Даламбера к каждой точке системы, получим

$$\overline{F}_k + \overline{R}_k + \overline{F}_{иk} = 0 \ \text{(k = 1,2,…,n)}. \quad (2.4)$$

Если просуммировать левые части уравнения (2.4) по всем точкам системы, то получим принцип Даламбера для системы материальных точек:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F_k} + \sum_{k=1}^{n} \overline{R}_k + \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_{uk} = 0. \tag{2.5}$$

Для получения общего уравнения динамики умножим каждое выражение (2.4) скалярно на мысленное возможное перемещение точки $d\,\overline{r}_k$ и сложим их:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F_k} \cdot d\,\overline{r_k} + \sum_{k=1}^{n} \overline{R}_k \cdot d\,\overline{r_k} + \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_{uk} \cdot d\,\overline{r_k} = 0. \tag{2.6}$$

Возможными перемещениями несвободной механической системы $(\overline{R} \neq 0)$ называются воображаемые бесконечно малые перемещения, допускаемые в данный момент наложенными на систему связями. Их рассматривают как величины первого порядка малости, пренебрегая при этом величинами высших порядков малости.

Поэтому криволинейные перемещения точек заменяют прямолинейными отрезками, отложенными по касательным к траекториям точек. Так, например, возможным перемещением кривошипа ОА (см. рис. 1.1) является его поворот на бесконечно малый угол dj вокруг точки О. При этом повороте точка А должна переместиться по дуге окружности. С точностью до величин первого порядка малости это угловое перемещение заменяют возможным перемещением в виде прямолинейного отрезка, отложенного по касательной к траектории точки А.

Возможным перемещением ползуна В является бесконечно малый отрезок прямолинейной траектории точки В.

Действительные перемещения несвободной механической системы, движущейся под действием приложенных к ней сил, входят в число ее возможных перемещений, являясь их частным случаем. Однако это справедливо только для стационарных связей, не зависящих от времени.

В уравнении (2.6) произведение силы на перемещение $d\,\overline{r_k}$ представляет собой элементарную работу силы на возможном перемещении точки ее приложения. Ограничимся случаем, когда сумма работ реакций связей на любом возможном перемещении системы равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{R}_k \cdot d\,\overline{r_k} = 0. \tag{2.7}$$

Тогда получим уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} (\overline{F}_k + \overline{F}_{uk}) \cdot d\,\overline{r_k} = 0\,, \tag{2.8}$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} (\overline{F}_k - m_k \cdot \overline{a}_k) \cdot d\,\overline{r_k} = 0\,, \tag{2.9}$$

называемое **общим уравнением динамики** (или принципом Даламбера-Лагранжа), которое гласит: при движении материальной системы работа всех активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении системы, допускаемом связями, равна нулю.

Оно может быть представлено и в аналитической форме:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(F_{kx}-m_k\ddot{x}_k)dx_k+(F_{ky}-m_k\ddot{y}_k)dy_k+(F_{kz}-m_k\ddot{z}_k)dz_k\right]=0. \qquad (2.10)$$

Здесь F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} - проекции активных сил на оси координат; dx_k, dy_k, dz_k - проекции векторов возможных перемещений $d\bar{r}_k$ на те же оси; $\ddot{x}_k, \ddot{y}_k, \ddot{z}_k$ - проекции векторов ускорений $\bar{a}_k$ точек системы.

Общее уравнение динамики (2.10) позволяет составить дифференциальные уравнения движения любой механической системы. Для механизмов силы инерции точек каждого звена можно привести к одной результирующей силе, приложенной к центру масс, и одной паре сил инерции.

3.Кинетическая и потенциальная энергии звеньев механизмов

Кинетическая энергия является динамической мерой движения любого материального тела. Для механизма она равна сумме кинетических энергий всех его подвижных звеньев.

При вращении звена вокруг неподвижной оси (на рис. 1.1 – кривошипа O_1A) его кинетическая энергия

$$K_1=\frac{1}{2}J_{O_1}\cdot w_1^2, \qquad (3.1)$$

где J_{O_1} - момент инерции звена относительно оси вращения O_1; w_1 - угловая скорость звена.

Так как центр масс C_1 кривошипа не совпадает с центром вращения O_1, то для кривошипа

$$J_{O_1}=J_{C_1}+m_1\cdot l_{O_1C_1}^2, \qquad (3.2)$$

где J_{C_1} - момент инерции звена O_1A относительно оси, проходящей через его центр масс C_1 перпендикулярно плоскости движения; m_1 - масса звена; $l_{O_1C_1}$ - расстояние от оси вращения O_1 до центра масс C_1.

Кинетическая энергия вращающегося колеса (рис. 1.2) также определяется по формуле (3.1), а поскольку центр масс лежит на оси вращения, то $l_{OC}=0$ и $J_O=J_C$.

Если звено механизма совершает плоскопараллельное движение (на рис.1.1 – шатун АВ), то эта энергия будет равна

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 u_{C_2}^2 + \frac{1}{2} J_{C_2} w_2^2, \qquad (3.3)$$

где m_2 - масса шатуна; u_{C_2} - скорость его центра масс C_2; J_{C_2} - момент инерции звена относительно подвижной оси, проходящей через центр масс C_2; w_2 - угловая скорость вращения шатуна вокруг подвижной оси.

При поступательном движении звена (на рис. 1.1 – ползуна В) его кинетическая энергия

$$K_3 = \frac{1}{2} m_3 u_{C_3}^2, \qquad (3.4)$$

где m_3 - масса ползуна; u_{C_3} - скорость его центра масс C_3.

В общем случае кинетическая энергия всего механизма

$$K = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} m_i u_{ci}^2 + \frac{1}{2} J_{ci} w_i^2 \right), \qquad (3.5)$$

где n – число подвижных звеньев.

Для кривошипно-ползунного механизма, имеющего три подвижных звена, кинетическая энергия равна

$$K = K_1 + K_2 + K_3 = \frac{1}{2} J_{O_1} w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_{C_2}^2 + \frac{1}{2} J_{C_2} w_2^2 + \frac{1}{2} m_3 u_{C_3}^2. \qquad (3.6)$$

Потенциальная энергия механической системы определяется работой сил тяжести, натяжением пружин и др. [2-4].

Рассмотрим теорему о работе сил тяжести: работа сил тяжести не зависит от вида траектории и равна произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения. Для вычисления такой работы в общем случае необходимо знать закон движения точки приложения силы по данной траектории.

Пусть материальная точка М, совпадающая с центром масс звена механизма, движется под действием силы тяжести $\overline{P}$ и за какой-то промежуток времени перемещается из положения M_1 в положение M_2, пройдя путь S. На траектории точки М выделим бесконечно малый участок dS, который полагаем прямолинейным, и из его концов проведем прямые, параллельные осям координат (рис. 3.1).

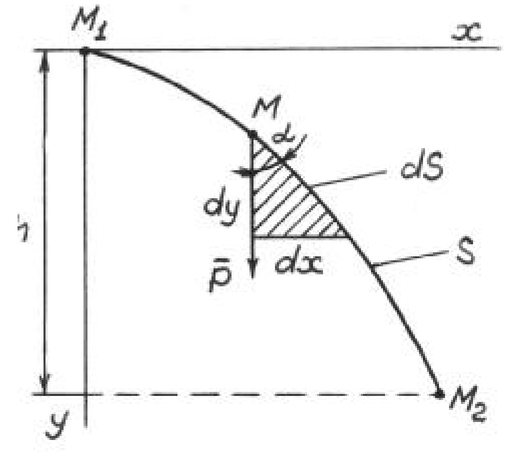

Рис.3.1

Элементарная работа силы тяжести $\overline{P}$ на пути $d\overline{S}$ равна их скалярному произведению:

$$dA = \overline{P} \cdot d\overline{S} = PdS\cos a\,, \quad (3.7)$$

где a – угол между направлениями вектора силы и вектора перемещения точки ее приложения.
Из заштрихованного треугольника получим, что $dS\cos a = dy$.

Полная работа силы тяжести на пути S

$$A = \int_o^s PdS \ \cos\ a \ = \int_o^h Pdy \ = Ph\,, \quad (3.8)$$

что и доказывает теорему (h – вертикальное перемещение точки приложения силы тяжести).

Потенциальная энергия звена механизма при действии силы тяжести равна работе, которую совершает эта сила при перемещении центра масс звена из точки M_2 в начальную точку M_1:

$$U = A(M_2, M_1). \quad (3.9)$$

Силы, работа которых не зависит от вида траектории движения центра масс звена, а определяется только положением начальной и конечной точек пути, **называются потенциальными**. Проекции потенциальных сил звеньев на оси координат определяются частными производными от потенциальной энергии по соответствующим координатам

$$Q_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Q_z = -\frac{\partial U}{\partial z}\,. \quad (3.10)$$

Кинетическая и потенциальная энергии звеньев механизма, как и понятия обобщенных координат и сил, используются для получения уравнений Лагранжа II рода.

4.Обобщенные координаты и силы

Перемещения звеньев механизма ограничены имеющимися связями. Это означает, что не все координаты точек звеньев независимы. Для такой механической системы положение ее точек определяется заданием только независимых координат, однозначно определяющих положение системы [3]. Они называются **обобщенными координатами** и обозначаются q.

При голономных связях, которые ограничивают возможные перемещения звеньев, но не накладывают ограничений на скорости точек, число независимых обобщенных координат равно числу степеней свободы механической системы. Так, например, положение звена OA (рис. 4.1) определяется заданием угла его поворота φ, который можно рассматривать как обобщенную координату q = φ данного звена. Положение кривошипа OA определяется одной обобщенной координатой, поэтому он имеет одну степень свободы.

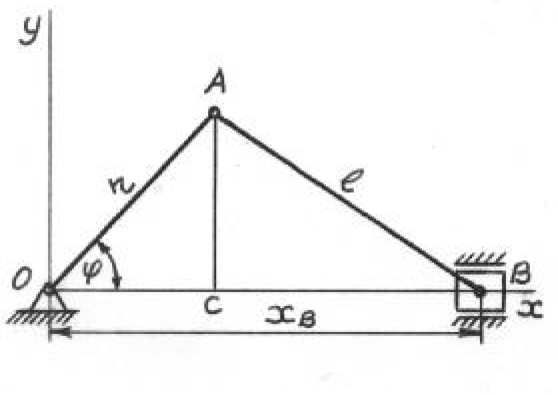

Рис.4.1

В то же время углом поворота кривошипа вполне определяется положение всех точек звеньев кривошипно-ползунного механизма (рис. 4.1) при их заданных геометрических размерах. Например, зная длину кривошипа r и длину шатуна l, можно выразить декартову координату ползуна B через обобщенную координату q = φ:

$$x_B = OC + CB = r\cos j + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2 j}\,. \qquad (4.1)$$

Таким же образом можно определить координату любой точки этого механизма.

Обобщенные силы определяются из выражения работы механической системы.

Работа является количественной мерой действия силы при превращении механического движения в другую форму (потенциальной энергии, теплоты, электричества и др.).

Предположим, что механическая система, состоящая из n материальных точек, имеет S степеней свободы, т.е. ее положение определяется S обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_j, \ldots, q_S$. Дадим обобщенной координате q_j бесконечно малое приращение δq_j, не изменяя остальных обобщенных координат. Тогда точки системы получат бесконечно малые перемещения $\delta S_1, \delta S_2, \ldots, \delta S_n$. Так как они допускаются связями, то совокупность этих перемещений будет одним из возможных перемещений системы.

Действующие на точки системы силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \mathbf{K}, \overline{F}_n$ совершают на данных перемещениях элементарную работу

$$dA_j = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} \cdot d\,\overline{S}_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot d\,S_i \cos\left(\overline{F}_i, d\,\overline{S_i}\right), \qquad (4.2)$$

где $\left(\overline{F}_i, d\overline{S}_i\right)$ - угол между направлениями вектора силы $\overline{F}_i$ и вектора точки ее приложения $d\,\overline{S}_i$.

Отношение работы dA_j к приращению обобщенной координаты $d\,q_j$ представляет собой обобщенную силу Q_j, соответствующую координате q_j:

$$Q_j = \frac{dA_j}{dq_j} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i dS_i \cos(\overline{F}_i, d\overline{S}_i)}{dq_j}. \tag{4.3}$$

При вращательном движении звена (рис. 1.2) вычисляют элементарную работу момента силы $\overline{F}$ относительно оси вращения О $M_O(\overline{F})$

$$d\,A = \overline{F} \cdot d\,\overline{S} = Fd\,S\cos(\overline{F}, d\,\overline{S}) = F\,rdj\, = M_O(\overline{F})dj\,, \tag{4.4}$$

где $d\overline{S}$ – элементарное перемещение точки А, угол $(\overline{F}, d\,\overline{S})$=0; r – радиус звена; dj – приращение обобщенной координаты $q = \varphi$.

Отсюда обобщенная сила

$$Q = \frac{dA}{dj} = M_O(\overline{F}). \tag{4.5}$$

В общем случае можно записать:

$$dA = \sum_{j=1}^{S} Q_j dq_j = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \mathbf{K} + Q_S dq_S\,, \tag{4.6}$$

где Q_j - обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j.

Ее размерность зависит от размерности обобщенной координаты и определяется равенством

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]}. \tag{4.7}$$

Так, например, линейной обобщенной координате q соответствует обобщенная сила Q, измеряемая единицами силы. Если q представляет собой угол j, то размерность Q соответствует размерности момента (см. формулу (4.5)) и т.д.

5.Уравнения Лагранжа II рода и методика их составления

При динамических расчетах в качестве математической модели чаще всего используют уравнение Лагранжа II рода, которое получают из общего уравнения динамики (2.9) [3].

Пусть положение механической системы описывается S независимыми обобщенными координатами q_j, которые являются функциями времени t. Общее уравнение динамики представим в виде

$$\sum_{k=1}^{n} (\overline{F}_k - m_k \frac{d\overline{u}_k}{dt}) d\,\overline{r}_k = 0. \tag{5.1}$$

Опуская промежуточные преобразования, запишем их результат:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial K}{\partial q_j}=Q_j, \quad j=1,2,\ldots,S, \tag{5.2}$$

где К – кинетическая энергия механической системы; q_j и $\dot{q}_j$ - обобщенные координаты и скорость; Q_j – обобщенная сила.

Число уравнений соответствует числу степеней свободы, которое для механизмов равно количеству ведущих звеньев.

Систему S дифференциальных уравнений (5.2) называют уравнениями Лагранжа II рода. Эти уравнения представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка относительно обобщенных координат механической системы q_1, q_2, …,q_S. Интегрируя их и определяя по начальным условиям постоянные интегрирования, получаем S уравнений движения системы в обобщенных координатах:

$$q_j=q_j(t), \quad j=1,2,\ldots,S. \tag{5.3}$$

Если силы, действующие на механическую систему, потенциальны, то выполняются условия (3.10) и

$$Q_j=-\frac{\partial U}{\partial q_j}. \tag{5.4}$$

Тогда уравнения Лагранжа II рода (5.2) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial K}{\partial q_j}=-\frac{\partial U}{\partial q_j}. \tag{5.5}$$

Учтем, что потенциальная энергия U не зависит от обобщенной скорости, т.е.

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}=0, \tag{5.6}$$

и введем функцию Лагранжа

$$L=K-U. \tag{5.7}$$

С учетом уравнений (5.5) и (5.7) для случая потенциальных сил уравнениям Лагранжа II рода можно придать другой вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0, \quad j=1,2,\ldots,S. \tag{5.8}$$

При составлении уравнений Лагранжа рекомендуют следующий порядок операций:

1. На схеме механизма изображают все активные силы, действующие на его звенья.

2. Определяют число степеней свободы и вводят обобщенные координаты.

3. Вычисляют кинетическую энергию механизма и выражают ее через обобщенные координаты и скорости.

1. Определяют обобщенные силы механизма.
2. Выполняют операции дифференцирования кинетической энергии в соответствии с уравнениями Лагранжа (5.2).
3. Полученные выражения подставляют в уравнения Лагранжа и определяют искомые параметры.

Если активные силы потенциальны, то вместо обобщенных сил можно определить потенциальную энергию механизма, составить функцию Лагранжа и найти ее производные.

Пример. Передача вращения между двумя валами осуществляется с помощью гибкой связи (рис. 5.1). Радиусы шкивов 1 и 2 – r_1 и r_2, их моменты инерции – J_1, J_2, вес ремня 3 – P. Составить уравнение движения первого вала, если на него действует крутящий момент T_1, а на другой вал – момент сопротивления T_2. Трением в опорах и моментами инерции валов пренебречь.

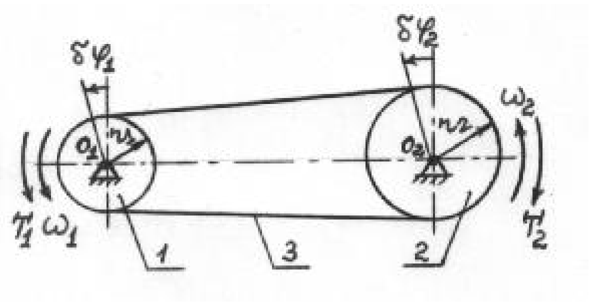

Рис.5.1

Решение

1. К шкивам 1 и 2 передачи (см. рис.5.1) прикладываем моменты T_1 и T_2, причем T_1 направляем в сторону вращения, T_2 – в противоположную.

2. Передача имеет одну степень свободы (одно ведущее звено – шкив 1). За обобщенную координату примем угол поворота ведущего шкива: $q = \varphi_1$.

3. Кинетической энергией обладают шкивы 1 и 2, ремень 3. Для всей передачи гибкой связью она равна

$$K = J_1\frac{\dot\varphi_1^2}{2} + J_2\frac{\dot\varphi_2^2}{2} + \frac{P}{g}\frac{\dot x^2}{2}, \quad (5.9)$$

где $\dot\varphi_1$ и $\dot\varphi_2$ – угловые скорости шкивов; $\dot x$ – скорость ремня.

Из соотношения

$$x = r_1\varphi_1 = r_2\varphi_2 \quad (5.10)$$

выразим φ_2 и x через обобщенную координату φ_1, а $\dot\varphi_2$ и $\dot x$ – через $\dot\varphi_1$. Подставим скорости в выражение (5.9):

$$K = J_1\frac{\dot\varphi_1^2}{2} + J_2\frac{r_1^2}{r_2^2}\frac{\dot\varphi_1^2}{2} + \frac{P}{g}\frac{r_1^2\dot\varphi_1^2}{2}. \quad (5.11)$$

4. Передача не обладает потенциальной энергией, так как при условии $T_1=T_2=0$ не приходит в движение под действием веса ремня P. Соответственно сила P не совершает работу.

Дадим шкивам элементарные возможные перемещения $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ и вычислим элементарную работу передачи:

$$dA=T_1 d\varphi_1 - T_2 d\varphi_2 = (T_1 - T_2\frac{r_1}{r_2})d\varphi_1. \qquad (5.12)$$

Из формулы (5.12) получим обобщенную силу

$$Q=T_1-T_2\frac{r_1}{r_2}. \qquad (5.13)$$

5. Находим производные от кинетической энергии согласно уравнению (5.2):

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi_1}=J_1\dot\varphi_1+J_2\frac{r_1^2}{r_2^2}\dot\varphi_1+\frac{P}{g}r_1^2\varphi_1,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi_1}=J_1\ddot\varphi_1+J_2\frac{r_1^2}{r_2^2}\ddot\varphi_1+\frac{P}{g}r_1^2\varphi_1, \qquad (5.14)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi_1}=0.$$

6. Подставим производные (5.14) и обобщенную силу (5.13) в уравнение Лагранжа II рода

$$J_1\ddot\varphi_1 + J_2\frac{r_1^2}{r_2^2}\ddot\varphi_1 + \frac{P}{g}r_1^2\ddot\varphi_1 = T_1 - T_2\frac{r_1}{r_2}. \qquad (5.15)$$

Отсюда находим угловое ускорение первого вала

$$\varepsilon_1 = \ddot\varphi_1 = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{T_1 - T_2\frac{r_1}{r_2}}{J_1 + J_2\frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{P}{g}r_1^2}. \qquad (5.16)$$

Дважды интегрируя выражение (5.16), легко получить зависимость $\varphi_1=\varphi_1(t)$.

6. Метод приведения в динамике механизмов

6.1. Сущность метода приведения

Задача построения динамической модели конструкций роботов и систем автоматики возникает на различных этапах их проектирования. На начальном этапе, задаваясь ориентировочно массами и жесткостью звеньев, определяют и конструируют передаточные механизмы и выбирают приводы. Затем на этапе компоновки конструкции появляется возможность построить более точно ее динамическую модель, что позволяет уточнить ожидаемые динамические и точностные характеристики, выбрать рациональные компоновку и параметры конструкции, не прибегая к ее изготовлению.

Трудность решения этой задачи на этапе проектирования состоит в том, что для построения динамической модели необходимо знать размеры звеньев и других элементов системы, однако на данном этапе они известны лишь ориентировочно. Поэтому на практике целесообразно динамические исследования начинать с простейших моделей, оценивая их пригодность для решения каждой конкретной задачи.

При определении закона движения механизма необходимо составить уравнение движения и решить его относительно искомого кинематического параметра (обобщенной координаты, скорости или ускорения).

Для механизма с одной степенью свободы, имеющего одно ведущее звено, решение этой задачи значительно упрощается, если все внешние силы и моменты сил, приложенные к различным звеньям, заменить одной приведенной силой, приложенной к одному звену механизма. При этом массы всех подвижных звеньев заменяют динамически эквивалентной приведенной массой, связанной со звеном приведения [1, 2, 4].

Такая условная замена сил и масс при решении динамических задач позволяет исследование движения механизма заменить исследованием движения звена приведения, в качестве которого в большинстве случаев удобно принимать ведущее звено механизма.

6.2. Приведение сил и моментов сил

Приведенной силой $F_{пр}$ в общем случае называется такая условная сила, элементарная работа которой на возможном перемещении точки приведения равна сумме элементарных работ приводимых сил на соответствующих перемещениях точек приложения этих сил [1, 2, 4].

В механизмах действительные перемещения являются возможными.

Приведенным моментом сил $M_{пр}$ называется момент приведенной силы $F_{пр}$.

Точка приложения приведенной силы называется **точкой приведения**, а звено, которому принадлежит эта точка, – **звеном приведения**. Звено и точка приведения, а также направление $F_{пр}$ могут быть выбраны произвольно. В большинстве случаев $F_{пр}$ приводится к точке ведущего звена механизма и направляется по касательной к траектории точки приведения.

Для механизмов с одной степенью свободы принцип равенства элементарных работ приводится к равенству мощности приведенной силы или приведенного момента сумме мощностей приводимых сил и моментов сил, приложенных к звеньям механизма:

$$\overline{F}_{пр}\overline{u} = F_{пр} u \cos a = \sum_{i=1}^{n} \left(F_i u_i \cos\ a_i + M_i w_i \right),$$

$$M_{пр} w = \sum_{i=1}^{n} \left(F_i u_i \cos a_i + M_i w_i \right). \tag{6.1}$$

Здесь u – скорость точки приложения $\overline{F}_{пр}$; a - угол между векторами $\overline{F}_{пр}$ и $\overline{u}$ (обычно принимают $a = 0$); n – количество подвижных звеньев; F_i – сила, приложенная к звену i; u_i – скорость точки приложения силы F_i; a_i - угол между направлениями векторов $\overline{F}_i$ и $\overline{u_i}$; M_i - момент сил, приложенных к звену i; w_i – угловая скорость звена i; w – угловая скорость звена приведения.

Значения $F_{пр}$ и $M_{пр}$ находят из равенств (6.1):

$$F_{пр} = \frac{1}{u} \sum_{i=1}^{n} \left(F_i u_i \cos a_i + M_i w_i \right),$$

$$M_{пр} = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n} \left(F_i u_i \cos a_i + M_i w_i \right). \tag{6.2}$$

Из этих формул видно, что $F_{пр}$ и $M_{пр}$ зависят не только от величины приводимых сил, но и от отношений скоростей u_i / u, w_i / u, u_i / w, w_i / w, которые являются первыми передаточными функциями механизма (аналогами скоростей). В механизмах с одной степенью свободы отношения скоростей не зависят от скорости движения и могут быть постоянными или зависеть только от положений звеньев. Поэтому приведенные сила $F_{пр}$ и момент сил $M_{пр}$ зависят как от внешних нагрузок, так и от свойств механизма.

6.3. Приведение масс и моментов инерции

Приведенная масса и приведенный момент инерции характеризуют инерционность механизма [1, 2, 4]. В системах с одной степенью свободы массы и моменты инерции приводятся к звену, совершающему поступательное или вращательное движение.

Приведенной массой $m_{пр}$ называется такая условная масса, связанная с со звеном приведения, которая обладает той же энергией, что и весь механизм.

В случае приведения к звену, совершающему поступательное движение, с учетом зависимости (3.5) получим

$$m_{пр} = \frac{2K}{u^2} = \frac{1}{u^2} \sum_{i=1}^{n} \left(m_i u_{ci}^{\ 2} + J_{ci} w_i^{\ 2} \right), \tag{6.3}$$

где u – скорость точки, к которой приведена масса $m_{пр}$.

Приведенным моментом инерции $J_{пр}$ называется условный момент инерции вращающегося звена приведения, которое обладает кинетической энергией, равной кинетической энергии механизма. Значение $J_{пр}$ вычисляется аналогично (6.3)

$$J_{пр} = \frac{2K}{w^2} = \frac{1}{w^2}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i u_{ci}{}^2 + J_{ci} w^2\right), \qquad (6.4)$$

где w – угловая скорость звена приведения.

В выражениях (6.3) и (6.4): К – кинетическая энергия механизма; n – число подвижных звеньев; m_i и J_{ci} – масса и момент инерции *i*-го звена; w_i - угловая скорость *i*-го звена.

Приведенный момент инерции и приведенная масса связаны соотношением

$$J_{пр} = m_{пр} \cdot l_{OA}^2, \qquad (6.5)$$

где l_{OA} – расстояние от точки приведения А до оси вращения О звена приведения.

Для механизмов с постоянным передаточным отношением, все звенья которых совершают вращательное движение, $m_{пр}$=const и $J_{пр}$=const. Эти параметры переменны для большинства рычажных и кулачковых механизмов.

Пример 1. Определить приведенную массу и приведенный момент инерции для кривошипно-ползунного механизма (рис. 6.1).

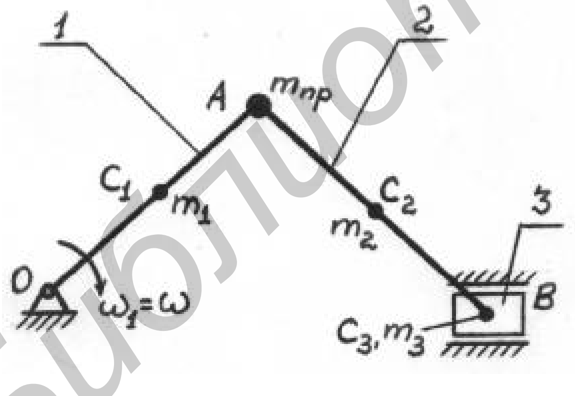

Рис.6.1

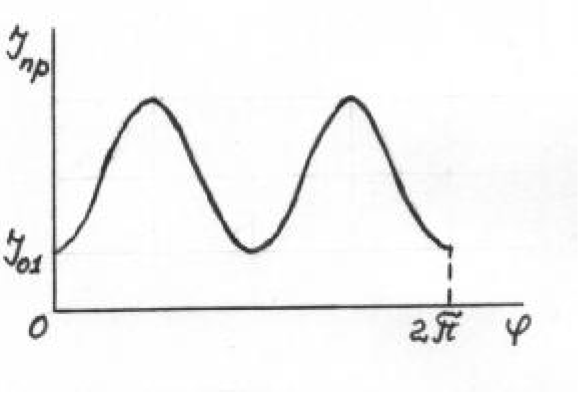

Рис.6.2

Решение

Кинетическая энергия механизма складывается из кинетических энергий вращающегося с угловой скоростью w_1 кривошипа 1, шатуна 2, совершающего плоскопараллельное движение, и ползуна 3, перемещающегося поступательно (см. формулу (3.6))

$$K = K_1 + K_2 + K_3 = \frac{1}{2}\left(J_{o1} w_1^2 + m_2 u_{c2}^2 + J_{c2} w_2^2 + m_3 u_{c3}^2\right). \qquad (6.6)$$

Приведенная к точке А кривошипа 1 масса

$$m_{пр}=\frac{2K}{u_A^{\ 2}}=J_{o1}\left(\frac{w_1}{u_A}\right)^2+m_2\left(\frac{u_{c2}}{u_A}\right)^2+J_{c2}\left(\frac{w_2}{u_A}\right)^2+m_3\left(\frac{u_{c3}}{u_A}\right)^2 . \quad (6.7)$$

Приведенный к звену 1 момент инерции

$$J_{пр}=\frac{2K}{w_1^{\ 2}}=J_{o1}+m_2\left(\frac{u_{c2}}{w_1}\right)+J_{c2}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)+m_3\left(\frac{u_{c3}}{w_1}\right)^2 . \qquad (6.8)$$

Для данного механизма значения $m_{пр}$ и $J_{пр}$ повторяются в каждом цикле движения и зависят от положения звена приведения и от отношения скоростей, но не зависят от времени. На рис. 6.2 приведен график изменения приведенного момента инерции механизма за один цикл его движения.

Пример 2. Определить приведенный к звену 1 момент инерции двухступенчатой зубчатой передачи, содержащей зубчатые колеса 1 – 4 и валы I – III (рис. 6.3).

Решение: Приведенный момент инерции редуктора найден из условия (6.8)

$$J_{пр}=\frac{2K}{w_1^{\ 2}}=\frac{2}{w_1^{\ 2}}\left(\frac{J_1w_1^2}{2}+\frac{J_2w_2^2}{2}+\frac{J_3w_3^2}{2}+\frac{J_4w_4^2}{2}\right)=$$

$$=J_1+\left(J_2+J_3\right)\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^2+J_4\left(\frac{w_4}{w_1}\right)^2=J_1+\left(J_2+J_3\right)\frac{1}{i_{12}^2}+J_4\frac{1}{i_{14}^2}, \qquad (6.9)$$

где i_{12} – передаточное отношение от шестерни 1 к колесу 2; i_{14} - передаточное отношение редуктора (от входного звена − шестерни 1 к выходному звену – колесу 4).

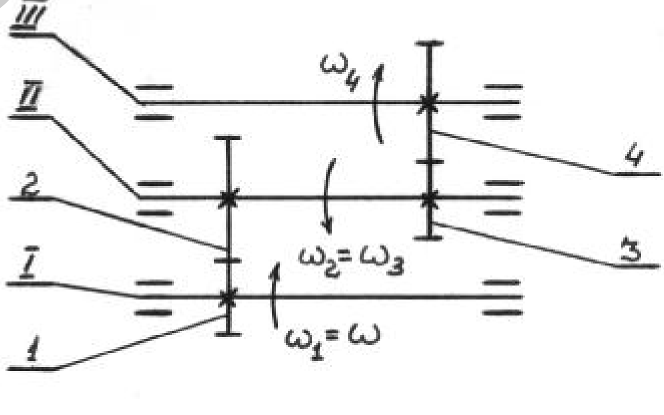

Рис.6.3

Из примера 2 следует, что у зубчатого механизма с постоянным передаточным отношением приведенный момент инерции тоже постоянный, но величина $J_{пр}$ зависит от распределения передаточных отношений между отдельными ступенями передачи.

В механизмах систем автоматики и робототехники часто первостепенное значение имеют быстродействие, малое время разгона и торможения. Повышение быстродействия может быть достигнуто путем уменьшения приведенного к валу двигателя момента инерции всего механизма, т.е. уменьшением его инерционности.

7. Уравнения движения приведенного механизма

Механизм даже с одной степенью свободы может представлять собой достаточно сложную динамическую систему. Его звенья, имея определенные массы и моменты инерции, нагружаются при движении многочисленными силами и моментами сил.

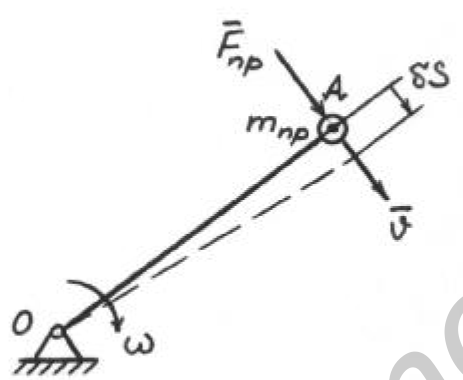

Рис.7.1

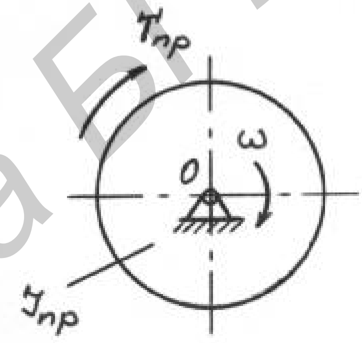

Рис.7.2

Для удобства выполнения динамического анализа такой механизм заменяется расчетной динамической моделью, состоящей из звена приведения OA (рис.7.1). При этом считается, что звено OA обладает приведенной массой $m_{пр}$, сосредоточенной в точке приведения A, и на него действует приведенная сила $F_{пр}$. Энергетические параметры механизма и его расчетной динамической модели идентичны.

Параметры $m_{пр}$ и $F_{пр}$ являются функциями положения звена приведения, а иногда и времени t:

$$m_{пр} = m_{пр}(S,t), \quad F_{пр} = F_{пр}(S,t), \qquad (7.1)$$

где S – перемещение точки A, в которой считается сосредоточенной масса $m_{пр}$.

Для получения уравнения движения приведенного механизма (см. рис. 7.1) используем уравнение Лагранжа II рода (5.2). Предварительно определим кинетическую энергию данного механизма:

$$K = \frac{m_{пр}\upsilon^2}{2} = \frac{m_{пр}\dot{S}^2}{2}, \qquad (7.2)$$

где u – скорость точки приведения А.

Элементарная работа приведенной силы $F_{пр}$ на возможном перемещении точки А ее приложения равна

$$\delta A = F_{пр}\,\delta S \quad , \tag{7.3}$$

а обобщенная сила

$$Q = F_{пр} \quad . \tag{7.4}$$

Вычислим производные от кинетической энергии (7.2), учитывая функции (7.1):

$$\frac{\partial K}{\partial S}=\frac{\partial}{\partial S}\frac{m_{пр}\dot{S}^2}{2}=\frac{1}{2}\dot{S}^2\frac{\partial m_{пр}}{\partial S}, \tag{7.5}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{S}}=m_{пр}\dot{S}, \tag{7.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial K}{\partial \dot{S}}=\frac{\partial}{\partial t}m_{пр}\dot{S}=m_{пр}\ddot{S}+\dot{S}\frac{\partial m_{пр}}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial S}=m_{пр}\ddot{S}+\dot{S}^2\frac{\partial m_{пр}}{\partial S}. \tag{7.7}$$

Для данной расчетной модели обобщенная координата $q=S$ и обобщенная скорость $\dot{q}=\dot{S}$. Уравнение Лагранжа II рода можно записать как

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial K}{\partial \dot{S}}-\frac{\partial K}{\partial S}=F_{пр}. \tag{7.8}$$

Подставим в него величины (7.4), (7.5), (7.7):

$$m_{пр}\ddot{S}+\dot{S}^2\frac{\partial m_{пр}}{\partial S}-\frac{1}{2}\dot{S}^2\frac{\partial m_{пр}}{\partial S}=F_{пр}. \tag{7.9}$$

Отсюда получаем:

$$m_{пр}\ddot{S}+\frac{1}{2}\dot{S}^2\frac{\partial m_{пр}}{\partial S}=F_{пр} \;. \tag{7.10}$$

Так как звено приведения ОА вращается относительно оси О, то в этом случае удобнее использовать расчетную динамическую модель в виде вращающегося звена (рис.7.2).

Обобщенной характеристикой такого механизма является приведенный момент инерции $J_{пр}$, а приведенная сила заменена приведенным вращающим моментом силы $T_{пр}$. Параметры $J_{пр}$, $m_{пр}$, $T_{пр}$, $F_{пр}$ двух динамических моделей (рис.7.1 и 7.2) связаны соотношениями:

$$J_{пр}=m_{пр}l_{OA}^2, \quad T_{пр}=F_{пр}l_{OA} \;. \tag{7.11}$$

Уравнение движения механизма в последнем случае получается аналогично предыдущему и записывается в виде

$$J_{пр}\frac{\partial \omega}{\partial t}+\frac{1}{2}\omega^{2}\frac{\partial J_{пр}}{\partial \varphi}=T_{пр}\ , \tag{7.12}$$

где φ и ω - угловые перемещение и скорость звена приведения (рис.7.2).

Дифференциальные уравнения (7.10) и (7.12) движения приведенных механизмов могут быть решены относительно скоростей $\upsilon=\dot{s}$ и $\omega=\dot{\varphi}$. Далее определяется закон движения звена приведения

$$\varphi=\int\omega\left(t\right)dt. \tag{7.13}$$

Зная эту функцию, по известным кинематическим зависимостям можно рассчитать параметры движения выходных звеньев исходного механизма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красковский Е.Я., Дружинин Ю.А., Филатова Е.М. Расчет и конструирование механизмов приборов и вычислительных систем. –М.: Высш. шк., 1991. – 480 с.

2. Первицкий Ю.Д. Расчет и конструирование точных механизмов. – Л.: Машиностроение, 1976. – 456 с.

3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики.Ч.II. – М.: Высш. шк., 1964. – 375 с.

4. Прикладная механика / Под ред. В.М. Осецкого. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.

Св. план 2002, поз. 19

Учебное издание

Назаренко Валерий Григорьевич

ДИНАМИКА МЕХАНИЗМОВ

тексты лекций по курсу «Техническая механика»

для студентов специальности 53 01 03

Редактор Т.А. Лейко
Корректор Е.Н. Батурчик

Подписано в печать	Гарнитура	Формат 60х84 1/16
Бумага	Печать	Усл. печ. л.
Уч. – изд.л. 1,2	Тираж 150 экз.	Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»
Лицензия ЛП №156 от 05.02.2001
Лицензия ЛВ №509 от 03.08.2001
220113, Минск, П.Бровки, 6