

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра теоретических основ электротехники

**С. В. Батюков, Н. А. Иваницкая, Л. Ю. Шилин**

## **ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

В 2-х частях

Часть 2

*Рекомендовано УМО по образованию  
в области информатики и радиоэлектроники для специальностей,  
закрепленных за УМО по образованию  
в области информатики и радиоэлектроники,  
в качестве учебно-методического пособия*

Минск БГУИР 2014

УДК 621.3.011.7(076)  
ББК 31.211я73  
Б28

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра электротехники и систем электропитания  
учреждения образования «Военная академия Республики Беларусь»  
(протокол №9 от 21.05.2012);

доцент кафедры автоматизации  
производственных процессов и электроники учреждения образования  
«Белорусский государственный технологический университет»,  
кандидат физико-математических наук В. И. Горошко

**Батюков, С. В.**

Б28 Теория электрических цепей. В 2 ч. Ч. 2 : учеб.-метод. пособие /  
С. В. Батюков, Н. А. Иваницкая, Л. Ю. Шилин. – Минск : БГУИР, 2014. –  
100 с. : ил.

ISBN 978-985-488-822-4 (ч. 2).

Содержит основные теоретические положения по расчету линейных электрических цепей, а также примеры расчета цепей данного типа. Предложены задачи для самостоятельного решения и проверки полученных результатов.

Часть 1-я издана в БГУИР в 2012 г.

УДК 621.3.011.7(076)  
ББК 31.211я73

ISBN 978-985-488-822-4 (ч. 2)  
ISBN 978-985-488-641-1

© Батюков С. В., Иваницкая Н. А.,  
Шилин Л. Ю., 2014  
© УО «Белорусский государственный  
университет информатики  
и радиоэлектроники», 2014

## Содержание

<b>Введение</b> .....	<b>5</b>
<b>1. Четырехполюсники и их классификация</b> .....	<b>6</b>
1.1. Основные теоретические положения.....	6
1.2. Уравнения передачи четырехполюсника.....	6
1.3. Схемы замещения четырехполюсников.....	8
1.4. Характеристические параметры четырехполюсника.....	9
1.4.1. Характеристическое сопротивление.....	9
1.4.2. Характеристическая постоянная передачи.....	11
1.5. Комплексная передаточная функция. Амплитудочастотная и фазочастотная характеристики четырехполюсника.....	12
1.6. Расчет параметров сложных четырехполюсников. Регулярность соединения.....	14
1.7. Примеры решения задач.....	19
<b>2. Электрические фильтры</b> .....	<b>21</b>
2.1. Основные теоретические положения.....	21
2.2. Фильтры типа $k$ ; их схемы замещения, номинальное характеристическое сопротивление фильтра.....	21
2.3. Расчет простейших фильтров по характеристическим параметрам.....	22
2.4. Расчет элементов фильтров по заданной полосе прозрачности и сопротивлению нагрузки.....	23
2.5. Расчет характеристических параметров фильтра по известным параметрам звеньев фильтра.....	25
2.6. Примеры решения задач.....	27
<b>3. Переходные процессы в линейных электрических цепях.</b>	
<b>Возникновение переходных процессов и их значение</b> .....	<b>32</b>
3.1. Коммутация и ее законы.....	32
3.2. Начальные условия.....	33
3.3. Классический метод расчета переходных процессов.....	34
3.4. Решение дифференциального уравнения. Свободная и принужденная составляющие.....	35
3.5. Примеры решения задач.....	37
3.5.1. Переходной процесс в цепях 1-го порядка.....	37
3.5.2. Переходной процесс в цепях 2-го порядка.....	54
<b>4. Операторный метод расчета переходных процессов</b> .....	<b>64</b>
4.1. Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме.....	64
4.2. Операторные схемы замещения.....	65
4.2.1. Операторная схема замещения емкости.....	65
4.2.2. Схема замещения индуктивности.....	67
4.3. Алгоритм расчета переходных процессов операторным методом.....	68
4.4. Примеры решения задач операторным методом.....	69

<b>5. Расчет переходных процессов с помощью интеграла Дюамеля.....</b>	<b>71</b>
5.1. Расчет переходных характеристик цепи.....	71
5.2. Интеграл Дюамеля.....	73
5.3. Последовательность расчета переходного процесса с помощью интеграла Дюамеля.....	76
5.4. Примеры расчета переходных процессов с помощью интеграла Дюамеля.....	76
<b>6. Задачи для самостоятельного решения.....</b>	<b>90</b>
<b>Литература.....</b>	<b>99</b>

Библиотека БГУИР

## Введение

Цель данной работы – создание пособия при методике совмещения аудиторных занятий с самостоятельной работой студентов.

Учебно-методическое пособие состоит из двух частей. В первой части рассматриваются законы электрических цепей и основные методы решения задач применительно к теории постоянного тока: метод контурных токов, метод узловых напряжений, метод эквивалентного генератора напряжения. Для цепей переменного тока рассматривается метод комплексных амплитуд, графоаналитический метод расчета. Произведен обзор режима резонансов токов и напряжений; явления самоиндукции; работы цепей под воздействием несинусоидальных источников напряжений; рассмотрены принципы расчета трехфазных цепей.

Во второй части кратко представлена теория четырехполюсников, фильтров; рассмотрен расчет переходных процессов классическим, операторным методами, а также методом интеграла Дюамеля.

В теоретической части пособия приводятся краткие сведения, основные определения и понятия, алгоритмы решения задач. В практической части приведены примеры расчета линейных электрических цепей в различных режимах с подробными пояснениями, рассмотрены нюансы расчетов, характерные для исследуемых схем.

Пособие содержит задачи для самостоятельного решения с ответами. В раздел «Задачи для самостоятельного решения» включены задачи, которые используются преподавателями кафедры ТОЭ БГУИР при проведении практических занятий, а также материалы литературных источников.

# 1. Четырехполюсники и их классификация

## 1.1. Основные теоретические положения

Четырехполюсник – электрическая цепь с двумя парами зажимов, включенная таким образом, что через каждую пару зажимов проходят попарно равные и противоположно направленные токи (рис. 1.1).

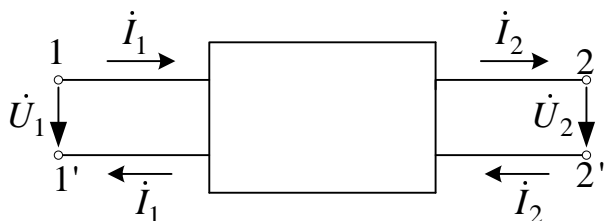


Рис. 1.1

Четырехполюсники имеют важное практическое значение. При анализе электромагнитных процессов в большинстве электротехнических устройств (линиях, усилителях, трансформаторах и т. п.) эквивалентные схемы могут быть представлены в

виде четырехполюсников.

Различают следующие виды четырехполюсников:

- линейные и нелинейные;
- пассивные и активные;
- с сосредоточенными и распределенными параметрами.

## 1.2. Уравнения передачи четырехполюсника

Свойства четырехполюсника как системы передачи энергии определяются соотношениями между напряжениями на его внешних зажимах и токами, проходящими через эти зажимы.

*Уравнения передачи четырехполюсника* – уравнения, связывающие комплексные амплитуды напряжений и токов на двух парах зажимов четырехполюсника.

Будем излагать все вопросы применительно к установившемуся синусоидальному изменению напряжения, приложенного к входным зажимам.

При этом токи на входе и выходе будут иметь комплексные значения  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ , напряжения –  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$ , а общая схема четырехполюсника с обозначениями их направлений имеет вид, показанный на рис. 1.2.

При передаче электрических сигналов слева направо (прямое включение) зажимы 1–1' являются входными, а зажимы 2–2' – выходными. При обратном включении передача энергии происходит от зажимов 2–2', которые являются

входными, к выходным зажимам 1–1' (см. рис. 1.2).

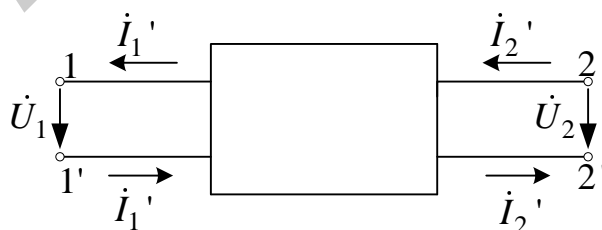


Рис. 1.2

Связь между параметрами режима  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{U}_2$ ,  $\dot{I}_2$  устанавливается при помощи *уравнений передачи четырехполюсника* и некоторых коэффициентов. Эти

коэффициенты входят в уравнения передачи и называются *обобщенными параметрами четырехполюсника*.

Различают следующие формы уравнений передачи четырехполюсника:  
форма *A* (применяется при прямой передаче энергии):

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11} \cdot \dot{U}_2 + A_{12} \cdot \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= A_{21} \cdot \dot{U}_2 + A_{22} \cdot \dot{I}_2; \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}; \quad (1.1)$$

форма *B* (применяется при обратной передаче энергии):

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= B_{11} \cdot \dot{U}_1 + B_{12} \cdot \dot{I}_1; \\ \dot{I}_2' &= B_{21} \cdot \dot{U}_1 + B_{22} \cdot \dot{I}_1; \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix}; \quad (1.2)$$

форма *Z*:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_{11} \cdot \dot{I}_1 + Z_{12} \cdot \dot{I}_2'; \\ \dot{U}_2 &= Z_{21} \cdot \dot{I}_1 + Z_{22} \cdot \dot{I}_2'; \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix}; \quad (1.3)$$

форма *Y*:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11} \cdot \dot{U}_1 + Y_{12} \cdot \dot{U}_2; \\ \dot{I}_2' &= Y_{21} \cdot \dot{U}_1 + Y_{22} \cdot \dot{U}_2; \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}; \quad (1.4)$$

форма *H*:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= H_{11} \cdot \dot{I}_1 + H_{12} \cdot \dot{U}_2; \\ \dot{I}_2' &= H_{21} \cdot \dot{I}_1 + H_{22} \cdot \dot{U}_2; \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}; \quad (1.5)$$

форма *F*:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= F_{11} \cdot \dot{U}_1 + F_{12} \cdot \dot{I}_2'; \\ \dot{U}_2 &= F_{21} \cdot \dot{U}_1 + F_{22} \cdot \dot{I}_2'; \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

В этих уравнениях *A*; *B*; *Z*; *Y*; *H*; *F* – обобщенные параметры четырехполюсника. Размерность параметров очевидна из уравнений четырехполюсника в соответствующей форме. Из уравнений (1.1) – (1.6) видно, что параметры  $A_{11}$  и  $A_{22}$  являются безразмерными величинами,  $A_{12}$  – имеет размерность сопротивления, а  $A_{21}$  – проводимости.

Каждая система параметров полностью определяет четырехполюсник.

Следует заметить, что если в данной системе параметров хотя бы один равен бесконечности, то система параметров для рассматриваемого четырехполюсника не существует.

Применение той или иной формы уравнений определяется поставленной задачей и заданной схемой четырехполюсника.

Параметры четырехполюсника можно определять следующими методами:

1) *метод холостого хода и короткого замыкания*. Применяется в случае простых и сложных схем, а также при определении параметров четырехполюсника экспериментальным путем;

2) *метод приравнивания коэффициентов* заключается в составлении уравнений по законам Кирхгофа; методом контурных токов; методом узловых напряжений и приведении их к сопоставимому виду с уравнениями передачи и дальнейшим приравниванием коэффициентов.

### 1.3. Схемы замещения четырехполюсников

На рис. 1.3 представлены Г-образная (рис. 1.3, а), Т-образная (рис. 1.3, б), П-образная (рис. 1.3, в), мостовая (рис. 1.3, г) схемы четырехполюсника.

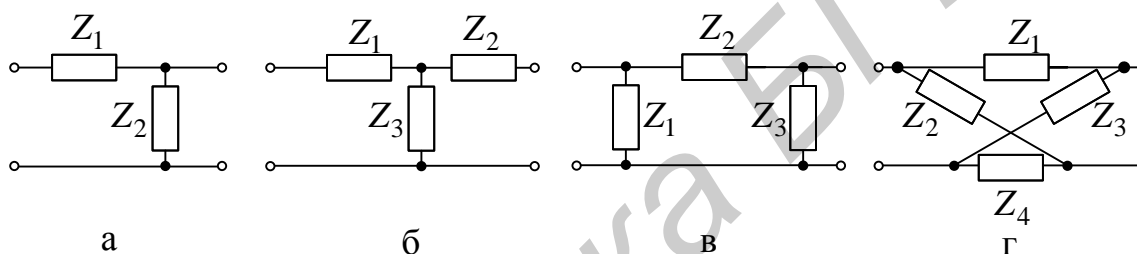


Рис. 1.3

Четырехполюсник называется *структурно-симметричным*, если его левая и правая части зеркально отображают друг друга, например схема Т-образного симметричного четырехполюсника (рис. 1.4, а).

Структурно-симметричные относятся к категории симметричных четырехполюсников. У симметричных четырехполюсников при перемене местами его входных и выходных зажимов токи и напряжения цепи, в которую включен четырехполюсник, не изменяются. Четырехполюсники, не удовлетворяющие этому условию, называются *несимметричными*.

*Уравновешенными* называются четырехполюсники, верхняя и нижняя части схемы которых зеркально отображают друг друга. Схема такого четырехполюсника является симметричной относительно горизонтальной оси (рис. 1.4, б).

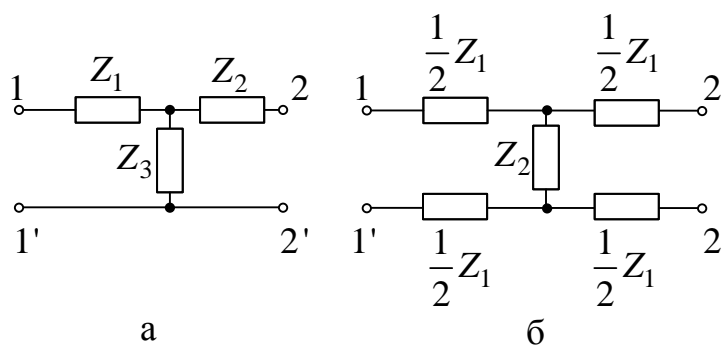


Рис. 1.4



Четырехполосники, которые удовлетворяют теореме обратимости (взаимности), называются *обратимыми (взаимными)*. В противном случае четырехполосники называются *необратимыми*. Пассивные четырехполосники, содержащие только пассивные элементы, являются обратимыми, т. е. отвечают свойству обратимости: отношение напряжения на входе к току на выходе (передаточное сопротивление) не зависит от того, какая пара зажимов является входной и выходной.

Определитель матрицы  $|A|$  обратимого четырехполосника равен 1: если пассивный четырехполосник симметричный, то

$$A_{11} = A_{22}; \quad Z_{11} = Z_{22}; \quad Y_{11} = Y_{22}.$$

Таким образом, у пассивного несимметричного четырехполосника три параметра в каждой системе параметров позволяют найти четвертый параметр и полностью характеризуют четырехполосник. Симметричный пассивный четырехполосник определяется двумя параметрами.

#### 1.4. Характеристические параметры четырехполосника

Наряду с обобщенными параметрами в теории четырехполосников применяются характеристические параметры: *характеристические сопротивления и характеристическая постоянная передачи*.

Характеристические параметры выгодно применять по сравнению с А-параметрами при расчетах каскадного соединения четырехполосников.

##### 1.4.1. Характеристическое сопротивление

Несимметричный четырехполосник имеет два характеристических сопротивления:  $Z_{1c}$  – со стороны входа (со стороны зажимов 1–1' (рис. 1.5, а));  $Z_{2c}$  – со стороны выхода (со стороны зажимов 2–2' (рис. 1.5, б)).

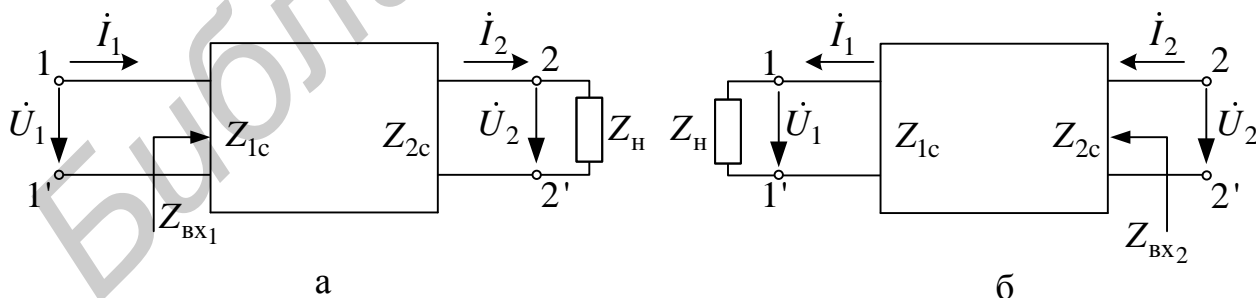


Рис. 1.5

Характеристические сопротивления удовлетворяют следующим условиям:

1. Входное сопротивление  $Z_{BX1}$  четырехполосника, нагруженного на  $Z_H = Z_{2c}$  (см. рис. 1.5, а), равно  $Z_{1c}$  ( $Z_{BX1} = Z_{1c}$ ).

2. Входное сопротивление четырехполюсника, нагруженного на  $Z_H = Z_{1c}$  (см. рис. 1.5, б), равно  $Z_{2c}$  ( $Z_{вх2} = Z_{2c}$ ).

Условие, когда четырехполюсник нагружен на соответствующее характеристическое сопротивление, называется *условием согласованной нагрузки*, или *согласованным включением*.

Режим работы четырехполюсника,  $Z_{1c}$  которого равно внутреннему сопротивлению генератора, а  $Z_{2c}$  равно сопротивлению нагрузки, называется *режимом полного согласования* (рис. 1.6).

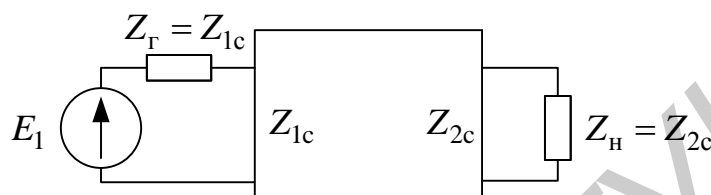


Рис. 1.6

Характеристические сопротивления определяются выражениями:

$$Z_{1c} = \sqrt{Z_{1k} \cdot Z_{1x}}; \quad Z_{2c} = \sqrt{Z_{2k} \cdot Z_{2x}},$$

где  $Z_{1k}$  и  $Z_{1x}$  – сопротивления короткого замыкания и холостого хода соответственно со стороны входных зажимов;

$Z_{2k}$  и  $Z_{2x}$  – сопротивления короткого замыкания и холостого хода соответственно со стороны выходных зажимов.

Следовательно, *характеристическим сопротивлением четырехполюсника* называется среднее геометрическое из его соответствующих сопротивлений холостого хода и короткого замыкания.

Характеристические сопротивления выражаются через  $A$ -параметры следующим образом:

$$Z_{1c} = \sqrt{\frac{A_{11} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{22}}}; \quad Z_{2c} = \sqrt{\frac{A_{22} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{11}}}.$$

Симметричный четырехполюсник имеет одно характеристическое сопротивление, т. к. для него  $A_{11} = A_{22}$ :

$$Z_{1c} = Z_{2c} = Z_c = \sqrt{Z_k \cdot Z_x} = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}}.$$

Это означает, что всякому симметричному четырехполюснику соответствует некоторое характеристическое сопротивление  $Z_c$ , обладающее следующим свойством – если нагрузить данный четырехполюсник сопротивлением  $Z_H = Z_c$ , то отношение напряжения к току на входе и выходе будет одинаковым:

$$Z_H = Z_c = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2}. \quad (1.7)$$

#### 1.4.2. Характеристическая постоянная передачи

Характеристическая (или собственная) постоянная передачи четырехполюсника для прямого направления передачи энергии равна

$$g = a + jb, \quad (1.8)$$

где  $g$  – комплексное число,

$a$  – характеристическое (собственное) затухание, измеряется в неперах (Нп);

$b$  – характеристическая (собственная) фазовая постоянная, измеряется в радианах (рад).

Характеристическая постоянная передачи определяется величиной, обратной функции передачи по току или напряжению:

$$e^g = e^a e^{jb} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{U_1}{U_2} e^{j(\psi_{U_1} - \psi_{U_2})} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{I_1}{I_2} e^{j(\psi_{i_1} - \psi_{i_2})}$$

или

$$g = a + jb = \ln \frac{U_1}{U_2} + j(\psi_{U_1} - \psi_{U_2}) = \ln \frac{I_1}{I_2} + j(\psi_{i_1} - \psi_{i_2}).$$

Затуханию 1 Нп соответствует уменьшение амплитуды или действующего значения напряжения или тока в  $e = 2,718$  раза.

Следует заметить, что характеристическая постоянная передачи, а следовательно,  $a$  и  $b$  определяются *при условии согласованной нагрузки*.

Заметим, если известны  $A$ -параметры, то в практических расчетах используется формула

$$g = \ln \left( \sqrt{A_{11} \cdot A_{22}} + \sqrt{A_{12} \cdot A_{21}} \right).$$

### 1.5. Комплексная передаточная функция. Амплитудочастотная и фазочастотная характеристики четырёхполюсника

Частотные характеристики линейной цепи отражают ее реакцию на гармоническое воздействие. Они определяются комплексной передаточной функцией:

$$K(j\omega) = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1},$$

представляющей собой отношение комплексных амплитуд реакции (напряжения или тока на выходе четырёхполюсника) и воздействия (напряжения или тока на входе четырёхполюсника).

При определении передаточной функции необходимо помнить, что именно выходная величина делится на входную.

В частных случаях в качестве комплексной передаточной функции могут выступать коэффициент передачи по напряжению  $K_U(j\omega)$ ; коэффициент передачи по току  $K_I(j\omega)$ .

Комплексную передаточную функцию можно представить в алгебраической показательной формах записи:

$$K(j\omega) = K_1(\omega) + jK_2(\omega) = K(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}. \quad (1.9)$$

Выражение (1.9) представляет собой запись двух характеристик: амплитудочастотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ).

АЧХ – зависимость модуля передаточной функции от частоты  $K(\omega)$ ;

ФЧХ – зависимость аргумента передаточной функции от частоты  $\varphi(\omega)$ .

$K(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  определяются по формулам (1.10), (1.11):

$$K(\omega) = \sqrt{K_1^2(\omega) + K_2^2(\omega)}; \quad (1.10)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{K_2(\omega)}{K_1(\omega)}. \quad (1.11)$$

*Пример:* для четырёхполюсника (рис. 1.7) найти выражения АЧХ и ФЧХ. Качественно построить эти характеристики.

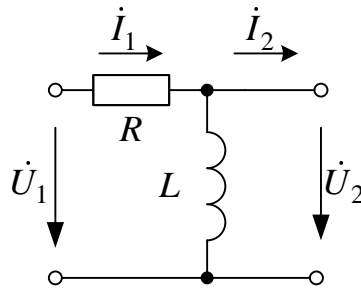


Рис. 1.7

Рассчитаем комплексную передаточную функцию по напряжению в режиме холостого хода:

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_1 \cdot j\omega L}{\dot{I}_1 \cdot (R + j\omega L)} = \frac{\dot{I}_1 \cdot j\omega L \cdot (R - j\omega L)}{\dot{I}_1 \cdot (R + j\omega L) \cdot (R - j\omega L)} = \frac{(\omega L)^2}{R^2 + (\omega L)^2} + j \frac{R \cdot \omega L}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Рассчитываем АЧХ, используя формулу (1.10):

$$K(\omega) = \sqrt{\left(\frac{(\omega L)^2}{R^2 + (\omega L)^2}\right)^2 + \left(\frac{R \cdot \omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(\omega L)^4 + (R \cdot \omega L)^2}{(R^2 + (\omega L)^2)^2}} = \frac{\omega L \cdot \sqrt{(\omega L)^2 + R^2}}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{(\omega L)^2} + 1}}. \quad (1.12)$$

Рассчитываем ФЧХ, используя формулу (1.11):

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{R \cdot \omega L \cdot (R + (\omega L)^2)}{(R^2 + (\omega L)^2) \cdot (\omega L)^2} = \operatorname{arctg} \frac{R}{\omega L}. \quad (1.13)$$

Проанализируем выражения (1.12), (1.13) для трех значений частот:

$$\omega_1 = 0; \quad K_1(\omega_1) = 0; \quad \varphi_1(\omega_1) = 90^\circ;$$

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{R}{L}; & K_2(\omega_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}; & \varphi_2(\omega_2) &= 45^\circ; \\ \omega_3 &\rightarrow \infty; & K_3(\omega_3) &\rightarrow 1; & \varphi_3(\omega_3) &= 0^\circ. \end{aligned}$$

На рис. 1.8 представлены АЧХ и ФЧХ данного четырехполюсника:

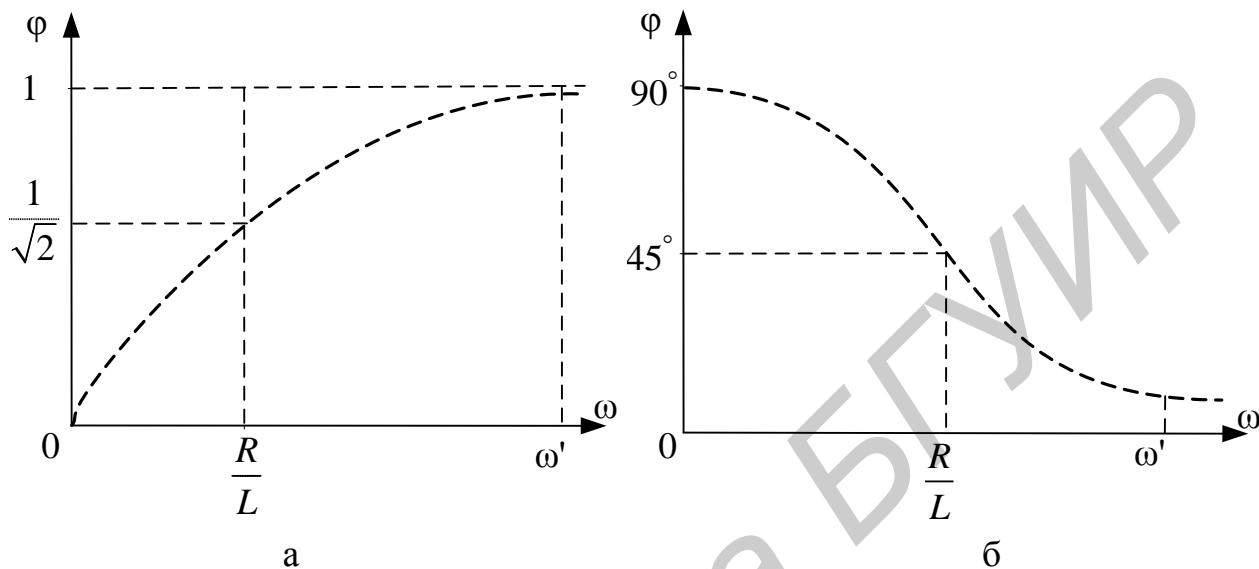


Рис. 1.8

Вывод: рабочим диапазоном частот для данного четырехполюсника является диапазон от  $\frac{R}{L}$  до  $\omega'$ , а сдвиг фаз между напряжением на входе и выходе равен нулю. Из этого следует, что сигнал, поданный на вход четырехполюсника, проходит через него без искажений.

### 1.6. Расчет параметров сложных четырехполюсников. Регулярность соединения

Сложные четырехполюсники рассматривают как различные соединения простых четырехполюсников. Существуют следующие способы соединения: последовательное, параллельное, последовательно-параллельное, параллельно-последовательное и каскадное.

Эти способы соединений и формулы для определения соответствующих матриц сложного четырехполюсника приведены в табл. 1.1.

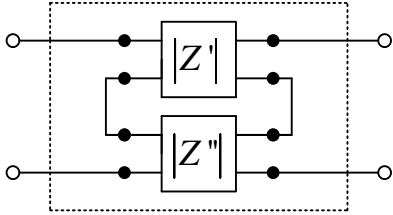
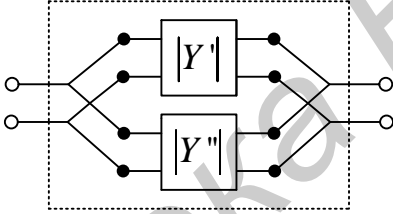
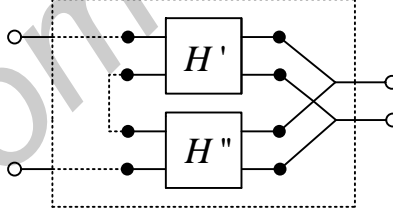
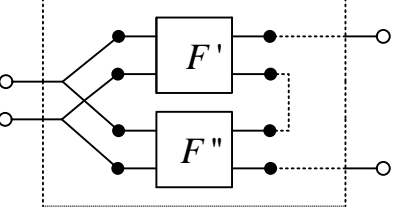
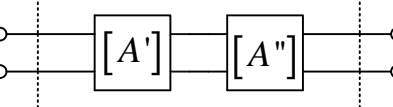
При умножении матриц нужно следить за тем, чтобы матрицы-сомножители следовали в том порядке, в каком осуществляется передача энергии двумя каскадно-соединенными четырехполюсниками.

Все указанные в табл. 1.1 формулы справедливы только в случае *регулярного соединения* четырехполюсников, при котором параметры отдельных четырехполюсников после соединения остаются неизменными.

Условие регулярности формулируется следующим образом: при соединении четырехполюсников для любой общей нагрузки токи, проходящие через оба первичных и оба вторичных зажима, должны быть соответственно равны по величине и противоположны по направлению (для каждого четырехполюсника).

Таблица 1.1

Схемы соединения четырехполюсников

Соединение	Схема	Формулы для определения параметров
Последовательное		$[Z] = [Z'] + [Z'']$
Параллельное		$[Y] = [Y'] + [Y'']$
Последовательно-параллельное		$[H] = [H'] + [H'']$
Параллельно-последовательное		$[F] = [F'] + [F'']$
Каскадное		$[A] = [A'] \cdot [A'']$

Примером *нерегулярного соединения* двух простых четырехполюсников служит сложный четырехполюсник, представленный на рис. 1.9.

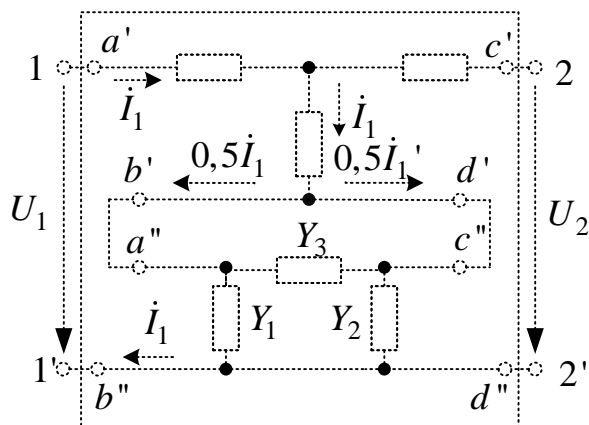


Рис. 1.9

При равенстве проводимостей  $Y_1$  и  $Y_2$  в разомкнутых зажимах 2–2' ток  $I_1$  распределяется, как показано на рис. 1.14. Токи во входных и выходных ветвях простых четырехполюсников не равны. Следовательно, условие регулярности не выполняется ни для первого, ни для второго четырехполюсника.

Кроме того, при нерегулярном соединении четырехполюсников может изменяться значение матрицы параметров одного из четырехполюсников. Например, при соединении двух четырехполюсников, изображенных на рис. 1.9, элемент  $Y_3$  замыкается накоротко нижней ветвью первого четырехполюсника. Таким образом, матрица  $Y$ -параметров нижнего четырехполюсника, когда он изолирован, будет отличаться от матрицы  $Y$ -параметров, когда он соединен параллельно (в данном примере) с другим четырехполюсником.

При соединении простых четырехполюсников необходимо убедиться, что все их параметры сохраняют свои значения.

Прежде чем указать виды регулярного соединения четырехполюсников, рассмотрим понятия «трехполюсного» четырехполюсника.

На рис. 1.10 указаны четырехполюсники, внутри схемы которых зажимы 1'–2' соединены накоротко. Условно схемы таких четырехполюсников можно изобразить, как показано на рис. 1.11. Поэтому их называют «трехполюсными».

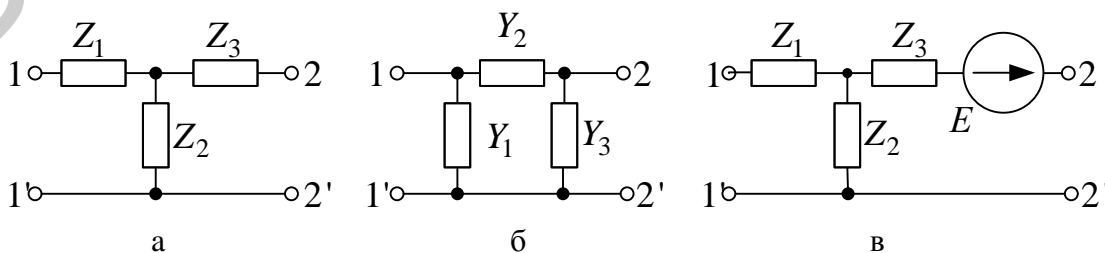


Рис. 1.10



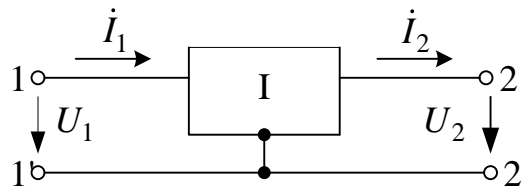


Рис. 1.11

Всегда регулярными являются следующие способы соединения четырехполюсников:

- последовательное соединение «трехполюсных» четырехполюсников по схеме рис. 1.12;
- параллельное соединение:
  - а) «трехполюсных» четырехполюсников по схеме рис. 1.13;
  - б) уравновешенных четырехполюсников;
  - в) подобных четырехполюсников, схемы которых одинаковы, а величины соответствующих элементов пропорциональны;
- каскадное соединение любых четырехполюсников.

Если соединения простых четырехполюсников отличны от указанных выше способов, нужно проверять выполнение *условия регулярности*, т. е. условие равенства токов, входящих и выходящих в каждой паре составных четырехполюсников.

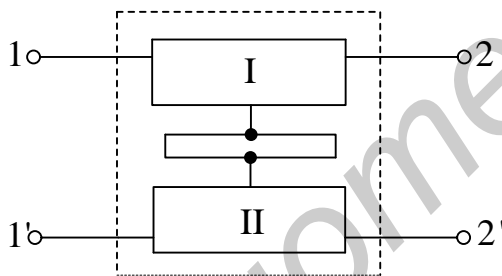


Рис. 1.12

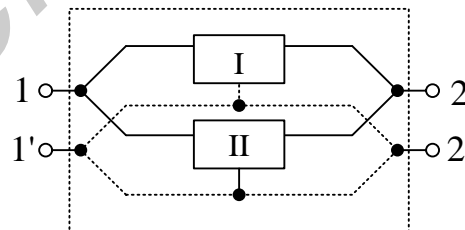


Рис. 1.13

При последовательном соединении четырехполюсников проверка условия регулярности производится по схемам рис. 1.14. Первый опыт соответствует прямой передаче, когда левые зажимы четырехполюсников соединены последовательно, а правые разомкнуты (рис. 1.14, а). Второй опыт соответствует обратной передаче, когда правые зажимы соединены последовательно, а левые разомкнуты (рис. 1.14, б).

Напряжение  $U$  между нижним разомкнутым зажимом первого четырехполюсника и верхним разомкнутым зажимом второго четырехполюсника должно быть равно нулю. В противном случае соединение является нерегулярным.

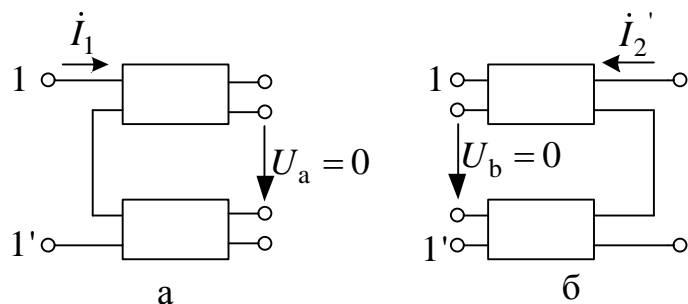


Рис. 1.14

При параллельном соединении четырехполюсников проверка производится по схемам рис. 1.15.

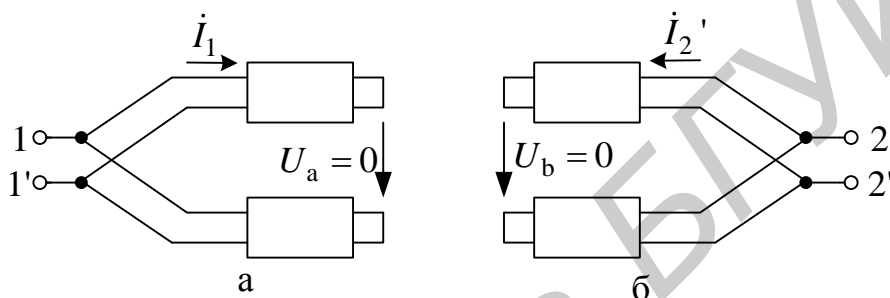


Рис. 1.15

Сначала при прямой передаче соединяются параллельно левые зажимы и замыкаются накоротко правые (рис. 1.15, а), затем при обратной передаче соединяются параллельно правые зажимы и замыкаются накоротко левые (рис. 1.15, б). В обоих случаях напряжение  $U$  между закороченными зажимами двух четырехполюсников должно быть равно нулю.

При последовательно-параллельном соединении четырехполюсников проверка производится по схемам рис. 1.16. При прямой передаче соединяются последовательно левые зажимы четырехполюсников и замыкаются накоротко правые (рис. 1.16, а). При обратной передаче соединяются параллельно правые и размыкаются левые зажимы (рис. 1.16, б). В обоих случаях напряжение  $U$  равно нулю, если условие регулярности соблюдено.

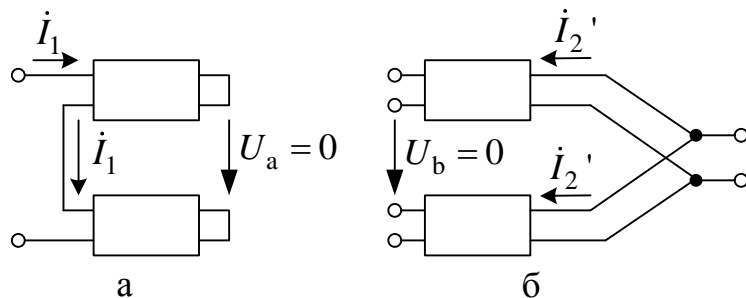


Рис. 1.16

При параллельно-последовательном соединении проверка регулярности осуществляется аналогично по схемам рис. 1.17.

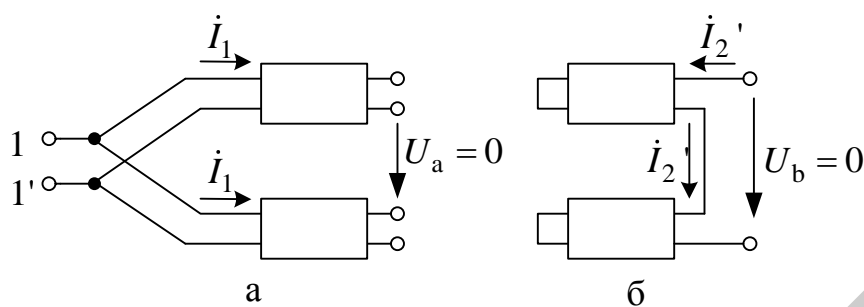


Рис. 1.17

### 1.7. Примеры решения задач

#### Пример 1

Известны токи на входе и выходе четырехполюсника  $\dot{I}_1 = 24 \cdot e^{j10}$  мА и  $\dot{I}_2 = 8 \cdot e^{-j45}$  мА.

Определить:

- 1) собственный коэффициент затухания;
- 2) собственную фазовую постоянную;
- 3) характеристическую постоянную передачи.

Решение:

$$e^g = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{24 \cdot e^{j10}}{8 \cdot e^{-j45}} = 3 \cdot e^{j55} = e^a \cdot e^{jb};$$

- 1) следовательно,  $e^a = 3$ , и характеристическое затухание:

$$a = \ln 3 = 1,099 \text{ Нп};$$

- 2) характеристическая фазовая постоянная:

$$b = 55^\circ = 0,96 \text{ рад};$$

- 3) характеристическая постоянная передачи:

$$g = a + jb = 1,099 + j0,96 = 1,456 \cdot e^{j41,14}.$$

#### Пример 2

Параметры Т-образной схемы симметричного четырехполюсника:  $Z_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $Z_2 = -j10 \text{ Ом}$ .

*Определить:* характеристический коэффициент затухания  $a$  и характеристическую фазовую постоянную  $b$ .

**Решение:**

Характеристическая постоянная передачи:

$$g = a + jb = \ln(\sqrt{A_{11} \cdot A_{22}} + \sqrt{A_{12} \cdot A_{21}});$$

Используем известную формулу связи между А-параметрами четырехполюсника и параметрами Т-образной схемы замещения:

$$A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} = 1 + j2 = 2,23e^{j63,4};$$

$$A_{21} = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{-j10} = j0,1.$$

Из условия симметрии четырехполюсника:

$$A_{22} = A_{11} = 2,23 \cdot e^{j63,4}.$$

Из условия обратимости:

$$A_{12} = \frac{A_{11} \cdot A_{22} - 1}{A_{21}} = 56,2 \cdot e^{j45}.$$

$$g = \ln\left(\sqrt{\left(2,23 \cdot e^{j63,4}\right)^2} + \sqrt{56,2 \cdot e^{j45} \cdot 0,1 \cdot e^{j90}}\right) = \ln(1,9 + j4,18) = \ln 4,59 \cdot e^{j65,5}.$$

Коэффициент затухания  $a = \ln 4,59 = 1,523$  Нп.

Коэффициент фазы  $b = 65,5^\circ$ .

## 2. Электрические фильтры

### 2.1. Основные теоретические положения

*Электрический фильтр* – устройство, включенное между источником питания и приемником, служащее для преимущественного ослабления колебаний одной части спектра частот по отношению к другой части спектра.

*Принцип работы* электрических фильтров основывается на известных положениях:

1) индуктивное сопротивление прямо пропорционально ( $X_L = 2\pi fL$ ), а емкостное – обратно пропорционально ( $X_C = 2\pi fC$ ) частоте;

2) ток в индуктивности на угол  $\frac{\pi}{2}$  отстает от напряжения, а в емкости – настолько же опережает.

Различные комбинации катушек индуктивности и конденсаторов дают фильтры, различные по своему действию: низкочастотные, высокочастотные, полосовые, заграждающие.

Будем считать *идеальным* фильтр, состоящий из чисто реактивных элементов.

*Областью (полосой) пропускания* идеального фильтра называют диапазон частот, в котором коэффициент затухания фильтра  $a$  равен нулю, а *областью (полосой) затухания* – диапазон частот, в котором коэффициент  $a$  отличен от нуля. Частоту, являющуюся граничной между полосой прозрачности и полосой затухания, называют *частотой среза*.

## 2.2. Фильтры типа $k$ ; их схемы замещения, номинальное характеристическое сопротивление фильтра

Следует запомнить, что цепочечные фильтры образуются из Г-образных полувзвеньев, Т- и П-образных звеньев, которые в случае многозвенного фильтра соединяются каскадно по принципу *согласования* характеристических сопротивлений.

Фильтрами нижних частот (ФНЧ) называют фильтры, пропускающие в нагрузку лишь сигналы низких частот, от  $\omega_1 = 0$  до  $\omega_2$ . Полоса затухания ФНЧ находится в интервале от  $\omega_2$  до  $\infty$ .

Т- и П-образные схемы ФНЧ приведены на рис. 2.1 а, б соответственно.

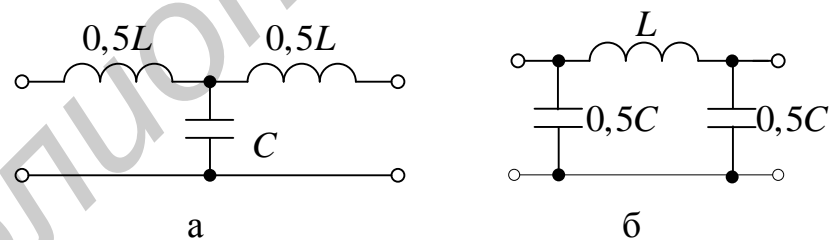


Рис. 2.1

Под фильтрами верхних частот (ФВЧ) понимают фильтры, пропускающие в нагрузку сигналы высокой частоты, начиная с  $\omega_1$  до  $\infty$ . Полоса затухания находится в интервале от  $0$  до  $\omega_1$ .

Т- и П-образные схемы ФВЧ приведены на рис. 2.2, а, б соответственно.

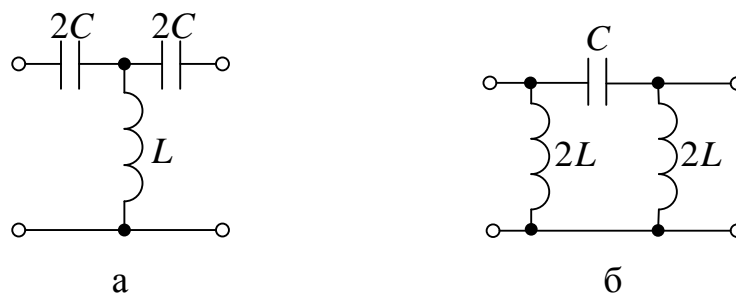


Рис. 2.2

Фильтры, изображенные на рис. 2.1, 2.2, относятся к фильтрам типа  $k$ , где  $k^2 = Z_1 \cdot Z_2 = R_H^2$ . Параметр  $R_H = \sqrt{Z_1 \cdot Z_2}$  называют *номинальным характеристическим сопротивлением*. Для данного фильтра  $R_H$  является величиной постоянной.

### 2.3. Расчет простейших фильтров по характеристическим параметрам

Поскольку фильтр – частный случай четырехполюсника, его свойства определяются характеристическим сопротивлением  $Z_c$  и характеристической постоянной передачи  $g = a + jb$  (см. формулы в разделе «Четырехполюсники»). Этих двух параметров достаточно для анализа работы фильтра в полосе пропускания и в полосе задерживания.

Характеристические параметры звена фильтра связаны с  $A$ -параметрами матрицы симметричного четырехполюсника формулами [1]:

$$\operatorname{ch} g_c = A_{11}; \quad (2.1)$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}}; \quad (2.2)$$

$$\operatorname{sh} g_c = \frac{1}{Z_c} \cdot A_{12} = Z_c \cdot A_{21}; \quad (2.3)$$

$$\operatorname{th} g_c = \frac{1}{Z_c} \cdot \frac{A_{12}}{A_{21}} = \sqrt{\frac{Z_{кз}}{Z_{xx}}}. \quad (2.4)$$

Эти формулы являются основными для расчета простейших звеньев симметричных фильтров.

В пределах полосы пропускания характеристическое затухание равно нулю ( $a = 0$ ;  $\operatorname{ch} a = 1$ ;  $\operatorname{sh} a = 0$ ).

Так как  $A_{11} = \operatorname{ch}(a + jb) = \operatorname{ch} a \cdot \cos b + j \operatorname{sh} a \cdot \sin b$ , то в полосе пропускания ( $a = 0$ ) мнимая часть данного выражения равна нулю, что позволяет составить уравнения отдельно для полосы прозрачности и полосы затухания ( $a \neq 0$ ).

Границы полосы прозрачности определяются из формулы (2.5):

$$-1 \leq A_{11} \leq 1,$$

Таблица 2.1

В полосе прозрачности	Вне полосы пропускания
$a = 0;$ $\cos b = A_{11}; \quad (2.5)$	$\pm \operatorname{ch} a = A_{11};$ $b = \pm \pi.$

откуда следует условие

$$-1 \leq \frac{Z_1}{4 \cdot Z_2} \leq 0,$$

где  $Z_1$  и  $Z_2$  – реактивные сопротивления фильтра, имеющие разные знаки:

$$Z_1 = \pm jx_1; \quad Z_2 = \pm jx_2,$$

следовательно:

$$-1 \leq \frac{x_1}{4 \cdot x_2} \leq 0. \quad (2.5)$$

Из формулы (2.5) видно, что величины сопротивлений в полосе прозрачности должны удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \text{ или } x_2 = \infty; \\ x_1 = 4 \cdot x_2. \end{cases} \quad (2.6)$$

Из формул (2.6) определяются границы полосы пропускания фильтра.

По вышеприведенным формулам рассчитывают характеристическое затухание и характеристическую фазу простейшего фильтра (или звена фильтра) без потерь.

#### 2.4. Расчет элементов фильтров по заданным полосе прозрачности и сопротивлению нагрузки

Основные расчетные формулы представлены в табл. 2.2.

Параметр  $\eta$  называется *нормированной частотой*;

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{f}{f_c},$$

где  $\omega_c$  (или  $f_c$ ) – частота среза (граничная частота между полосой пропускания и полосой задерживания фильтра).

Для ФНЧ:  $\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}$ , для ФВЧ:  $\omega_c = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$ .

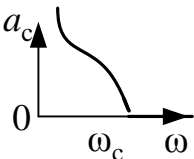
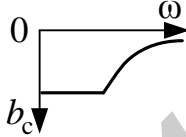
Формулы для коэффициента затухания  $a$  приведены для частот, лежащих вне полосы пропускания, т. к. в пределах полосы пропускания затухание равно нулю. Формулы для фазового сдвига даны только для частот, заключенных в пределах полосы прозрачности, так как вне полосы прозрачности фазовый сдвиг постоянен.

Таблица 2.2

Звенья симметричных фильтров

Фильтр нижних частот (ФНЧ)		
Схема	«Т»	«П»
Формулы для расчета параметров	$L = \frac{2R_H}{\omega_c}; C = \frac{2}{R_H\omega_c}; \omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}; R_H = \sqrt{\frac{L}{C}}.$	
Характеристики для Т- и П-образной схем	Затухания ( $\text{ch } a_c = 2\eta^2 - 1$ ): 	Фазовая ( $\cos b_c = 1 - 2\eta^2$ ): 
	Фильтр верхних частот (ФВЧ)	
Схема	«Т»	«П»

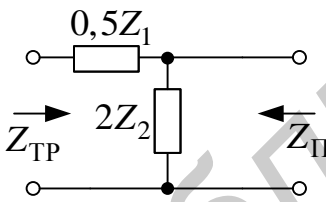
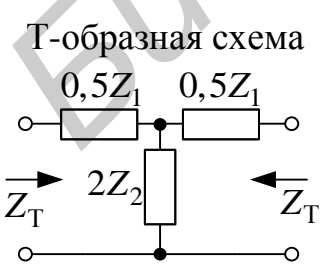


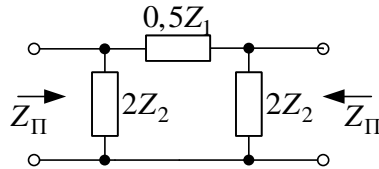
<p>Формулы для расчета параметров</p>	$L = \frac{R_H}{2\omega_c}; \quad C = \frac{1}{2R_H\omega_c}; \quad \omega_c = \frac{1}{2\sqrt{LC}}; \quad R_H = \sqrt{\frac{L}{C}}.$	
<p>Характеристики для Г- и П-образной схем</p>	<p>Затухания <math>\left( \operatorname{ch} a_c = \frac{2}{\eta^2} - 1 \right)</math>:</p> 	<p>Фазовая <math>\left( \cos b_c = 1 - \frac{2}{\eta^2} \right)</math>:</p> 

Характеристическое сопротивление  $Z_c$  определяется как нагрузочное сопротивление, при котором имеет место равенство входного и нагрузочного сопротивления. На одной из частот полосы прозрачности фильтра для симметричных звеньев характеристические сопротивления со стороны входа и выхода равны.

### 2.5. Расчет характеристических параметров фильтра по известным параметрам звеньев фильтра

Таблица 2.3

Схема	Характеристическая постоянная передачи	Характеристическое сопротивление
<p>Г-образное звено</p> 	$\frac{g}{2}$	$Z_{c_T} = \sqrt{Z_1 \cdot Z_2 \cdot \left( 1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right)};$ $Z_{c_{II}} = \sqrt{\frac{Z_1 \cdot Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4 \cdot Z_2}}}$
<p>Т-образная схема</p> 	$g = \ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = a + jb;$ $a = \ln \frac{U_1}{U_2};$ $b = \psi_{U_1} - \psi_{U_2};$	$Z_{c_T} = \sqrt{Z_1 \cdot Z_2 \cdot \left( 1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right)} =$ $= R_H \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2} =$ $= R_H \cdot \sqrt{1 - \eta^2};$

<p>П-образная схема</p> 		$Z_{c\Pi} = \sqrt{\frac{Z_1 \cdot Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4 \cdot Z_2}}} =$ $= \frac{R_H}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} = \frac{R_H}{\sqrt{1 - \eta^2}}$
---	--	---

*Примечание.* Г-образное звено является несимметричным четырехполюсником и поэтому имеет два различных значения характеристического сопротивления  $Z_{\Pi}$  и  $Z_T$ , собственная постоянная передачи равна  $\frac{g}{2}$ .

Формулы табл. 2.3 (зависимость характеристического сопротивления ФНЧ от частоты) являются основными для цепочечных фильтров, т. к. на их основе делаются все дальнейшие выводы. Следует обратить внимание, что эти формулы справедливы только при значениях элементов, указанных в табл. 2.2 (зависимость характеристического сопротивления ФВЧ от частоты).

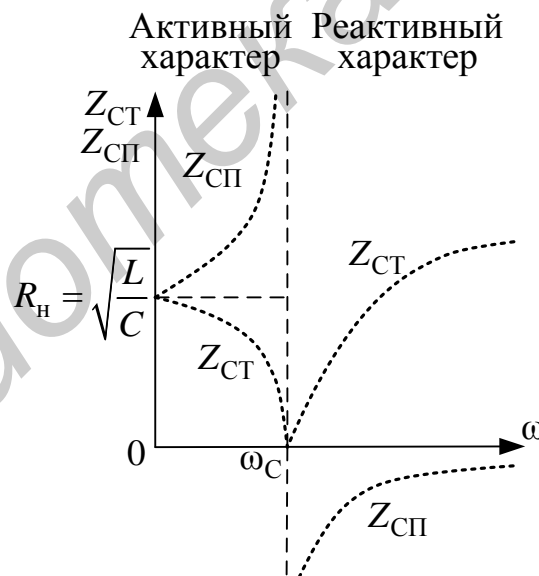


Рис. 2.3

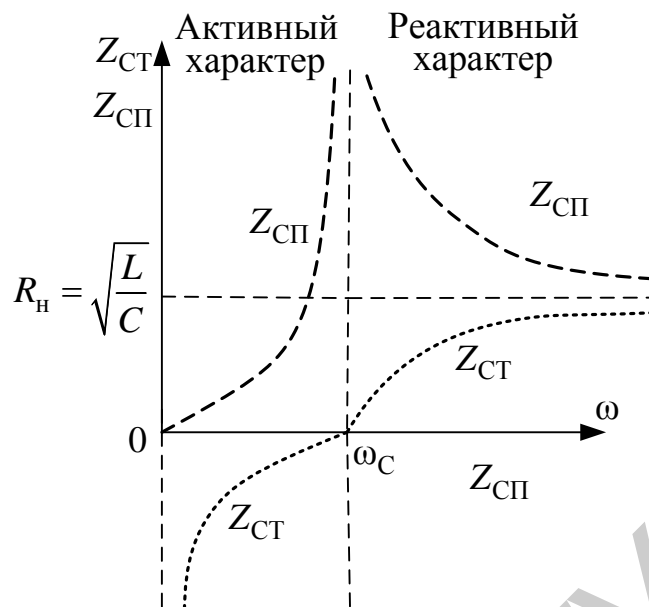


Рис. 2.4

На рис. 2.3, 2.4 изображены частотные зависимости характеристических сопротивлений Т- и П-образных фильтров низких (см. рис. 2.3) и высоких (см. рис. 2.4) частот.

В области пропускания характеристическое сопротивление – активное. Для ФНЧ при низких частотах оно мало изменяется с ростом частот и близко к назначению  $k = \sqrt{\frac{L}{C}}$ . По мере увеличения частоты и приближении ее к  $\omega_c$  характеристическое сопротивление Т-образного фильтра стремится к нулю, П-образного фильтра – к бесконечности. В области полосы затухания характеристическое сопротивление носит реактивный характер, причем для Т-образного фильтра она становится индуктивным, а для П-образного фильтра – емкостным.

Для ФВЧ характеристическое сопротивление остается приблизительно постоянным и равным  $k = \sqrt{\frac{L}{C}}$  при достаточно больших частотах. При низких частотах оно – реактивное, причем для П-образных фильтров носит индуктивный характер, для Т-образных фильтров – емкостной.

## 2.6. Примеры решения задач

### Пример 1

Определить: частоту среза и номинальное сопротивление ФНЧ.

Дано:

а)  $L = 200$  мГн;  $C = 0,2$  мкФ;

б)  $L = 0,4$  Гн;  $C = 400$  пФ.

**Решение:**

а) частота среза ФНЧ (табл. 2.2):

$$\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}} = \frac{2}{\sqrt{200 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2 \cdot 10^{-6}}} = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 10^{-8}}} = \frac{2}{2 \cdot 10^{-4}} = 10^4 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{10^4}{6,28} = 1592 \text{ Гц.}$$

Номинальное сопротивление:

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{200 \cdot 10^{-3}}{0,2 \cdot 10^{-6}}} = 1000 \text{ Ом.}$$

$$\text{б) } \omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}} = \frac{2}{\sqrt{0,4 \cdot 400 \cdot 10^{-12}}} = \frac{2 \cdot 10^6}{12,649} = 0,158 \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{0,158 \cdot 10^6}{6,28} = 25,17 \text{ кГц.}$$

Номинальное сопротивление:

$$R_0 = \sqrt{\frac{0,4}{400 \cdot 10^{-12}}} = 0,03162 \cdot 10^6 = 31,62 \text{ кОм.}$$

**Пример 2**

Номинальное сопротивление ФНЧ при  $\omega_1 = 0$ ,  $R_0 = 600 \text{ Ом}$ ; частота среза 5 МГц.

Построить: Т- и П-образные схемы фильтра, удовлетворяющие этим условиям.

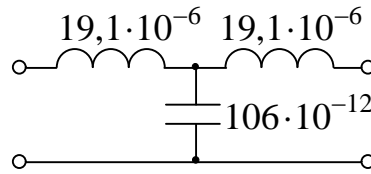
**Решение:**

Формулы для расчета параметров ФНЧ (см. табл. 2.2):

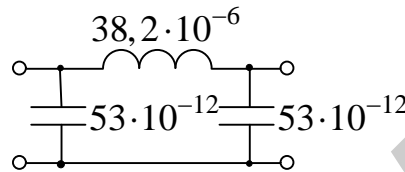
$$L = 2 \frac{R_0}{\omega_c} = 2 \frac{R_0}{\pi f_c} = \frac{600}{3,14 \cdot 5 \cdot 10^6} = 38,2 \cdot 10^{-6} \text{ Гн,}$$

$$C = \frac{2}{\omega_c \cdot R_0} = \frac{1}{\pi \cdot f_c \cdot R_0} = \frac{1}{3,14 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 600} = 106 \text{ пФ.}$$

а) строим Т-образную схему замещения ФНЧ. Индуктивности в продольном звене фильтра равны  $\frac{L}{2}$  каждая, т. е.  $19,1 \cdot 10^{-6}$  Гн.



б) строим П-образную схему ФНЧ. Емкости в поперечных звеньях фильтра равны  $\frac{C}{2}$  каждая, т. е. 53 пФ.



### Пример 3

Номинальное сопротивление ФНЧ, представленного П-образной схемой замещения,  $R_0 = 500$  Ом, частота среза фильтра  $f_c = 100$  кГц.

Определить:

- характеристическое сопротивление фильтра на частоте 90 кГц;
- характеристическое сопротивление эквивалентной Т-образной схемы замещения ФНЧ.

Решение:

При частоте, равной 0, характеристические сопротивления П- и Т-образной схем замещения равны номинальному сопротивлению  $R_0 = 500$  Ом;

а) характеристическое сопротивление П-образной схемы замещения на рабочей частоте 90 кГц определим:

$$Z_{c\Pi} = \frac{R_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} = \frac{500}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\pi \cdot 90 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 100 \cdot 10^3}\right)^2}} = 1149 \text{ Ом};$$

б) характеристическое сопротивление Т-образной схемы замещения на частоте 90 кГц:

$$Z_{c_T} = R_H \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} = 500 \cdot \sqrt{1 - (0,9)^2} = 218 \text{ Ом.}$$

#### Пример 4

T-образный фильтр высших частот имеет частоту среза 500 Гц и номинальное сопротивление  $R_0 = 600 \text{ Ом}$ .

Определить: частоту, при которой его характеристическое сопротивление равно:

- а) 0 Ом;
- б) 590 Ом.

#### Решение:

$$Z_{c_T} = R_H \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2};$$

а) когда  $Z_{c_T} = 0$ , то  $\frac{\omega_c}{\omega} = 1$ , следовательно, рабочая частота фильтра равняется его частоте среза:  $\omega_c = \omega = 500 \text{ Гц}$ ;

б) когда  $Z_{c_T} = 590 \text{ Ом}$ , то  $590 = 600 \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi \cdot 500}{2\pi \cdot f}\right)^2}$ , откуда рабочая частота фильтра равняется  $f = 2750 \text{ Гц}$ .

#### Пример 5

Найти  $L$  и  $C$  низкочастотного П-образного фильтра, у которого параметр  $k = 600 \text{ Ом}$ , а коэффициент затухания на частоте 10 кГц равен 40 дБ.

Определить граничную частоту и отношение напряжений на входе  $U_1$  и выходе  $U_2$  при частоте 10 кГц, считая фильтр согласованным с нагрузкой.

#### Решение:

В полосе задерживания ( $a > 0$ ):

$$\text{ch} \frac{a}{2} = \frac{f}{f_c},$$

где  $f$  – рабочая частота фильтра;  
 $f_c$  – частота среза ФНЧ.

$$f_c = \frac{1}{\pi \sqrt{LC}}.$$

После подстановки получаем

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} = f \cdot \pi \sqrt{LC},$$

1 дБ = 0,115 Нп, следовательно, 40 дБ = 4,6 Нп.

Определим  $\operatorname{ch} \frac{a}{2}$ , используя тригонометрическое соотношение:

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2},$$

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} = \operatorname{ch} \frac{4,6}{2} = \frac{e^{2,3} + e^{-2,3}}{2} = 5,03.$$

Определим частоту среза:

$$f_c = \frac{f}{\operatorname{ch} \frac{a}{2}} = \frac{10000}{5,03} = 2000 \text{ Гц} = 2 \text{ кГц}.$$

Из совместного решения уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{ch} \frac{a}{2} = f \cdot \pi \cdot \sqrt{LC}; \\ K = \sqrt{\frac{L}{C}}. \end{cases}$$

Определяем  $L$  и  $C$ :

$$L = 96 \text{ мГн};$$

$$C = 26,6 \cdot 10^{-2} \text{ мкФ}.$$

Определяем отношение напряжений на входе и выходе  $U_2$ :

$$\frac{U_1}{U_2} = e^a = e^{4,6} = 99,48,$$

т. е.  $U_1 = 99,48 \cdot U_2$ .

**Ответ:**  $f_c = 2 \text{ кГц}$ ;  $L = 96 \text{ мГн}$ ;  $C = 26,6 \cdot 10^{-2} \text{ мкФ}$ ;  $U_1 = 99,48 \cdot U_2$ .

### 3. Переходные процессы в линейных электрических цепях. Возникновение переходных процессов и их значение

*Переходные процессы* – явления, имеющие место в электрических цепях при изменении их режима работы: включении и выключении пассивных и активных элементов, внезапном изменении параметров, коротком замыкании отдельных участков и т. д. Эти процессы обусловлены изменением энергетического состояния цепи при переходе от одного установившегося режима к другому.

Энергия, запасенная в магнитном поле катушки  $W_L = \frac{Li^2}{2}$ , и энергия электрического поля емкости  $W_C = \frac{CU^2}{2}$  не могут изменяться скачком. Следовательно, для завершения переходного процесса требуется некоторый промежуток времени, в течении которого токи и напряжения могут достигать больших величин.

В одних устройствах (системах автоматики, в импульсной технике) переходные процессы являются нормальным режимом работы; в других устройствах (в длинных ЛЭП) – переходные процессы являются аварийным режимом работы. Без учета переходных процессов нельзя правильно спроектировать и эксплуатировать радиотехническую и электротехническую аппаратуру.

#### 3.1. Коммутация и ее законы

*Коммутацией* называют включение или отключение цепи от источника энергии, а также изменение ее параметров. На схеме коммутация обозначается в виде ключа со стрелкой:

а)  — замыкание ключа;

б)  — размыкание ключа.

Момент коммутации обычно принимают за начало отсчета  $t = 0, t(0)$ .

Момент времени непосредственно перед коммутацией обозначается  $t(0_-)$ , непосредственно после коммутации  $t(0_+)$ .

Существуют два закона коммутации:

##### ***Первый закон коммутации:***

Ток и магнитный поток в индуктивности непосредственно после коммутации равны току и магнитному потоку в той же индуктивности непосредственно перед коммутацией. Другими словами: **ток и магнитный поток через индуктивность в момент коммутации не могут измениться скачкообразно:**

$$i_L(0_+) = i_L(0_-).$$



### **Второй закон коммутации:**

Напряжение и заряд на емкости непосредственно после коммутации равны напряжению и заряду на этой же емкости непосредственно перед коммутацией. Другими словами: **напряжения и заряд на емкости в момент коммутации не могут изменяться скачкообразно.**

$$U_C(0_+) = U_C(0_-).$$

Следует отметить, что скачкообразно могут изменяться:

- 1) токи в сопротивлениях и емкостях;
- 2) напряжения на сопротивлениях и индуктивностях.

Отсюда следует, что в электрических цепях, состоящих только из активных сопротивлений, переход из одного установившегося состояния к другому совершается мгновенно.

Законы коммутации используются для нахождения начальных условий, которые необходимы для определения постоянных интегрирования при расчете переходных процессов в электрических цепях.

### **3.2. Начальные условия**

Значения токов и напряжений на элементах электрической цепи в момент  $t(0_+)$  (непосредственно после коммутации) называется *начальными условиями*.

Различают *независимые* и *зависимые начальные условия*. К независимым относится: ток, протекающий через индуктивность, и напряжение на емкости:  $i_L(0_+)$  и  $u_C(0_+)$ . Эти условия определяются законами коммутации.

Значения всех остальных токов и напряжений и их производных относятся к зависимым начальным условиям.

В зависимости от энергетического состояния цепи различают два вида задач:

1) электрическая цепь непосредственно перед коммутацией не обладала энергией, т. е.  $i_L(0_-) = 0$  и  $U_C(0_-) = 0$ . В этом случае расчет цепи является *задачей с нулевыми начальными условиями*:

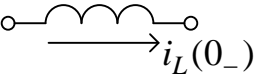


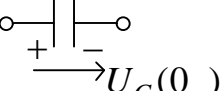
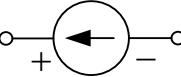
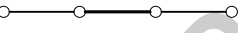
$$i_L(0_+) = 0; U_C(0_+) = 0;$$

2) электрическая цепь перед коммутацией обладала запасом энергии. Определение токов и напряжений в переходном режиме представляет *задачу с ненулевыми начальными условиями*:

$$i_L(0_+) \neq 0; U_C(0_+) \neq 0.$$

Таблица 3.1 показывает, как надо представлять индуктивность и емкость в эквивалентной схеме для момента коммутации ( $t = 0+$ ) в зависимости от вида начальных условий.

Таблица 3.1

Элемент	Ненулевые н. у.	Нулевые н. у.
	$i_L(0_+)$ 	$i_L(0_+) = 0$ 
$C$ 	$U_C(0_+)$ 	$U_C(0_+) = 0$ 

При нулевых начальных условиях  $i_L(0_+) = 0$  и  $U_C(0_+) = 0$  индуктивность в момент коммутации равносильна разрыву цепи, а емкость – короткому замыканию.

При ненулевых начальных условиях  $i_L(0_+) \neq 0$  и  $U_C(0_+) \neq 0$  индуктивность в момент времени  $t = 0$  равносильна источнику тока  $i_L(0_+)$ , а емкость – источнику напряжения с ЭДС, равной  $U_C(0_+)$ .

### 3.3. Классический метод расчета переходных процессов

*Рассчитать переходный процесс* – значит найти закон изменения токов и напряжений на отдельных элементах или ветвях цепи при изменении времени от момента коммутации ( $t = 0$ ) до установления нового стационарного режима ( $t = \infty$ ).

Расчет переходных процессов классическим методом сводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений и производится в следующем порядке:

1. Задаются положительным направлением тока в каждой ветви схемы, образовавшейся после коммутации, и составляют уравнения по законам Кирхгофа для мгновенных значений.

2. Полученную систему уравнений сводят к одному уравнению с одним неизвестным током или напряжением на каком-либо элементе цепи (решение будет проще, если этим неизвестным окажется ток через индуктивность или напряжение на емкости). В общем случае получается неоднородное линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами.

3. Дифференциальное уравнение решается известными из математики способами. Пользуясь начальными условиями, определяют постоянные интегрирования и в итоге получают токи и напряжения переходного процесса функции времени.

Система интегродифференциальных уравнений цепи всегда составляется для цепи в состоянии *после коммутации*, т. е. после замыкания или размыкания ключа.

При составлении этой системы уравнений, связывающих мгновенные значения входных и выходных электрических величин между собой, используются следующие соотношения:

$$U_R(t) = i(t) \cdot r; \quad i(t) = \frac{U_R(t)}{R};$$

$$U_L = L \frac{di(t)}{dt}; \quad i(t) = \frac{1}{L} \int U_L(t) dt;$$

$$i_C(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt} \quad U_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt,$$

где  $U_R(t)$ ,  $U_L(t)$ ,  $U_C(t)$  – напряжения на активном сопротивлении, индуктивности и емкости соответственно.

### 3.4. Решение дифференциального уравнения. Свободная и принужденная составляющие

Решение полученного дифференциального уравнения представляют в виде суммы двух решений: принужденного и свободного тока или напряжения ( $i = i_{пр} + i_{св}$  или  $U = U_{пр} + U_{св}$ ).

С математической точки зрения  $i_{пр}$  – частное решение неоднородного уравнения; с физической точки зрения  $i_{пр}$  – ток рассматриваемой ветви в установившемся режиме, если в цепи действуют источники постоянного тока и напряжения или источники синусоидального тока и напряжения. Принужденный ток определяется законом изменения действующих в цепи источников и параметрами цепи. Он может быть найден любым методом расчета цепи в установившемся режиме (закон Ома, закон Кирхгофа, метод контурных токов и т. д.).

Свободный ток ( $i_{св}$ ) с точки зрения математики – решение соответствующего однородного дифференциального уравнения. С физической точки зрения  $i_{св}$  – ток в цепи, предоставленной самой себе при определенных начальных условиях. Свободный ток не зависит от закона изменения действующих в цепи источников и определяется начальными условиями и напряжениями цепи.

Общий вид свободного тока зависит от порядка дифференциального уравнения и от характера корней (вещественные или комплексные) характеристических уравнений.

Для схемы первого порядка свободный ток имеет вид

$$i_{св} = Ae^{pt}.$$

Для схемы второго порядка:

а) в случае вещественных и разных корней  $i_{CB} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}$ ;

б) в случае вещественных и равных корней  $i_{CB} = (B_1 + B_2) \cdot t e^{p t}$ ;

в) в случае комплексно-сопряженных корней  $i_{CB} = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \psi_{CB})$ ,

где  $A_1, A_2, B_1, B_2, A, \psi_{CB}$  – постоянные интегрирования.

### **Алгоритм решения переходных процессов классическим методом:**

1. Определение независимых начальных условий  $i_L(0_-)$  и  $U_C(0_-)$ . Независимые начальные условия рассчитывают в цепи в докоммутиационном режиме.

2. Определение зависимых начальных условий. Зависимые начальные условия определяются следующим образом. Составляются уравнения по законам Кирхгофа для момента времени  $t = 0_+$  в цепи, являющейся эквивалентом исходной цепи для момента времени  $t = 0$ . В эти уравнения подставляют независимые начальные условия  $i_L(0_+)$  и  $U_C(0_+)$ . Решив полученную систему уравнений, можно определить зависимые начальные условия.

3. Записывают характеристическое уравнение цепи. Данное уравнение можно получить минуя составления соответствующих интегродифференциальных уравнений. Для этого достаточно составить уравнение входного сопротивления цепи относительно какой-либо ее ветви. Назовем его входным характеристическим сопротивлением. При записи данного сопротивления вместо реактивных сопротивлений  $X_L = \omega L$  и  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  используем их

операторную форму  $X_L(p) = pL$  и  $X_C(p) = \frac{1}{pC}$ . Затем входное характеристическое сопротивление приравниваем к нулю:  $Z(p) = 0$ . Приравнивание характеристического входного сопротивления к нулю приводит сразу к характеристическому уравнению цепи. При составлении входного характеристического сопротивления цепи источники тока и напряжения не учитываются: ветви с источниками тока размыкают, участки с источниками ЭДС закорачивают.

Физический смысл приравнивания к нулю характеристического сопротивления следующий: мы ищем параметры собственной функции тока цепи, который может протекать при отсутствии источников напряжения или тока, т.е. ищем параметры собственного тока цепи, протекание которого в данной цепи не встречает сопротивления.

4. Определяем принужденные составляющие токов и напряжений. Для этого рассматриваем схему в установившемся режиме, полагая, что с момента коммутации прошло бесконечно большое время  $t = \infty$ .

5. Если на входе цепи действует источник постоянного тока или напряжения, то напомним, что сопротивление индуктивности  $X_L = \omega L = 0$ , сопротивление емкости  $X_C = \frac{1}{\omega C} = \infty$ .

Если на входе действует источник синусоидального тока или напряжения, то расчет принужденных составляющих производим методом комплексных амплитуд.

6. Записываем исходную переходную величину в виде суммы двух составляющих:  $i(t) = i_{пр} + i_{св}$ ,  $U(t) = U_{пр} + U_{св}$ .

7. Подставляя начальные условия, определяем постоянные интегрирования.

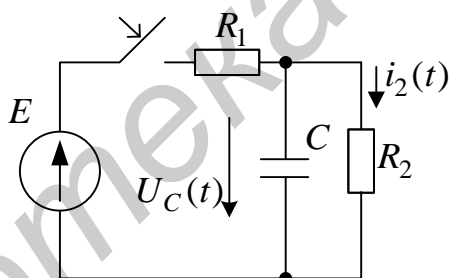
8. После того, как найдены постоянные интегрирования, записываем окончательное решение и строим графики для иллюстрации полученного результата.

### 3.5. Примеры решения задач

#### 3.5.1. Переходной процесс в цепях 1-го порядка.

##### Задачи с нулевыми начальными условиями

#### Пример 1



Дано:  $E = 100$  В;  $R_1 = 10$  кОм;  $R_2 = 15$  кОм;  $C = 2$  мкФ.

Определить: классическим методом  $U_C(t)$ ;  $i_C(t)$  и  $i_2(t)$ . Построить график.

#### Решение:

Решение проводим по вышеизложенному алгоритму:

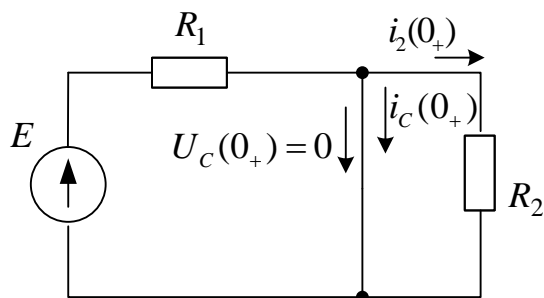
1. Определяем независимое начальное условие. Так как до коммутации цепь не была подключена к источнику ЭДС, напряжение на конденсаторе к моменту коммутации отсутствует:  $U_C(0_-) = 0$ .

Согласно второму закону коммутации:

$$U_C(0_-) = U_C(0_+) = 0.$$

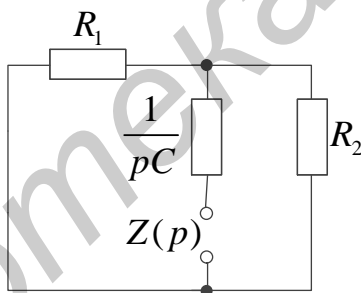
Следовательно, эта задача является задачей с нулевыми начальными условиями.

2. Определяем зависимое начальное условие  $i_2(0)$ . Для этого рисуем схему в момент коммутации ( $t = 0$ ), где ветвь с конденсатором заменяется коротко замкнутым участком.



$$i_2(0_+) = \frac{E}{R_1} = \frac{100}{10 \cdot 10^3} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 10 \text{ mA}; \quad i_2(0_+) = 0.$$

3. Рисуем схему для записи характеристического уравнения  $Z(p)$ . Участок с источником ЭДС закорачиваем, сопротивление  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  заменяем сопротивлением  $X_C(p) = \frac{1}{pC}$ .



$$Z(p) = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{1}{pC} = 0;$$

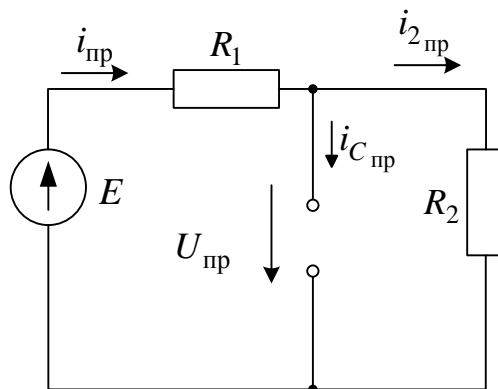
$$\frac{10 \cdot 10^3 \cdot 15 \cdot 10^3}{(10 + 15) \cdot 10^3} + \frac{1}{p \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 0;$$

$$p = -83,3.$$

В случае одного вещественного отрицательного корня свободная составляющая имеет вид  $Ae^{pt}$ .

4. Определяем принужденные составляющие  $U_{C_{пр}}$  и  $i_{2_{пр}}$ . Для наглядности изобразим схему в установившемся режиме, полагая, что произошло бесконечно большое время после замыкания ключа. Так как на входе цепи действует

источник постоянного напряжения,  $X_C = \infty$ , в схеме ветвь с конденсатором размыкаем.



$$i_{C\text{ пр}} = 0;$$

$$i_{2\text{ пр}} = i_{1\text{ пр}} = \frac{E}{R_1 + R_2} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 4 \text{ mA.}$$

$$U_{C\text{ пр}} = i_{1\text{ пр}} \cdot R_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} \cdot R_2 = \frac{100}{(10 + 15) \cdot 10^{-3}} \cdot 15 \cdot 10^{-3} = 60 \text{ V.}$$

5. Записываем исходное напряжение и ток:

$$U_C(t) = U_{C\text{ пр}} + U_{C\text{ св}} = U_{C\text{ пр}} + A_1 e^{pt} = 60 + A_1 e^{pt};$$

$$i_2(t) = i_{2\text{ пр}} + i_{2\text{ св}} = i_{2\text{ пр}} + A_2 e^{pt} = 4 + A_2 e^{pt};$$

$$i_C(t) = i_{C\text{ пр}} + i_{C\text{ св}} = i_{C\text{ пр}} + A_3 e^{pt} = 0 + A_3 e^{pt}.$$

6. Записываем полученные уравнения для момента времени  $t = 0$ , подставляя в них начальные условия, и определяем постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ .

$$U_C(0_+) = 60 + A_1; 0 = 60 + A_1;$$

$$A_1 = -60, 0 = 4 + A_2; A_2 = -4;$$

$$i_C(0_+) = 0 + A_3; 10 = 0 + A_3; A_3 = 10.$$

Запишем окончательный ответ:

$$U_C(t) = 60 - 60e^{-83,3t}, \text{ В};$$

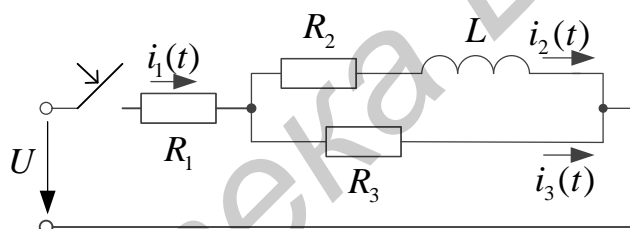
$$i_2(t) = 4 - 4e^{-83,3t}, \text{ мА};$$

$$i_C(t) = 10e^{-83,3t}, \text{ мА}.$$

Ток  $i_C(t)$  в ветви с конденсатором можно было рассчитать, используя выражение  $i_C(t) = C \frac{dU_C}{dt}$ :

$$\begin{aligned} i_C(t) &= 2 \cdot 10^{-6} \frac{d(60 - 60e^{-83,3t})}{dt} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot (-60) \cdot (-83,3) \cdot e^{-83,3t} = \\ &= 9,996 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-83,3t} \text{ А} = 10 \cdot e^{-83,3t} \text{ мА}. \end{aligned}$$

### Пример 2



Дано:  $U = 80 \text{ В}$ ,  $R_1 = 120 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 50 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 200 \text{ Ом}$ ,  $L = 0,5 \text{ Гн}$ .

Определить: законы изменения токов  $i_2(t)$  и  $i_3(t)$ . Построить графики.

### Решение:

1. Определяем независимые начальные условия. До коммутации ток в ветви с индуктивностью не протекал, следовательно,  $i_L(0_-) = 0$ .

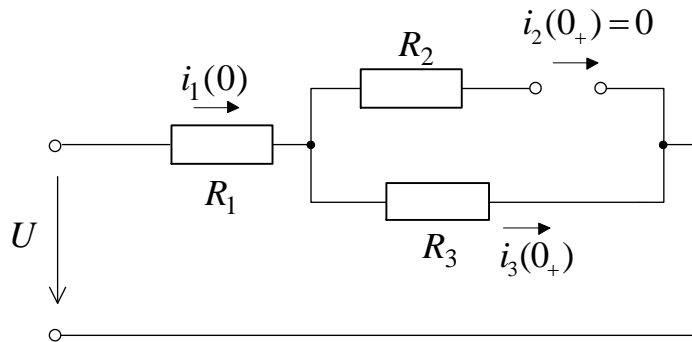
Согласно первому закону коммутации:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0.$$

Следовательно, эта задача является задачей с нулевыми начальными условиями.

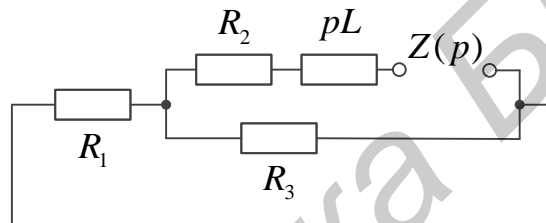
2. Определяем зависимое начальное условие  $i_3(0)$ . Для этого рисуем схему в момент коммутации ( $t = 0$ ), где участок с индуктивностью заменяем разрывом.





$$i_3(0_+) = i_1(0_+) = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{80}{120 + 200} = 0,25 \text{ A.}$$

3. Рисуем схему для записи характеристического уравнения:



$$Z(p) = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} + R_2 + pL = 0;$$

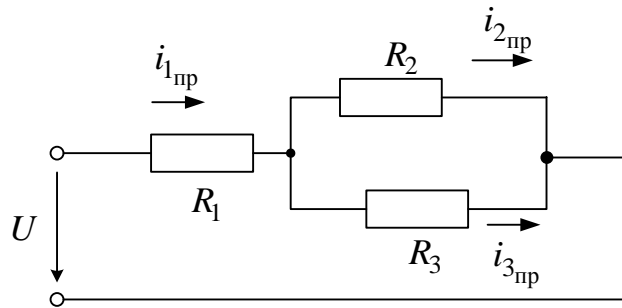
$$\frac{120 \cdot 200}{120 + 200} + 50 + p \cdot 0,5 = 0;$$

$$p = -250;$$

Свободная составляющая имеет вид  $Ae^{pt}$ .

4. Определяем принужденные составляющие  $i_{2пр}$  и  $i_{3пр}$ .

Схема с учетом того, что  $X_L = 0$  в цепи постоянного напряжения, в установившемся режиме имеет вид



Принужденные составляющие рассчитываем, используя закон Ома и правило плеч:

$$R_{\text{экв}} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 120 + \frac{50 \cdot 200}{50 + 200} = 160 \text{ Ом};$$

$$i_{1\text{пр}} = \frac{U}{R_{\text{экв}}} = \frac{80}{160} = 0,5 \text{ А};$$

$$i_{2\text{пр}} = i_{1\text{пр}} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 0,5 \cdot \frac{200}{50 + 200} = 0,4 \text{ А};$$

$$i_{3\text{пр}} = i_{1\text{пр}} - i_{2\text{пр}} = 0,5 - 0,4 = 0,1 \text{ А}.$$

5. Записываем полные переходные токи:

$$i_2(t) = i_{2\text{пр}} + A_1 e^{pt} = 0,4 + A_1 e^{pt};$$

$$i_3(t) = i_{3\text{пр}} + A_2 e^{pt} = 0,1 + A_2 e^{pt}.$$

6. Записываем полученные уравнения для момента времени  $t = 0$ , подставляем в них начальные условия. Определяем постоянные интегрирования:

$$0 = 0,4 + A_1, \text{ откуда } A_1 = -0,4;$$

$$0,25 = 0,1 + A_2, \text{ откуда } A_2 = 0,15.$$

7. Записываем окончательный ответ:

$$i_2(t) = 0,4 - 0,4e^{-250t} \text{ А},$$

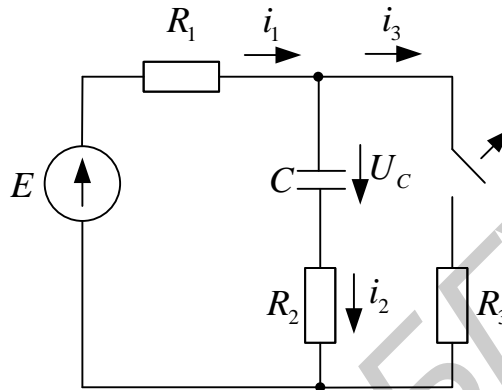
$$i_3(t) = 0,1 + 0,15e^{-250t} \text{ А}.$$

## Задачи с ненулевыми начальными условиями

### Пример 3

В результате размыкания ключа в цепи наступает переходной режим. Параметры цепи:  $E = 12$  В;  $R_2 = R_3 = 500$  Ом;  $R_1 = 1$  кОм;  $C = 1000$  пФ.

Определить:  $U_C(t)$ ;  $i_2(t)$ .



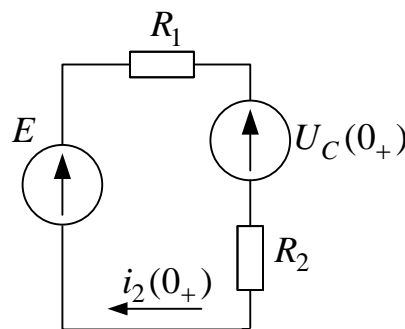
### Решение:

1. Определяем независимые начальные условия.

До коммутации ключ был замкнут. Данная цепь с ненулевыми начальными условиями:

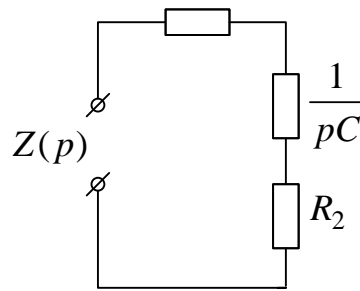
$$U_C(0_+) = U_C(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} R_3 = \frac{12 \cdot 500}{1000 + 500} = 4 \text{ В.}$$

2. Определяем зависимые начальные условия. Для этого рисуем эквивалентную схему для момента времени  $t = 0$ :



$$i_1(0_+) = i_2(0_+) = \frac{E - U_C(0_+)}{R_1 + R_2} = \frac{12 - 4}{1000 + 500} = 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ А.}$$

3. Записываем характеристическое уравнение и определяем его корни:

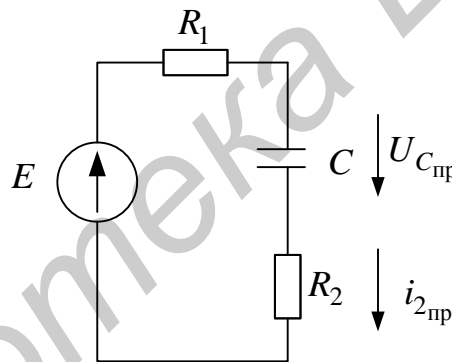


$$Z(p) = R_1 + R_2 + \frac{1}{pC} = 0;$$

$$1000 + 500 + \frac{1}{p \cdot 1000 \cdot 10^{-12}} = 0;$$

$$0 = -6,6 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}.$$

Определяем принужденные составляющие  $U_{C_{\text{пр}}}$  и  $i_{2_{\text{пр}}}$ . Схема в установленном режиме изображена ниже.



Так как цепь находится под воздействием постоянного источника ЭДС, ток  $i_{2_{\text{пр}}} = 0$  и  $U_{C_{\text{пр}}} = E = 12 \text{ В}$ .

4. Запишем в общем виде переходное напряжение и ток:

$$U_C(t) = U_{C_{\text{пр}}} + A_1 e^{pt} = A_1 e^{pt};$$

$$i_2(t) = i_{2_{\text{пр}}} + A_2 e^{pt} = A_2 e^{pt}.$$

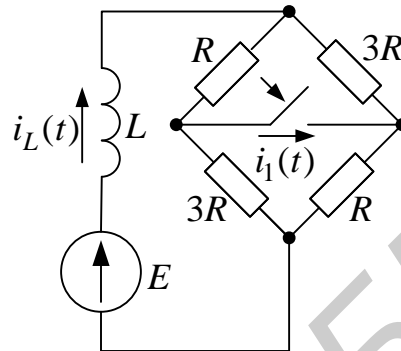
5. Записываем полученные уравнения для момента коммутации  $t = 0$ , подставляя в них начальные условия, и определяем постоянные интегрирования:

$$5,3 \cdot 10^{-3} = 0 + A_2; A_2 = 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ А};$$

$$4 = 12 + A_1 = -8; A_1 = -8 \text{ В.}$$

Ответ:  $U_C(t) = 12 \cdot e^{-6,6 \cdot 10^6 t}$ , В;  $i_2(t) = 5,3 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-6,6 \cdot 10^6 t}$ , А.

#### Пример 4



Дано:

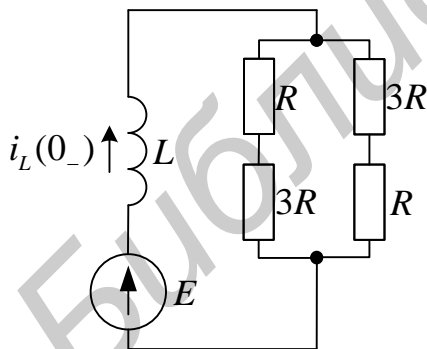
$$E = 300 \text{ В,}$$

$$R = 100 \text{ Ом,}$$

$$L = 1 \text{ Гн.}$$

Определить:  $i_L(t)$  и  $i_1(t)$ .

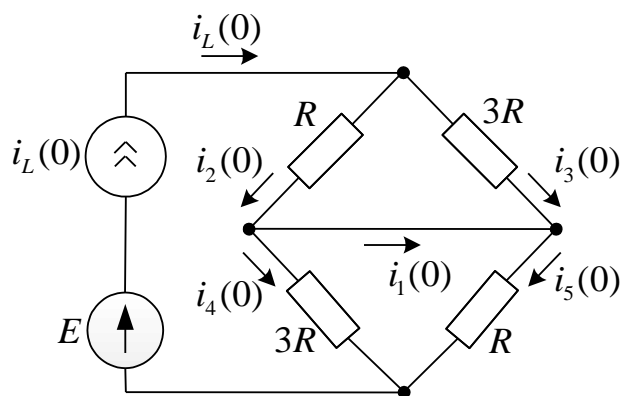
Решение:



1. Определим независимые начальные условия по схеме до коммутации:

$$i_L(0_-) = \frac{E}{2R} = \frac{300}{200} = 1,5 \text{ А.}$$

2. Значение тока  $i_1(t)$  в момент времени  $t = 0$  является зависимым начальным условием, которое определим по эквивалентной схеме замещения для момента коммутации.



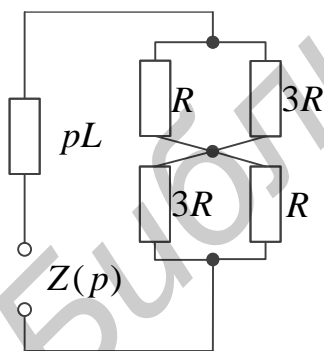
$$i_2(0) = i_L(0) \cdot \frac{3R}{4R} = \frac{3}{4} \cdot 1,5 = 1,125 \text{ A};$$

$$i_3(0) = i_L(0) \frac{1R}{4R} = 0,375 \text{ A};$$

$$i_4(0) = 0,375 \text{ A};$$

$$i_1(0) = i_2(0) - i_4(0) = 1,125 - 0,375 = 0,75 \text{ A}.$$

3. Составим и решим характеристическое уравнение. Для этого в схеме после коммутации источник ЭДС заменяем на его внутреннее сопротивление (в нашем случае источник идеальный, поэтому заменяем его на короткозамкнутый участок цепи), а сопротивление индуктивности принимаем равным  $pL$ :



$$Z(p) = pL + \frac{3R^2}{4R} + \frac{3R^2}{4R} = 0,$$

$$pL + \frac{3}{2}R = 0.$$

Решаем последнее уравнение и определяем корень  $p$ :

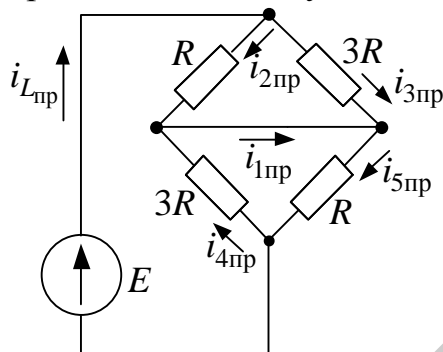
$$p = -\frac{3R}{2L} = -150 \text{ с}^{-1}.$$

Так как корень уравнения получился действительным и отрицательным, общий вид решения для искомых величин будет следующим:

$$i_L(t) = i_{L_{\text{ст}}} + A_1 e^{pt}, \quad (3.1)$$

$$i_1(t) = i_{1пр} + A_2 e^{pt}. \quad (3.2)$$

4. Рассчитаем принужденные составляющие искомых токов (установившийся режим) в схеме после коммутации. Ток в неразветвленной части схемы (в ветви с индуктивностью) определим по закону Ома:



$$i_{Lпр} = \frac{E}{2 \cdot \frac{3R^2}{4R}} = \frac{2E}{3R} = \frac{600}{300} = 2 \text{ A.}$$

Ток  $i_2$  определим по правилу плеч:

$$i_2 = i_{Lпр} \frac{3R}{4R} = \frac{2 \cdot 3}{4} = 1,5 \text{ A.}$$

Ток  $i_3$  определим по первому закону Кирхгофа:

$$i_3 = i_{Lуст} - i_2 \text{ A, } i_3 = 0,5 \text{ A.}$$

Токи  $i_4$  и  $i_5$  будут равны соответственно:

$$i_4 = 0,5 \text{ A, } i_5 = 1,5 \text{ A.}$$

По первому закону Кирхгофа определим установившееся значение тока  $i_{1пр}$ :

$$i_{1пр} = i_2 - i_4 = 1,5 - 0,5 = 1 \text{ A.}$$

5. Определим постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ .

Для этого решим уравнения (3.1) и (3.2):

Уравнение (3.1) для момента коммутации ( $t = 0$ ) примет вид

$$1,5 = 2 + A_1, \quad A_1 = -0,5.$$

Тогда  $i_L(t) = i_{L_{\text{пр}}} + i_{L_{\text{св}}} = i_{L_{\text{пр}}} + A_1 e^{pt} = 2 - 0,5e^{-150t}$ .

В момент коммутации ( $t = 0$ ) уравнение (3.2) примет вид

$$0,75 = 1 + A_2, \quad A_2 = -0,25.$$

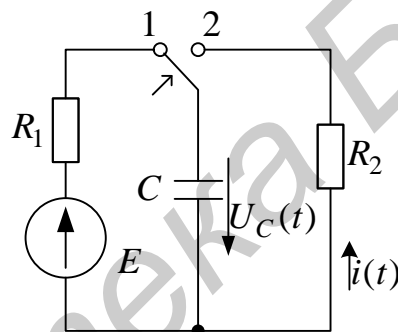
Тогда  $i_1(t) = i_{1_{\text{уст}}} + A_2 e^{pt} = 1 - 0,25e^{-150t}$ .

Ответ:  $i_L(t) = 2 - 0,5e^{-150t}$ ,  $i_1(t) = 1 - 0,25e^{-150t}$ .

### Пример 5

Дано:  $R_1 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $C = 1 \text{ мкФ}$ ,  $E = 10 \text{ В}$ .

Определить:  $u_C(t)$  и  $i(t)$  (классическим методом).



### Решение:

Решение для  $u_C(t)$  имеет вид

$u_C(t) = u_{C_{\text{пр}}}(t) + u_{C_{\text{св}}}(t)$ ; ток  $i(t)$  после коммутации является током разряд-

ки конденсатора, и его можно определить по формуле  $i(t) = \frac{dU_C}{dt}$ .

Определяем независимые начальные условия. Независимое начальное условие в данной задаче  $u_C(0_+)$ :

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = E = 10.$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\frac{1}{pC} + R_2 = 0;$$



$$R_2 pC + 1 = 0;$$

$$p = -\frac{1}{R_2 C} = -\frac{1}{5 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} = -0,2 \cdot 10^6.$$

Свободная составляющая искомой функции будет иметь следующий вид:

$$u_{C_{св}}(t) = Ae^{pt}.$$

Рассчитаем установившийся режим, т. е. определим принужденное значение искомой функции:

$$u_{C_{пр}} = 0.$$

Определим постоянные интегрирования. Запишем исходное уравнение для  $t = 0_+$  и определим постоянную интегрирования:

$$u_C(0_+) = u_{C_{пр}}(0_+) + u_{C_{св}}(0_+);$$

$$10 = 0 + A; A = 10.$$

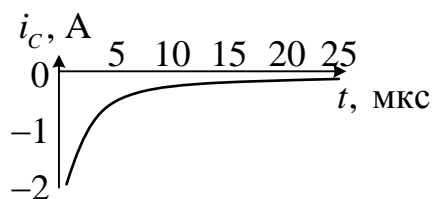
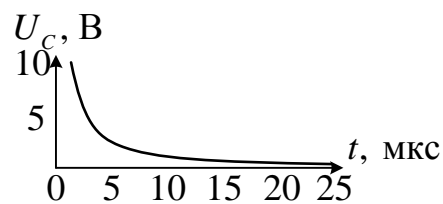
Решение для напряжения на емкости:

$$u_C(t) = 10e^{-0,2 \cdot 10^6 t} \text{ В.}$$

Вычислим ток  $i(t)$ :

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -2e^{-0,2 \cdot 10^6 t} \text{ А.}$$

Ниже приведены графики напряжения и тока



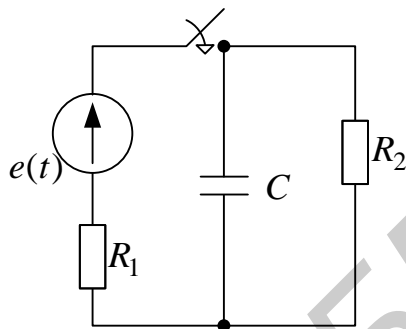
Рассмотрим анализ переходного процесса, если в цепи включен источник, изменяющийся по синусоидальному закону.

Ответ:  $i_L(t) = 2 - 0,5e^{-150t}$ ,  $i_1(t) = 1 - 0,25e^{-150t}$ .

**Пример 6**

Дано:  $R_1 = 2$  Ом,  $R_2 = 4$  Ом,  $C = 1$  мкФ,  $e(t) = 8\sin(10^6t + 90^\circ)$ .

Определить: ток  $i_1$  (классическим методом).



**Решение:**

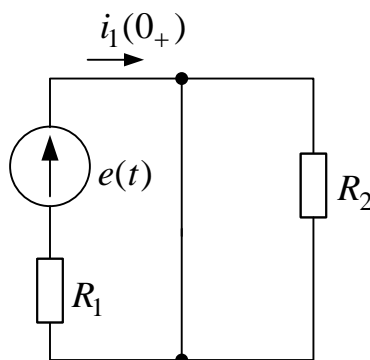
Запишем закон изменения тока  $i_1(t)$ :

$$i_1(t) = i_{1np}(t) + i_{1св}(t).$$

Независимое начальное условие:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0.$$

Определяем  $i_1(0_+)$  – зависимое начальное условие. Исходя из того, что  $u_C(0_+) = 0$ , емкость представляет собой короткозамкнутый участок при  $t = 0_+$ :



$$i_1(0_+) = \frac{e(0_+)}{R_1} = \frac{8 \sin 90^\circ}{2} = 4 \text{ A.}$$

Запишем характеристическое уравнение для цепи после:

$$R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$pCR_1R_2 + R_1 + R_2 = 0;$$

$$8 \cdot 10^{-6} p + 6 = 0.$$

Корень характеристического уравнения:

$$p = -0,75 \cdot 10^6.$$

Свободная составляющая:

$$i_{1\text{св}}(t) = Ae^{pt}.$$

Находим принужденный ток  $i_{1\text{пр}}(t)$  символическим методом:

$$\dot{i}_{1m\text{пр}}(t) = \frac{\dot{E}_m}{R_1 + \frac{R_2 \left( -j \frac{1}{\omega C} \right)}{R_2 - j \frac{1}{\omega C}}} = \frac{8e^{j90^\circ}}{2 + \frac{4 \cdot (-j10)}{4 - j10}} = 1,423e^{j104,2^\circ} \text{ A};$$

$$i_{1\text{пр}}(t) = 1,423 \cdot \sin(10^6 t + 104,2^\circ) \text{ A.}$$

Находим постоянную интегрирования, используя начальные условия:

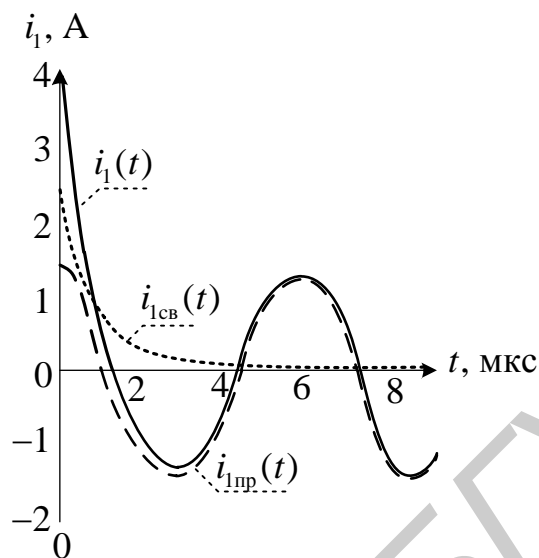
$$i_1(0_+) = i_{1\text{пр}}(0_+) + i_{1\text{св}}(0_+);$$

$$4 = 1,423 \cdot \sin 104,2^\circ + A = 1,38 + A,$$

откуда  $A = 4 - 1,38 = 2,62$ .

Окончательно  $i_1(t) = 1,423 \cdot \sin(10^6 t + 104,2^\circ) + 2,62 \cdot e^{-0,75 \cdot 10^6 t}$  А.

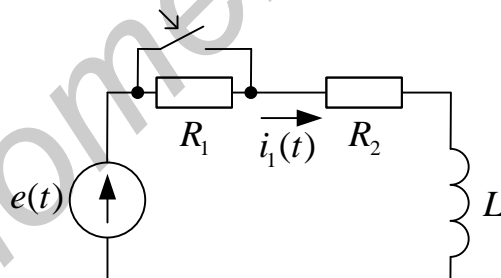
График тока показан на следующем рисунке:



### Пример 7

Дано:  $R_1 = R_2 = 2$  Ом,  $\omega L = 3$  Ом,  $e(t) = 127 \sin(\omega t - 50^\circ)$  В,  $\omega = 314$  с<sup>-1</sup>.

Определить:  $i_1(t)$ .



**Решение:**

1. Рассчитаем независимые начальные условия по схеме до коммутации:

$$\dot{I}_{Lm-} = \frac{\dot{E}_m}{R_1 + R_2 + j\omega L} = \frac{127e^{-j50^\circ}}{4 + 3j} = 25,4e^{-j86^\circ 50'} \text{ А.}$$

Запишем мгновенное значение тока до коммутации:

$$i_L(t)_- = 25,4 \sin(\omega t - 86^\circ 50') \text{ А.}$$

В момент включения ( $t = 0$ ):

$$i_L(0_-) = i_L(0) = 25,4 \sin(-86^\circ 50') = -25,35 \text{ A.}$$

2. Составим характеристическое уравнение и определим его корень.

Характеристическое уравнение составляется для схемы после коммутации в которой источник ЭДС заменяем на короткозамкнутый участок, а сопротивление катушки принимаем равным  $pL$ :

$$pL + R_2 = 0, \Rightarrow p = -\frac{R_2}{L} = -210 \text{ c}^{-1}.$$

3. Рассчитаем принужденное значение искомого тока  $i(t)$  (принужденную составляющую) в схеме после коммутации:

$$\dot{i}_{Lmnp} = \frac{\dot{E}_m}{R_2 + j\omega L} = \frac{127 e^{-j50^\circ}}{2 + 3j} = 35 e^{-j106^\circ 20'} \text{ A.}$$

Запишем мгновенное значение принужденной составляющей:

$$i_{Lnp}(t) = 35 \sin(\omega t - 106^\circ 20').$$

В момент коммутации принужденная составляющая равна

$$i_{Lnp}(0) = 35 \sin(-106^\circ 20') = -33,8 \text{ A.}$$

4. Определяем постоянные интегрирования.

Так как корень характеристического уравнения получился действительным и отрицательным, общий вид решения будет выглядеть следующим образом:

$$i_L(t) = i_{Lnp}(t) + A e^{pt}.$$

В момент времени  $t = 0$  предыдущее уравнение примет следующий вид:

$$i_L(0) = i_{Lnp}(0) + A.$$

Подставив в последнее уравнение ранее найденные значения, получим

$$-25,35 = -33,8 + A,$$

откуда  $A = 8,45$ .

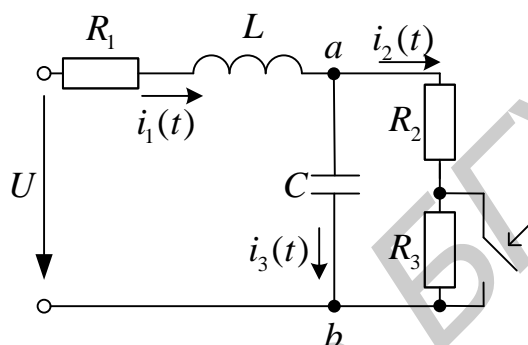
$$\text{Ответ: } i(t) = 35 \sin(\omega t - 106^\circ 20') + 8,45 \cdot e^{-210t}.$$

### 3.5.2. Расчет переходных процессов в цепях 2-го порядка

#### Пример 8

Цепь, включенная на постоянное напряжение  $U = 30$  В, находится в установившемся режиме. В момент  $t = 0$  ключ замыкается.

Определить законы изменения всех токов, напряжений на индуктивности и емкости, если параметры цепи имеют следующие значения:  $R_1 = 100$  Ом;  $R_2 = R_3 = 50$  Ом;  $L = 0,02$  Гн;  $C = 1$  мкФ.



#### Решение:

Для решения этой задачи можно рассмотреть два варианта последовательности расчета цепи.

#### Первый вариант:

1) определим  $U(t)$ ;

2) ток  $i_3(t)$ , протекающий через емкость, связан с напряжением  $U_C(t)$  со-

отношением  $i_3(t) = C \frac{dU_C}{dt}$ ;

3) определим  $i_2(t) = \frac{U_{ab}}{R_2} = \frac{U_C(t)}{R_2}$ ;

4) ток  $i_1(t)$  определяем по первому закону Кирхгофа:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t);$$

5) напряжение на индуктивности связано с током  $i_1$  соотношением

$$U_L(t) = L \frac{di_1(t)}{dt}.$$

Второй вариант:

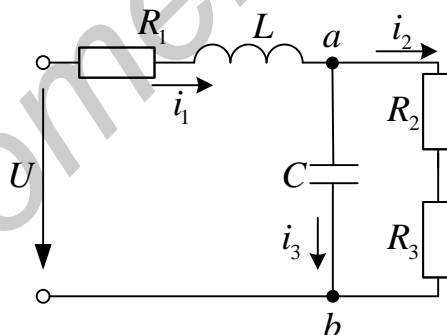
- 1) определяем  $i_1(t)$ ;
- 2)  $U_L(t) = L \frac{di_1(t)}{dt}$ ;
- 3)  $U_{R_1} = i_1(t) \cdot R_1$ ;
- 4)  $U_{ab}(t) = U - U_{R_1}(t) - U_L(t)$ ;
- 5)  $i_3(t) = C \frac{U_{ab}(t)}{dt}$ ;
- 6)  $i_2(t) = \frac{U_{ab}(t)}{R_2}$ .

Рассмотрим второй вариант

1. Определяем независимые начальные условия. В данной схеме имеем два независимых начальных условия, основанных на законах коммутации:

$$i_1(0_-) = i_1(0_+) \text{ и } U_C(0_-) = U_C(0_+).$$

Схема до коммутации имеет вид



До коммутации  $R_3$  не было закорочено, поэтому

$$i_1(0_-) = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30}{100 + 50 + 50} = 0,15 \text{ A};$$

$$i_1(0_-) = i_2(0_-) = 0,15 \text{ A}.$$

Следовательно,  $i_1(0_+) = 0,15 \text{ A}$ .

Напряжение на конденсаторе до коммутации

$$U_C(0_-) = i_2(0_-) \cdot (R_2 + R_3) = 0,15 \cdot (50 + 50) = 15 \text{ В};$$

$$U_C(0_-) = U_C(0_+) = 15 \text{ В}.$$

2. Определяем зависимые начальные условия с помощью законов Кирхгофа, составленных для послекоммутационной схемы в момент времени  $t = 0$ :

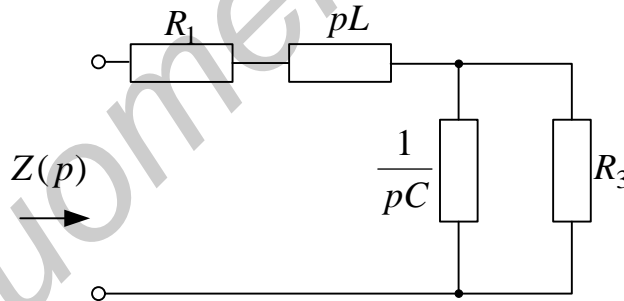
$$\begin{cases} i_1(0) = i_2(0) + i_3(0), \\ U = i_1(0) \cdot R_1 + U_L(0) + U_C(0), \\ 0 = i_2(0) \cdot R_2 - U_2(0). \end{cases}$$

Подставляя в эти уравнения независимые начальные условия и заданные параметры, получим

$$\begin{cases} 0,15 = i_2(0) + i_3(0), \\ 30 = 0,15 \cdot 100 + U_L(0) + 15, \\ 0 = i_2(0) \cdot 50 - 15. \end{cases}$$

Откуда  $i_2(0) = 0,3 \text{ А}$ ;  $i_3(0) = -0,15 \text{ А}$ ;  $U_L(0) = 0$ .

3. Рисуем схему для записи характеристического уравнения:



$$Z(p) = R_1 + pL + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{p^2 \cdot C \cdot L \cdot R^2 + p(C \cdot R_1 \cdot R_2 + L) + R_1 + R_2}{p \cdot C \cdot R_2 + 1} = 0;$$

или

$$p^2 + p \cdot \frac{C \cdot R_1 \cdot R_2 + L}{L \cdot C \cdot R^2} + \frac{R_1 + R_2}{L \cdot C \cdot R_2} = 0.$$

Подставляем числовые значения:



$$p^2 + 25 \cdot 10^3 p + 150 \cdot 10^6 = 0,$$

откуда  $p_1 = -10 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ ;  $p_2 = -15 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ .

Так как корни получились вещественными и разными, то переходный процесс будет аperiodическим. Свободная составляющая имеет вид

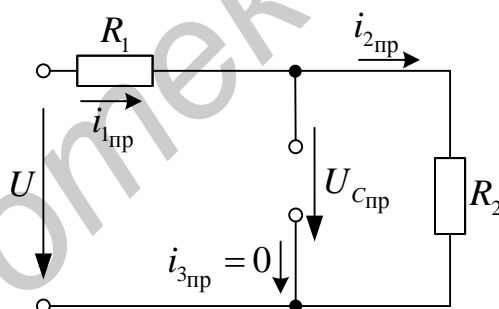
$$i_{1\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

4. Определим принужденные составляющие  $i_{1\text{пр}}$  и  $U_{C\text{пр}}$ .

Схема для расчета принужденных составляющих изображена ниже. На схеме учтено, что в цепи постоянного тока индуктивность обладает нулевым, а конденсатор – бесконечным сопротивлением.

$$i_{1\text{пр}} = i_{2\text{пр}} = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{30}{100 + 50} = 0,2 \text{ А},$$

$$U_{C\text{пр}} = i_{2\text{пр}} \cdot R_2 = 0,2 \cdot 50 = 10 \text{ В}.$$



Полный переходной ток имеет вид

$$i_1(t) = i_{\text{пр}} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = 0,2 + A_1 e^{-10 \cdot 10^3 t} + A_2 e^{-15 \cdot 10^3 t}.$$

5. Определяем постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ . Для их определения нам надо два уравнения. Вторым уравнением является производная уравнения  $i_1(t)$ . Если продифференцировать уравнение и домножить его на  $L$ , то мы получим закон изменения напряжения на индуктивности. Таким образом, система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} i_1(t) = 0,2 + A_1 e^{-10 \cdot 10^3 t} + A_2 e^{-15 \cdot 10^3 t}, \\ U_L(t) = L \frac{di_1}{dt} = -20 \cdot (10 \cdot 10^3 \cdot A_1 e^{-10 \cdot 10^3 t} + 15 \cdot 10^3 \cdot A_2 e^{-15 \cdot 10^3 t}). \end{cases}$$

6. Записываем систему для момента времени  $t=0$ , подставляя в нее найденные выше начальные условия:

$$\begin{cases} 0,15 = 0,2 + A_1 + A_2, \\ 0 = -20 \cdot (10 \cdot 10^3 \cdot A_1 + 15 \cdot 10^3 \cdot A_2). \end{cases}$$

Откуда  $A_1 = -0,15 \text{ A}$ ,  $A_2 = 0,1 \text{ A}$ .

7. Окончательные выражения для  $i_1(t)$  и  $U_L(t)$ :

$$i_1(t) = 0,2 - 0,15e^{-10 \cdot 10^3 t} + 0,1e^{-15 \cdot 10^3 t} \text{ A},$$

$$U_L(t) = 30e^{-10 \cdot 10^3 t} - 30e^{-15 \cdot 10^3 t} \text{ В}.$$

Напряжение на емкости:

$$U_C(t) = U - i_1(t) \cdot R_1 = U_L(t) = 30 - 20 + 15e^{-10 \cdot 10^3 t} - 10e^{-15 \cdot 10^3 t} - 30e^{-10 \cdot 10^3 t} + 30e^{-15 \cdot 10^3 t} = 10 - 15e^{-10 \cdot 10^3 t} + 20e^{-15 \cdot 10^3 t} \text{ В}.$$

Ток в ветви с емкостью:

$$i_3(t) = C \frac{dU_C}{dt} = 10^{-6} (15 \cdot 10^4 e^{-10 \cdot 10^3 t} - 20 \cdot 1,5 \cdot 10^4 e^{-15 \cdot 10^3 t}) = 0,15e^{-10 \cdot 10^3 t} - 0,3e^{-15 \cdot 10^3 t} \text{ A}.$$

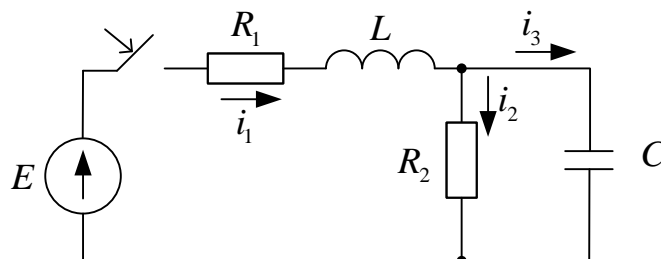
Ток в  $i_2(t)$ :

$$i_2(t) = \frac{U_C(t)}{R_2} = 0,2 - 0,3e^{-10 \cdot 10^3 t} + 0,4e^{-15 \cdot 10^3 t} \text{ A}.$$

### Пример 9

Цепь, изображенная на рисунке, подключается к источнику ЭДС  $E = 30 \text{ В}$ . Параметры цепи:  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,2 \text{ мГн}$ ;  $C = 1 \text{ мкФ}$ .

Найти законы изменения во времени всех токов, напряжений на индуктивности и емкости. Построить графики  $U_C(t)$  и  $i_3(t)$ .



**Решение:**

Для расчета этой задачи можно составить два варианта последовательности расчета цепи.

*Первый вариант:*

1) определяем  $U_C$ ;

2) ток  $i_3(t)$ , протекающий через емкость, связан с напряжением  $U_C$  соотношением  $i_3(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt}$ ;

3) определяем  $i_2(t) = \frac{U_C(t)}{R_2}$ ;

4) ток  $i_1(t)$  определяем по первому закону Кирхгофа:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t);$$

5) напряжение на индуктивности связано с током  $i_1$  соотношением

$$U_L(t) = L \frac{di_1(t)}{dt}.$$

*Второй вариант:*

1) определяем  $i_1(t)$ ;

2)  $U_L = L \frac{di_1(t)}{dt}$ ;

3)  $U_{R_1}(t) = i_1(t) \cdot R_1$ ;

4)  $U_C(t) = E - U_{R_1}(t) - U_L(t)$ ;

$$5) i_3(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt};$$

$$6) i_2(t) = \frac{U_C(t)}{R_2}.$$

Рассмотрим первый вариант последовательности расчета

1. Определяем независимые начальные условия.

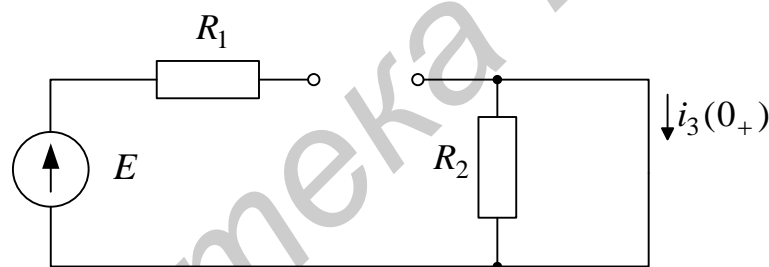
Так как в результате коммутации схема подключается к источнику, то до коммутации  $i_L(0_-) = 0$  и  $U_C(0_-) = 0$ .

Следовательно:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0 \text{ и } U_C(0_-) = U_C(0_+) = 0.$$

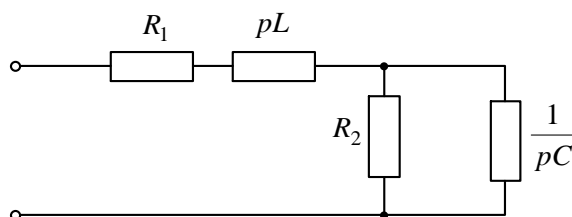
2. Определяем зависимые начальные условия. Для выбранного варианта расчета нам необходимо знать  $i_3(0_+)$ .

Схема для момента времени  $t = 0$  имеет вид



Из рисунка видно, что  $i_3(0_+) = 0$ .

3. Рисуем схему для записи характеристического уравнения:



$$Z(p) = R_1 + pL + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{p^2 \cdot R_2^2 \cdot L \cdot C + p(R_1 R_2 C + L) + R_1 + R_2}{pR_2 C + 1} = 0;$$

$$\text{или } p^2 + \frac{R_1 R_2 C + L}{R_2 LC} \cdot p + \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} = 0.$$

После подстановки цифровых значений получим

$$p^2 + 100 \cdot 10^3 p + 7500 \cdot 10^6 = 0,$$

$$\text{откуда } p_{1,2} = -50 \cdot 10^3 \pm j70,7 \cdot 10^3.$$

$$\text{Обозначим } \delta = 50 \cdot 10^3; \omega_{\text{св}} = 70,7 \cdot 10^3.$$

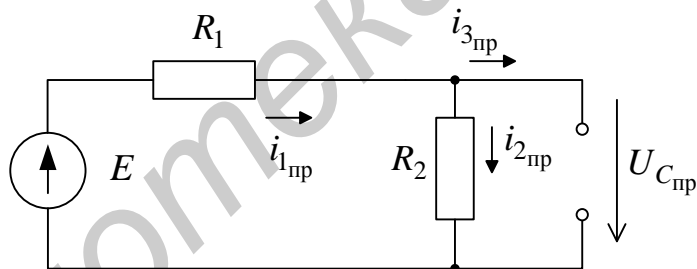
$$\text{Тогда } p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{\text{св}}.$$

Так как корни получились сопряженными комплексными числами, то переходный процесс будет колебательным.

$U_{C_{\text{св}}}$  в общем виде запишется

$$U_{C_{\text{св}}} = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \psi_{\text{св}}).$$

4. Определим принуждающую составляющую  $U_{C_{\text{пр}}}$ .



Из рисунка видно, что  $i_{3\text{пр}} = 0$ :

$$i_{3\text{пр}} = i_{2\text{пр}} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{30}{10 + 20} = 1 \text{ A};$$

$$U_{C_{\text{пр}}} = i_{2\text{пр}} \cdot R_2 = 1 \cdot 20 = 20 \text{ В}.$$

5. Полное переходное напряжение на конденсаторе имеет вид

$$U_C(t) = U_{C_{\text{пр}}} + U_{C_{\text{св}}} = 20 + Ae^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \psi_{\text{св}}).$$

Постоянными интегрирования являются  $A$  и начальная фаза свободных колебаний  $\psi_{\text{св}}$ . Для их определения нам надо записать второе уравнение. Для этого дифференцируем уравнение и домножаем его на  $C$ :

$$i_3(t) = C \frac{dU_C}{dt} = C \cdot A \left[ -\delta e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \psi_{\text{св}}) + e^{-\delta t} \omega_{\text{св}} \cdot \cos(\omega_{\text{св}} t + \psi_{\text{св}}) \right] =$$

$$= -C \cdot A e^{-\delta t} [\delta \cdot \sin(\omega_{\text{св}} t + \psi_{\text{св}}) - \omega_{\text{св}} \cdot \cos(\omega_{\text{св}} t + \psi_{\text{св}})].$$

Из курса тригонометрии известно, что

$$A \cdot \sin x \pm B \cdot \cos x = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin(x \pm \varphi),$$

где  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A}$ .

Используя тригонометрическое тождество, запишем

$$i_3(t) = -C \cdot A \sqrt{\delta^2 + \omega^2} \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \psi_{\text{св}} - \varphi),$$

где  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_{\text{св}}}{\delta} = \frac{70,7 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^3} = 1,41$ ;  $\varphi = 54^\circ$ .

Система уравнений для определения постоянных интегрирования имеет вид

$$\begin{cases} U_C(t) = U_{C_{\text{пр}}} + U_{C_{\text{св}}} = 20 + A e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \psi_{\text{св}}), \\ i_3(t) = -C \cdot A \cdot \sqrt{\delta^2 + \omega^2} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_{\text{св}} t + \psi_{\text{св}} - \varphi). \end{cases}$$

6. Записываем систему для момента времени  $t = 0$ , подставляем в начальные условия:

$$\begin{cases} 0 = 20 + A \cdot \sin \psi_{\text{св}}, \\ 0 = -C \cdot A \cdot \sqrt{\delta^2 + \omega^2} \cdot \sin(\psi_{\text{св}} - \varphi). \end{cases}$$

Откуда  $\sin(\psi_{\text{св}} - \varphi) = 0$  и  $\psi_{\text{св}} = \varphi = 54^\circ$ .

$$A = -\frac{20}{\sin \psi} = \frac{20}{\sin 54^\circ} = -24,5 \text{ В.}$$

7. Окончательные выражения для  $U_C(t)$  и  $i_3(t)$  имеют вид

$$U_C(t) = 20 - 24,5e^{-50 \cdot 10^3 t} \sin(70,7 \cdot 10^3 t + 54^\circ) \text{ В;}$$

$$i_3(t) = 2,12e^{-50 \cdot 10^3 t} \sin(70,7 \cdot 10^3 t) \text{ А.}$$

Ток в сопротивлении  $R_2$ :

$$i_2(t) = \frac{U_C(t)}{R_2} = 1 - 1,225e^{-50 \cdot 10^3 t} \sin(70,7 \cdot 10^3 t + 54^\circ) \text{ А.}$$

Ток  $i_1(t)$  в неразветвленной части цепи:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) = 1 - 1,225 \cdot e^{-50 \cdot 10^3 t} \sin(70,7 \cdot 10^3 t + 54^\circ) + 2,12 \cdot e^{-50 \cdot 10^3 t} \times \\ \times \sin(70,7 \cdot 10^3 t) = 1 + e^{-50 \cdot 10^3 t} \cdot \left[ 2,12 \cdot \sin \omega_{\text{св}} t - 1,225 \cdot \sin(\omega_{\text{св}} t + 54^\circ) \right],$$

где  $\omega_{\text{св}} = 70,7 \cdot 10^3$ .

Сложить две синусоиды одинаковой частоты можно с помощью комплексов:

$$2,12 \cdot \sin \omega t = 2,12e^{j0};$$

$$1,225 \cdot \sin(\omega t + 54^\circ) = 1,225e^{j54}.$$

Тогда  $2,12e^{j0} - 1,225e^{j54} = 2,12 - 0,71j = 1,73e^{-j35} = 1,73 \cdot \sin(\omega t - 35^\circ)$ .

Следовательно,  $i_1(t) = 1 + 1,73e^{-50 \cdot 10^3 t} \sin(70,7 \cdot 10^3 t - 35^\circ) \text{ А.}$

Напряжение на индуктивности:

$$U_L(t) = L \frac{di_1}{dt} = 0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1,73 \cdot [-50 \cdot 10^3 e^{-50 \cdot 10^3 t} \sin(70,7 \cdot 10^3 t - 35^\circ) + e^{-50 \cdot 10^3 t} \times \\ \times 70,7 \cdot 10^3 \cdot \cos(70,7 \cdot 10^3 t - 35^\circ)] = -0,346e^{-50 \cdot 10^3 t} \cdot [50 \cdot \sin(70,7 \cdot 10^3 t - 35^\circ) - \\ - 70,7 \sin(70,7 \cdot 10^3 t + 54^\circ)] = 30e^{-50 \cdot 10^3 t} \sin(70,7 \cdot 10^3 t + 90^\circ) \text{ В.}$$

#### 4. Операторный метод расчета переходных процессов

При расчете переходных процессов операторным методом ток и напряжение на любом участке цепи, являющиеся функциями времени  $t$  (называемые оригиналами), замещают соответствующими функциями комплексного переменного  $P$  (называемые изображениями).

Эта замена осуществляется на основании прямого преобразования Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt.$$

Условно соответствие изображения  $F(p)$  и временной функции  $f(t)$  записывают

$$f(t) \cdot \overset{\cdot}{=} F(p).$$

Говорят  $f(t)$  – оригинал изображения  $F(p)$ . Временные функции (оригиналы) изображают малыми буквами:

$$\left. \begin{array}{l} i(t) \\ u(t) \\ e(t) \end{array} \right\} \text{– оригиналы.}$$

Изображения обозначают большими буквами:

$$\left. \begin{array}{l} I(p) \\ U(p) \\ E(p) \end{array} \right\} \text{– изображения.}$$

Нахождение оригиналов по заданным изображениям называют *обратным преобразованием Лапласа*.

##### 4.1. Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме

Одним из свойств преобразования Лапласа является то, что при переходе от оригиналов к изображениям не нарушаются алгебраические равенства, установленные для оригиналов.

В частности, для теории цепей существенно, что при переходе к изображениям сохраняются законы Ома и Кирхгофа электрических цепей.

В активном сопротивлении  $R$  по закону Ома:

$$U(t) = i(t) \cdot R.$$



После перехода к изображениям получаем закон Ома в операторной форме:

$$U(p) = I(p) \cdot R. \quad (4.1)$$

Для изображений токов, напряжений и ЭДС цепи выполняются законы Кирхгофа. Первый закон Кирхгофа в операторной форме – алгебраическая сумма изображений токов, сходящихся в узле электрической цепи, равна нулю:

$$\sum I(p) = 0. \quad (4.2)$$

Второй закон Кирхгофа в операторной форме – в замкнутом контуре алгебраическая сумма изображений напряжений равна алгебраической сумме изображений ЭДС с учетом независимых начальных условий:

$$\sum U(p) = \sum E(p) \pm Li_L(0) \pm \frac{U_C(0)}{p}. \quad (4.3)$$

## 4.2. Операторные схемы замещения

### 4.2.1. Операторная схема замещения емкости

Если известно изображение  $F(p)$  функции оригинала  $f(t)$ , то изображение интеграла оригинала во времени определяется следующей формулой, называемой формулой или теоремой интегрирования:

$$\int_0^t f(t) dt = \frac{F(p)}{p}. \quad (4.4)$$

1. Если емкость к начальному моменту времени  $t = 0$  не заряжена, то ее напряжение

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt.$$

Согласно теореме интегрирования изображения напряжения

$$U(p) = \frac{1}{pC} \cdot I(p). \quad (4.5)$$

Вместо интегрального соотношения для оригиналов мы пришли к алгебраическому выражению (4.5) для изображений. Изображения напряжения и тока связаны законом Ома, если в качестве сопротивления рассматривать величину

$$Z_C(p) = \frac{1}{pC},$$

где  $\frac{1}{pC}$  – операторное сопротивление емкости.

Операторная схема замещения показана на рисунке (4.1, б):

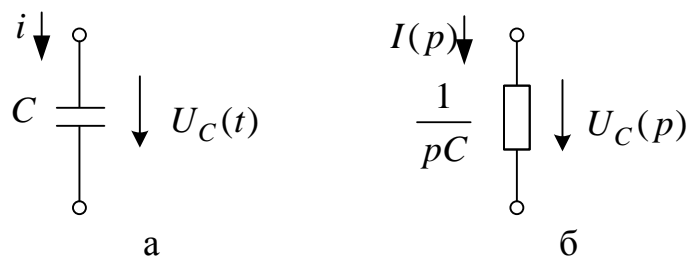


Рис. 4.1

Если емкость к моменту времени  $t = 0$  заряжена до напряжения  $U_c(0_-)$ , то напряжение на емкости равно

$$U_c(t) = U_c(0_-) + \frac{1}{c} \int_0^t i dt.$$

Используя теорему интегрирования и изображения постоянной, перейдем от последнего равенства к изображению  $U_c(p)$ :

$$U_c(p) = \frac{U_c(0_-)}{p} + \frac{1}{pC} \cdot I(p). \quad (4.6)$$

Изображение напряжения на конденсаторе помимо омической составляющей, пропорциональной операторному сопротивлению емкости  $Z_c(p) = \frac{1}{pC}$  и ее изображению тока  $I(p)$ , содержит не зависящее от тока слагаемое  $\frac{U_c(0_-)}{p}$ , которое на схеме замещения может быть представлено как источник напряжения.

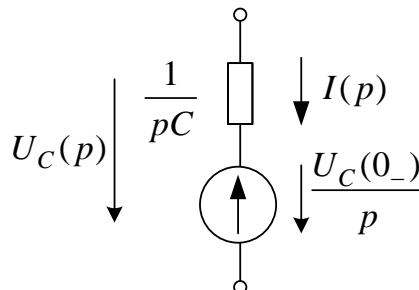


Рис. 4.2

### 4.2.2. Схема замещения индуктивности

Если известно изображение  $F(p)$  временной функции  $f(t)$ , то изображение производной последней

$$\frac{df}{dt} = pF(p) - f(0_-), \quad (4.7)$$

где  $f(0_-)$  – начальное значение временной функции.

Ток и напряжение на индуктивности связаны дифференциальным соотношением

$$U_L(t) = L \frac{di}{dt}.$$

Используя теорему дифференцирования, перейдем к изображению

$$U_L(p) = pL \cdot I(p) - L \cdot i(0_-), \quad (4.8)$$

где  $i(0_-)$  – начальное значение тока индуктивности, соответствующее выражению (4.7).

Операторная схема замещения показана на рис. 4.3.

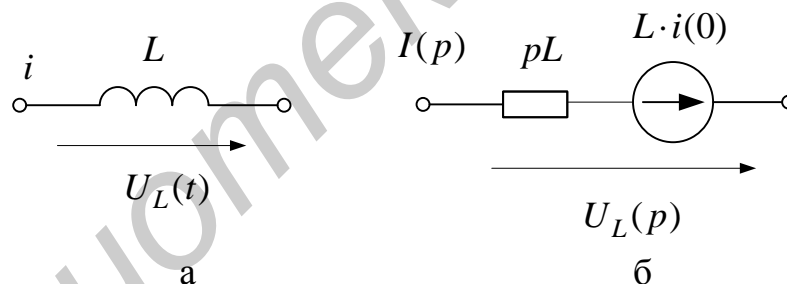


Рис. 4.3

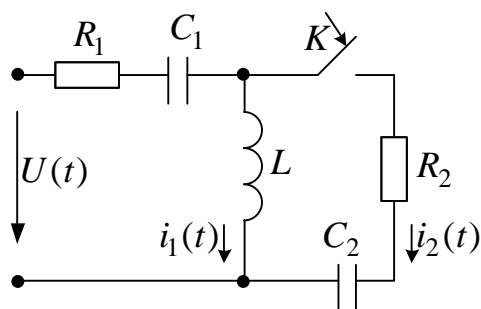
Здесь индуктивность представлена операторным сопротивлением  $pL$  и источником напряжения  $L \cdot i_l(0_-)$ , направленным по току, чтобы учесть минус в выражении (4.8).

Источники ЭДС  $\frac{U_c(0)}{p}$  и  $L \cdot i_l(0_-)$  называются внутренними ЭДС. Они обусловлены запасом энергии магнитного и электрического полей конденсатора и катушки соответственно.

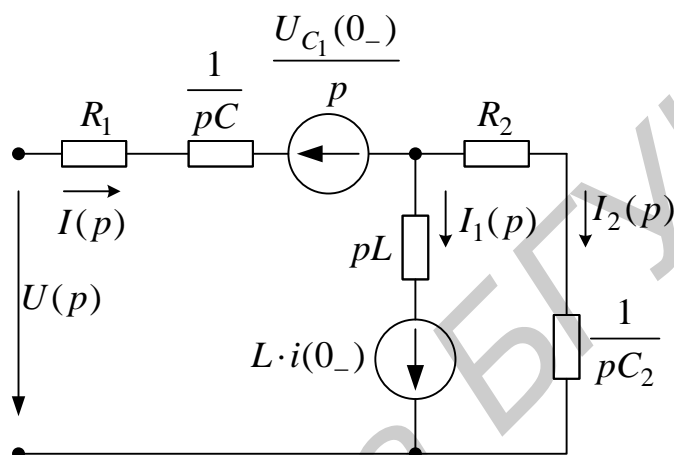
В схеме с нулевыми начальными условиями эти ЭДС отсутствуют.

#### Пример построения операторной схемы замещения

Задана схема. Коммутация происходит в результате замыкания ключа  $K$ . Составить операторную схему замещения.



а



б

Рис. 4.4

До коммутации под действием входного переменного напряжения по ветви  $R_1 - C_1 - L$  протекал ток, отличный от нуля. На конденсаторе  $C_1$  действовало напряжение, также отличное от нуля, т. е.

$$U_{C_1}(0_-) = U_{C_1}(0_+) \neq 0; \quad i_1(0_-) = i_1(0_+) \neq 0.$$

Следовательно, в операторной схеме замещения будут присутствовать операторные ЭДС  $\frac{U_{C_1}(0)}{p}$  и  $L \cdot i_1(0)$ .

### 4.3. Алгоритм расчета переходных процессов операторным методом

1. Задаются положительными направлениями тока в цепи и составляют операторную схему замещения.

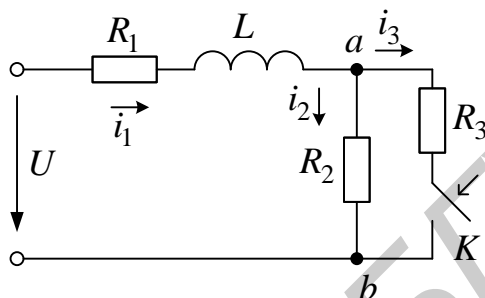
2. Рассчитывают операторную схему замещения одним из известных методов расчета цепей постоянного и переменного тока: с помощью законов Кирхгофа, методом контурных токов, методом узловых потенциалов, методом эквивалентного генератора (и т. д.) и находят изображения искомых токов или напряжений  $I_L(p)$ ,  $U_C(p)$  и т. д.

3. Определяют по найденным изображениям оригиналы, т. е.  $i_L(t)$ ;  $U_c(t)$  и т. д., либо с помощью таблицы, связывающие оригиналы с их изображениями, либо используя теорему разложения.

4. Строят графики для иллюстрации найденных результатов, получив окончательные математические выражения искомых величин.

#### 4.4. Примеры решения задач операторным методом

##### Пример 1



Цепь, включенная на постоянное напряжение  $U = 60$  В, находится в установившемся режиме. Параметры цепи:  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 60$  Ом,  $R_3 = 30$  Ом,  $L = 20$  мГн.

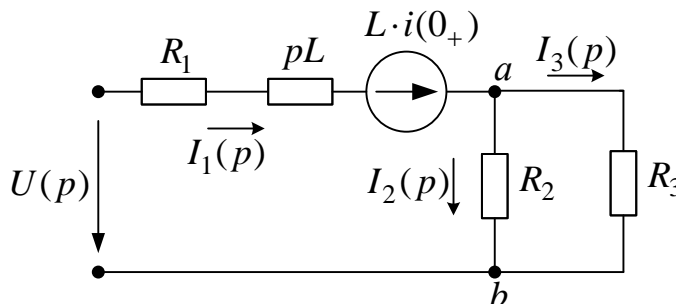
В момент  $t = 0$  ключ  $K$  замыкается. Определить значения всех токов, напряжений на индуктивности и построить их графики. Задачу решить операторным методом.

##### Решение:

1. Определим ток  $i_1(0_-)$  до коммутации:

$$i_1(0_-) = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{60}{20 + 60} = 0,75 \text{ (A)}.$$

Операторная схема замещения изображена на рисунке.



2. Применим метод двух узлов и определим изображение напряжения между узлами  $a$  и  $b$ :

$$\begin{aligned}
 U_{ab}(p) &= \frac{\sum E(p) \cdot Y(p)}{\sum Y(p)} = \frac{\left[ \frac{U}{p} + L \cdot i_1(0_+) \right] \frac{1}{R_1 + pL}}{\frac{1}{R_1 + pL} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \\
 &= \frac{U \cdot R_2 \cdot R_3}{p(R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1 + pL(R_2 + R_3))} + \\
 &+ \frac{L \cdot i_1(0_+) \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1 + pL(R_2 + R_3)} = \frac{108 \cdot 10^3}{p(3600 + 3,6p)} + \frac{54}{3600 + 3,6p} = \\
 &= F_1(p) + F_2(p),
 \end{aligned}$$

где  $F_1(p) = \frac{108 \cdot 10^3}{p(3600 + 3,6p)} \stackrel{\cdot}{=} f_1(t)$ ;  $F_2(p) = \frac{54}{3600 + 3,6p} \stackrel{\cdot}{=} f_2(t)$ .

Оригиналы  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  определим, используя таблицу литературных источников. Для этого приведем выражения  $F_1(p)$  и  $F_2(p)$  к табличному виду:

$$F_1(p) = \frac{108}{3,6} \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{p(10^3 + p)} = 30 \cdot (1 - e^{-10^3 t}) \stackrel{\cdot}{=} f_1(t);$$

$$F_2(p) = \frac{54}{3,6} \cdot \frac{1}{p(10^3 + p)} = 15e^{-10^3 t} \stackrel{\cdot}{=} f_2(t),$$

тогда  $U_{ab}(t) = f_1(t) + f_2(t) = 30(1 - e^{-10^3 t}) + 15e^{-10^3 t} = 30 - 15 \cdot 10^{-3t}$  (В).

Токи  $i_2(t)$  и  $i_3(t)$  определим по закону Ома, а ток  $i_1(t)$  – по первому закону Кирхгофа:

$$i_2(t) = \frac{U_{ab}(t)}{R_2} = \frac{30 - 15 \cdot e^{-10^3 t}}{60} = 0,5 - 0,25 \cdot e^{-10^3 t} \text{ (А)};$$

$$i_3(t) = \frac{U_{ab}(t)}{R_3} = \frac{30 - 15 \cdot e^{-10^3 t}}{30} = 1 - 0,5 \cdot e^{-10^3 t} \text{ (А)};$$

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) = 0,5 - 0,25 \cdot e^{-10^3 t} + 1 - 0,5 \cdot e^{-10^3 t} = 1,5 - 0,75 \cdot e^{-10^3 t} \text{ (А)};$$

$$U_L = 0,04 \cdot 0,75 \cdot 10^3 \cdot e^{-10^3 t} = 30 \cdot e^{-10^3 t} \text{ (В)}.$$

## 5. Расчет переходных процессов с помощью интеграла Дюамеля

Интеграл Дюамеля применяют для расчета переходного процесса (выходного сигнала) в линейной пассивной электрической цепи с нулевыми начальными условиями при воздействии на нее напряжения  $U(t)$ , имеющего произвольную аналитическую или кусочно-аналитическую форму (рис. 5.1)

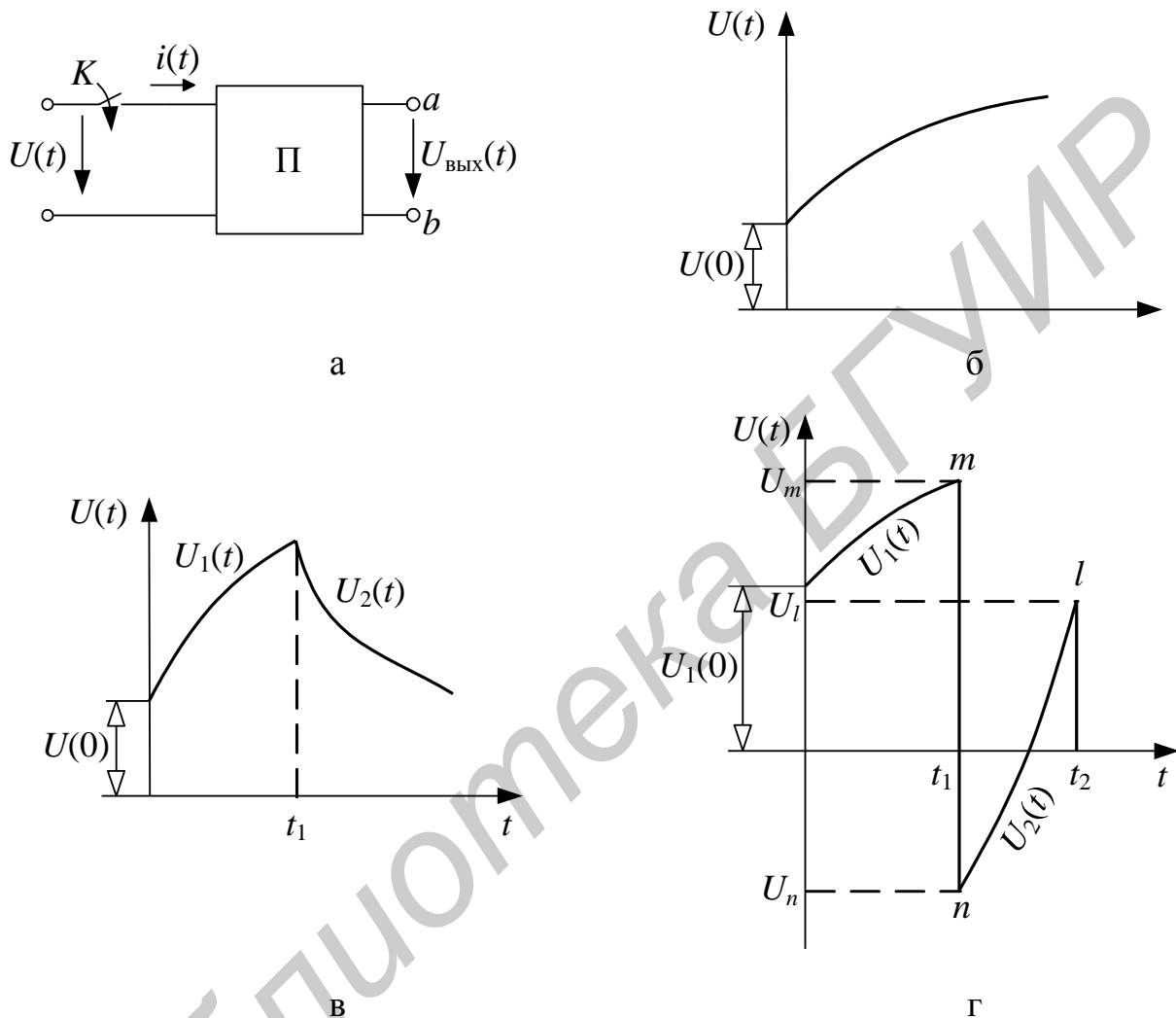


Рис. 5.1

Применение интеграла Дюамеля требует знания выражений для переходной характеристики цепи и входного воздействия (сигнала)  $f_{\text{вх}}(t)$ .

### 5.1. Расчет переходных характеристик цепи

Переходной характеристикой цепи называют реакцию цепи с нулевыми начальными условиями на единичное воздействие, т. е. на входной сигнал единичной величины.

Поскольку воздействие и реакция могут быть током или напряжением, то возможны четыре их сочетания. Различают переходную проводимость  $g(t)$ ,

переходное сопротивление  $z(t)$  и переходные характеристики передачи по току  $-h_i(t)$  и по напряжению  $-h_u(t)$ .

Переходная характеристика цепи совпадает с переходным током или напряжением при подключении цепи к источнику постоянного напряжения (тока) единичной величины.

**Пример:** В цепи заданы  $R$  и  $L$ . Определить переходную проводимость  $g(t)$  и переходные функции по напряжению на участках с резистором и индуктивностью:  $h_{U_R}(t)$ ,  $h_{U_L}(t)$ .

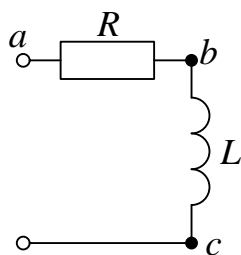


Рис. 5.2

Известно, что при подключении такой цепи на постоянное напряжение  $U$  ток переходного режима определяется соотношением

$$i(t) = \frac{U}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Напряжение на активном сопротивлении и на индуктивности определяют выражениями

$$U_R(t) = U \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right);$$

$$U_L(t) = U e^{-\frac{R}{L}t}.$$

тогда

$$g(t) = i(t)|_{U=1} = \frac{1}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right);$$

$$h_{U_R}(t) = U_R(t)|_{U=1} = \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right);$$

$$h_{U_L}(t) = U_L(t)|_{U=1} = e^{-\frac{R}{L}t}.$$



## 5.2. Интеграл Дюамеля

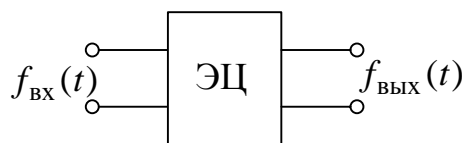


Рис. 5.3

Таблица 5.1

$f_{\text{ВХ}}(t)$	$f_{\text{ВЫХ}}(t)$	$h(t)$	$f_{\text{ВЫХ}}(t) = f_{\text{ВХ}}(0)h(t) + \int_0^t f'_{\text{ВХ}}(\tau)h(t-\tau)d\tau$
$u$	$u$	$h_u(t)$ – переходная характеристика по напряжению	$u_{\text{ВЫХ}}(t) = u_{\text{ВХ}}(0)h_u(t) + \int_0^t u'_{\text{ВХ}}(\tau)h_u(t-\tau)d\tau$
$i$	$i$	$h_i(t)$ – переходная характеристика по току	$i_{\text{ВЫХ}}(t) = i_{\text{ВХ}}(0)h_i(t) + \int_0^t i'_{\text{ВХ}}(\tau)h_i(t-\tau)d\tau$
$u$	$i$	$g(t)$ – переходная проводимость	$i_{\text{ВЫХ}}(t) = u_{\text{ВХ}}(0)g(t) + \int_0^t u'_{\text{ВХ}}(\tau)g(t-\tau)d\tau$
$i$	$u$	$z(t)$ – переходное сопротивление	$u_{\text{ВЫХ}}(t) = i_{\text{ВХ}}(0)z(t) + \int_0^t i'_{\text{ВХ}}(\tau)z(t-\tau)d\tau$

Если напряжение, воздействующее на линейную пассивную цепь, является непрерывно изменяющейся функцией времени (рис. 5.1, б), то ток в любой ветви определяется формулой (5.1), а напряжение на отдельном участке формулой (5.2):

$$i(t) = U(0)y(t) + \int_0^t U'(\tau)y(t-\tau)d\tau, \quad (5.1)$$

$$U_{ab}(t) = U(0) \cdot h_u(t) + \int_0^t U'(\tau)h'_u(t-\tau)d\tau, \quad (5.2)$$

где  $U(0)$  – входное напряжение в момент включения;

$U'(\tau)$  – производная по времени от входного напряжения, в которой  $t$  заменено на  $\tau$ ;

$y(t), h_U(t)$  – переходные проводимость и функция по напряжению соответственно;

$g(t-\tau), h_U(t-\tau)$  – переходные проводимость и функция по напряжению, в которых  $t$  заменено на  $t-\tau$ .

В зависимости от вида входного и выходного сигналов (см. табл. 5.1) выбирается соответствующая формула записи интеграла Дюамеля.

Если воздействующее на цепь напряжение изменяется хотя и непрерывно, но имеет разные аналитические выражения на отдельных интервалах времени (рис. 5.1, в), то ток и напряжение на каком-либо участке цепи в переходном режиме находятся для каждого интервала отдельно. Так, если воздействующее на цепь напряжение имеет два аналитических выражения  $U_1(t)$  и  $U_2(t)$  (см. рис. 5.1, в), то ток и напряжение на каком-либо участке в переходном режиме будут определяться двумя аналитическими выражениями. Одно из них будет соответствовать первому интервалу времени от 0 до  $t_1$ , когда входное напряжение изменяется по закону  $U_1(t)$ , другое будет соответствовать интервалу времени от  $t_1$  до  $\infty$ , когда входное напряжение изменяется по закону  $U_2(t)$ . В первом интервале времени  $0 \leq t < t_1$  ток в какой-либо ветви и напряжение на каком-либо участке цепи  $ab$  определяются формулами (5.3) и (5.4) соответственно:

$$i_1(t) = U_1(0)g(t) + \int_0^t U_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad (5.3)$$

$$U_{ab1}(t) = U_1(0) \cdot h_u(t) + \int_0^t U_1'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau. \quad (5.4)$$

Во втором интервале времени  $t_1 \leq t < \infty$  ток в этой же ветви и напряжение на этом же участке цепи  $ab$  определяются формулами (5.5), (5.6):

$$i_2(t) = U_1(0)g(t) + \int_0^t U_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau + \int_{t_1}^t U_2'(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad (5.5)$$

$$U_{ab2}(t) = U_1(0) \cdot h_u(t) + \int_0^t U_1'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau + \int_{t_1}^t U_2'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau. \quad (5.6)$$

Следует особое внимание обратить на случай, когда воздействующее на цепь напряжение не только определяется несколькими аналитическими выражениями, но и претерпевает скачки в какие-то моменты времени. Так, если на цепь действует напряжение, имеющее форму, показанную на рис 5.1, г, то время переходного процесса разбивается на три интервала:

- 1) интервал  $0 \leq t < t_1$ , не включая скачка напряжения от  $U_m$  до  $-U_n$ . В этом интервале ток в ветви и напряжение на участке цепи  $ab$  определяется по формулам (5.3) и (5.4);
- 2) второй интервал  $t_1 \leq t < t_2$ , не включая скачка от  $U_l$  до нуля. В этом интервале ток и напряжение в переходном режиме определяются формулами (5.7) и (5.8):

$$i_2(t) = U_1(0)g(t) + \int_0^{t_1} U_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau - (U_m + U_n)g(t-t_1) + \int_{t_1}^t U_2'(\tau)g(t-\tau)d\tau; \quad (5.7)$$

$$U_{ab_2}(t) = U_1(0) \cdot h_u(t) + \int_0^{t_1} U_1'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau - (U_m + U_n)h_u(t-t_1) + \int_{t_1}^t U_2'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau. \quad (5.8)$$

Примечание. Определенные пределы у интегралов отражают окончание и начало их действия. Переходная характеристика в третьем члене выражения получила смещение на величину  $t_1$ , т. к. определяется реакция цепи для  $t > t_1$ . Во втором интеграле этого смещения вводить не нужно, т. к. оно учтено нижним пределом интегрирования;

Заметим также, что нельзя использовать предыдущий результат расчета, т. к. изменились пределы интегрирования.

- 3) третий интервал  $t_2 \leq t < \infty$ . В этом интервале воздействующее напряжение равно нулю. Ток и напряжение  $U_{ab}$  переходного режима в этом интервале определяются выражениями (5.9) и (5.10):

$$i_2(t) = U_1(0)g(t) + \int_0^{t_1} U_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau - (U_m + U_n)g(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} U_2'(\tau)g(t-\tau)d\tau - U_l g(t-t_2) + 0, \quad (5.9)$$

$$U_{ab_3}(t) = U_1(0) \cdot h_u(t) + \int_0^{t_1} U_1'(\tau) h_u(t - \tau) d\tau - (U_m + U_n) h_u(t - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} U_2'(\tau) h_u(t - \tau) d\tau - U_l h_u(t - t_2) + 0. \quad (5.10)$$

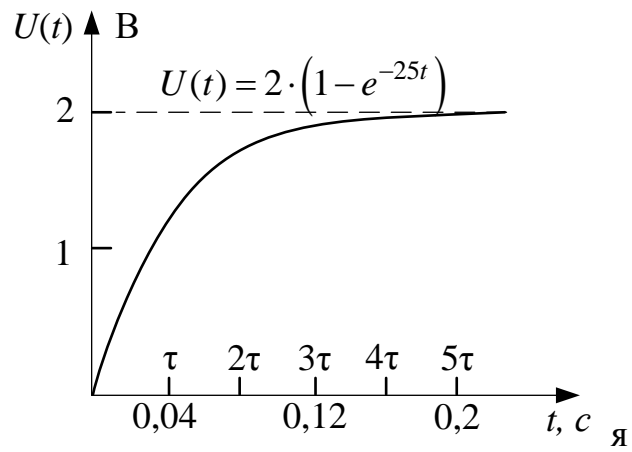
### 5.3. Последовательность расчета переходного процесса с помощью интеграла Дюамеля

1. Рассчитывают необходимые переходные характеристики цепи.
2. Записывают аналитически выражение входного сигнала  $f(t)$  на каждом интервале времени.
3. Определяют формулу интеграла Дюамеля для каждого интервала времени.
4. Записывают необходимые для решения интеграла функции, которые получают путем подстановки  $t = \tau$  или  $t - \tau$  в выражения  $g(t)$ ,  $h(t)$ ,  $h'(t)$ ,  $f(t)$ ,  $f'(t)$ .
5. Получают выражения для расчета выходного сигнала на каждом интервале, приводя их к более простому виду.
6. Делают оценку полученных результатов (верно – неверно).
7. Результаты расчета сводят в таблицу.
8. Строят в масштабе совмещенные графики входного и выходного сигналов (масштабы для сигнала и реакции выбирают так, чтобы графики получались соизмеримыми).

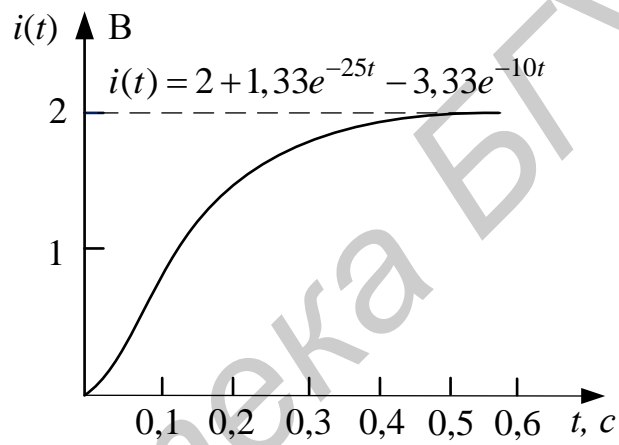
### 5.4. Примеры расчета переходных процессов с помощью интеграла Дюамеля

#### Пример 5.1

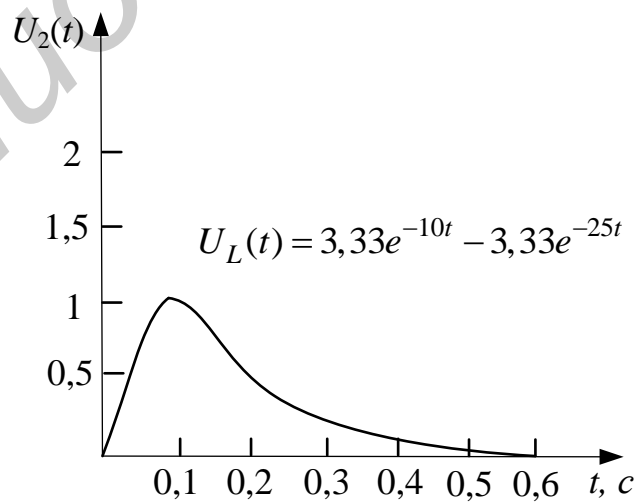
Цепь (рис. 5.2) включается на непрерывно изменяющееся напряжение  $U(t) = 2(1 - e^{-25t})$  В (рис 5.3, а). Параметры цепи:  $R = 10$  Ом;  $L = 0,1$  Гн. Определить ток в цепи и напряжение на индуктивности.



а



б



в

Рис. 5.4

**Решение:**

Применим формулу (5.1). Сначала найдем все величины, входящие в эту формулу.

$$U(0) = 0, \quad g(t) = \frac{1}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad (\text{см. пример 1}). \quad (5.11)$$

Подставляя цифровые значения, получим:

$$g(t) = (1 - e^{-10t}), \quad \text{См}; \quad (5.12)$$

$$g(t - \tau) = (1 - e^{-10(t-\tau)}), \quad \text{См}; \quad (5.13)$$

$$U'(t) = 2 \cdot 25e^{-25t} = 50e^{-25t}, \quad \text{В/с}. \quad (5.14)$$

Подставляя выражения (5.11) – (5.14) в формулу (5.1), получим

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^t 50e^{-25\tau} (1 - e^{10\tau} e^{10\tau}) d\tau = \int_0^t 50e^{-25\tau} d\tau - \int_0^t 50e^{-15\tau} e^{-10\tau} d\tau = \\ &= \left| -\frac{50}{25} e^{-25\tau} \right|_0^t + \left| \frac{50}{25} e^{-10\tau} e^{-15\tau} \right|_0^t = 2 + 1,33e^{-25t} - 3,33e^{-10t} \quad (\text{А}). \end{aligned}$$

График  $i(t)$  показан на рис. 5.3, б.

Для определения  $U_L(t)$  применим формулу (5.2). Найдем величины, входящие в эту формулу:

$$U(0) = 0, \quad k_{U_L}(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \quad (\text{см. пример 1}).$$

Подставим значения:

$$k_{U_L}(t) = e^{-10t}; \quad (5.15)$$

$$k_{U_L}(t - \tau) = e^{-10(t-\tau)}; \quad (5.16)$$

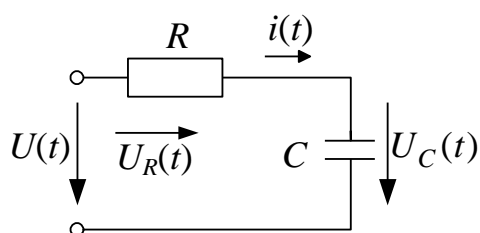
$$U'(t) = 2 \cdot 25e^{-25t} = 50e^{-25t}, \quad \text{В/с} \quad (\text{см. выражение (5.14)}).$$

Подставляем (5.14) – (5.16) в формулу (5.2), получим

$$U_L(t) = \int_0^t 50e^{-25\tau} \cdot e^{-10t} \cdot e^{-10\tau} d\tau = \left| -\frac{50}{15} e^{-10t} e^{-15\tau} \right|_0^t = 3,33e^{-10t} - 3,33e^{-25t} \quad (\text{В}).$$

График  $U_L(t)$  показан на рис. 5.3, в.

### Пример 2



Прямоугольный импульс (высота импульса  $U = 100\text{В}$ , длительность импульса  $t_{II} = 40\text{мс}$ ) (см. рис. 5.4, а) воздействует на цепь, показанную ниже.  $R = 1000\text{Ом}$ ,  $C = 50\text{мкФ}$ . Определить в переходном режиме ток, напряжение на активном сопротивлении и напряжение на емкости.

### Решение:

1) определяем переходные характеристики цепи  $g(t)$ ,  $h_R(t)$ ,  $h_C(t)$ . Известно, что при включении такой цепи на постоянное напряжение ток и напряжения на резисторе и емкости определяются соотношениями:

$$i(t) = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}};$$

$$U_R(t) = U e^{-\frac{t}{RC}};$$

$$U_C(t) = U \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

Тогда

$$g(t) = i(t)|_{U=1} = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}};$$

$$h_{U_R}(t) = U_R(t)|_{U=1} = e^{-\frac{t}{RC}};$$

$$h_{U_C}(t) = U_C(t)|_{U=1} = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}.$$

После подстановки числовых значений получаем:

$$y(t) = 10^{-3} e^{-20t};$$

$$h_{U_R}(t) = e^{-20t};$$

$$h_{U_C}(t) = 1 - e^{-20t};$$

2) время переходного режима разбиваем на два интервала:

Первый интервал –  $0 \leq t < t_H$ , не включая скачка;

Второй интервал –  $t_H \leq t < \infty$ .

Определим ток на первом интервале по формуле (5.3):

$$i_1(t) = U_1(0)g(t) + \int_0^t U_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau,$$

где  $U_1(0) = U$ ,  $U_1'(t) = 0$ , следовательно,  $U_1'(\tau) = 0$ , тогда

$$i_1(t) = \frac{U}{R}e^{-20t} = 0,1e^{-20t}, \text{ А.} \quad (5.17)$$

Определим ток во втором интервале по формуле (5.7):

$$i_2(t) = U_1(0)g(t) + \int_0^{t_H} U_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau - Ug(t-t_H) + 0,$$

$U_1(0)$ ,  $g(t)$ ,  $U_1'(\tau)$  были найдены ранее.

Найдем  $g(t-t_H)$ :

$$g(t-t_H) = \frac{1}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC}(t-t_H)} = 10^{-3} \cdot e^{20t_U} \cdot e^{-20t}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} i_2(t) &= U_1(0) \cdot g(t) - U \cdot (t-t_H) = 100 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-20t} - 100 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-20t_H} \cdot e^{20t_H} = \\ &= 0,1e^{-20t} \cdot (1 - e^{20 \cdot t_H}) = -0,1 \cdot e^{-20t} \cdot (1 - e^{20 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}) = 0,1 \cdot e^{-20t} \cdot (-1,225) = \\ &= -0,1225e^{-20t}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

где  $e^{0,8} = 2,225$ .

Для построения графика определим значения тока в моменты  $t = 0$ ,  $t = t_H$  и  $t \rightarrow \infty$ .

При  $t = 0$  следует:  $i_1(0) = 0,1 \text{ А}$ .



При  $t = t_H$  из (5.17) следует:  $i_1(t_H) = 0,1e^{-0,8} = 0,1 \cdot 0,45 = 0,045$  А.

При  $t = t_H$  из (5.18) следует:  $i_2(t_H) = -0,1225e^{-0,8} = -0,055$  А.

При  $t \rightarrow \infty$ ,  $i_2(t) \rightarrow \infty$ .

Результаты расчета сведены в табл. 5.2. График  $i(t)$  показан на рис. 5.4, б.

Как видно из графика, в момент включения импульса значение тока изменяется скачком от 0 до 0,1 А, во время длительности прямоугольного импульса ток убывает по закону экспоненты и достигает к концу импульса 0,045 А, в момент выключения импульса ( $t = t_H$ ) значение тока изменяется скачком от 0,045 А до  $-0,055$  А и во втором интервале времени ( $t > t_H$ ) ток по абсолютному значению уменьшается до нуля по закону экспоненты;

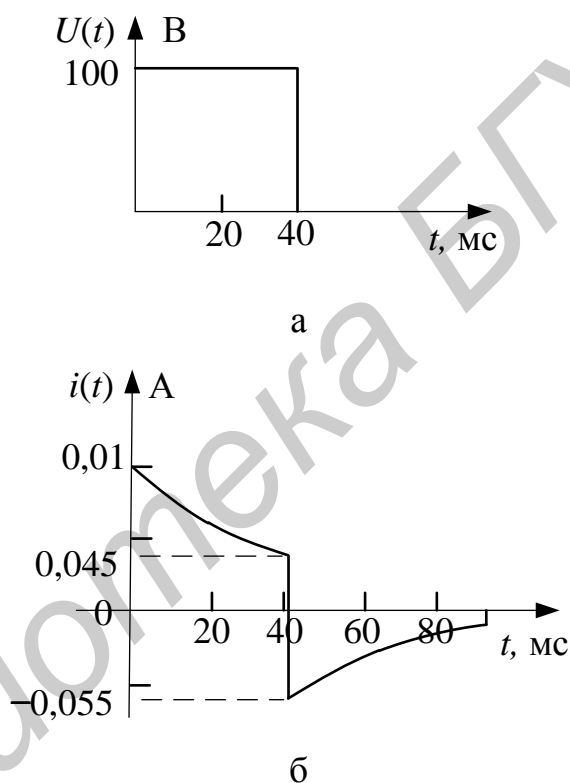
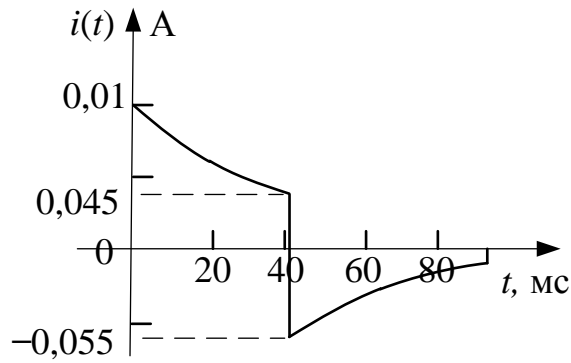
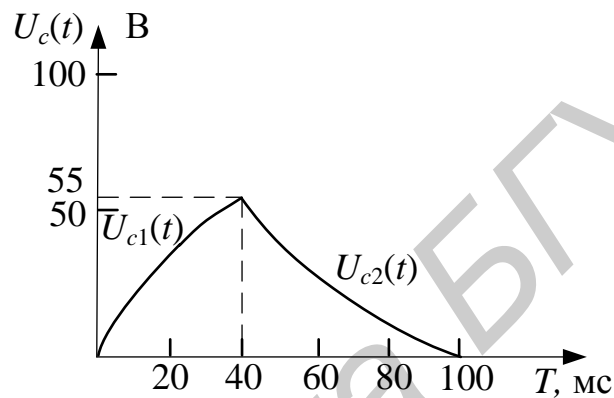


Рис. 5.4



В



Г

Рис. 5.4

3) напряжение на резисторе будет изменяться по тому же аналитическому закону. Умножив выражения  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$  на  $R$ , получим:

$$U_{R_1}(t) = i_{R_1}(t) \cdot R = 100e^{-20t}, \text{ В}$$

$$U_{R_2}(t) = i_{R_2}(t) \cdot R = -122,5e^{-20t}, \text{ В}$$

Значения  $U_R(t)$  при  $t=0$ ,  $t=t_H$ ,  $t \rightarrow \infty$  сведены в таблицу 5.2. График  $U_R(t)$  показан на рис. 5.4, в;

4) определим напряжение на емкости с помощью интеграла Дюамеля.

Рассмотрим первый интервал. Используем формулу (5.4):

$$U_{C_1}(t) = U_1(0) \cdot h_{uC}(t) + \int_0^t U_1'(\tau) h_{uC}(t - \tau) d\tau = 100 \cdot (1 - e^{-20t}), \text{ В}$$

Во втором интервале напряжение на емкости определяется соотношением (5.6):

$$U_{C_2}(t) = U_1(0) \cdot h_{uC}(t) + \int_0^{t_{II}} U_1'(\tau) h_{uC}(t-\tau) d\tau + U \cdot h_{uC}(t-t_U) + 0,$$

где  $h_{uC}(t-t_U) = 1 - e^{-\frac{1}{RC}(t-t_U)} = 1 - e^{-\frac{t_{II}}{RC}} e^{-\frac{t}{RC}} = 1 - e^{-20t_{II}} e^{-20t}$ .

Тогда

$$\begin{aligned} U_{C_2}(t) &= 100 \cdot (1 - e^{-20t}) - 100 \cdot (1 - e^{-20t_{II}} e^{-20t}) = -100e^{-20t} + 100e^{-20t_{II}} e^{-20t} = \\ &= 100e^{-20t} (e^{-20t_{II}} - 1) = 100e^{-20t} (e^{-20 \cdot 40 \cdot 10^{-3}} - 1) = 122,5e^{-20t} \text{ В.} \end{aligned}$$

Значения  $U_C(t)$  при  $t=0$ ,  $t=t_{II}$ ,  $t \rightarrow \infty$  даны в табл. 5.2. График  $U_C(t)$  показан на рис. 5.4, г. Из графика видно, что напряжение на емкости изменяется непрерывно при включении и выключении импульса, что подтверждается вторым законом коммутации.

Из рис. 5.4 видно также, что в любой момент времени справедливо уравнение второго закона Кирхгофа, т. е.  $U_R(t) + U_C(t) = U(t)$ .

Таблица 5.2

Значения функции	$t=0$	$t=t_U$	$t \rightarrow \infty$
$i_1(t) = 0,1e^{-20t}$ , А	0,1	0,045	–
$i_2(t) = -0,1225e^{-20t}$ , А	–	-0,055	0
$U_{R_1}(t) = 100e^{-20t}$ , В	100	45	–
$U_{R_2}(t) = -122,5e^{-20t}$ , В	–	-55	0
$U_{C_1}(t) = 100(1 - e^{-20t})$ , В	0	55	–
$U_{C_2}(t) = 122,5e^{-20t}$ , В	–	55	0

### Пример 3

На вход цепи (рис. 5.5) подан сигнал напряжения, закон изменения которого задан графиком на рис. 5.6. Параметры цепи:  $R = R_1 = R_2 = 10 \text{ кОм}$ ;  $C = 1 \text{ мкФ}$ ;  $m_U = 1 \text{ В/дел}$ ;  $m_t = 0,5 \text{ мс/дел}$ . Найти закон изменения напряжения на емкости  $U_C(t)$  и тока в сопротивлении  $R$   $i_1(t)$ .

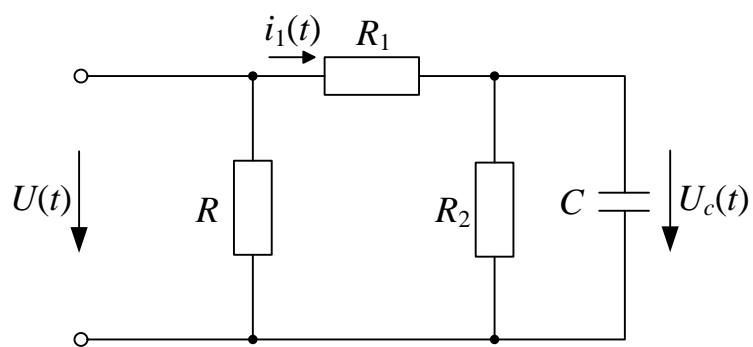


Рис. 5.5

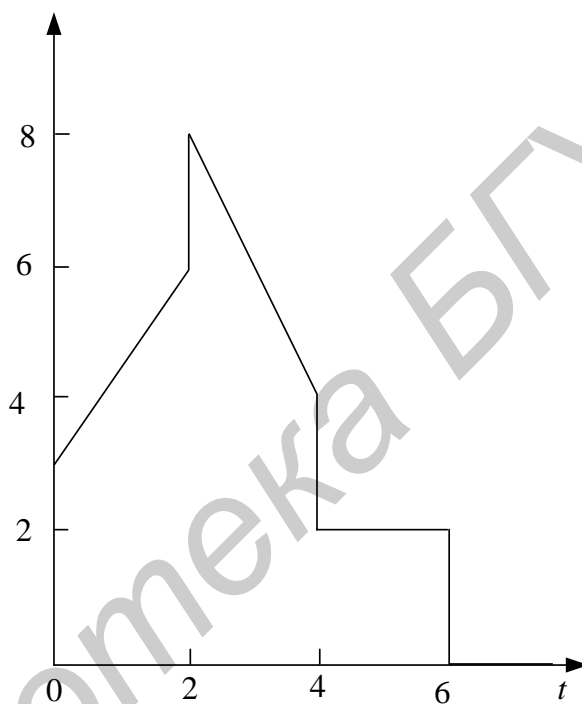


Рис. 5.6

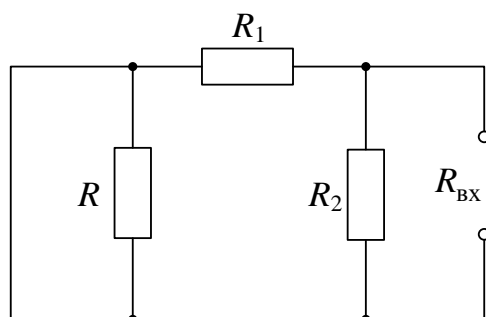


Рис. 5.7

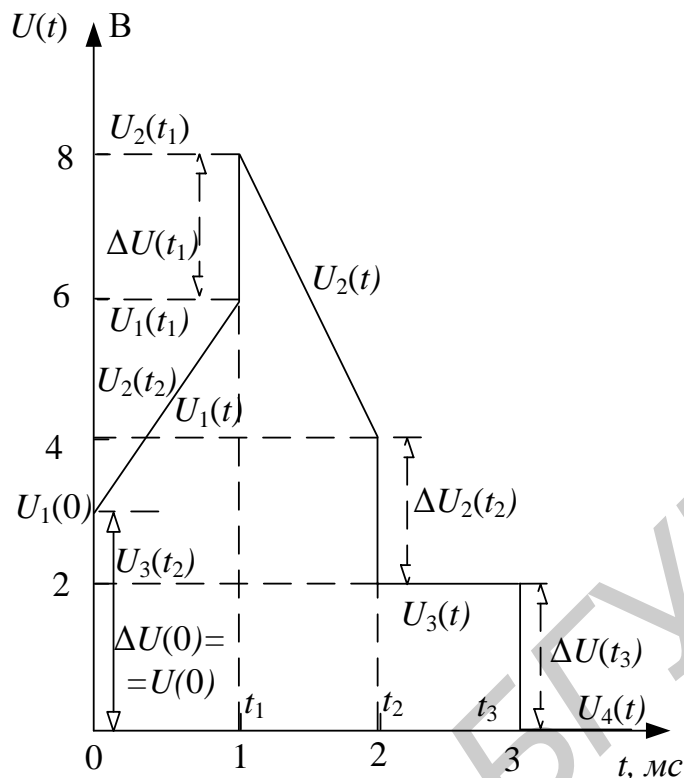


Рис. 5.8

**Решение:**

1. Определим переходные характеристики:

1.1. Для  $U_C(t)$  – переходной коэффициент передачи по напряжению:

$$h_{U_C}(t) = U_C(t)|_{U=1B} = U_{Cпр} + Ae^{pt}.$$

Далее по схеме (см. рис. 5.5):

$$U_{Cпр} = \frac{E}{R_1 + R_2} \cdot R_2 = 0,5 \text{ В.}$$

Постоянную интегрирования найдем из выражения

$$U_C(0) = U_{Cпр} + A.$$

Начальные условия нулевые, поэтому

$$A = 0 - U_{Cпр}(0) = -0,5 \text{ В.}$$

Постоянная затухания экспоненты

$$p = -\frac{1}{\tau} = -\frac{1}{R_3 C} = -0,2 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1},$$

где  $R_3 = R_{\text{вх}}$  определяют по схеме (рис 5.7):

$$R_{\text{вх}} = R_{\text{экв}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 5 \text{ кОм.}$$

Величина сопротивления  $R$  из-за действия на входе источника напряжения исключается.

Используя результаты расчетов, получим

$$h_{U_C}(t) = 0,5 - 0,5e^{-0,2 \cdot 10^3 t}.$$

1.2. Для тока  $i_1(t)$  определяем переходную проводимость. Проводя аналогичные расчеты, получим

$$y(t) = 0,05 - 0,05e^{-0,2 \cdot 10^3 t} \text{ см.}$$

2. Проведем аналитическое описание входного сигнала.

На рис. 5.6 видно, что сигнал удобно представить четырьмя интервалами.

Обозначим сигнал на каждом из интервалов (I, II, III, IV) как  $U_1(t)$ ,  $U_2(t)$ ,  $U_3(t)$ ,  $U_4(t)$  и учитывая, масштабы  $m_U$  и  $m_t$ , построим график (рис. 5.8).

Проводим описание входного сигнала  $U_{\text{вх}}(t)$ .

Первый интервал  $0 \leq t < t_1$ . На этом интервале  $U_1(t)$  имеет линейную зависимость. Угловым коэффициентом прямой определяем по формуле

$$k = \frac{f(t_n) - f(t_i)}{t_n - t_i},$$

где  $t_i$ ,  $f(t_i)$  – координаты точки начала интервала,  $t_n$ ,  $f(t_n)$  – координаты точки конца интервала.

Для первого интервала получим

$$k_1 = \frac{U_1(t_1) - U_1(0)}{t_1 - 0} = \frac{6 - 3}{1 \cdot 10^{-3} - 0} = 3 \cdot 10^3 \text{ В/с};$$

$$U_1(t) = U_1(0) + k_1 t = 3 + 3 \cdot 10^3 t, \text{ В.}$$

Второй интервал  $t_1 \leq t < t_2$ . На этом интервале  $U_2(t)$  также имеет линейную зависимость.

$$k_2 = \frac{U_2(t_2) - U_2(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{4 - 8}{(2 - 1) \cdot 10^{-3}} = -4 \cdot 10^3 \text{ В/с};$$

$$U_2(t) = U_2(t_1) + k_2(t - t_1) = 8 - 4 \cdot 10^3(t - 10^{-3}) = 12 - 4 \cdot 10^3 t \text{ В.}$$

На третьем и четвертом интервалах  $U_{\text{вх}}(t)$  постоянно. Таким образом,

$$U_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} U_1(t) = 3 + 3 \cdot 10^3 t, & 0 < t < t_1; \\ U_2(t) = 12 - 4 \cdot 10^3 t, & t_1 < t < t_2; \\ U_3(t) = 2, & t_2 < t < t_3; \\ U_4(t) = 0, & t_3 < t < \infty. \end{cases}$$

Входной сигнал имеет скачки на каждом из интервалов. Величину скачков вычисляем по следующей формуле:

$$\Delta f(t_i) = f_n(t_i) - f_{n-1}(t_i).$$

Скачок функции относят к началу интервала. Проведя расчеты, получим:

$$\Delta U(0) = U_1(0) - 0 = U(0) = 3 \text{ В},$$

$$\Delta U(t_1) = U_2(t_1) - U_1(t_1) = 2 \text{ В},$$

$$\Delta U(t_2) = U_3(t_2) - U_2(t_2) = -2 \text{ В},$$

$$\Delta U(t_3) = U_3(t_3) - U_4(t_3) = -2 \text{ В}.$$

3. Запишем необходимые для расчета интеграла функции:

$$h_{U_C}(t - \tau) = 0,5 - 0,5e^{-0,2 \cdot 10^3(t - \tau)},$$

$$h_i(t - \tau) = 0,05 - 0,05e^{-0,2 \cdot 10^3(t - \tau)}.$$

$$U'(\tau) = \begin{cases} U'_1(\tau) = U'_1(t)|_{t=\tau} = 3 \cdot 10^3, & 0 < t < t_1; \\ U'_2(\tau) = U'_2(t)|_{t=\tau} = -0,4 \cdot 10^3, & t_1 < t < t_2; \\ U'_3(\tau) = U'_3(t)|_{t=\tau} = 0, & t_2 < t < t_3; \\ U'_4(\tau) = U'_4(t)|_{t=\tau} = 0, & t_3 < t < \infty. \end{cases}$$

4. Найдем выражения для расчета  $U_C(t)$  на каждом интервале.

Первый интервал:  $U_{C_1}(t)$ ,  $0 \leq t < t_1$ .

$$U_{C_1}(t) = U_1(0) \cdot h_{UC}(t) + \int_0^t U_1'(\tau) \cdot h_{UC}(t - \tau) d\tau = 3 \left( 0,5 - 0,5e^{-0,2 \cdot 10^3 t} \right) +$$

$$+ \int_0^t 3 \cdot 10^3 \left( 0,5 - 0,5e^{-0,2 \cdot 10^3 (t - \tau)} \right) d\tau = 1,5 - 1,5e^{-0,2 \cdot 10^3 t} + 1,5 \cdot 10^3 \int_0^t d\tau -$$

$$- 1,5 \cdot 10^3 e^{-0,2 \cdot 10^3 t} \cdot \int_0^t e^{0,2 \cdot 10^3 \tau} d\tau = -6 + 1,5 \cdot 10^3 t + 6e^{-0,2 \cdot 10^3 t}, \text{ В.}$$

Второй интервал:  $U_{C_2}(t)$ ,  $t_1 \leq t < t_2$ .

$$U_{C_2}(t) = U_1(0) \cdot h_{UC}(t) + \int_0^t U_1'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau + [U_2(t_1) - U_1(t_1)] \cdot h(t - t_1) +$$

$$+ \int_{t_1}^t U_2'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = 16 - 2 \cdot 10^3 t - 16,596e^{-0,2 \cdot 10^3 t}, \text{ В.}$$

Примечание. Нельзя использовать предыдущий результат расчета, т. к. изменились пределы интегрирования.

Третий интервал:  $U_{C_3}(t)$ ,  $t_2 \leq t < t_3$ .

$$U_{C_3}(t) = U_1(0) \cdot h_{UC}(t) + \int_0^t U_1'(\tau) \cdot h_{UC}(t - \tau) d\tau + [U_2(t_1) - U_1(t_1)] \cdot h_{UC}(t - t_1) +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} U_2'(\tau) \cdot h_{UC}(t - \tau) d\tau + [U_3(t_2) - U_2(t_2)] \cdot h_{UC}(t - t_2) + 0 = 1 - 0,1859e^{-0,2 \cdot 10^3 t}, \text{ В.}$$

Четвертый интервал:  $U_{C_4}(t)$ ,  $t_3 \leq t < \infty$ .

$$U_{C_4}(t) = U_1(0) \cdot h_{UC}(t) + \int_0^t U_1'(\tau) \cdot h_{UC}(t - \tau) d\tau + [U_2(t_1) - U_1(t_1)] \cdot h_{UC}(t - t_1) +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} U_2'(\tau) \cdot h_{UC}(t - \tau) d\tau + [U_3(t_2) - U_2(t_2)] \cdot h_{UC}(t - t_2) + 0 +$$

$$+ [U_4(t_3) - U_3(t_3)] \cdot h_{UC}(t - t_3) + 0 = U_{C_3}(t) + \Delta U(t_3) \cdot h_{UC}(t - t_3) =$$

$$= 1,6362e^{-0,2 \cdot 10^3 t}, \text{ В.}$$



На четвертом интервале можно использовать выражение, полученное ранее для третьего интервала.

5. Расчет тока  $i_1(t)$  можно провести способом, аналогичным расчету  $U_C(t)$ . Однако в данном случае целесообразен другой способ.

На рис. 5.5 видно, что

$$i_1(t) = i_2(t) + i_C(t),$$

где  $i_2(t) = \frac{U_C(t)}{R_2}$ ,  $i_C = C \frac{dU_C(t)}{dt}$ .

Результаты расчетов  $U_C(t)$ ,  $i_C(t)$  сведены в табл. 5.3. На рис. 5.9 приведены графики  $U_{\text{вх}}(t)$ ,  $U_C(t)$ ,  $i_C(t)$ .

Таблица 5.3

$t$	$0 \leq t < t_1$	$t_1 \leq t < t_2$	$t_2 \leq t < t_3$	$t_3 \leq t < \infty$
$t, \text{ мс}$	$0 \leq t < 1$	$1 \leq t < 2$	$2 \leq t < 3$	$3 \leq t < \infty$
$U_C(t), \text{ В}$	$-6 + 1,5 \cdot 10^3 t + 6e^{-0,2 \cdot 10^3 t}$	$-16 - 2 \cdot 10^3 t - 16,5959e^{-0,2 \cdot 10^3 t}$	$1 - 0,1859e^{-0,2 \cdot 10^3 t}$	$1,6362e^{-0,2 \cdot 10^3 t}$
$i_1(t), \text{ мА}$	$0,9 + 150t - 0,6e^{-0,2 \cdot 10^3 t}$	$-0,4 - 0,2 \cdot 10^3 t - 1,6595e^{-0,2 \cdot 10^3 t}$	$0,1 - 0,01859e^{-0,2 \cdot 10^3 t}$	$-0,16362e^{-0,2 \cdot 10^3 t}$

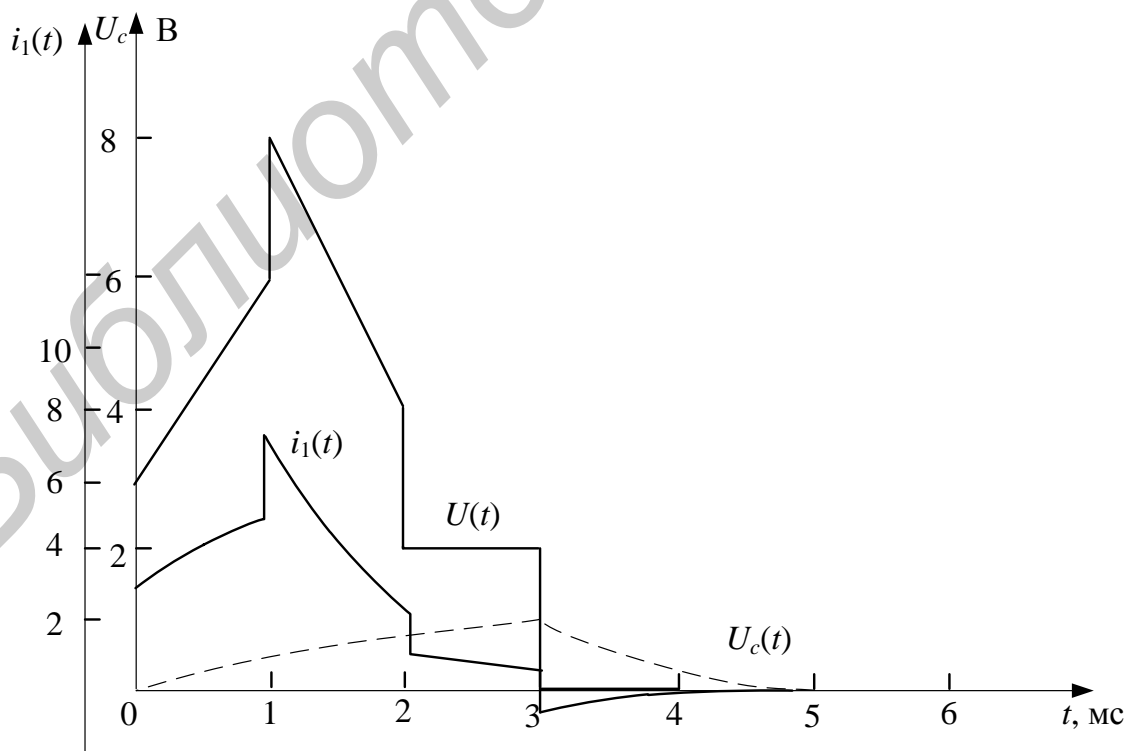


Рис. 5.9

## 6. Задачи для самостоятельного решения

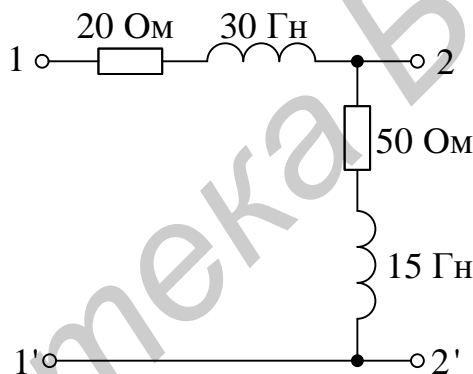
### Задача №1

Определить значения  $A$ -параметров пассивного  $\Pi$ -образного четырехполюсника методом приравнивания коэффициентов и методом холостого хода и короткого замыкания.

$$\text{Ответ: } A = \begin{vmatrix} 1 + \frac{Z_2}{Z_3} & Z_2 \\ \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_1 + Z_3} & 1 + \frac{Z_2}{Z_3} \end{vmatrix}.$$

### Задача №2

Определить  $A$ -,  $Z$ - и  $Y$ -параметры  $\Gamma$ -образной схемы замещения четырехполюсника.



Ответ:

$$A = \begin{vmatrix} 3,26e^{-j10} & 36,1e^{j56} \\ 6,32 \cdot 10^{-2} e^{-j71} & 1 \end{vmatrix};$$

$$Z = \begin{vmatrix} 51,6e^{-j60} & 15,83e^{-j71} \\ 15,83e^{j71} & 15,83e^{-j71} \end{vmatrix};$$

$$Y = \begin{vmatrix} 2,77 \cdot 10^{-3} & 2,77 \cdot 10^{-2} e^{j123} \\ 2,77 \cdot 10^{-2} e^{-j123} & 9,03 \cdot 10^{-2} e^{-j66,5} \end{vmatrix}.$$

### Задача №3

Для схемы предыдущей задачи определить характеристические сопротивления  $Z_{C1}$  и  $Z_{C2}$  двумя способами:

- 1) через сопротивления холостого хода и короткого замыкания;
- 2) используя  $A$ -параметры.

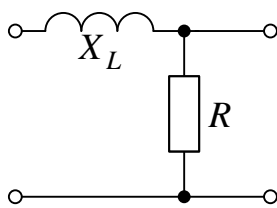
**Ответ:**  $Z_{C_1} = 39,054 + j38,408$  ,  $Z_{C_2} = 30,201 + j16,389$

#### Задача №4

$A$ -параметры четырехполюсника  $A_{11} = A_{22} = 0,208 + j12$  и  $A_{12} = A_{21} = 0,24e^{j150}$ . Определить характеристическую постоянную передачи  $g$ .

**Ответ:**  $g = \ln 2,49 + j1,57$ .

#### Задача №5

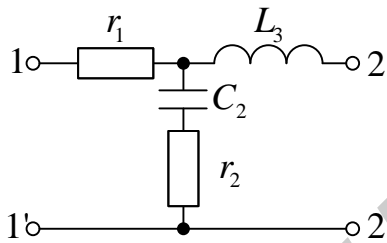


**Дано:**  $X_L = 3$  Ом,  $R = 3$  Ом.

1. Определить  $A$ -параметры четырехполюсника,  $Z_{1c}$  и  $Z_{2c}$ .
2. Начертить электрическую схему четырехполюсника, у которого  $A_{11} = A_{22}$ .

**Ответ:**  $A_{11} = 0,3(3) + j0,3(3)$ ;  $A_{21} = 1$ ;  $A_{12} = 3$ ;  
 $A_{22} = 0,3(3)$ ;  $Z_{C_1} = 1,365 + j3,296$ ;  $Z_{C_2} = 2,331 + j0,965$ .

#### Задача №6



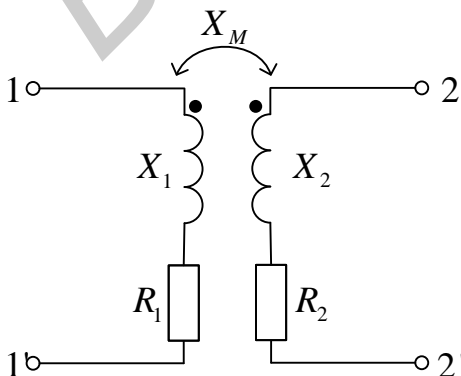
**Дано:**

$r_1 = 3$  Ом;  
 $r_2 = 5$  Ом;  
 $X_{C_2} = 5$  Ом;  
 $X_{L_3} = 5$  Ом.

Определите  $A$ -параметры четырехполюсника.

**Ответ:**  $A_{11} = 1,3 + j0,3$ ;  $A_{21} = 0,1 + j0,1$ ;  $A_{12} = 1,5 + j6,5$ ;  $A_{22} = 0,5 + j0,5$ .  
 $A_{21} = 1$ ;

#### Задача №7



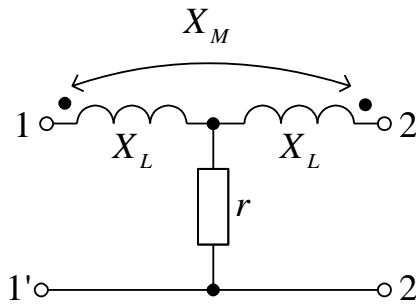
**Дано:**

$R_1 = 10$  Ом;  
 $X_1 = 60$  Ом;  
 $R_2 = 8$  Ом;  
 $X_2 = 40$  Ом;  
 $X_M = 30$  Ом.

Определите A-параметры четырехполюсника.

**Ответ:**  $Z_{11} = 10 + j60 \text{ Ом}$ ;  $Z_{22} = 8 + j40 \text{ Ом}$ ;  $Z_{12} = j30 \text{ Ом}$ ;  $Z_{21} = j30 \text{ Ом}$ .

### Задача №8



**Дано:**

$$r = 10 \text{ Ом};$$

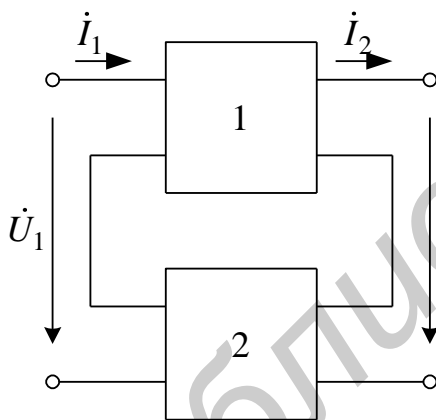
$$X_L = 20 \text{ Ом};$$

$$X_M = 5 \text{ Ом}.$$

Определите Z-параметры четырехполюсника.

**Ответ:**  $Z_{11} = Z_{22} = 10 + j20 \text{ Ом}$ ,  $Z_{12} = Z_{21} = 10 + j5 \text{ Ом}$ .

### Задача №9



Последовательно соединены два одинаковых четырехполюсника с параметрами:

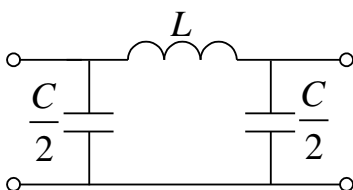
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0,5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Известны токи:  $I_1 = 2 \text{ А}$ ;  $I_2 = 1 \text{ А}$ .

Определить напряжения  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{U}_2$ .

**Ответ:**  $\dot{U}_1 = 12 \text{ В}$ ,  $\dot{U}_2 = 4 \text{ В}$ .

### Задача №10



Для фильтра определить частоту среза  $\omega_C$ ; коэффициент затухания и коэффициент фазы для  $\omega_1 = 5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega_2 = 2 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ ,  $\frac{C}{2} = 1 \text{ мкФ}$ ;  $L = 20 \text{ мГн}$ .

**Ответ:**

1)  $\omega_C = 10^4 \text{ сек}^{-1}$ ;

2) Для  $\omega_1 = 5 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$ ;  $a = 0$ ;  $b = 60^\circ$ ;

3) Для  $\omega_2 = 2 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$ ;  $a = 2,6 \text{ Нп}$ ;  $b = 180^\circ$ .

### **Задача №11**

Определить емкость конденсаторов ВЧ  $T$ -фильтра, если полоса пропускания лежит в пределах от  $f = 12 \cdot 10^3 \text{ Гц}$ , до  $f = \infty$ ;  $L = 12 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$ .

**Ответ:** 3,67 нФ.

### **Задача №12**

Определить индуктивность катушки и емкость каждого конденсатора НЧ  $\Pi$ -образного фильтра, если граничная частота  $f_C = 25 \text{ кГц}$ ; входное сопротивление фильтра в полосе пропускания при согласованной нагрузке должно быть не меньше 800 Ом. Определить коэффициент затухания на частоте 50 кГц.

**Ответ:** 10,2 мГн;  $7,96 \cdot 10^{-3} \text{ пФ}$ ;  $a = 2,63 \text{ Нп}$ .

### **Задача №13**

$\Pi$ -образный ВЧ фильтр типа  $k$  имеет параметры  $L = 20 \text{ мГн}$ ;  $C = 2 \text{ мкФ}$ .

Определить полосу пропускания фильтра и постоянную передачи при  $\omega = 1250 \text{ с}^{-1}$ . При напряжении на входе 100 В и согласованной нагрузке найти выходной ток, если  $\omega = 5000 \text{ с}^{-1}$ .

**Ответ:**  $[2500 \text{ с} \div \infty]$ ;  $g = 2,64 - j3,14$ ;  $\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ А}$ .

### **Задача №14**

Из двух конденсаторов емкости  $4 \cdot 10^3 \text{ пФ}$  каждый и катушки с индуктивностью  $L = 0,34 \text{ мГн}$  сначала собрали ФНЧ, а затем ФВЧ.

Сравнить граничные частоты этих фильтров, а также коэффициенты затухания на двух частотах: а) 120 кГц; б) 240 кГц при согласованной нагрузке.

**Ответ:** 192 и 96 кГц;

а) 0; 0.

б) 1,4 Нп; 0.

### Задача №15

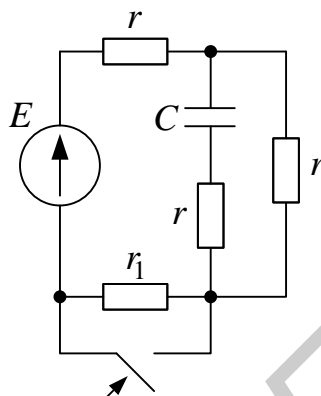
Дано:

$$r = 10 \text{ Ом},$$

$$r_1 = 20 \text{ Ом},$$

$$C = 10 \text{ мкФ},$$

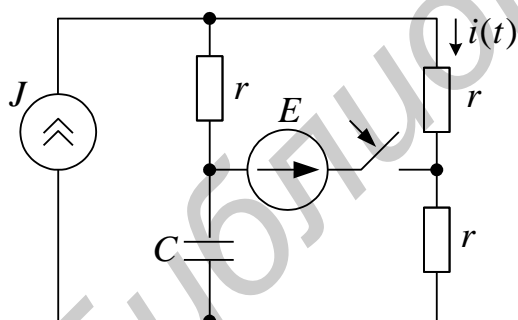
$$E = 100 \text{ В}.$$



Определить закон изменения тока в ветви с источником ЭДС при замыкании ключа.

**Ответ:**  $i(t) = 5 + 0,833e^{-6667t}$ .

### Задача №16



Дано:

$$r = 10 \text{ Ом};$$

$$C = 10 \text{ мкФ};$$

$$E = 100 \text{ В};$$

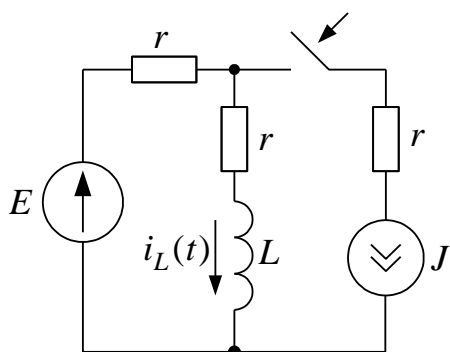
$$J = 1 \text{ А}.$$

Определить закон изменения напряжения на емкости и тока  $i(t)$ .

Определить закон изменения напряже-

**Ответ:**  $i(t) = -4,5; U_C(t) = -90 + 110 e^{-10000t}$ .

### Задача №17



**Дано:**

$$r = 10 \text{ Ом,}$$

$$E = 100 \text{ В,}$$

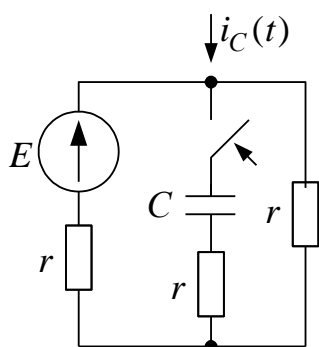
$$J = 1 \text{ А,}$$

$$L = 0,005 \text{ Гн.}$$

Определить закон тока  $i_L(t)$ .

**Ответ:**  $i_L(t) = 4,5 + 0,5e^{-4000t}$ .

### Задача №18



**Дано:**

$$r = 10 \text{ Ом,}$$

$$E = 100 \text{ В,}$$

$$C = 10 \text{ мкФ.}$$

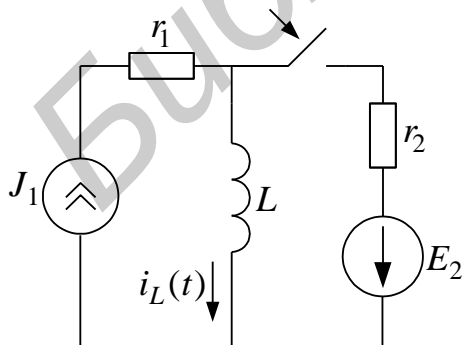
Определить законы изменения тока в емкости и напряжения на ней.

**Ответ:**

$$i_C(t) = 3,33e^{-6667t},$$

$$U_C(t) = 50 - 50e^{-6667t}.$$

### Задача №19



**Дано:**

$$r_1 = 10 \text{ Ом,}$$

$$r_2 = 40 \text{ Ом,}$$

$$E_2 = 100 \text{ В,}$$

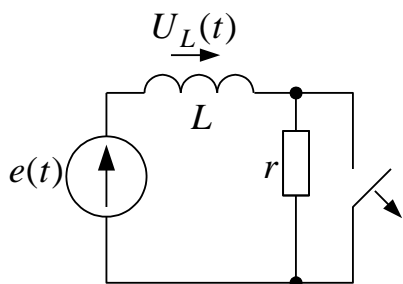
$$J_1 = 1 \text{ А,}$$

$$L = 0,005 \text{ Гн.}$$

Определить закон изменения тока  $i_L(t)$ .

**Ответ:**  $i_L(t) = -1,5 + 2,5e^{-8000t}$ .

### Задача №20



Дано:

$$r = 10 \text{ Ом},$$

$$e(t) = 10 \sin(10^4 t + 90^\circ),$$

$$L = 1 \text{ мГн}.$$

Определить закон изменения тока  $i_L(t)$  и напряжения на индуктивности  $U_L(t)$ .

Ответ:

$$i_L(t) = 0,707 \sin(10^4 t + 45^\circ) + 0,5 e^{-10t},$$

$$U_L(t) = 7,07 \sin(10^4 t + 135^\circ) - 0,005 e^{-10t}.$$

### Задача №21

Схема (рис. 6.1, а) подключается к источнику тока, график изменения которого представлен на рис. 6.1, б. Параметры цепи:  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ;  $C = 0,5 \text{ мкФ}$ ;  $J_m = 5 \text{ А}$ ;  $t_1 = 0,1 \text{ с}$ ;  $t_2 = 0,2 \text{ с}$ . Найти закон изменения тока в ветви с конденсатором и напряжение  $U_2(t)$ . Построить графики.

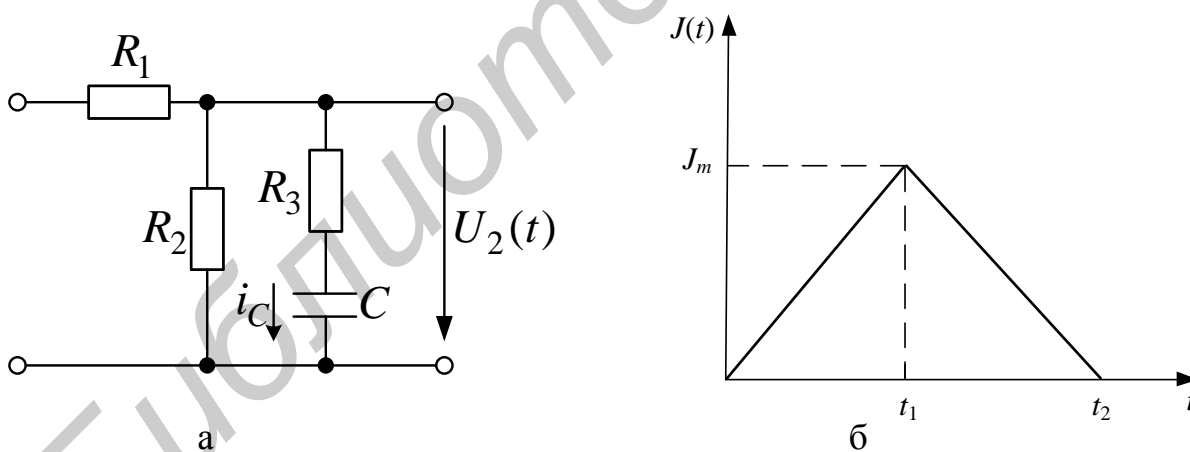
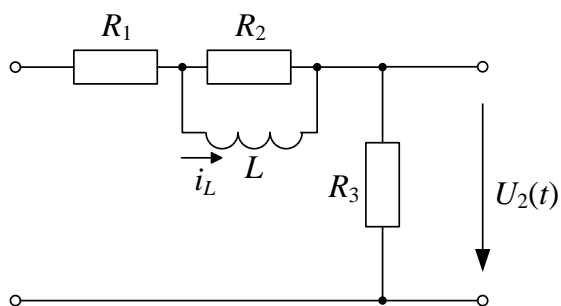


Рис. 6.1

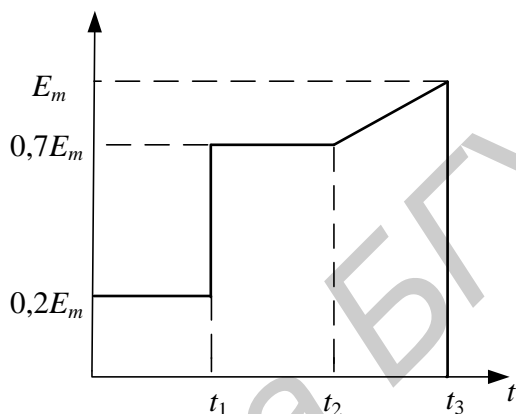
### Задача №22

Схема (рис. 6.2, а) подключается к источнику напряжения. График входного напряжения представлен на рис. 6.2, б. Параметры цепи:  $R_1 = R_2 = 40 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 10 \text{ Ом}$ ;  $L = 10 \text{ мГн}$ ;  $U_m = 80 \text{ В}$ ;  $t_1 = 0,05 \text{ с}$ ;  $t_2 = 0,1 \text{ с}$ ;  $t_3 = 0,2 \text{ с}$ . Определить  $i_L(t)$  и  $U_2(t)$ . Построить графики.





а

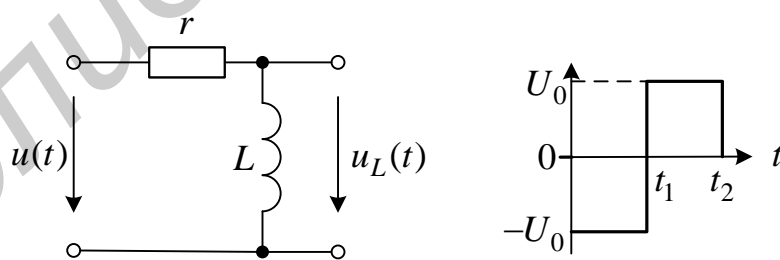


б

Рис. 6.2

### Задача №23

На цепь воздействует импульс напряжения  $u(t)$ :



Дано:

$$r = 100 \text{ Ом},$$

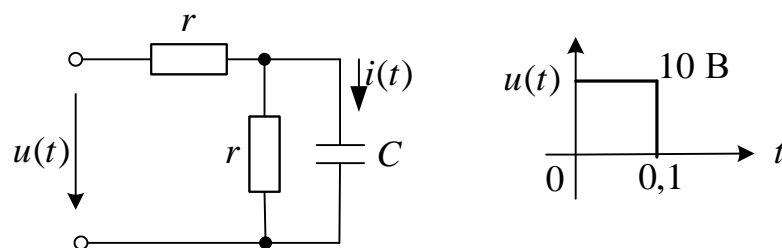
$$L = 0,1 \text{ Гн},$$

$$U_0 = 20 \text{ В},$$

$$t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Определить переходное напряжение  $u_L(t)$  для  $t_1 \geq t \geq 0$ .

**Задача №24**



**Дано:**

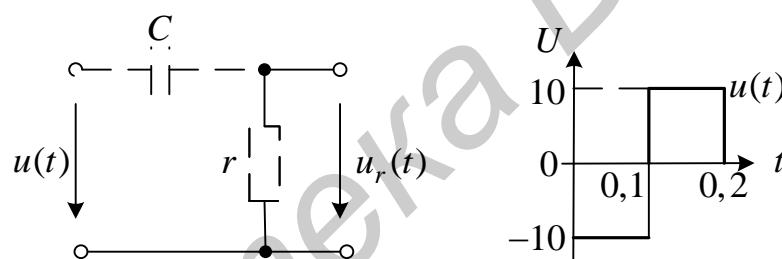
$r = 100 \text{ Ом},$

$C = 100 \text{ мкФ}.$

Определить  $i(t)$ , изобразить его график.

Задачу решить методом интеграла Дюамеля.

**Задача №25**



**Дано:**

$r = 100 \text{ Ом},$

$C = 100 \text{ мкФ}.$

Определить  $u_r(t)$ , построить графики  $u_r(t)$ .

Задачу решить методом интеграла Дюамеля.

## Литература

1. Атабеков, Г. М. Теоретические основы электротехники / Г. М. Атабеков. – СПб. : Лань, 2009.
2. Белецкий, А. Ф. Теория линейных электрических цепей / А. Ф. Белецкий. – СПб. : Лань, 2009.
3. Шебес, М. П. Задачник по теории линейных электрических цепей / М. П. Шебес, М. В. Каблукова. – М. : Высш. шк., 1990.
4. Заездный, А. М. Основы расчетов радиотехнических цепей / А. М. Заездный, И. В. Гуревич. – М. : Связь, 1968.
5. Шилин, Л. Ю. Анализ и элементы синтеза четырехполюсников. Расчет переходных процессов: метод. указания к выполнению контрольных заданий / Л. Ю. Шилин, Н. А. Иваницкая, С. В. Батюков. – Минск : БГУИР, 2002.

Библиотека БГУИР

*Учебное издание*

**Батюков Сергей Валентинович**  
**Иваницкая Наталия Александровна**  
**Шилин Леонид Юрьевич**

## **ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

В 2-х частях

Часть 2

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ**

Редакторы *И. П. Острикова, И. В. Ничипор*  
Корректор *Е. Н. Батурчик*  
Компьютерная правка, оригинал-макет *В. М. Задоя*

Подписано в печать 26.05.2014. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».  
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 5,93. Уч.-изд. л. 5,0. Тираж 100 экз. Заказ 455.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования  
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014, №2/113 от 07.04.2014.  
ЛП № 02330/264 от 14.04.2014.  
2200013, Минск, П. Бровки, 6