

УДК 621.396.96

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ АЛГОРИТМОВ СПЕКТРАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

В.А. КАКОРА, А.В. ГРИНКЕВИЧ

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Республика Беларусь*

*Поступила в редакцию 14 марта 2017*

**Аннотация.** Классические методы оценки спектров дискретизованных детерминированных и случайных процессов обычно основаны на применении процедур, использующих быстрое преобразование Фурье (БПФ). Классический подход к спектральному анализу эффективен в вычислительном отношении и обеспечивает получение асимптотически достоверных оценок для весьма обширного класса сигналов, удовлетворяющих гипотезе стационарности, эргодичности и ограничению выборки большого объема. Ограничения классических спектральных оценок особенно сильно проявляются при анализе коротких записей данных. Однако именно такая ситуация является типичной для большинства практических приложений, поскольку многие измеряемые процессы обладают малой длительностью или же быстро изменяющимися во времени спектрами.

**Ключевые слова:** быстрое преобразование Фурье, спектр, классические методы, спектральные оценки.

**Abstract.** The classical methods of evaluating the energy spectra of discretized deterministic and stochastic processes are generally based on the use of procedures that use the fast Fourier transformation (FFT). The classical approach to spectral analysis is effective in respect of computational and provides asymptotically reliable estimates for very extensive classing signals, satisfying the hypothesis of stationary, ergodicity and limits the large sample volume. Limitations of classical spectral estimates especially apparent when analyzing short data records. However, just such a situation is typical for most practical applications, because many processes have measurable short duration or rapidly changing spectra in time.

**Keywords:** fast Fourier transform, spectrum, classical approach, spectral estimator.

**Doklady BGUIR. 2017, Vol. 105, No. 3, pp. 20–24**

**Mathematical analysis of spectral estimation algorithms resolution**

**V.A. Kakora, A.V. Grinkevich**

### Введение

Методы оценки спектров исследуемых последовательностей данных необходимы для формирования достоверных оценок измерения спектральной плотности мощности. При использовании классических методов спектрального оценивания имеет место эффект маскирования спектральных линий слабых сигналов боковыми лепестками более сильных сигналов. Стандартные методы спектрального оценивания с использованием БПФ основаны на модели представления данных с помощью рядов Фурье, т.е. анализируемый процесс полагается состоящим из некоторого набора гармонически связанных синусоид.

Различия характеристик рассматриваемых методов спектрального анализа можно часто соотнести с тем фактом, насколько хорошо применяемая модель аппроксимирует анализируемый процесс. Различные методы могут давать одинаковые результаты, но какой-либо один из них может требовать меньшего числа параметров модели, а, следовательно, такой метод будет более эффективно отображать этот процесс [1].

В статье рассматриваются коррелограммный метод спектрального оценивания, периодограммный и адаптивный метод спектральной оценки минимума дисперсии (МД). МД

получается посредством минимизации дисперсии процесса на выходе узкополосного фильтра, частотная характеристика которого адаптируется к спектральным компонентам входного процесса на каждой представляющей интерес частоте. В требуемом частотном диапазоне фильтр адаптирует форму своей характеристики к автокорреляционной функции анализируемого процесса. Одним из важных параметров устройства спектрального оценивания является его разрешающая способность, под которой понимается способность разрешать (раздельно измерять) спектральные отклики двух синусоидальных сигналов, близких по частоте и амплитуде. Считается, что спектральные пики разрешены, если провал между ними составляет величину не менее 3 дБ. Наглядная иллюстрация реализации рассмотренных методов спектрального оценивания представлена в интегрированной среде пакета MATLAB.

### Математическое описание исследуемых методов

В коррелограммном методе оценка спектральной плотности мощности (СПМ) представляет собой дискретно-временное преобразование Фурье корреляционной функции:

$$P_{xx}(f) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}[m] \exp(-j2\pi f m T).$$

Оценка СПМ по конечной последовательности значений  $\hat{r}_{xx}[m]$  определяется как

$$\hat{P}_{xx}(f) = T \sum_{m=-L}^L \hat{r}_{xx}[m] \exp(-j2\pi f m T).$$

Оценка является смещенной и несостоятельной. Для нахождения состоятельной оценки СПМ по оценке АКП наиболее часто употребляется метод корреляционных окон [2]. Формальным определением СПМ, основанным на допущении об эргодичности, является следующая дискретно-

временная форма: 
$$P_{xx}(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} \xi \left\{ \frac{1}{(2N+1)T} \left| T \sum_{n=-N}^N x[n] \exp(-j2\pi f n T) \right|^2 \right\}.$$

Пренебрегая операцией вычисления математического ожидания и полагая, что конечное множество данных  $x[0], \dots, x[N-1]$  содержит  $N$  отсчетов, получаем выборочный

спектр 
$$P_{xx}(f) = \frac{T}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi f n T) \right|^2,$$
 который может быть вычислен по конечной

последовательности данных. Это исходная немодифицированная форма периодограммной оценки СПМ [3].

Спектральная оценка минимальной дисперсии (МД) была впервые введена Кейпоном при пространственно-временном анализе многомерных сигналов решеток сейсмических датчиков. Метод получения такой оценки характеризовался Кейпоном как метод спектрального анализа высокого разрешения.

Спектральная МД-оценка определяется выражением  $P_L = T / E^T R^{-1} E^*$ , где  $R^{-1}$  – матрица, обратная корреляционной матрице размером  $(N+1)$  на  $(N+1)$  описываемая выражением

$$R = \begin{pmatrix} r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}[p] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[p] & \dots & r_{xx}[0] \end{pmatrix},$$

где  $r_{xx}[p]$  – коэффициенты автокорреляционной матрицы.

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i2\pi f T} \\ \dots \\ e^{i2\pi f TN} \end{pmatrix},$$

где  $N$  – вектор комплексных элементов,  $f$  – частота в Гц,  $T$  – интервал отсчетов [4].

Сравним эти методы по разрешающей способности при различных начальных условиях: изменениях отношения сигнал/шум, изменении количества отсчетов анализируемых сигналов.

## Результаты и их обсуждение

Рассмотрим смесь сигналов и помехи  $y(t)$  на интервале  $0 \dots 2,5$  мс:

$$y(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\pi f_2 t + \varphi_2) + A_3 \sin(2\pi f_3 t + \varphi_3) + n(t).$$

Начальная фаза у сигналов  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ , амплитуда  $A_1 = A_2 = A_3 = 1$ ,  $f_1 = 5,5$  кГц,  $f_2 = 6$  кГц,  $f_3 = 6,5$  кГц, отношение сигнал/шум равно 10 дБ, время наблюдения сигнала  $T_N = 2,5$  мс, количество отсчетов  $N_{\text{отс}} = 1024$ . Суммарный сигнал представлен на рис. 1.

Потенциальная разрешающая способность по частоте  $\Delta f = \frac{1}{T_N} = 400$  Гц.

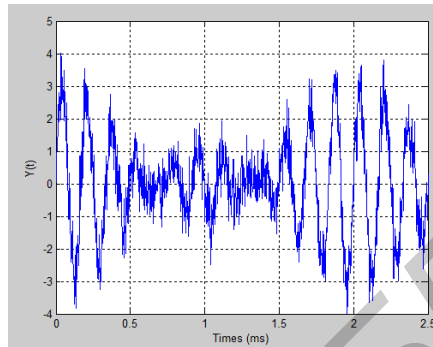


Рис. 1. Сумма сигналов и шума

Спектральные плотности мощности коррелограммным, периодограммным методами и МД для данного сигнала представлены на рис. 2.

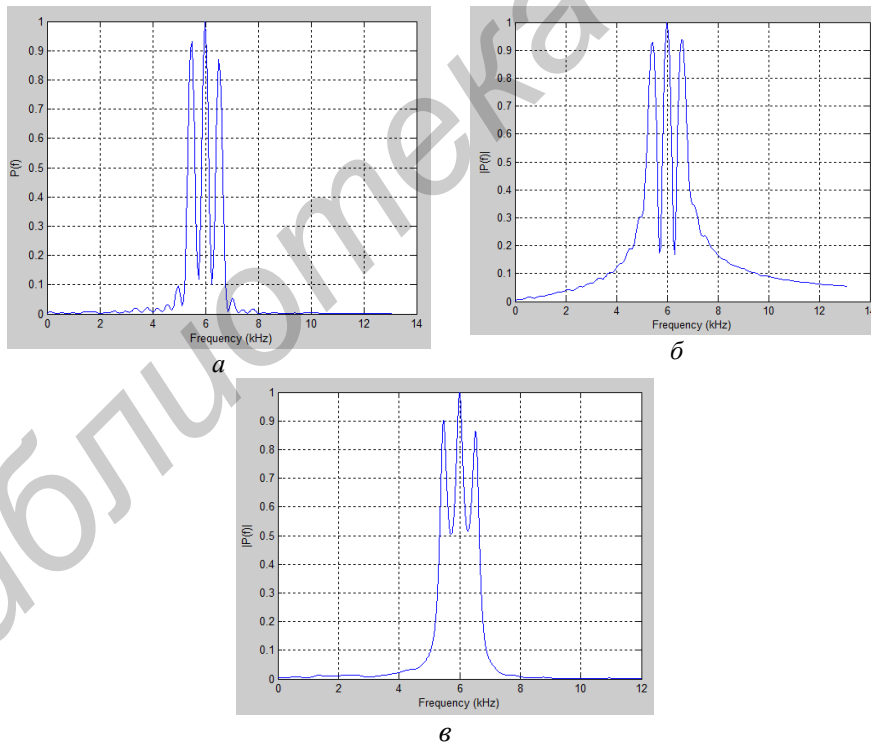


Рис. 2. Оценка спектральной плотности мощности:

*а* – периодограммным методом; *б* – коррелограммным методом; *в* – МД-методом

Как видно из рисунков, сигналы с частотами 5,5 кГц, 6 кГц и 6,5 кГц различимы тремя методами. По результатам моделирования классические методы, в которых используется алгоритм БПФ, наиболее эффективны по сравнению с МД, с точки зрения вычислительных затрат. Оценим СПМ при уменьшении отношения сигнал/шум до 0,5 дБ тремя методами. Результаты моделирования, отражающие изменение СПМ при уменьшении ОСШ представлены на рис. 3.

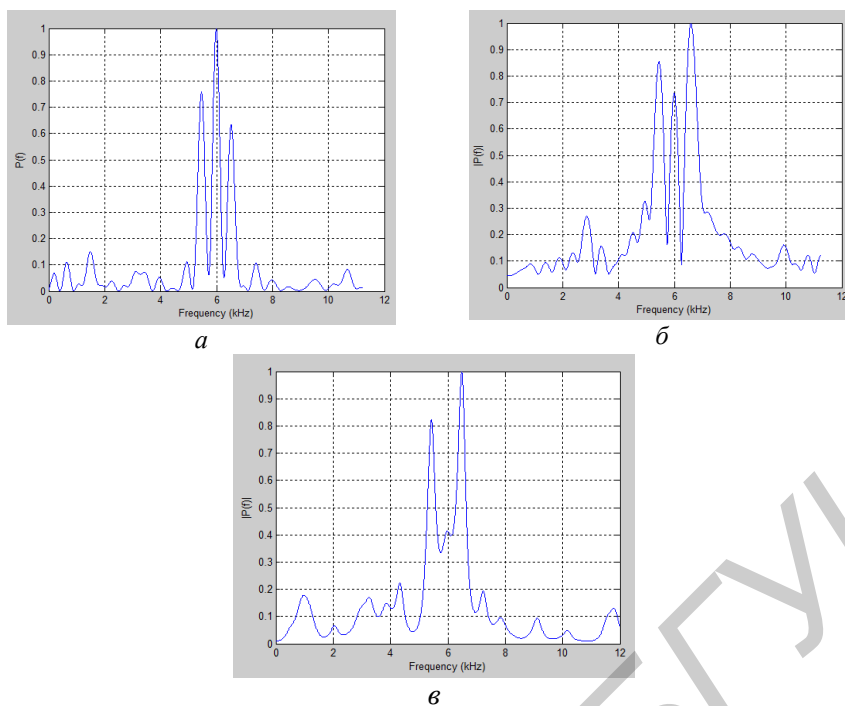


Рис. 3. Оценка спектральной плотности мощности при уменьшении ОСШ:  
*a* – периодограммным методом; *б* – коррелограммным методом; *в* – МД-методом

Результаты моделирования показывают, что уменьшение отношения сигнал/шум приводит к ухудшению разрешающей способности адаптивного алгоритма. Что показывает невозможность использования адаптивного алгоритма при малом ОСШ.

Рассмотрим влияние уменьшения времени наблюдения сигнала на определение СПМ тремя методами до 1,6 мс. Результаты моделирования представлены на рис. 4.

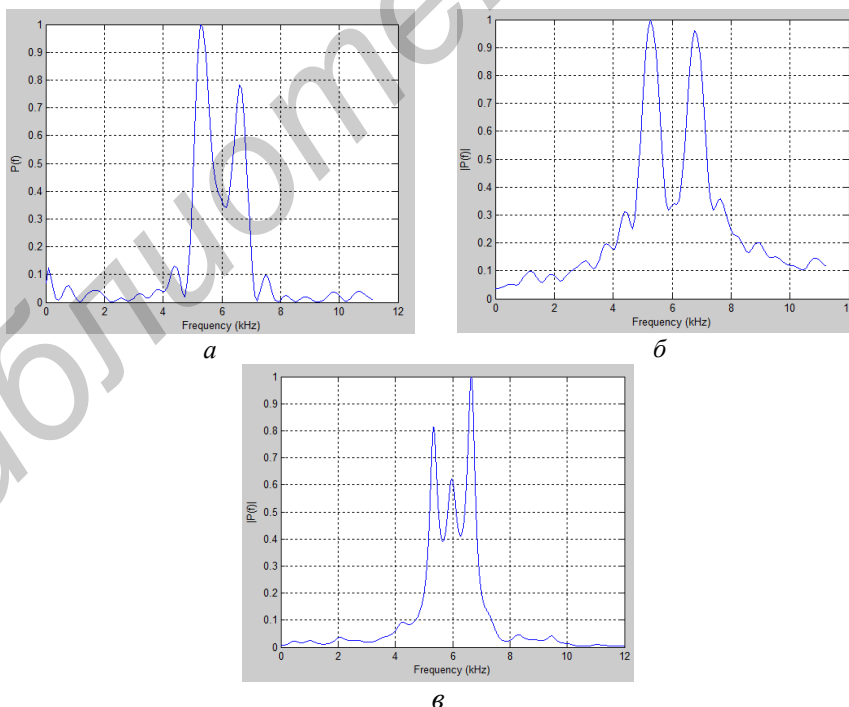


Рис. 4. Оценка спектральной плотности мощности при уменьшении времени наблюдения:  
*a* – периодограммным методом; *б* – коррелограммным методом; *в* – МД-методом

Получение СПМ классическими методами при анализе коротких записей не достоверна, так как спектральные пики не разрешены, в отличие от СПМ, полученную методом МД. Для ситуаций, когда требуется получение СПМ измеряемого процесса

обладающего малой длительностью или же быстро изменяющимся во времени спектром, подходит МД метод оценки СПМ.

### **Выводы**

Выполнен сравнительный анализ разрешающей способности алгоритмов спектрального оценивания. По результатам математического моделирования проведено сравнение классических методов получения СПМ с адаптивным методом МД. Установлено, что МД дает значительно лучшее разрешение по сравнению с классическими методами при анализе коротких записей в случае большого отношения сигнал/шум. Недостаток МД метода в том, что он вычислительно не эффективен по сравнению с классическими методами и при малом отношении сигнал/шум приводит к ухудшению разрешающей способности. Выигрыш в разрешении позволит использовать сигналы с меньшей шириной спектра.

### **Список литературы**

1. Ницберг Р.О. Возможности определения спектральной плотности // ТИИЭР. 1979. Т. 67, № 3. С. 120–121.
2. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1971. 316 с.
3. Шахтариан Б.И., Ковригин В.А. Методы спектрального оценивания случайных процессов. М.: Гелиос АРВ, 2005. 248 с.
4. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с.

### **References**

1. Nicberg R.O. Vozmojnosti opredelenija spectral'noj plotnosti // TIJER. 1979. T. 67, № 3. S. 120–121. (in Russ)
2. Djenkins G., Vatts D. Spektral'nyj analiz i ego prilozhenija. M.: Mir, 1971. 316 s. (in Russ.)
3. Shahtarian B.I., Kovrigin V. A. Metodi spectral'nogo ocenivaniija slychajnyh processov. M.: Gelios ARV, 2005. 248 s. (in Russ.)
4. Marple S.L. Cifrovoi spektral'nyj analiz i ego prilozhenija. M.: Mir, 1990. 584 s. (in Russ)

### **Сведения об авторах**

Гринкевич А.В., к.т.н., доцент кафедры информационных радиотехнологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Какора В.А., аспирант кафедры информационных радиотехнологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

### **Адрес для корреспонденции**

220013, Республика Беларусь,  
г. Минск, ул. П. Бровки, д. 6,  
Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники  
тел. +375-33-660-43-80;  
e-mail: varon\_bmx@mail.ru  
Какора Виктор Александрович

### **Information about the authors**

Grinkevich A.V., PhD, associate professor of information radio-technologies department of Belarusian state university of informatics and radioelectronics.

Kakora V.A., PG student of information radio-technologies department of Belarusian state university of informatics and radioelectronics.

### **Address for correspondence**

220013, Republic of Belarus,  
Minsk, P. Brovka st., 6,  
Belarusian state university of informatics and  
radioelectronics  
tel. +375-33-660-43-80;  
e-mail: varon\_bmx@mail.ru  
Kakora Viktor Alexandrovich