О РАЗРЕШИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТЕРЖНЕВОГО ТЕЧЕНИЯ

С.С. КАЯНОВИЧ

Рассматривается следующая модель течения вязкой несжимаемой жидкости (плотность $\rho = 1$):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (x,t) \in \widetilde{\Omega}_T, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, (x,t) \in \Omega_{iT}, i = 1,2, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad (x,t) \in \Omega'_T, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0, \quad (x,t) \in \widetilde{\Omega}_T, \tag{3}$$

$$u_1\big|_{t=0} = b(x),\ x \in \widetilde{\Omega},\ u_1\big|_{\widetilde{S}_T} = \widetilde{\psi}_1(s,t), (s,t) \in \widetilde{S}_T, u_2\big|_{S_{iT}} = 0, i = 1,2, \tag{4}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{n}}\Big|_{\widetilde{S}} = \zeta(s) \sum_{j=1}^{2} \omega_j(s) \cos\alpha_j, \quad \omega_i = \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial t}, \tag{5}$$

где $\frac{\partial p}{\partial \bar{n}}\Big|_{\widetilde{S}}$ – производная по направлению вектора $\bar{n}$ внутренней нормали к $\widetilde{S}$, α_i – угол между вектором $\bar{n}$ и осью Ox_i, $\widetilde{\Omega}$ – ограниченная область двумерного евклидова пространства с границей $\widetilde{S}$, $x = (x_1, x_2)$, $\overline{\widetilde{\Omega}} = \widetilde{\Omega} \cup \widetilde{S}$, $\Omega_1 = [0 \le x_1 \le L, 0 < x_2 \le \varepsilon]$,

$\Omega_2 = [0 \le x_1 \le L, H - \varepsilon \le x_2 < H]$, $\Omega' = [0 \le x_1 \le L, \varepsilon_1 < x_2 < H - \varepsilon_1]$, $\varepsilon > 0, \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$,

$\widetilde{\Omega}_T = \widetilde{\Omega} \times [0,T]$, $t \in [0,T]$ $\widetilde{S}_T = \widetilde{S} \times [0,T]$, $\overline{\widetilde{\Omega}}_T = \overline{\widetilde{\Omega}} \times [0,T]$, $\Omega_{iT} = \Omega_i \times [0,T], i = 1,2$,

$\Omega'_T = \Omega' \times [0,T]$, $\zeta(x)$ – срезающая функция.

Разобьем пространство (x,t) плоскостями $t_m = m\tau, m = \overline{0,M}$, на слои, предполагая, что $M\tau = T$. Обозначим через $\widetilde{\Omega}_m$ сечение $\widetilde{\Omega}_T$ плоскостью $t_m = m\tau$, через $\widetilde{S}_m$ – его границу, положим $\overline{\widetilde{\Omega}}_m = \widetilde{\Omega}_m \cup \widetilde{S}_m$ и введем в рассмотрение функции $w(x,t), f(x,t)$ такие, что $u_1(x,t) = w(x,t) + f(x,t)$ и $f\big|_{\widetilde{S}_T} = \widetilde{\psi}_1\big|_{\widetilde{S}_T}$. Справедлива следующая теорема, которая следует из результатов, полученных в [1].

Теорема. *Пусть выполнены условия:* $f \in C_{l,\alpha}(\overline{\widetilde{\Omega}}_T)$, $\widetilde{\psi}_1 \in C_{l,\alpha}(\widetilde{S}_T)$, $\widetilde{S} \in C_{l,\alpha}$, $\zeta \in C_{l,\alpha}(\overline{\widetilde{\Omega}}_T)$, $b \in C_{l,\alpha}(\overline{\widetilde{\Omega}})$, $l \ge 3$, $\alpha \in (0,1)$, $\frac{\partial f}{\partial x_1} \ge \beta = const$, $\frac{1}{\tau} + \beta > 0$. *Тогда задача (1) – (5), в которой производная* $\frac{\partial u_1}{\partial t}$ *заменена разностной производной, имеет единственное решение при любом* $t = t_m = m\tau, m = \overline{0,M}$, *причем* $u_1 \in C_{l,\alpha}(\overline{\widetilde{\Omega}}_m)$, $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \in C_{l-1,\alpha}(\overline{\widetilde{\Omega}}_m)$, $p \in C_{l-1,\alpha}(\overline{\widetilde{\Omega}}_m)$.

Литература

1. Каянович С.С. Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения. // Весці НАН Беларусі. № 1. 2015. Сер. фіз.-мат. навук. С. 52-59.