Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра высшей математики

КОМПЛЕКС ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

В двух частях

Часть 2

*Рекомендовано УМО по образованию
в области информатики и радиоэлектроники
в качестве пособия для
специальностей I ступени, закрепленных за УМО*

Минск БГУИР 2017

УДК 517(076)
ББК 22.1я73
К63

Авторы:

Ж. А. Черняк, О. Н. Малышева, О. А. Мокеева,
Т. А. Романчук, З. Н. Примичева

Рецензенты:

кафедра дифференциальных уравнений и системного анализа
Белорусского государственного университета
(протокол №6 от 11.02.2016);

доцент кафедры высшей математики №1
Белорусского национального технического университета,
кандидат физико-математических наук, доцент О. Р. Габасова

К63 **Комплекс** заданий по математике для студентов заочной формы обучения. В 2 ч. Ч. 2 : пособие / Ж. А. Черняк [и др.]. – Минск : БГУИР, 2017. – 178 с. : ил.
ISBN 978-985-543-273-0 (ч. 2).

Приводятся тщательно сбалансированные наборы заданий для аудиторных занятий, самостоятельной подготовки к экзаменам, задачи с подробными решениями по следующим разделам математики: кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, элементы теории поля; ряды; дифференциальные уравнения; элементы теории функций комплексной переменной и операционное исчисление. Пособие включает в себя краткие сведения из теории с формулами, графиками и иллюстрациями, а также варианты тестовых контрольных работ.

Часть 1-я издана в БГУИР в 2016 г.

УДК 517(076)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-543-273-0 (ч. 2)
ISBN 978-985-543-176-4

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Пособие состоит из четырех разделов: кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, элементы теории поля; дифференциальные уравнения; ряды; элементы теории функций комплексной переменной и операционное исчисление, что соответствует учебной программе по математике для второго курса Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники (факультет заочного обучения). В начале каждого раздела приводится список умений, необходимых для сдачи экзамена в рамках этой темы. Далее представлены тщательно отобранные наборы заданий с ответами для аудиторных занятий (в установочную и экзаменационную сессии). Для самостоятельной подготовки к экзаменам в период между сессиями предлагается большое количество задач с ответами. Для помощи в решении этих задач предназначается обширный круг заданий с решениями, сопровождающимися подробными комментариями.

Пособие содержит также подразделы, включающие формулы, правила, формулировки теорем, графики и иллюстрации. В конце каждого раздела приводятся варианты тестовых контрольных работ, подводящие итог изученному в этом разделе материалу.

Представленное пособие может послужить эффективным помощником студенту заочной формы обучения благодаря доступности и подробности изложения, большому количеству технически нетрудоемких заданий и наличию наглядного справочного материала.

Тщательно продуманные, хорошо сбалансированные наборы задач для аудиторной работы и тестовых контрольных заданий помогут преподавателю качественно провести занятия и контроль знаний студентов в период экзаменационной сессии.

Пособие рекомендуется студентам инженерно-технических специальностей вузов заочной формы обучения и преподавателям высшей математики.

1. КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В результате изучения данной темы студент должен уметь:

– изменять порядок интегрирования в двойном интеграле;

– вычислять двойные интегралы в декартовых и полярных координатах;

– вычислять двойные интегралы с помощью замены переменных;

– находить площадь области, ограниченной указанными кривыми;

– вычислять тройные интегралы в декартовых, цилиндрических и сферических координатах;

– находить объем тела, ограниченного указанными поверхностями;

– вычислять криволинейные интегралы I рода, если кривая задана явным, полярным и параметрическими уравнениями;

– вычислять криволинейные интегралы II рода по указанной дуге кривой, по указанному замкнутому контуру;

– вычислять криволинейные и поверхностные интегралы с помощью формул Остроградского – Грина и Стокса;

– выяснять, будет ли криволинейный интеграл зависеть от формы пути интегрирования;

– вычислять поверхностные интегралы I и II рода;

– вычислять циркуляцию векторного поля вдоль замкнутого контура с помощью формулы Стокса;

– вычислять поток векторного поля, используя формулу Остроградского – Гаусса;

– находить дивергенцию и ротор векторного поля;

– определять, является ли векторное поле соленоидальным, потенциальным и гармоническим.

1.1. ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Изобразите область интегрирования двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ и перейдите к повторному интегралу с внешним интегрированием по переменной t.

№ п/п	D	t
1	$x=0,\quad x=1,\quad y=6x,\quad y=3x^2$	x
2	$x=2-y^2,\quad x=y,\quad y=1,\quad y=-2$	y
3	$x=0,\quad x=2,\quad y=x,\quad y^2+x^2=8$	x
4	$x=y^2-1,\quad x=1-y^2,\quad y=-1,\quad y=1$	y
5	$x+y=2,\quad y=0,\quad y=x^2$	y

2. Измените порядок интегрирования в повторном интеграле из задания 1.

3. Вычислите повторные интегралы:

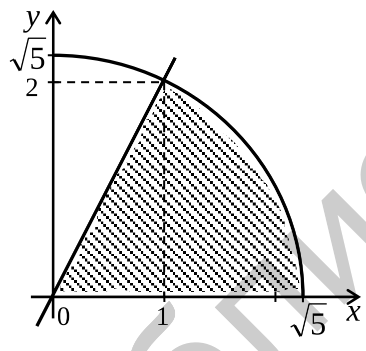
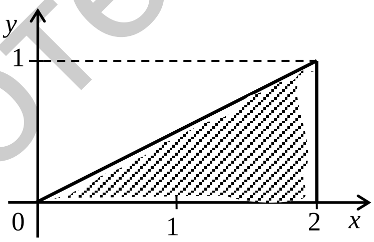
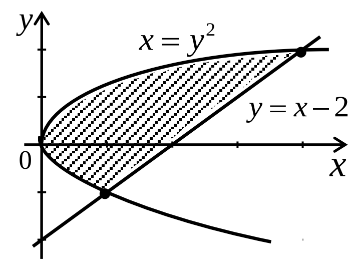
а) из заданий 1 и 2 для указанной подынтегральной функции $f(x, y)$.

№ п/п	1	2	3	4	5
$f(x,y)$	$x(y+1)$	$1-2y$	$\frac{1}{2}y$	$x+1$	x

б)

1) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} x^2 y^3\, dx$	2) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_3^4 \frac{1}{(x-y)^2}\, dy$
3) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\ln y} e^x dx$	4) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2}{y^2+1}\, dy$
5) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} (x+y)\, dy$	–

4. Расставьте пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ двумя способами (с внешним интегрированием по переменной x и по переменной y). Область интегрирования D изображена ниже.

№ п/п	1	2	3
D			

5. Вычислите:

1) $\iint\limits_D y^2 \sin x\,dx\,dy$, если $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \pi,\ \ 0 \le y \le 1+\cos x\}$;

2) массу пластинки D с плотностью $\rho(x,y) = 3x + 2y$, где D – область, ограниченная линиями $x=1,\ x=3,\ y=2x,\ y=x$;

3) $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ в полярных координатах, если функция $f(x,y)$ и область интегрирования D задаются условиями, представленными ниже.

№ п/п	D	$f(x,y)$
а	$x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=\sqrt{1-x^2}$	$e^{x^2+y^2}$
б	$x^2+y^2=1,\ x=0,\ x\geq 0$	x
в	$x^2+y^2=2x$	x^2+y^2

4) площадь области D, ограниченной линиями: $y=x,\ y=x+3,$ $y=-2x+1,\ y=-2x+5$, с помощью замены переменных.

6. Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dydz$ и постройте область интегрирования T.

№ п/п	T	$f(x,y,z)$
1	$x=-1,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=2$	$x+y-z$
2	$x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$	$\dfrac{1}{1-x-y}$
3	$2x+3y+4z=12,\ x=0,\ y=0,\ z=0$	3
4	$x+y+z=4,\ x=0,\ y=0,\ z=2$	$2x$

7. Вычислите:

1) $\iiint\limits_T (x+z)dxdydz$, где область T ограничена поверхностью $z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=1$, путем перехода к цилиндрическим координатам;

2) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \dfrac{dz}{\sqrt{z}}$ путем перехода к сферическим координатам.

8. Вычислите криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L f(x,y)\,dl$ вдоль замкнутой кривой L.

№ п/п	$f(x,y)$	L
1	$x+y$	а) контур треугольника с вершинами $A(0;0),\ B(1;0),\ C(0;1)$; б) лепесток лемнискаты $\rho^2=5\cdot\cos 2\varphi,\ -\dfrac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{4}$
2	$\sqrt{x^3y}$	дуга кубической параболы $y=x^3$, соединяющей точки $A(0;0),\ B(1;1)$
3	y^2	верхняя полуокружность $x^2+y^2=9$, заданная параметрически

9. Вычислите криволинейные интегралы второго рода $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

№ п/п	$P(x,y)$	$Q(x,y)$	L
1	xy	x^2+y	а) L_1 – отрезок прямой AB, соединяющей точки $A(0;1)$, $B(2;3)$; б) L_2 – дуга AB параболы $y=\frac{1}{2}x^2+1$ с начальной точкой $A(0;1)$ и конечной $B(2;3)$
2	$x+2y$	$3x+4y$	дуга параболы $y=x^2$, $x\in[-2;1]$
3	$3x^2y$	x^3+1	ломаная, проходящая через точки $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ (первая из точек является начальной)
4	$\frac{y^2}{x^2+y^2}$	$\frac{-x^2}{x^2+y^2}$	полуокружность $x=a\cdot\cos t$, $y=a\cdot\sin t$, $0\le t\le\pi$

10. Вычислите $\int\limits_L (x-1)\,dx+(y+1)\,dy+(x+y-4)\,dz$, где $L=AB$ – отрезок прямой, соединяющей точки $A(1;-1;1)$, $B(2;3;-4)$.

11. С помощью формулы Грина преобразуйте криволинейные интегралы второго рода в двойные интегралы. Направление обхода контура L – положительное:

1) $\int\limits_L xy\,dx+(x^2+y)\,dy$, где $L=L_1\cup L_2$ из задания 9 (1);

2) $\oint\limits_L (2x^2+2y^2)\,dx+(x+y)^2\,dy$,

$\oint\limits_L 3\cdot\left(x^2+\frac{y^2}{2}\right)dx+(x-y)^2\,dy$,

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(1;1), B(2;2), C(1;3)$;

3) $\oint\limits_L (6xy+5y)\,dx+(3x^2+5x)\,dy$, где L – контур, ограниченный линиями $y=0,\ x=3,\ y=\sqrt{x}$.

12. Выясните, будет ли криволинейный интеграл $\int\limits_L (6xy^2+4x^3)\,dx+(6x^2y+3y^2)\,dy$ зависеть от формы пути интегрирования. Вычислите этот интеграл по отрезку прямой, соединяющей точки $A(2;3), B(3;4)$.

13. Вычислите поверхностные интегралы первого рода.

№ п/п	$\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds$	S
1	$\iint\limits_S \left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)ds$	часть плоскости $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$, ограниченная координатными плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0$
2	$\iint\limits_S y\cdot(x+z)\,ds$	ограничена поверхностями $y=\sqrt{1-x^2}$, $z=0$, $z=1$
3	$\iint\limits_S (x-3y+2z)\,ds$	часть плоскости $4x+3y+2z-4=0$, расположенная в первом октанте

14. Вычислите поверхностные интегралы второго рода:

1) $\iint\limits_G (y^2+z^2)\,dx\,dy$, где G – верхняя сторона части поверхности $z=\sqrt{4-x^2}$, отсеченная плоскостями $z=0,\ y=0,\ y=2$;

2) $\iint\limits_S -x\,dy\,dz+z\,dx\,dz+5\,dx\,dy$ по верхней стороне части плоскости $2x-3y+z=6$, ограниченной координатными плоскостями.

15. С помощью формулы Остроградского – Гаусса вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_S x\,dy\,dz+2y\,dx\,dz+3z\,dx\,dy$, где S – внешняя сторона поверхности пирамиды, ограниченной плоскостями $x+y+z=1,\ x=0,\ z=0$.

16. Найдите поток поля вектора $\vec{a}=(2x-y)\vec{i}+(x+y-2z)\vec{j}+(2x+z)\vec{k}$ через часть плоскости $x+y+z=3$, лежащую в первой четверти в направлении внешней нормали.

17. Вычислите $\operatorname{rot}\vec{a},\ \operatorname{div}\vec{a},\ \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a})$ векторного поля

$\vec{a}=(x^2-z^2)\vec{i}+3yz\vec{j}-y\vec{k}$.

18. Найдите дивергенцию векторного поля

$\vec{a}=(2x^2-xz+6y^3z)\vec{i}+(3yz-7x^3z)\vec{j}+(5y^3zx+7yz)\vec{k}$ в точке $M(1;2;1)$.

19. Найдите $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,u)$, если $u(x,y,z)=(x+3y-2z)^5$.

20. Выясните, является ли векторное поле

$\vec{a}=(5x+4z)\vec{i}-(z+2y)\vec{j}+(2y-3z)\vec{k}$ гармоническим.

21. С помощью формулы Стокса преобразуйте криволинейный интеграл $\oint\limits_L x^2\,dx+3dy-y^2\,dz$ в поверхностный интеграл первого рода по площади поверхности S, «натянутой» на замкнутый контур L, если известна нормаль $\vec{n}=\left(-\frac{4}{5};0;\frac{3}{5}\right)$ к поверхности S.

Ответы

1.

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{3x^2}^{6x} f(x,y)\,dy$; 2) $\int\limits_{-2}^{1} dy \int\limits_{y}^{2-y^2} f(x,y)\,dx$; 3) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x}^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\,dy$;

4) $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,y)\,dx$; 5) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx$.

2.

1) $\int\limits_0^3 dy \int\limits_{\frac{y}{6}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)\,dx + \int\limits_3^6 dy \int\limits_{\frac{y}{6}}^{1} f(x,y)\,dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{x} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{\sqrt{2-x}} f(x,y)\,dy$;

3) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_2^{2\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\,dx$; 4) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{1+x}}^{\sqrt{1+x}} f(x,y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,y)\,dy$;

5) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)\,dy$.

3.

а) 1) 5; 2) 9; 3) $\frac{8}{3}$; 4) $\frac{8}{3}$; 5) $\frac{11}{12}$.

б) 1) $\frac{2}{33}$; 2) $\ln\frac{3}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$; 5) $\frac{101}{60}$.

4.

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2x} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^{\sqrt{5}} dx \int\limits_0^{\sqrt{5-x^2}} f(x,y)\,dy$, $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{5-y^2}} f(x,y)\,dx$;

2) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\frac{x}{2}} f(x,y)\,dy$, $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y}^{2} f(x,y)\,dx$;

3) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^4 dx \int\limits_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$, $\int\limits_{-1}^{2} dy \int\limits_{y^2}^{y+2} f(x,y)\,dx$.

5.

1) $\frac{4}{3}$; 2) 52; 3) а) $\frac{(e-1)\pi}{4}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{3\pi}{2}$; 4) 12.

6.

1) -2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 36; 4) $\frac{20}{3}$.

7. 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{8\pi}{5}$.

8. 1) а) $1+\sqrt{2}$; б) $5\sqrt{2}$; 2) $\frac{5\sqrt{10}}{27}-\frac{1}{54}$; 3) $\frac{27\pi}{4}$.

9. 1) а) $\frac{34}{3}$; б) 12; 2) $-\frac{15}{2}$; 3) 2 ; 4) $-\frac{5}{3}a$.

10. 16.

11. 1) $\frac{2}{3}$; 2) а) $\frac{4}{3}$; б) $-\frac{22}{3}$; 3) 126.

12. 426.

13. 1) $4\sqrt{61}$; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{29}}{9}$.

14. 1) 32; 2) -9.
15. 1.
16. 72.
17. $(-1-3y)\vec{i}-2z\vec{j},\ 2x+3z,\ 0.$
18. 60.
19. $280(x+3y-2z)^3$.
20. Нет.
21. $\iint\limits_S \frac{8y}{5}ds$.

1.2. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Двойные интегралы

В рамках этого раздела будем рассматривать функции $f(x,y)$, интегрируемые на области D.

Обозначение двойного интеграла:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy,$$

где D – область интегрирования; $f(x,y)$ – подынтегральная функция; x и y – переменные интегрирования; $dxdy$ – элемент площади.

Если $f(x,y)\equiv 1$ всюду в области D, то из определения двойного интеграла следует формула площади области D: $S=\iint\limits_D dx\,dy.$

Вычисление двойного интеграла сведением к двукратному

а) *В декартовых координатах.*

Определение. Область D называется правильной в направлении оси Ox, если любая прямая, проходящая через внутренние точки области D параллельно оси Ox, пересекает границу этой области в двух точках (рис. 1.1).

Линию L_1 с уравнением $x = \varphi_1(y)$ называют линией входа в область *D*, тогда как линию L_2 с уравнением $x = \varphi_2(y)$ – линией выхода из области *D*.

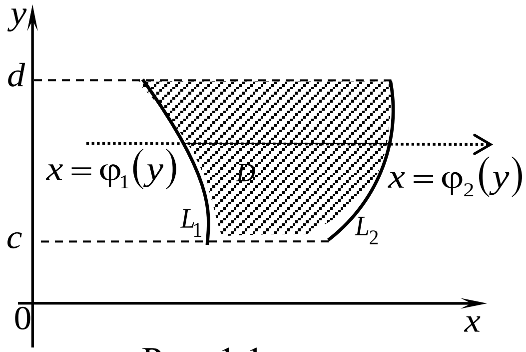


Рис. 1.1

По такой области двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy. \qquad (1.1)$$

<u>Определение.</u> Область *D* называется правильной в направлении оси *Oy*, если любая прямая, проходящая через внутренние точки области *D* параллельно оси *Oy*, пересекает границу этой области в двух точках (рис. 1.2).

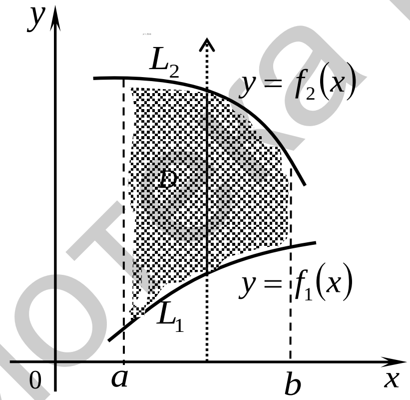


Рис. 1.2

Аналогично кривые L_1 и L_2 с уравнениями $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ называются соответственно линиями входа и выхода из области *D*.

Двойной интеграл по такой области вычисляется по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx. \qquad (1.2)$$

Выражения, стоящие в правых частях формул (1.1) и (1.2), называются *повторными* (или *двукратными*) *интегралами*.

Если область интегрирования *D* является одновременно правильной и в направлении оси *Ox*, и в направлении оси *Oy*, то для вычисления двойного интеграла можно использовать любую из формул (1.1) или (1.2).

Если область интегрирования *D* не является правильной ни в каком направлении, то ее следует разбить на конечное количество областей, правильных в направлении оси Ox или оси Oy, и применить свойство аддитивности двойного интеграла.

Свойство аддитивности

Если область D можно представить в виде объединения двух областей D_1 и D_2, пересекающихся только по их общей границе (рис. 1.3), то

$$\iint\limits_{D_1\cup D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy\,. \qquad (1.3)$$

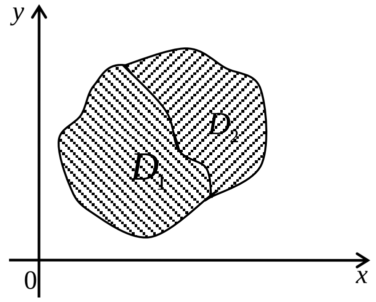


Рис. 1.3

б) *В полярных координатах.*

Формулы перехода от декартовых координат x и y к полярным координатам φ и r имеют вид

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \qquad (1.4)$$

где $r \ge 0,\ 0 \le \varphi < 2\pi$ (рис. 1.4).

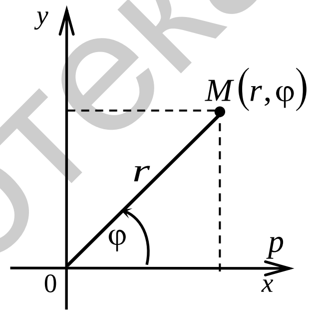


Рис. 1.4

Числа r и φ называют полярными координатами точки M, где r – расстояние от точки M до полюса O, φ – угол, образованный отрезком OM с полярной осью Op.

Если подынтегральная функция $f(x,y)$ или уравнение границы области интегрирования содержит сумму x^2+y^2, то для упрощения вычисления двойного интеграла переходят к полярным координатам, в которых указанная сумма принимает более простой вид

$x^2+y^2=(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r^2,$ откуда

$r=\sqrt{x^2+y^2}.$

В полярных координатах элемент площади $dxdy$ имеет вид $dxdy = rdrd\varphi$, а двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r dr\,d\varphi,$$

где D^* – область в полярной системе координат, соответствующая области D в декартовой системе координат.

Для вычисления двойного интеграла в полярных координатах по-прежнему переходят к повторному интегралу.

Пусть область D^* ограничена лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$ и кривыми $r=r_1(\varphi)$, $r=r_2(\varphi)$ $(r_1(\varphi)\le r_2(\varphi))$, причем функции $r_1(\varphi)$ и $r_2(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\beta]$ (рис. 1.5).

<u>Определение.</u> Область D^* называется правильной в полярной системе координат, если луч, проходящий через внутренние точки области D^*, пересекает границу области в двух точках.

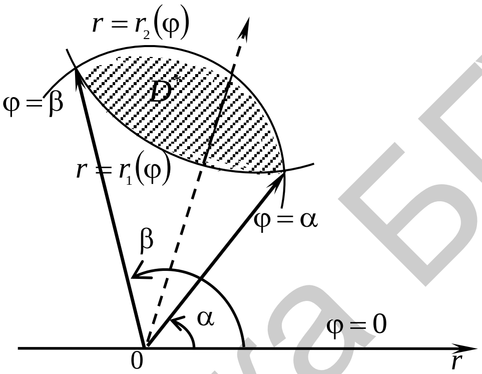


Рис. 1.5

Если область является правильной в полярной системе координат, то вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторного интеграла по переменным φ и r:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr\,. \quad (1.5)$$

Физический смысл двойного интеграла

Предположим, что плоская пластина D имеет поверхностную плотность распределения масс ρ, зависимость которой от координат (x,y) точки $M\in D$ задается функцией $\rho=\rho(x,y)$, непрерывной в D. Тогда масса этой пластины вычисляется по формуле

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy. \quad (1.6)$$

2. Тройные интегралы

Тройной интеграл является непосредственным обобщением двойного интеграла на случай функции трех переменных.

Обозначение:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dydz,$$

где T – ограниченная трехмерная область; $f(x,y,z)$ – подынтегральная функция, интегрируемая на области T; $dxdydz$ – элемент объема в прямоугольных координатах.

Если функция $f(x,y,z)$ тождественно равна 1 ($f(x,y,z)\equiv 1$) всюду в области T, то из определения тройного интеграла следует формула для вычисления *объема* тела T:

$$\mathrm{V} = \iiint\limits_T dx\,dydz. \qquad (1.7)$$

Вычисление тройного интеграла сведением к трехкратному

Вычисление тройных интегралов основано на понятии правильной пространственной области.

Определение. Область T называется правильной в направлении оси Oz, если выполняются два условия:

1) любая прямая, проходящая через внутренние точки области T параллельно оси Oz, пересекает границу области в двух точках;

2) проекция D пространственной области T на плоскость Oxy является правильной плоской областью в направлении хотя бы одной из осей координат.

Пусть область T ограничена снизу и сверху относительно оси Oz поверхностями $z=\varphi_1(x,y)$ и $z=\varphi_2(x,y)$, а с боковых сторон – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz (рис. 1.6).

Рассмотрим область D – проекцию трехмерной области T на плоскость Oxy (рис. 1.7).

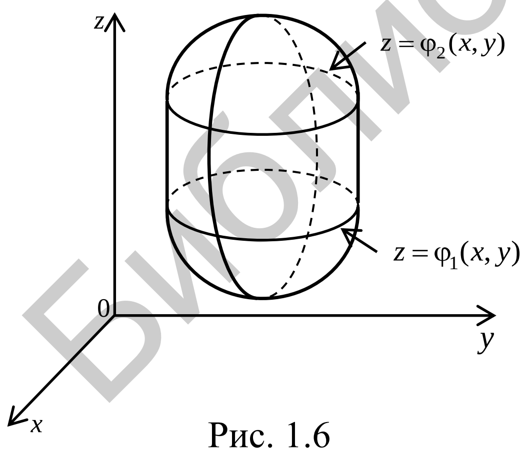


Рис. 1.6

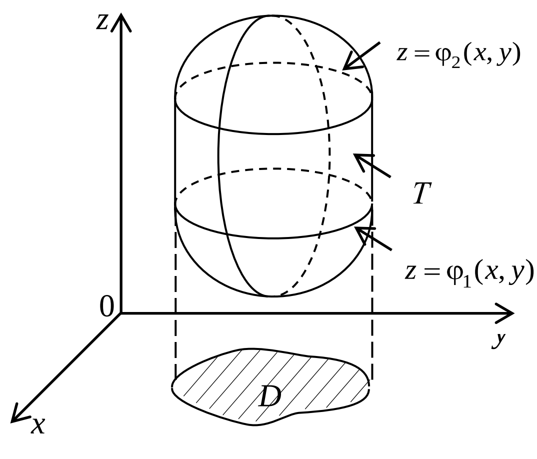


Рис. 1.7

Пусть плоская область D является правильной в направлении оси Oy и ограничена линиями $y=g_1(x)$, $y=g_2(x)$, $x=a$, $x=b$ (рис. 1.8).

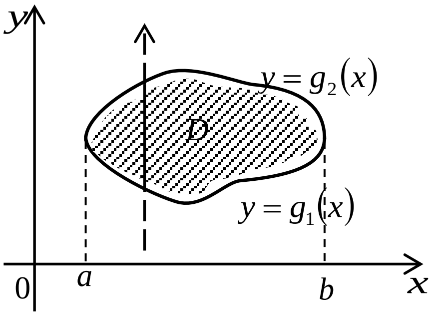


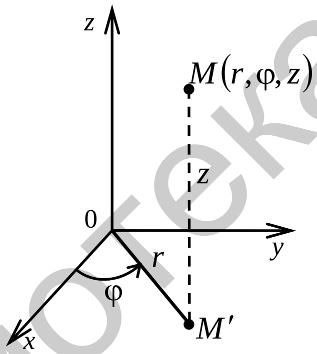
Рис. 1.8

Тогда тройной интеграл в декартовых координатах вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (1.8)$$

В некоторых случаях вычисление тройного интеграла удобно выполнять, переходя к цилиндрическим или сферическим координатам.

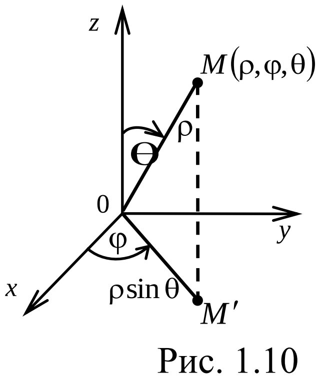
В случае цилиндрических координат положение точки $M(x;y;z)$ в пространстве $Oxyz$ определяется тремя числами $r,\ \varphi,\ z$, где r и φ – полярные координаты проекции M' точки M на координатную плоскость Oxy, z – аппликата точки M (рис. 1.9).



$$\begin{cases} r \ge 0, \\ 0 \le \varphi < 2\pi, \\ -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$

Рис. 1.9

В случае сферических координат положение точки $M(x;y;z)$ в пространстве определяется тремя числами $\rho,\ \varphi,\ \theta$, где ρ – длина радиус-вектора точки M, φ – угол между проекцией радиуса-вектора OM' точки M на плоскость Oxy и осью Ox, θ – угол между радиусом-вектором точки M и осью Oz (рис. 1.10).



$$\begin{cases} \rho \ge 0, \\ 0 \le \varphi < 2\pi, \\ 0 \le \theta \le \pi. \end{cases}$$

Рис. 1.10

Цилиндрические координаты r, φ, z (сферические координаты ρ, φ, θ) связаны с декартовыми координатами x, y, z при помощи формул

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z \end{cases} \qquad \left(\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \right). \tag{1.9}$$

Формула перехода к тройному интегралу в цилиндрических (сферических) координатах имеет вид

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dydz = \iiint\limits_{T^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,rdr\,d\varphi dz$$

$$\left(\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dydz = \iiint\limits_{T^*} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta \right). \tag{1.10}$$

3. Криволинейные интегралы

Вычисление криволинейных интегралов сводится к вычислению определенных интегралов. Вид формулы для вычисления криволинейного интеграла зависит от способа задания кривой.

1. $\int\limits_L f(x, y)dl$ – *криволинейный интеграл I рода по плоской кривой L.*

Если кривая L задана:

– уравнением $y = y(x)$, $x \in [a; b]$, то

$$\int\limits_L f(x, y)dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx; \tag{1.11}$$

– параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, то

$$\int\limits_L f(x, y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt; \tag{1.12}$$

– полярным уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, то

$$\int\limits_L f(x, y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi. \tag{1.13}$$

2. $\int\limits_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ – *криволинейный интеграл II рода по плоской кривой L.*

Если кривая L задана:

– уравнением $y = y(x)$, $x \in [a; b]$ и $x = a$ – абсцисса начальной точки A, то

$$\int\limits_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_a^b \big(P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)\big)dx; \tag{1.14}$$

– параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha; \beta]$ и $A(x(\alpha); y(\alpha))$ – начальная точка кривой L, то

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \big(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\big)dt\,. \qquad (1.15)$$

При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл второго рода меняет знак на противоположный, т. е.

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,. \qquad (1.16)$$

Криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру L обозначают $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в односвязной замкнутой ограниченной контуром L области D, то имеет место *формула Грина*:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy\,, \qquad (1.17)$$

где L – граница области D, интегрирование вдоль которой производится в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки).

Площадь S области D с помощью криволинейного интеграла второго рода можно найти по формуле

$$S = \frac{1}{2}\oint xdy - ydx\,. \qquad (1.18)$$

4. Поверхностные интегралы

Вычисление поверхностных интегралов сводится к вычислению двойных интегралов.

1. $\iint_S f(x,y,z)ds$ – *поверхностный интеграл I рода.*

Если поверхность *S* задана:

– уравнением $z = z(x,y)$, то

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_{D_1} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + \left(z'_x(x,y)\right)^2 + \left(z'_y(x,y)\right)^2}\,dxdy\,, \qquad (1.19)$$

где D_1 – проекция поверхности *S* на координатную плоскость *Oxy*;

– уравнением $y = y(x,z)$, то

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_{D_2} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1 + \left(y'_x(x,z)\right)^2 + \left(y'_z(x,z)\right)^2}\,dxdz, \qquad (1.20)$$

где D_2 – проекция поверхности *S* на координатную плоскость *Oxz*;

– уравнением $x = x(y,z)$, то

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_{D_3} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1 + \left(x'_y(y,z)\right)^2 + \left(x'_z(y,z)\right)^2}\,dydz, \qquad (1.21)$$

где D_3 – проекция поверхности *S* на координатную плоскость *Oyz*.

Пусть поверхность *S* задана уравнением $z = z(x,y)$, область *D* – ее проекция на плоскость Oxy, причем $z(x,y)$, $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ – непрерывные в области D функции, тогда площадь поверхности S вычисляется по формуле

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(z'_x(x,y)\right)^2 + \left(z'_y(x,y)\right)^2}\,dxdy. \tag{1.22}$$

2. $\iint_S f(x,y,z)dxdy$ – поверхностный интеграл II рода.

Общий вид: $\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy.$

Если уравнение поверхности S можно записать в виде $z = z(x,y)$, то

$$\iint_S R(x,y,z)\,dxdy = \pm\iint_{D_1} R(x,y,z(x,y))\,dxdy, \tag{1.23}$$

где D_1 – проекция поверхности S на плоскость Oxy, при этом знак « + » соответствует случаю, когда нормаль $\vec{n}$ к поверхности S образует с осью Oz острый угол, знак « – », если этот угол тупой.

Данная формула позволяет свести вычисление поверхностного интеграла второго рода от функции $R(x,y,z)$ по поверхности S к вычислению двойного интеграла по области D_1 – проекции S на плоскость Oxy.

Аналогично вычисляются интегралы от функций $P(x,y,z)$ и $Q(x,y,z)$:

$$\iint_S P(x,y,z)\,dydz = \pm\iint_{D_2} P(x(y,z),y,z)\,dydz, \tag{1.24}$$

$$\iint_S Q(x,y,z)\,dxdz = \pm\iint_{D_3} Q(x,y(x,z),z)\,dxdz, \tag{1.25}$$

где $x = x(y,z)$ и $y = y(x,z)$ – уравнения поверхности S; D_2 и D_3 – проекции поверхности S на плоскости Oyz и Oxz соответственно.

Если функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в пространственной области T, ограниченной замкнутой поверхностью S, то имеет место формула *Остроградского – Гаусса*:

$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oint\!\!\oint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy, \tag{1.26}$$

при этом интегрирование выполняется по внешней стороне поверхности S.

Поверхностные интегралы I и II рода связаны соотношением

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)ds, \tag{1.27}$$

где ds – элемент площади поверхности S; $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали $\vec{n}$ к выбранной стороне поверхности S.

Если функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в точках ориентированной поверхности S, то имеет место формула *Стокса*

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz, \quad (1.28)$$

где L – граница поверхности S и интегрирование вдоль кривой L производится в положительном направлении.

5. Элементы теория поля

Если в каждой точке M некоторой пространственной области задано значение скалярной или векторной величины, то говорят, что в области задано поле этой величины (соответственно скалярное или векторное).

Рассмотрим векторное поле, задаваемое вектором

$$\vec{a}=\vec{a}(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}. \quad (1.29)$$

Ротор $\operatorname{rot}\vec{a}(M)$ векторного поля $\vec{a}$ в точке $M(x;y;z)$ – это вектор, который вычисляется по формуле

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M)=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\Bigg|_M\cdot\bar{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\Bigg|_M\cdot\bar{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\Bigg|_M\cdot\bar{k}. \quad (1.30)$$

Дивергенция $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ векторного поля $\vec{a}$ в точке $M(x;y;z)$ – это число, которое вычисляется по следующей формуле

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}(M)+\frac{\partial Q}{\partial y}(M)+\frac{\partial R}{\partial z}(M). \quad (1.31)$$

Виды векторных полей

1. Если $\operatorname{div}\vec{a}(M)=0$ в каждой точке $M\in D$, то поле $\vec{a}(M)$ называется *соленоидальным*.

2. Если $\operatorname{rot}\vec{a}(M)=\vec{0}$ в каждой точке $M\in D$, то поле $\vec{a}(M)$ называется *потенциальным*. Потенциальное поле является полем градиента некоторой скалярной функции $u=u(x,y,z)$:

$$\vec{a}=\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \quad (1.32)$$

При этом функция $u=u(x,y,z)$ называется *потенциалом* поля $\vec{a}$ и может быть найдена по формуле

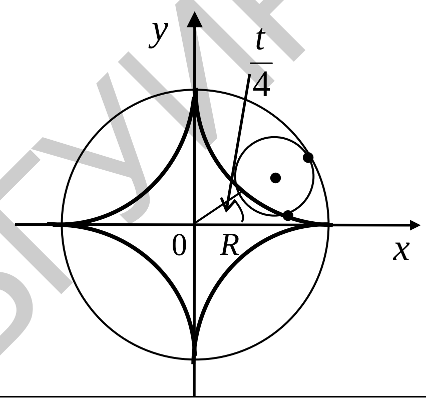
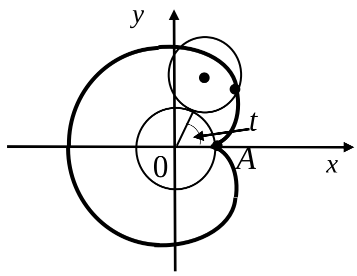
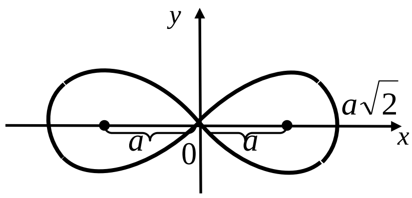
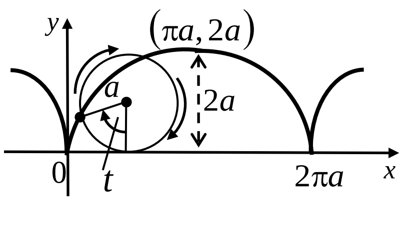
$$u(x,y,z)=\int_{(x_0;y_0;z_0)}^{(x;y;z)} Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$= \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz, \tag{1.33}$$

где $M(x; y; z)$ – произвольная точка рассматриваемой области; $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – некоторая фиксированная точка рассматриваемой области.

3. Если $\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{a}(M) = \vec{0}, \\ \operatorname{div} \vec{a}(M) = 0, \end{cases}$ то поле $\vec{a}(M)$ называется *гармоническим*.

6. Некоторые линии

Название, уравнение	*График*
Астроида Уравнение в декартовых координатах: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$. Параметрические уравнения: $x = R\cos^3\left(\frac{t}{4}\right); \ y = R\sin^3\left(\frac{t}{4}\right)$	
Кардиоида Параметрические уравнения: $x = 2a\cos t - a\cos 2t; \ y = 2a\sin t - a\sin 2t$. Полярное уравнение (с полюсом в точке A): $r = 2a(1 - \cos\varphi), \ a > 0$	
Лемниската Бернулли Уравнение в декартовых координатах: $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$. Полярное уравнение: $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$	
Циклоида Параметрические уравнения: $x = a(t - \sin t); \ y = a(1 - \cos t), \ a > 0$. Уравнение в декартовых координатах: $x = a\arccos\frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$	

1.3. ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Измените порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{2y} f(x,y)dx$.

Решение

Построим область интегрирования D, которая ограничена прямыми $y=1,\ y=3,\ x=0,\ x=2y$ и является правильной в направлении оси *Ox* (формула (1.1), см. подраздел 1.2) (рис. 1.11).

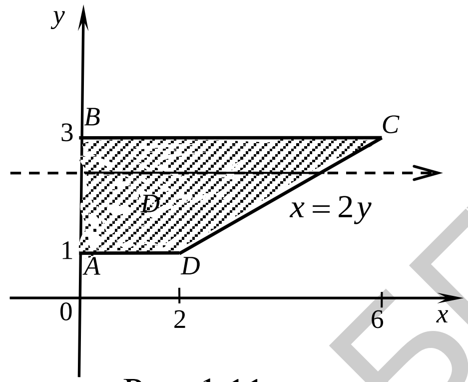


Рис. 1.11

Таким образом, D-трапеция $ABCD$ с вершинами $A(0;1), B(0;3), C(6;3), D(2;1)$.

Изменим порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{2y} f(x,y)dx$.

Область D не является правильной в направлении оси *Oy*, поэтому необходимо разбить ее на две правильные в направлении оси *Oy* области D_1 и D_2 прямой $x=2$ (рис. 1.12).

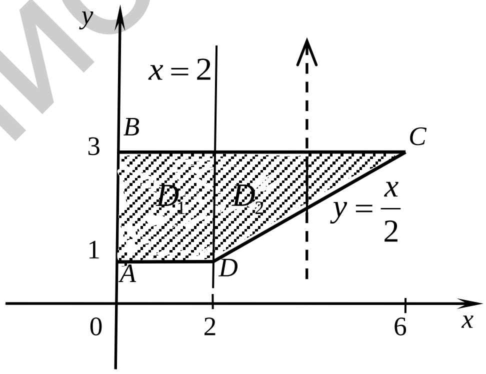


Рис. 1.12

В силу свойства аддитивности двойного интеграла (формула (1.3), см. подраздел 1.2) повторный интеграл $\int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{2y} f(x,y)dx$ будет равен сумме интегралов по каждой из этих областей:

$$D_1 = \{(x;y) \mid 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 3\},\quad D_2 = \left\{(x;y) \,\middle|\, 2 \le x \le 6,\ \frac{x}{2} \le y \le 3\right\}.$$

В результате получим

$$\int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x,y)dx = \int_0^2 dx \int_1^3 f(x,y)dy + \int_2^6 dx \int_{\frac{x}{2}}^3 f(x,y)dy.$$

2. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y)dx\,dy$, где D – область, ограниченная линиями: $x=0,\ y=\frac{3}{2}x\ (x>0),\ y=4-(x-1)^2$.

Решение

Построим область D, ограниченную параболой $y=4-(x-1)^2$, прямой $y=\frac{3}{2}x\ (x>0)$ и осью $Oy\ (x=0)$.

Найдем точки пересечения кривых $y=4-(x-1)^2$, $y=\frac{3}{2}x$. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y=4-(x-1)^2, \\ y=\frac{3}{2}x \end{cases} \Rightarrow\ \frac{3}{2}x=4-(x-1)^2 \ \Leftrightarrow\ (x-1)^2+\frac{3}{2}x-4=0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x^2-2x+1+\frac{3}{2}x-4=0 \ \Leftrightarrow\ 2x^2-4x+2+3x-8=0 \ \Leftrightarrow\ 2x^2-x-6=0.$$

Найдем корни этого квадратного уравнения: $D=1+4\cdot 2\cdot 6=49$, $x_1=\frac{1+7}{4}=\frac{8}{4}=2,\ x_2=\frac{1-7}{4}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}.$

Так как по условию $x>0$, то при $x=2,\ y=\frac{3}{2}\cdot 2=3$. Линии пересекаются в I четверти $(x>0)$ в точке $(2;3)$.

Область D (рис. 1.13) представляет собой криволинейную фигуру $OABC$, где $A(0;3)$ – точка пересечения параболы $y=4-(x-1)^2$ с осью $Oy\ (x=0)$, C – точка пересечения параболы $y=4-(x-1)^2$ и прямой $y=\frac{3}{2}x$.

1) Рассмотрим сначала область D как правильную область в направлении оси Oy (рис. 1.14).

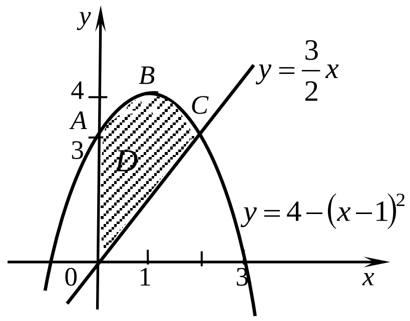


Рис. 1.13

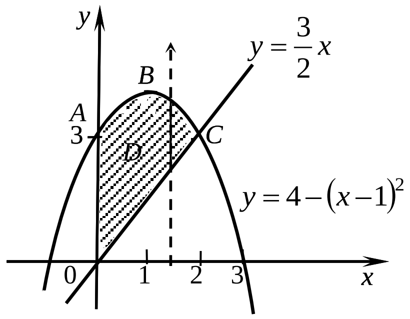


Рис. 1.14

Линия входа в область D – прямая $y=\frac{3}{2}x$, линия выхода из D – парабола $y=4-(x-1)^2$. Переменная x в области D изменяется от 0 до 2.

Итак, от двойного интеграла перейдем к повторному, используя формулу (1.2) (см. подраздел 1.2). Вычисление повторного интеграла начинается с вычисления внутреннего интеграла по переменной y:

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy=\int_0^2 dx\int_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2}(x+y)dy=\int_0^2\left(\int_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2}(x+y)dy\right)dx=$$

$$=\int_0^2\left(xy\Big|_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2}+\frac{y^2}{2}\Big|_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2}\right)dx=$$

$$=\int_0^2\left(x\left(4-(x-1)^2\right)-x\cdot\frac{3}{2}x+\frac{\left(4-(x-1)^2\right)^2}{2}-\frac{\left(\frac{3}{2}x\right)^2}{2}\right)dx=\ldots=$$

$$=\int_0^2\left(-x^3-\frac{37}{8}x^2+11x+4+\frac{(x-1)^4}{2}\right)dx=$$

$$=-\frac{x^4}{4}\Big|_0^2-\frac{37}{8}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2+11\frac{x^2}{2}\Big|_0^2+4x\Big|_0^2+\frac{(x-1)^5}{10}\Big|_0^2=$$

$$=-\frac{16}{4}-\frac{37}{8}\cdot\frac{8}{3}+22+8+\frac{1}{10}-\frac{(0-1)^5}{10}=26+\frac{1}{5}-\frac{37}{3}=\frac{390+3-185}{15}=\frac{208}{15}.$$

2) Если рассматривать область D как правильную область в направлении оси Ox, то для перехода к повторным интегралам необходимо разбить ее прямой $y=3$ на две области D_1 и D_2 (рис. 1.15), для того чтобы в пределах каждой из них линия входа (так же, как и линия выхода) определялась одним и тем же уравнением.

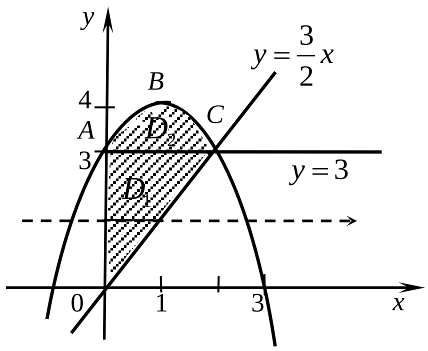


Рис. 1.15

Область D_1 при любом $y \in [0;3]$ ограничена слева прямой $OA\,(x=0)$, справа – прямой OC: $x=\frac{2}{3}y$. Область D_2 при любом $y \in [3;4]$ ограничена слева дугой AB: $x_1 = 1-\sqrt{4-y}$, справа – дугой BC: $x_2 = 1+\sqrt{4-y}$. Оба этих уравнения получены из уравнения параболы $y = 4-(x-1)^2$, разрешенного относительно переменной x: $(x-1)^2 = 4-y \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{4-y}$.

В соответствии со свойством аддитивности двойного интеграла (формула (1.3), см. подраздел 1.2) представим двойной интеграл как сумму двух повторных интегралов с внешним интегрированием по y:

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \int_0^3 dy \int_0^{\frac{2}{3}y} (x+y)dx + \int_3^4 dy \int_{1-\sqrt{4-y}}^{1+\sqrt{4-y}} (x+y)dx =$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^{\frac{2}{3}y} (x+y)dx \right) dy + \int_3^4 \left(\int_{1-\sqrt{4-y}}^{1+\sqrt{4-y}} (x+y)dx \right) dy =$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{x^2}{2} \Bigg|_0^{\frac{2}{3}y} + yx \Bigg|_0^{\frac{2}{3}y} \right) dy + \int_3^4 \left(\frac{x^2}{2} \Bigg|_{1-\sqrt{4-y}}^{1+\sqrt{4-y}} + yx \Bigg|_{1-\sqrt{4-y}}^{1+\sqrt{4-y}} \right) dy = \int_0^3 \left(\frac{\left(\frac{2}{3}y\right)^2}{2} + y \cdot \frac{2}{3}y \right) dy +$$

$$+ \int_3^4 \left(\frac{1}{2}\left((1+\sqrt{4-y})^2 - (1-\sqrt{4-y})^2 \right) + y\left((1+\sqrt{4-y}) - (1-\sqrt{4-y}) \right) \right) dy =$$

$$= \int_0^3 \frac{8}{9} y^2 dy + \int_3^4 2\sqrt{4-y}\,dy + \int_3^4 2y\sqrt{4-y}\,dy =$$

$$=\frac{8}{9}\int_0^3 y^2dy-2\int_3^4(4-y)^{\frac{1}{2}}d(4-y)+\left|\begin{matrix}\sqrt{4-y}=z,\ 4-y=z^2,\\ y=4-z^2,\ dy=-2zdz,\\ z(3)=1,\ z(4)=0\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{8}{9}\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^3-2\frac{(4-y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_3^4-2\int_0^1(4-z^2)z(-2z)dz+C=$$

$$=8+\frac{4}{3}+16\frac{z^3}{3}\Bigg|_0^1-4\frac{z^5}{5}\Bigg|_0^1=\frac{28}{3}+\frac{16}{3}-\frac{4}{5}=\frac{208}{15}.$$

Очевидно, что вычисление интеграла первым способом быстрее приводит к ответу.

3. Переходя к полярной системе координат, вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где область D – круговое кольцо, заключенное между окружностями $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$.

Решение

Изобразим область интегрирования D (рис. 1.16).

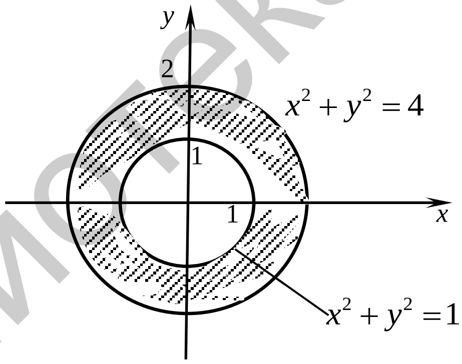


Рис. 1.16

Воспользуемся формулами перехода от декартовых координат к полярным координатам (формула (1.4), см. подраздел 1.2). В новой системе координат уравнение окружности $x^2+y^2=1$ принимает вид $(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=1$, т. е. $r=1$; уравнение $x^2+y^2=4$ имеет вид $(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=4$, откуда $r=2$.

Используя замену $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ dxdy=rdrd\varphi$ (см. подраздел 1.2), где $0\le\varphi\le 2\pi,\ 1\le r\le 2$, перейдем к повторному интегралу по формуле (1.5):

$$\iint\limits_{D} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint\limits_{D^*} \frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}} = \iint\limits_{D^*} d\varphi\,dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 dr = \int\limits_0^{2\pi} \left(r \Big|_1^2 \right) d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

4. Вычислите объем тела, ограниченного плоскостью $6x+3y+2z=6$ и координатными плоскостями Oxy, Oxz, Oyz.

Решение

Запишем уравнение плоскости $6x+3y+2z=6$ в виде уравнения в отрезках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Для этого разделим правую и левую части уравнения на 6, тогда $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.

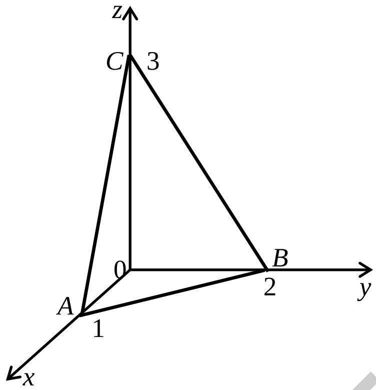


Рис. 1.17

Плоскость $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ пересекает оси Ox, Oy и Oz соответственно в точках $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$. Тело T (рис. 1.17), объем которого надо вычислить, является треугольной пирамидой $CAOB$.

Выразим z из уравнения $6x+3y+2z=6$ плоскости ABC: $z=3-3x-\frac{3}{2}y$.

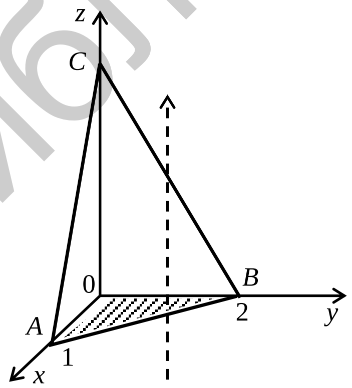


Рис. 1.18

Область T является правильной в направлении оси Oz, так как любая прямая, проведенная внутри области T параллельно оси Oz, пересекает в нижней точке поверхность $z=0$, а в верхней точке поверхность $z=3-3x-\frac{3}{2}y$, ограничивающие эту область (рис. 1.18).

Проекцией грани ABC на плоскость Oxy является треугольник AOB (рис. 1.19). Его границами являются отрезок AO оси Ox, отрезок OB оси Oy и отрезок AB.

Составим уравнение прямой AB, лежащей в плоскости Oxy: $\dfrac{x-1}{0-1}=\dfrac{y-0}{2-0}$, $y=2-2x$.

Проведем прямую, параллельную оси Oy (рис. 1.20), $x\in[0;1]$.

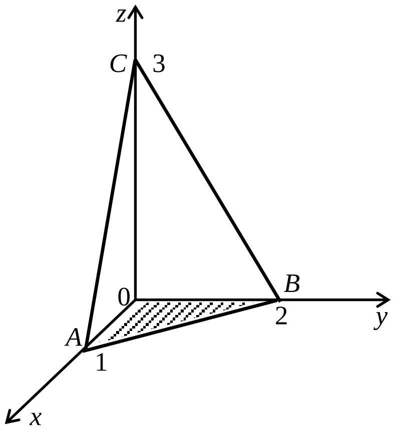


Рис. 1.19

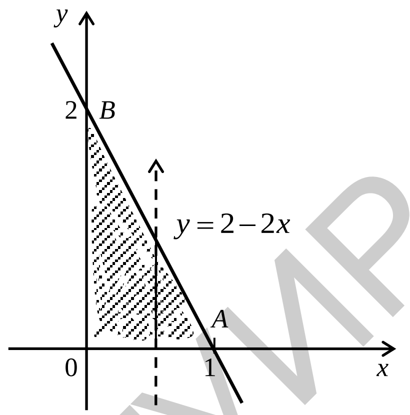


Рис. 1.20

Линией входа в область будет прямая $y=0$ (ось Ox), а линией выхода – прямая $y=2-2x$. В треугольнике AOB переменная x изменяется от 0 до 1. Тогда $\iint\limits_{AOB} dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{2-2x} dy$.

Найдем объем пирамиды $CAOB$ (формулы (1.7) и (1.8), см. подраздел 1.2):

$$V=\iiint\limits_T dx\,dy\,dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{2-2x} dy\int\limits_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{2-2x}\left(z\Big|_0^{3-3x-\frac{3}{2}y}\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{2-2x}\left(3-3x-\frac{3}{2}y\right)dy=\int\limits_0^1\left(\left(3y-3xy-\frac{3}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2-2x}\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(3\cdot(2-2x)-3x\cdot(2-2x)-\frac{3}{4}\cdot(2-2x)^2\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(6-6x-6x+6x^2-\frac{3}{4}\cdot(4-8x+4x^2)\right)dx=\int\limits_0^1\left(3x^2-6x+3\right)dx=$$

$$=3\cdot\int\limits_0^1\left(x^2-2x+1\right)dx=3\cdot\left(\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^1=3\cdot\left(\frac{1}{3}-1+1\right)=3\cdot\frac{1}{3}=1.$$

Проверка ответа по известной формуле вычисления объема прямоугольной пирамиды $V=\dfrac{1}{6}\cdot a\cdot b\cdot c=\dfrac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$ подтверждает его правильность.

5. Вычислите криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L y^2 dl$, где L – арка циклоиды $x = a\cdot(t-\sin t),\ y = a\cdot(1-\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

Решение

Кривая L задана параметрическими уравнениями, поэтому для вычисления интеграла воспользуемся формулой (1.12) (см. подраздел 1.2).

В данном случае $\alpha = 0,\ \beta = 2\pi$, поэтому

$$\int\limits_L y^2 dl = \int\limits_0^{2\pi} y^2(t)\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

По условию $x(t) = a\cdot(t-\sin t),\ y(t) = a\cdot(1-\cos t) \Rightarrow$

$$y^2(t) = (a\cdot(1-\cos t))^2 = a^2\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^2 = 4a^2\sin^4\frac{t}{2},$$

$$x'(t) = a\cdot(1-\cos t),\ y'(t) = a\cdot\sin t \Rightarrow$$

$$(x'(t))^2+(y'(t))^2 = (a\cdot(1-\cos t))^2 + (a\sin t)^2 = a^2\cdot((1-\cos t)^2+\sin^2 t) =$$

$$= 2a^2\cdot(1-\cos t) = 2a^2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2} = 4a^2\sin^2\frac{t}{2},$$

$\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2} = 2a\cdot\left|\sin\frac{t}{2}\right| = 2a\cdot\sin\frac{t}{2}$, так как $0 \le \frac{t}{2} \le \pi$, а значит, $\left|\sin\frac{t}{2}\right| = \sin\frac{t}{2}$.

Получаем

$$\int\limits_L y^2 dl = \int\limits_0^{2\pi} 4a^2\sin^4\frac{t}{2}\,2a\sin\frac{t}{2}\,dt = \int\limits_0^{2\pi} 8a^3\sin^5\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 8a^3\int\limits_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt = -16a^3\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)^2 d\left(\cos\frac{t}{2}\right) =$$

$$= \left|\begin{array}{l}\cos\frac{t}{2} = z,\\ z(0) = 1,\\ z(2\pi) = -1\end{array}\right| = -16a^3\int\limits_1^{-1}(1-z^2)^2\,dz = 16a^3\int\limits_{-1}^{1}(1-2z^2+z^4)\,dz =$$

$$= 16a^3\left(z - \frac{2z^3}{3} + \frac{z^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 16a^3\left(\frac{8}{15}+\frac{8}{15}\right) = 16a^3\frac{16}{15} = \frac{256}{15}a^3.$$

6. Вычислите криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L 2xydx + x^2dy$ по дуге параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(2;2)$.

Решение

Преобразуем данный криволинейный интеграл к определенному интегралу, используя уравнения кривой: $y = \frac{1}{2}x^2$, $dy = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' dx = xdx$, $0 \le x \le 2$.

Тогда $\int\limits_{OA} 2xydx + x^2dy = \int\limits_0^2 2x\left(\frac{1}{2}x^2\right)dx + x^2xdx = \int\limits_0^2 2x^3dx = \left.\frac{x^4}{2}\right|_0^2 = 8$.

7. Вычислите поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_S z\sqrt{1 + x^2 + y^2}\,ds$, если уравнение поверхности S имеет вид $2z = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 2$.

Решение

Определим тип поверхности S. Выразим z из уравнения поверхности: $2z = x^2 + y^2 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. В нашем случае поверхность S является частью параболоида вращения $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, отсеченной плоскостью $z = 2$ (рис. 1.21).

Проекция поверхности S на плоскость Oxy представляет собой круг с центром в начале координат радиусом 2, т. е. область $D = \left\{(x;y) \middle| x^2 + y^2 \le 4\right\}$ (рис. 1.22).

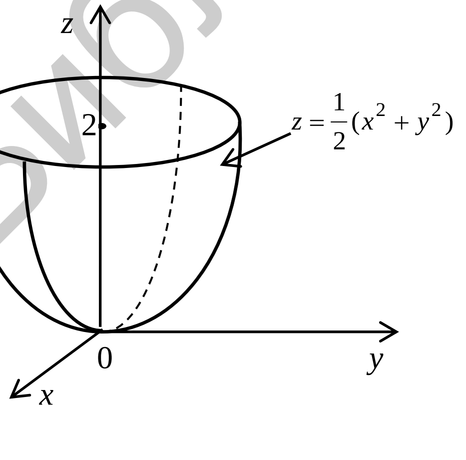


Рис. 1.21

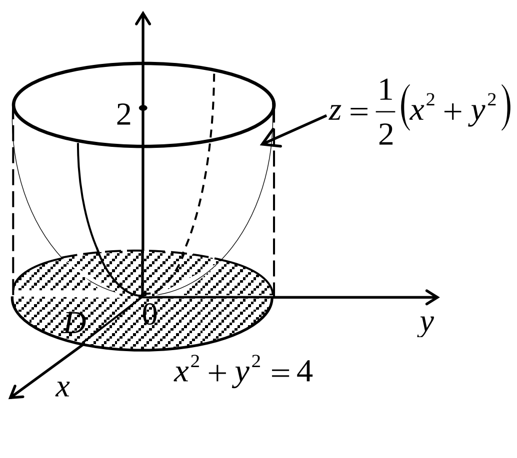


Рис. 1.22

Заметим, что уравнение окружности $x^2+y^2=4$ получено из уравнения параболоида $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ подстановкой в него значения $z=2$.

Для вычисления данного поверхностного интеграла 1-го рода воспользуемся формулой (1.19) (см. подраздел 1.2).

Поскольку $z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$, $z'_x(x,y)=x$, $z'_y(x,y)=y$, то

$$\iint\limits_S z\sqrt{1+x^2+y^2}\,ds=\iint\limits_D \frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)(1+x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Так как подынтегральная функция полученного двойного интеграла содержит сумму x^2+y^2, то для упрощения вычислений перейдем к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ (формула (1.4), см. подраздел 1.2).

Переменная r изменяется от 0 до 2, а переменная φ – от 0 до 2π.

После перехода к полярным координатам найдем полученный повторный интеграл по формуле (1.5) (см. подраздел 1.2):

$$\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)(1+x^2+y^2)\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 r^2(1+r^2)\,r\,dr=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 (r^3+r^5)\,dr=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\left(\frac{r^4}{4}+\frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^2\right)d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{16}{4}+\frac{64}{6}\right)d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(4+\frac{32}{3}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{44}{3}\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{22}{3}\cdot 2\pi=\frac{44}{3}\pi.$$

8. Проверьте, является ли векторное поле

$$\vec{a}(M)=(2x+4z^2)\vec{i}+\cos y\,\vec{j}+(z^2+8zx)\vec{k}$$

потенциальным, и в случае потенциальности поля найдите его потенциал.

Решение

Поле $\vec{a}$ потенциально, если его ротор равен $\vec{0}$ (см. подраздел 1.2, п. 5).

Вычислим ротор по формуле (1.30) (см. подраздел 1.2):

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2x+4z^2 & \cos y & z^2+8zx\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \cos y & z^2+8zx \end{vmatrix}\cdot\vec{i}+\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ z^2+8zx & 2x+4z^2 \end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 2x+4z^2 & \cos y \end{vmatrix}\cdot\vec{k}=$$

$$=\left(\frac{\partial(z^2+8zx)}{\partial y}-\frac{\partial(\cos y)}{\partial z}\right)\cdot\vec{i}+\left(\frac{\partial(2x+4z^2)}{\partial z}-\frac{\partial(z^2+8zx)}{\partial x}\right)\cdot\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial(\cos y)}{\partial x}-\frac{\partial(2x+4z^2)}{\partial y}\right)\cdot\vec{k}=(0-0)\cdot\vec{i}+(8z-8z)\cdot\vec{j}+(0-0)\cdot\vec{k}=\vec{0}.$$

Итак, поле $\vec{a}(M)$ потенциально. Его потенциал найдем по формуле (1.33) (см. подраздел 1.2). В качестве начальной точки M_0 выберем начало координат $O(0;0;0)$.

$$u(x,y,z)=\int_0^x 2x\,dx+\int_0^y \cos y\,dy+\int_0^z (z^2+8zx)\,dz=$$

$$=2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^x+\sin y\Big|_0^y+\frac{z^3}{3}\Big|_0^z++8x\cdot\frac{z^2}{2}\Big|_0^z=x^2+\sin y+\frac{z^3}{3}+4xz^2+C.$$

Для проверки решения найдем градиент полученной функции (формула (1.32), см. подраздел 1.2):

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=(2x+4z^2)\cdot\vec{i}+\cos y\cdot\vec{j}+(z^2+8zx)\cdot\vec{k}.$$

Получаем, что $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u=\vec{a}$. Проверка подтвердила полученный результат.

Итак, поле является потенциальным, $u(x,y,z)=x^2+\sin y+\dfrac{z^3}{3}+4xz^2+C$.

9. Определите вид (соленоидальное, потенциальное, гармоническое) векторного поля $\vec{a}(M)=(y+z)\vec{i}+(z+x)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$.

Решение

Вычислим ротор и дивергенцию данного векторного поля.

По условию $P=y+z,\ Q=z+x,\ R=x+y$ (формула (1.18), см. подраздел 1.2). Согласно формулам (1.30) и (1.31) (см. подраздел 1.2), найдем $\mathrm{rot}\,\vec{a}(M)$ и $\mathrm{div}\,\vec{a}(M)$:

$$\mathrm{rot}\,\vec{a}(M)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial(x+y)}{\partial y}-\frac{\partial(z+x)}{\partial z}\right)\cdot\vec{i}+\left(\frac{\partial(y+z)}{\partial z}-\frac{\partial(x+y)}{\partial x}\right)\cdot\vec{j}+\left(\frac{\partial(z+x)}{\partial x}-\frac{\partial(y+z)}{\partial y}\right)\cdot\vec{k}=$$

$$=(1-1)\cdot\vec{i}+(1-1)\cdot\vec{j}+(1-1)\cdot\vec{k}=\vec{0};$$

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\frac{\partial P(M)}{\partial x}+\frac{\partial Q(M)}{\partial y}+\frac{\partial R(M)}{\partial z}=0+0+0=0.$$

Данное векторное поле является (подраздел 1.2, п. 5):

1) потенциальным, т. к. $\operatorname{rot}\vec{a}(M)=\vec{0}$;

2) соленоидальным, т. к. $\operatorname{div}\vec{a}(M)=0$;

3) гармоническим, т. к. $\begin{cases}\operatorname{rot}\vec{a}(M)=\vec{0},\\ \operatorname{div}\vec{a}(M)=0.\end{cases}$

1.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Измените порядок интегрирования в повторном интеграле. Область интегрирования изобразите на чертеже.

1	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$	2	$\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)dy$
3	$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{y} f(x,y)dx$	4	$\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$
5	$\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{y^2-4}^{0} f(x,y)dx$	6	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{3-2x} f(x,y)dy$
7	$\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-1}^{3-x^2} f(x,y)dy$	8	$\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{-y}} f(x,y)dx$
9	$\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\sqrt[3]{\frac{y}{2}}}^{3-y} f(x,y)dx$	10	$\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy$

2. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, где D – область, ограниченная линиями.

№ п/п	$f(x,y)$	D
1	x^2+y	$y=x^2,\ y^2=x$
2	x^3y^2	$x=0,\ y=1,\ x=1, y=2$
3	$\dfrac{x^2}{y^2}$	$y=x,\ x=2,\ xy=1$

№ п/п	$f(x,y)$	D
4	$2+xy^3$	$x=1,\ x=2,\ y=2,\ y=4$
5	x^3+y^3	$y=\frac{1}{2}x,\ y=x,\ x=4$
6	$x+2y$	$y=0,\ x=0,\ 2x+3y-6=0$
7	x^2+y^2	$y=1-x,\ x-y=1,\ x=0$
8	$xy+1$	$y=0,\ x=2,\ y=1,\ x=1-y$
9	$\dfrac{y^3}{x^2}$	$y=\sqrt{x},\ y=\frac{1}{3}x,\ x=1$
10	$x+y$	$y=x^2,\ x=0,\ x=1$

3. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ по области D, ограниченной указанными линиями, с помощью перехода к полярным координатам.

№ п/п	$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$	D
1	$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$	четверть круга $x^2+y^2=1$, расположенная в первой четверти
2	$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$	ограничена линиями $y=x,\ y=\sqrt{3}x$ и дугой окружности $x^2+y^2=8$, лежащей в первой четверти
3	$\iint\limits_D xy^2\,dx\,dy$	ограничена окружностями $x^2+(y-2)^2=4$, $x^2+(y-1)^2=1$
4	$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$	круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=4$ и прямыми $x=0,\ y=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0$
5	$\iint\limits_D \dfrac{y-4x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$	часть кольца $4\le x^2+y^2\le 9,\ x\le 0,\ y\ge 0$
6	$\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)\,dxdy$	полукруг $x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0$
7	$\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy$	круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=4$
8	$\iint\limits_D xy^2\,dx\,dy$	часть кольца $4\le x^2+y^2\le 16,\ x\ge 0,\ y\le 0$
9	$\iint\limits_D \dfrac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy$	треугольник $-x\le y\le x,\ x\le 2$
10	$\iint\limits_D xy\,dx\,dy$	полукруг $x^2+y^2\le 2x,\ y\le 0$

4. С помощью тройного интеграла вычислите в декартовой системе координат объем тела V, ограниченного указанными поверхностями.

№ п/п	V
1	$2x+3y+z-12=0,\ x=0, y=0,\ z=0$
2	$x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$
3	$\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=1$
4	$7x+y+z-7=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0$
5	$\frac{x}{7}+\frac{y}{2}+\frac{z}{7}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$
6	$x+y+2z-6=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0$
7	$3x+9y+z=9,\ x=0,\ y=0,\ z=0$
8	$2x+y+z=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0$
9	$x+y+z=2,\ x=0,\ y=0,\ z=1$
10	$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

5. Вычислите криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L f(x,y)\,dl$ вдоль замкнутой кривой L.

№ п/п	$f(x,y)$	L
1	x^2+y^2	дуга окружности с центром в начале координат радиусом 1, соединяющая точки $A(0;1)$ и $B(1;0)$
2	$\sqrt{x^2+y^2}$	правый лепесток лемнискаты Бернулли, $r^2=a^2\cos 2\varphi$, $-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$
3	x^2	заданная параметрически полуокружность $x^2+y^2=9$, $y\le 0$
4	e^x	$x=\ln(1+t^2),\ y=2\,\mathrm{arctg}\,t-t,\quad 0\le t\le 3$
5	$\frac{1}{y\sqrt{x^2+4y}}$	$x=e^t,\ y=t^2,\quad 1\le t\le 2$
6	$x+y$	лепесток лемнискаты $r^2=5\cos 2\varphi$, $-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$
7	$\frac{1}{\sqrt[4]{8x^3y^3}}$	$r=\sqrt{\sin 2\varphi}$, $\quad\frac{\pi}{8}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$
8	$\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$	дуга кардиоиды $r=1+\cos\varphi$, $\quad 0\le\varphi\le\pi$

№ п/п	$f(x,y)$	L
9	y^2	$x=\ln t,\ y=2\sqrt{t},\quad 3\le t\le 8$
10	$\sqrt{x^2+y^2}$	спираль $r=e^{\varphi},\quad 0\le\varphi\le\pi$

6. Вычислите криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ по указанной дуге кривой L от точки *A* до точки *B*.

№ п/п	$P(x,y)$	$Q(x,y)$	L	A	B
1	xy	x^2+y	$y=\frac{x^2}{2}+1$	(0;1)	(2;3)
2	x^2y	$x+1$	$y=x$	(0;0)	(1;1)
3	$2y-6xy^3$	$2x-9x^2y^2$	$x=\frac{y^2}{2}$	(0;0)	(2;2)
4	$4x-y$	$5x^2y$	$y=3x^2$	(0;0)	(1;3)
5	x^2	$\frac{1}{y^2}$	$x=\frac{1}{y}$	(1;1)	$(4;\frac{1}{4})$
6	$4x+y$	$x+4y$	$y=x^4$	(1;1)	(−1;1)
7	$2xy$	$\frac{2}{5}y-x^2$	$y=x^3$	(0;0)	(2;8)
8	$x+y$	$x-y$	$y^2=x$	(0;0)	(1;1)
9	$xy-1$	x^2y	$2x+y=2$	(1;0)	(0;2)
10	x^2-2xy	$xy+y$	$y=x^2$	(1;1)	(2;4)

7. Вычислите поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_S f(x,y,z)ds$.

№ п/п	$f(x,y,z)$	S
1	$z+2x+\frac{4}{3}y$	$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$
2	$\sqrt{1+4x^2+4y^2}$	часть поверхности $z=1-x^2-y^2$, отсеченная плоскостью $z=0$
3	$4x-4y-z$	часть плоскости $x+2y+2z=4$, лежащая в первом октанте
4	x^2+y^2	часть конической поверхности $z^2=x^2+y^2$, заключенной между плоскостями $z=0$, $z=1$.
5	$x-3y+2z$	$4x+3y+2z-4=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$

№ п/п	$f(x, y, z)$	S
6	$(x+z)y$	часть цилиндра $y^2+x^2=1$, отсекаемая плоскостями $z=0,\ z=1$
7	x	полусфера, заданная уравнением $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$
8	x^2-yz	часть плоскости $z=-2x-y+2$, лежащая в первом октанте
9	$\dfrac{z^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	часть конуса $z^2=x^2+y^2\ (z\geq 0)$, отсекаемая плоскостью $z=2$
10	$3x+y+z-1$	часть плоскости $2x+y+z=1$, лежащая в первом октанте

8. Проверьте, является ли векторное поле

$$\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

потенциальным, и в случае потенциальности поля найдите его потенциал.

№ п/п	$\vec{a}$
1	$(x+y+2z)\vec{i}+(x-2y-z)\vec{j}+(2x-y+z)\vec{k}$
2	$(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$
3	$(x^2+3yz)\vec{i}+(2y^2+3xz)\vec{j}+(z^2+3xy)\vec{k}$
4	$(2x+yz)\vec{i}+xz\vec{j}+(xy+2z)\vec{k}$
5	$(4x-3yz)\vec{i}+(4y-3xz)\vec{j}+(4z-3xy)\vec{k}$
6	$(2xy+3y^2+9y)\vec{i}+(x^2+6xy+9x)\vec{j}$
7	$(3x+y^2)\vec{i}+2xy\vec{j}$
8	$y^2z^3\vec{i}+(z^2+2xyz^3)\vec{j}+(3xy^2z^2+2yz+1)\vec{k}$
9	$(x^2-2yz)\vec{i}+(y^2-2xz)\vec{j}+(z^2-2xy)\vec{k}$
10	$(6x-7yz)\vec{i}+(6y-7xz)\vec{j}+(6z-7xy)\vec{k}$

9. Определите вид (соленоидальное, потенциальное, гармоническое) векторного поля $\vec{a}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$.

№ п/п	$\vec{a}$	№ п/п	$\vec{a}$
1	$(7+3x,\ 2-3y,\ 1+x-2y)$	6	$(-z,\ 5,\ -x+2)$
2	$(2z-x^2,\ 2xy-5,\ xy-1)$	7	$(zy^2,\ xz^2,\ yx^2)$
3	$(x^2z,\ -2xz^2+4x,\ 8-xz^2)$	8	$(-2x,\ -1+y,\ 4+z)$
4	$(2xy+2z,\ x^2+1,\ 2x+5)$	9	$(yz,\ xz,\ xy)$
5	$(x+z,\ 2y,\ x+y-z)$	10	$(4yx+z,\ -2y^2+1,\ x+y)$

Ответы

1.

1	$\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$	2	$\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$
3	$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$	4	$\int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{0}^{4} f(x,y)dx + \int\limits_{3}^{5} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx$
5	$\int\limits_{-4}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{4+x}}^{0} f(x,y)dy$	6	$\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y^2} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{0}^{\frac{3-y}{2}} f(x,y)dx$
7	$\int\limits_{-1}^{3} dy \int\limits_{-\sqrt{3-y}}^{\sqrt{3-y}} f(x,y)dx$	8	$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{-x^2} f(x,y)dy$
9	$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{2x^3} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{0}^{3-x} f(x,y)dy$	10	$\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{\frac{1}{2}y}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{\frac{1}{2}y}^{2} f(x,y)dx$

2. 1) $\frac{33}{140}$; 2) $\frac{7}{12}$; 3) $\frac{9}{4}$; 4) 94; 5) $\frac{752}{5}$;
6) 7; 7) $\frac{1}{3}$; 8) $\frac{59}{24}$; 9) $\frac{121}{486}$; 10) $\frac{9}{20}$.

3. 1) $\frac{\pi}{4}(e-1)$; 2) $\frac{4}{3}\pi$; 3) 0; 4) 2π; 5) 5;
6) $\frac{\pi}{2}\sin 1$; 7) $\frac{16}{3}\pi$; 8) $\frac{992}{15}$; 9) π; 10) $-\frac{2}{3}$.

4. 1) 48; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) $\frac{49}{6}$; 5) $\frac{49}{3}$;
6) 18; 7) $\frac{9}{2}$; 8) $\frac{16}{3}$; 9) $\frac{1}{6}$; 10) 4.

5. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi a^2}{2}$; 3) $\frac{27\pi}{2}$; 4) 12; 5) $\frac{1}{2}$;
6) $5\sqrt{2}$; 7) $\frac{1}{2}$; 8) $4(\pi-2)$; 9) $\frac{152}{3}$; 10) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^{2\pi}-1\right)$.

6. 1) 12; 2) $\frac{7}{4}$; 3) –88; 4) 16; 5) 18;

6) –2; 7) $\frac{32}{5}$; 8) 1; 9) 1; 10) $\frac{221}{15}$.

7. 1) $4\sqrt{61}$; 2) 3π; 3) 12; 4) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{29}}{9}$;

6) 1; 7) 0; 8) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$; 9) 8π; 10) $\frac{\sqrt{6}}{24}$.

8.

1	$\frac{x^2}{2}+xy-y^2+2xz-yz+\frac{z^2}{2}+C$	2	$xy+xz+yz+C$
3	$\frac{1}{3}\left(x^3+2y^3+z^3\right)+3xyz+C$	4	$x^2+xyz+z^2+C$
5	$2x^2+2y^2+2z^2-3xyz+C$	6	$x^2y+3xy^2+9xy+C$
7	$\frac{3}{2}x^2+y^2x+C$	8	$xy^2z^3+yz^2+z+C$
9	$\frac{1}{3}\left(x^3+y^3+z^3\right)-2xyz+C$	10	$7xyz-3x^2-3y^2-3z^2+C$

9.

1	соленоидальное	2	соленоидальное
3	соленоидальное	4	потенциальное
5	соленоидальное	6	гармоническое
7	соленоидальное	8	гармоническое
9	гармоническое	10	соленоидальное

1.5. ТЕСТОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
по теме
«Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.
Элементы теории поля»

Задание 1. Перейдите в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ к двукратному и расставьте пределы интегрирования. Область D задана ограничивающими ее линиями.

№ п/п	D	№ п/п	D
1	$y=4x-4,\ y=6-x,\ y=0$	2	$y-x=0,\ y-2x=0,\ x=2,\ x=3$
3	$x=0,\ y=0,\ y=1-x$	4	$y-1=0,\ y-x^2=0,\ x=0,\ x=1$
5	$x-y^2=-2,\ x-y=0$	6	$x+y=5,\ x=0,\ y=0$
7	$y+x=2,\ y=x^2,\ x=0,\ x=1$	–	–

Задание 2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями.

1	$y^2 = 2x,\ y = x$	2	$y = 3,\ y = x^2 - 2$
3	$y = 2 - x,\ x = 2y - y^2$	4	$y = 0,\ y = 3 - x,\ y = 2x^3$
5	$y = 2 - x^2,\ x = y$	6	$y = 2x,\ y + 1 = 3x^2$
7	$y = x^2 - 2x,\ y = x$	–	–

Задание 3. Вычислите тройные интегралы по указанным областям.

1	$\iiint\limits_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, V – прямоугольный параллелепипед: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3$
2	$\iiint\limits_V x^2 yz\,dx\,dy\,dz$, V ограничена плоскостями: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z - 2 = 0$
3	$\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz$, V – треугольная пирамида, ограниченная плоскостями: $2x + y + z - 4 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$
4	$\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$, V ограничена плоскостями: $x = 0,\ y = 0,\ z = 1,\ x + y + z = 2$
5	$\iiint\limits_V (x+z)\,dx\,dy\,dz$, V ограничена плоскостями: $x = 1,\ y = 0,\ y = x,\ z = 0,\ x + y + z - 4 = 0$
6	$\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz$, V ограничена плоскостями: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ 2x + 2y + z - 6 = 0$
7	$\iiint\limits_V (x + 2y + 3z + 4)\,dx\,dy\,dz$, V – прямоугольный параллелепипед: $0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 1$

Задание 4. Вычислите криволинейный интеграл I рода.

1	$\int\limits_L (x+y)\,dl$, где L – ломаная ABO: $A(1;0),\ B(0;1),\ O(0;0)$
2	$\int\limits_L x\sqrt{x^2+1}\,dl$, где L – дуга кривой $y = \ln x$ между точками с абсциссами $x = 1,\ x = 4$
3	$\int\limits_L x\,dl$, L – дуга параболы $2y = x^2$ от точки $A(0;0)$ до точки $B\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$
4	$\int\limits_L (x-y)\,dl$, где L – отрезок прямой от точки $A(0;0)$ до точки $B(4;3)$
5	$\int\limits_L \dfrac{dl}{x+y}$, L – отрезок прямой $y = x + 2$, соединяющий точки $A(2;4)$, $B(1;3)$

6	$\int_L dl$, L – отрезок прямой от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;2)$
7	$\int_L x^2 y\,dl$, L – отрезок прямой $y = x$ от начала координат до точки $(2;2)$

Задание 5. Вычислите криволинейный интеграл II рода $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ по указанной дуге кривой L от точки *A* до точки *B*.

№ п/п	$P(x,y)$	$Q(x,y)$	L	A	B
1	$x+y$	$4xy$	$y=2x^2$	(0;0)	(1;2)
2	$2x^2$	$3x-y$	$x+y=1$	(–1;2)	(0;1)
3	$6x$	$x-2y^2$	$y=x^3$	(0;0)	(1;1)
4	$xy+5$	$5xy+y$	$y=\dfrac{x^2}{2}+1$	(0;1)	(2;3)
5	x^2+4xy	xy	$y^2=x$	(0;0)	(1;1)
6	$3x-y$	y	$y=2+x$	(1;3)	(2;4)
7	$xy+5$	$5y-2$	$y=x^2-1$	(0;–1)	(1;0)

Задание 6. Найдите дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = [\vec{c}, \overrightarrow{\mathrm{grad}\,u}]$.

1	$\vec{c}=2\vec{j}-\vec{k},\ u=-yx^2+z^2+x$	2	$\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k},\ u=y+xy+z$
3	$\vec{c}=-\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k},\ u=xy+y^2z+x$	4	$\vec{c}=5\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k},\ u=2y+\frac{1}{2}z^2+xy$
5	$\vec{c}=-4\vec{i}+7\vec{j},\ u=2yx-z^3$	6	$\vec{c}=-3\vec{i}+2\vec{j},\ u=y^2+xz^3$
7	$\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k},\ u=x^2+2y+yz$	–	–

Ответы

Задание 1.

1	1) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{y}{4}+1}^{6-y} f(x,y)\,dx$; 2) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{y}{4}+1}^{6+y} f(x,y)\,dy$; 3) $\int\limits_0^6 dy \int\limits_{4x-4}^{6-x} f(x,y)\,dx$; 4) $\int\limits_0^6 dy \int\limits_{\frac{y+4}{4}}^{6-y} f(x,y)\,dx$
2	1) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2x} f(x,y)\,dy$; 2) $\int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)\,dy$; 3) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_2^3 f(x,y)\,dx$; 4) $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{2x} f(x,y)\,dy$
3	1) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1+x} f(x,y)\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f(x,y)\,dx$; 3) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} f(x,y)\,dy$; 4) $\int\limits_0^x dx \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy$
4	1) $\int\limits_1^y dx \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy$; 2) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^1 f(x,y)\,dy$; 3) $\int\limits_1^x dy \int\limits_0^1 f(x,y)\,dx$; 4) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy$
5	1) $\int\limits_{-1}^2 dy \int\limits_{2-y^2}^{y} f(x,y)\,dx$; 2) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^y f(x,y)\,dx$; 3) $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{x+2}}^{\sqrt{x+2}} f(x,y)\,dy$; 4) $\int\limits_0^{-2-x} dx \int\limits_{-2}^{y} f(x,y)\,dy$
6	1) $\int\limits_0^{y-x} dx \int\limits_0^5 f(x,y)\,dy$; 2) $\int\limits_0^{5-y} dy \int\limits_0^5 f(x,y)\,dx$; 3) $\int\limits_0^5 dx \int\limits_0^{y-5} f(x,y)\,dy$; 4) $\int\limits_0^5 dx \int\limits_0^{5-x} f(x,y)\,dy$
7	1) $\int\limits_0^{x^2} dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)\,dy$; 2) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy$; 3) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy$; 4) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$

Задание 2.

1	1) $\frac{1}{3}$;	2) 6;	3) $\frac{2}{3}$;	4) 1
2	1) 10;	2) $\frac{20\sqrt{5}}{3}$;	3) 20;	4) $\frac{10\sqrt{5}}{3}$
3	1) 2;	2) $\frac{1}{6}$;	3) $\frac{1}{3}$;	4) 1
4	1) 154;	2) $\frac{154}{45}$;	3) $\frac{1}{45}$;	4) $\frac{102}{45}$
5	1) 3;	2) $\frac{1}{2}$;	3) 17;	4) $\frac{9}{2}$
6	1) $\frac{32}{27}$;	2) $\frac{1}{7}$;	3) 32;	4) 18
7	1) $\frac{1}{2}$;	2) $\frac{5}{2}$;	3) $\frac{9}{2}$;	4) $\frac{11}{2}$

Задание 3.

1	1) 6;	2) 13;	3) 1;	4) 18
2	1) 212;	2) $\frac{16}{315}$;	3) $\frac{5}{315}$;	4) 102
3	1) 22;	2) $\frac{16}{3}$;	3) $\frac{2}{3}$;	4) 16
4	1) 12;	2) 1;	3) $\frac{1}{6}$;	4) 5
5	1) $\frac{13}{4}$;	2) 13;	3) $\frac{5}{4}$;	4) $\frac{1}{4}$
6	1) $\frac{1}{4}$;	2) $\frac{27}{4}$;	3) 13;	4) 4
7	1) 12;	2) $\frac{1}{2}$;	3) 54;	4) 27

Задание 4.

1	1) $\sqrt{3}$;	2) $\sqrt{2}+1$;	3) $\sqrt{2}+7$;	4) 2
2	1) 24;	2) 2;	3) 18;	4) 12
3	1) $2\sqrt{2}$;	2) $\frac{1}{3}$;	3) $\frac{1}{6}$;	4) $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$
4	1) 11;	2) $\frac{5}{2}$;	3) $\frac{11}{2}$;	4) 6

5	1) $\ln 3$;	2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;	3) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 3 - \ln 2)$;	4) $\sqrt{2}$
6	1) $\sqrt{5}$;	2) $\sqrt{6}$;	3) 5;	4) 1
7	1) 12;	2) $\sqrt{2}$;	3) $4\sqrt{2}$;	4) 4

Задание 5.

1	1) $\frac{20}{30}$;	2) $\frac{1}{3}$;	3) $\frac{227}{30}$;	4) $\frac{200}{30}$
2	1) $\frac{1}{3}$;	2) 3;	3) $\frac{2}{3}$;	4) $\frac{11}{3}$
3	1) $\frac{37}{12}$;	2) 3;	3) $\frac{9}{12}$;	4) 4
4	1) 34;	2) $\frac{40}{3}$;	3) 16;	4) $\frac{142}{3}$
5	1) $\frac{1}{3}$;	2) $\frac{131}{60}$;	3) $\frac{8}{5}$;	4) $\frac{1}{4}$
6	1) 6;	2) $\frac{3}{2}$;	3) 9;	4) $\frac{9}{2}$
7	1) 19;	2) 5;	3) $\frac{1}{4}$;	4) $\frac{1}{2}$

Задание 6.

№ п/п		$\operatorname{div}\vec{a}$	$\operatorname{rot}\vec{a}$
1	1)	0	$4x\vec{i} + 4\cdot(1-y)\vec{j} + 2y\vec{k}$
	2)	2	$\vec{0}$
	3)	0	$4x\vec{i} - 2y\vec{k}$
	4)	-2	$\vec{0}$
2	1)	1	$2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$
	2)	0	$-2\vec{i} - \vec{j}$
	3)	0	$\vec{0}$
	4)	2	$\vec{0}$
3	1)	0	$-(2z+3)\vec{i} + (1-2y)\vec{j} + 2(z-3y)\vec{k}$
	2)	0	$(3y-z)\vec{i} + \vec{j}$
	3)	$(y-1)\vec{i} + 2\vec{k}$	$(3-z)\vec{i} + 2\vec{j} - 6y\vec{k}$
	4)	$\vec{i} - 2y\vec{j} + 2y\vec{k}$	$-2z\vec{i} + (1-2y)\vec{j} + (6y-z)\vec{k}$

№ п/п		$\operatorname{div}\vec{a}$	$\operatorname{rot}\vec{a}$
4	1)	0	$2x\vec{i}-4y\vec{j}+\vec{k}$
	2)	$2\vec{i}+(1+z)\vec{j}$	$(x^2-2)\,\vec{i}+2\vec{k}$
	3)	2	$x(x-2z)\vec{j}$
	4)	0	$\vec{0}$
5	1)	$21z^2\,\vec{i}-12z^2\vec{j}+4\vec{k}$	$\vec{0}$
	2)	0	$-2(7-12z)\vec{i}+2(4-21z)\,\vec{j}$
	3)	$2z\vec{i}-12z\,\vec{j}+4\vec{k}$	$3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$
	4)	0	$12xy\vec{i}+7\vec{k}$
6	1)	0	$4\vec{k}$
	2)	$6z^2$	$18z\vec{i}+12\vec{j}-9\vec{k}$
	3)	0	$(18z-6)\vec{i}+9z^2\vec{k}$
	4)	0	$-6(3zx+1)\,\vec{i}+12zx\vec{j}+9z^2\vec{k}$
7	1)	$12x^2+24x^2z+6z$	$-3(2zx^2+1)\,\vec{i}-3(8x-3)\vec{j}+3x(2z^2-3)\vec{k}$
	2)	0	$3z^2\,\vec{i}+(24x-3)\vec{j}+9\vec{k}$
	3)	$4x^3+6+24x^2z$	$2zx^2\,\vec{i}-8x\,\vec{j}$
	4)	0	$-9\vec{j}+6\vec{k}$

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В результате изучения данной темы студент должен научиться:

– проверять, является ли указанная функция решением данного дифференциального уравнения;

– находить общее и частное решения дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными;

– находить общий и частный интегралы однородного дифференциального уравнения первого порядка;

– решать задачу Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка и уравнения Бернулли;

– интегрировать дифференциальное уравнение высшего порядка, разрешенное относительно старшей производной;

– находить общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения со специальной правой частью, а также находить его частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям;

– решать линейные однородные системы двух уравнений первого порядка методом исключения (путем сведения системы к однородному дифференциальному уравнению второго порядка).

2.1. ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Проверьте, являются ли указанные функции решениями дифференциального уравнения (системы дифференциальных уравнений).

1) $\left(x^2-x\right)y'+y=x^2(2x-1)$:

а) $y_1=x^2-\dfrac{3x}{x-1}$; б) $y_2=x^2+C$; в) $y_3=\dfrac{C}{x}$; г) $y_4=x^2-\dfrac{Cx}{x-1}$.

2) $y'''-2y''-y'+2y=0$:

а) $y_1=e^x$; б) $y_2=2e^{-x}$; в) $y_3=\cos 2x$; г) $y_4=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}$.

3) $\begin{cases}\dot{x}=-7x+y,\\ \dot{y}=-2x-5y:\end{cases}$

а) $\begin{cases}x_1=e^{-6t},\\ y_1=\cos t-\sin t;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x_2=e^{-6t}\left(C_1\cos t-C_2\sin t\right),\\ y_2=e^{-6t}\left(C_1(\cos t-\sin t)+C_2(\cos t+\sin t)\right).\end{cases}$

2. Определите тип дифференциального уравнения первого порядка и найдите его общее (частное) решение.

1) $y'=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}}$, $y(0)=1$; 2) $\sqrt{4-x^2}\,y'=\sqrt{y}$; 3) $xydx=\left(x^2+9\right)dy$;

4) $y'=\dfrac{2y-x^2}{x}$; 5) $y'-y=2xy^2$, $y(0)=2$; 6) $\left(x^2-y^2\right)dx+2xydy=0$;

7) $\left(xy+y^2\right)dx+x^2dy=0$, $y(1)=-\dfrac{1}{2}$.

3. Найдите общее (частное) решение дифференциального уравнения высшего порядка. Определите порядок и тип уравнения.

1) $y'' - 8y'' + 7y = 0$; 2) $y'' - 10y' + 25y = 0, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 36$;

3) $y'' - 4y' + 5y = 0$; 4) $y'' = 80x^3 - 8e^{2x} + 2$;

5) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = -1$.

4. Составьте частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения со специальной правой частью с неопределенными коэффициентами.

1) $y'' - 8y'' + 7y = f(x)$:

а) $f(x) = 5e^x$; б) $f(x) = x^2 + 4$; в) $f(x) = e^{7x}\cos x$;

2) $y'' - 10y' + 25y = f(x)$:

а) $f(x) = 5e^x$; б) $f(x) = 3e^{-x}$; в) $f(x) = 5x$;

3) $y'' - 4y' + 5y = f(x)$:

а) $f(x) = e^{2x}\sin x$; б) $f(x) = x\sin x$; в) $f(x) = 16$.

5. Найдите общее решение линейной системы дифференциальных уравнений.

1) $\begin{cases} \dot{x} = 6x - y, \\ \dot{y} = 3x + 2y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + y; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 3y; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + 2y; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + 3y; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

Ответы

1.

1) y_1, y_4 – решения, y_2, y_3 – нет;

2) y_1, y_2, y_4 – решения, y_3 – нет;

3) $\{x_1, y_1\}$ – не является решением, $\{x_2, y_2\}$ – является решением.

2.

1) $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ (уравнение с разделяющимися переменными);

2) $2\sqrt{y} - \arcsin\frac{x}{2} = C$ (уравнение с разделяющимися переменными);

3) $Cy = \sqrt{x^2 + 9}$ (уравнение с разделяющимися переменными);

4) $y = x^2\left(-\ln|x| + C\right)$ (линейное неоднородное уравнение);

5) $y = \dfrac{e^x}{2e^x - 2xe^x}$ (уравнение Бернулли);

6) $x^2 + y^2 = Cx$ (однородное уравнение);

7) $-\dfrac{x}{y}=\ln|x|+2$ (однородное уравнение).

3.

1) $y_{\text{о.о}}=C_1e^{x}+C_2e^{7x}$ (линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами);

2) $y_{\text{ч.о}}=7e^{5x}+xe^{5x}$ (линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами);

3) $y_{\text{о.о}}=C_1e^{2x}\cos x+C_2e^{2x}\sin x$ (линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами);

4) $y=4x^5-2e^{2x}+x^2+C_1x+C_2$ (уравнение второго порядка, разрешенное относительно второй производной);

5) $y_{\text{ч.о}}=e^{-x}+2e^{x}-e^{2x}$ (линейное однородное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами).

4.

1) а) $y_{\text{ч.н}}=Axe^{x}$; б) $y_{\text{ч.н}}=Ax^2+Bx+C$; в) $y_{\text{ч.н}}=(A\cos x+B\sin x)e^{7x}$;

2) а) $y_{\text{ч.н}}=Ax^2e^{5x}$; б) $y_{\text{ч.н}}=Ae^{-x}$; в) $y_{\text{ч.н}}=Ax+B$;

3) а) $y_{\text{ч.н}}=x(A\cos x+B\sin x)e^{2x}$; б) $y_{\text{ч.н}}=(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x$;
в) $y_{\text{ч.н}}=A$.

5.

1) $\begin{cases}x=C_1e^{3t}+C_2e^{5t},\\ y=3C_1e^{3t}+C_2e^{5t};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=C_1e^{3t}+C_2e^{t},\\ y=-2C_1e^{3t}+2C_2e^{-t};\end{cases}$

3) $\begin{cases}x=C_1e^{5t}+C_2e^{-t},\\ y=2C_1e^{5t}-C_2e^{-t};\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x=e^{2t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t),\\ y=e^{2t}(C_1\sin 3t-C_2\cos 3t);\end{cases}$

5) $\begin{cases}x=(C_1+C_2t)e^{2t},\\ y=-(C_1+C_2+C_2t)e^{2t};\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x=C_1e^{t}+C_2e^{-t}+te^{t}-t^2-2,\\ y=C_1e^{t}-C_2e^{-t}+e^{t}(t-1)-2t;\end{cases}$

7) $\begin{cases}x=C_1(\cos 2t-\sin 2t)+C_2(\cos 2t+\sin 2t),\\ y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+e^{-2t}.\end{cases}$

2.2. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные.

$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)=0$ – ***обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка*** (n – наивысший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение).

Решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция $y=\varphi\left(x, C_1, \ldots, C_n\right)$, $C_1, \ldots, C_n$ – произвольные константы, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется его ***интегрированием***.

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае имеет вид

$$F\left(x, y, y'\right)=0.$$

Оно связывает независимую переменную x, искомую функцию y и ее производную y'.

Дифференциальное уравнение первого порядка принято записывать либо в виде, разрешенном относительно производной

$$y'=f(x, y),$$

либо в дифференциальной форме

$$P(x, y) dx+Q(x, y) dy=0,$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – известные функции.

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка есть функция $y=\varphi(x, C)$, содержащая одну произвольную постоянную и обращающая это уравнение в тождество.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y=\varphi\left(x, C_0\right)$, полученная из общего решения $y=\varphi(x, C)$ при конкретном значении постоянной $C=C_0$.

Если общее решение дифференциального уравнения найдено в неявном виде, т. е. в виде уравнения $\Phi(x, y, C)=0$, то такая форма записи решения называется ***общим интегралом*** дифференциального уравнения. Аналогично, для конкретного значения C_0 $\Phi\left(x, y, C_0\right)=0$ – частный интеграл уравнения.

Задача отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющего начальному условию $y\left(x_0\right)=y_0$, называется ***задачей Коши***.

Методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка определенного типа

Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение

$$P_1(x) \cdot Q_1(y) dx+P_2(x) \cdot Q_2(y) dy=0.$$

Коэффициенты при dx и dy представляют собой произведения двух функций (чисел), одна из которых зависит только от x, другая – только от y. После деления этого уравнения на $Q_1(y)\cdot P_2(x)\neq 0$ его общий интеграл находится почленным интегрированием

$\int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\int\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=C$ (см. задачу 2 подраздела 2.3).

Дифференциальное уравнение первого порядка, которое может быть записано в виде $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ называется ***однородным***. Оно преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи подстановки $\frac{y}{x}=u(x)$, где $u(x_0)$ – новая неизвестная функция (см. задачу 3 подраздела 2.3).

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y'+p(x)\cdot y=g(x)\cdot y^n,\ n\in\mathbb{R},\ n\neq 0,\ n\neq 1$$

называется ***уравнением Бернулли***.

В случае, когда $n=0$, уравнение

$$y'+p(x)\cdot y=g(x)$$

называется ***линейным неоднородным*** уравнением.

Интегрирование этих видов уравнений с помощью метода Бернулли состоит в нахождении общего решения в виде произведения двух новых неизвестных функций $y=u(x)\cdot v(x)$ и последовательного решения двух уравнений с разделяющимися переменными (см. задачу 4 подраздела 2.3).

Некоторые дифференциальные уравнения высших порядков и методы их решения

$y^{(n)}=f(x)$ – ***дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной***, допускает понижение порядка с помощью последовательного интегрирования.

Уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1\cdot y^{(n-1)}+a_2\cdot y^{(n-2)}+\ldots+a_n\cdot y=f(x),\ a_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n}$$

называется ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка*** с постоянными коэффициентами.

Если $f(x)=0$, то уравнение называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка*** с постоянными коэффициентами (ЛОДУ).

Задача нахождения общего решения ЛОДУ n-го порядка сводится к нахождению его n частных решений, образующих фундаментальную систему.

Частные решения ЛОДУ с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}+a_1\cdot y^{(n-1)}+a_2\cdot y^{(n-2)}+\ldots+a_n\cdot y=0$$

ищут в виде $y=e^{\lambda x}$, где λ – некоторое постоянное число.

Для этого составляют алгебраическое уравнение n-го порядка
$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0$,
называемое ***характеристическим уравнением***.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – корни характеристического уравнения.

Тогда:

1) всякому простому действительному корню λ_i соответствует частное решение $e^{\lambda_i \cdot x}$;

2) всякому действительному корню λ_i кратностью k соответствует набор из k линейно независимых частных решений $e^{\lambda_i \cdot x}, x \cdot e^{\lambda_i \cdot x}, \ldots, x^{k-1} \cdot e^{\lambda_i \cdot x}$;

3) каждой паре простых комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm \beta i$ соответствует два линейно независимых частных решения $e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$ и $e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$;

4) каждой паре $\alpha \pm \beta i$ корней кратностью $m > 1$ соответствует набор из $2m$ линейно независимых частных решения вида

$e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x,\ x \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x, \ldots,\ x^{m-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$,

$e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x,\ x \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x, \ldots,\ x^{m-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$.

Из этих решений формируют ***фундаментальную систему*** решений $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, тогда как общее решение уравнения есть их линейная комбинация $y_{\text{о.о}} = C_1 y_1 + C_2 y_2, + \ldots + C_n y_n$.

Рассмотрим подробнее решение ***ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами***:

$$y'' + py' + q = 0, \tag{2.1}$$

где p, q – действительные числа.

Чтобы найти общее решение дифференциального уравнения (2.1), достаточно найти два линейно независимых частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ (они образуют фундаментальную систему решений этого уравнения). Тогда общее решение уравнения (2.1) будет иметь вид $y_{\text{о.о}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Частные решения уравнения (2.1) будем искать следующим образом:

$$y = e^{\lambda x},\ \lambda = \text{const}, \tag{2.2}$$

тогда $y' = \lambda e^{\lambda x},\ y'' = \lambda^2 e^{2x}$. (2.3)

Подставляя (2.2) и (2.3) в уравнение (2.1), получим

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + p\lambda + q\right) = 0. \tag{2.4}$$

Так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то из (2.4) следует, что

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{2.5}$$

Характеристическое уравнение (2.5) есть квадратное уравнение, имеющее два корня:

$$\lambda_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},\ \lambda_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,.$$

Возможны следующие случаи:

1. Если $D=\dfrac{p^2}{4}-q>0$, то корни характеристического уравнения (2.5) действительные различные: $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\ \lambda_1\neq\lambda_2$.

В этом случае частными решениями, согласно формуле (2.2), будут функции $y_1=e^{\lambda_1 x}$ и $y_2=e^{\lambda_2 x}$.

Значит, общее решение дифференциального уравнения (2.1) имеет вид $y_{\text{о.о}}=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x},\ C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

2. Если $D=\dfrac{p^2}{4}-q=0$, то характеристическое уравнение (2.5) имеет два одинаковых действительных корня $\lambda_1=\lambda_2=-\dfrac{p}{2}$.

В этом случае одно частное решение сохраняет вид $y_1=e^{\lambda_1 x}$, второе, линейно независимое с y_1, будет иметь вид $y_2=xe^{\lambda_1 x}$.

Тогда общим решением дифференциального уравнения является функция $y_{\text{о.о}}=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2xe^{\lambda_1 x},C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

3. В случае, когда $D=\dfrac{p^2}{4}-q<0$, характеристическое уравнение (2.5) имеет своими корнями комплексно-сопряженные числа $\lambda_1=a+ib,\ \lambda_2=a-ib$, где $a=-\dfrac{p}{2},\ b=\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}$.

Тогда линейно независимые действительные частные решения уравнения (2.1) имеют вид $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Общим решением уравнения (2.1) будет функция $y_{\text{о.о}}=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x,\ C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) n-го порядка

$$y^{(n)}+a_1\cdot y^{(n-1)}+a_2\cdot y^{(n-2)}+\ldots+a_n\cdot y=e^{\alpha x}\cdot\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right),$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n, $Q_m(x)$ – многочлен степени m, называют ***уравнением со специальной правой частью***.

Его общее решение является суммой общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения и частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения $y_{\text{о.н}}=y_{\text{о.о}}+y_{\text{ч.н}}$.

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид $y_{\text{ч.н}}=x^k\cdot e^{\alpha x}\cdot\left(M_l(x)\cos\beta x+N_l(x)\sin\beta x\right),\ l=\max\{m,n\},\ k$ – кратность корня

$\alpha + \beta i$ характеристического уравнения, $M_l(x)$, $N_l(x)$ – многочлены степени l, коэффициенты которых могут быть найдены однозначно.

Для нахождения частного решения $y_{\text{ч.н}}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + py' + qy = f(x)$, $p, q \in \mathbb{R}$ будем использовать следующий алгоритм:

1. Составим характеристическое уравнение линейного однородного уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ и найдем его корни λ_1, λ_2.

2. По виду правой части линейного неоднородного дифференциального уравнения $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$ определим контрольное число $z = \alpha + i\beta$.

3. Сравним контрольное число z с корнями характеристического уравнения λ_1, λ_2 и, в соответствии с таблицей, представленной ниже, составим частное решение $y_{\text{ч.н}}$.

$y'' + py' + qy = f(x)$ – ЛНДУ,
$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$ – специальная правая часть,
$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ – характеристическое уравнение для ЛОДУ $y'' + py' + qy = 0$,
$p, q \in \mathbb{R}$, $P_n(x)$ – многочлен степени n, $Q_m(x)$ – многочлен степени m

Контрольное число $z = \alpha + i\beta$	Правая часть $f(x)$	Частное решение ЛНДУ $y_{\text{ч.н}}$
1. $\lambda_1 \ne z,\ \lambda_2 \ne z$	$e^{\alpha x}\left(ax^2 + bx + c\right)$ $e^{\alpha x}(ax + b)$	$e^{\alpha x}\left(Ax^2 + Bx + C\right)$ $e^{\alpha x}(Ax + B)$
	$a_1\cos\beta x + a_2\sin\beta x$	$A_1\cos\beta x + A_2\sin\beta x$
	$e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$	$e^{\alpha x}\left(M_l(x)\cos\beta x + N_l(x)\sin\beta x\right)$, $l = \max\{m, n\}$
2. $\lambda_1 \ne z,\ \lambda_2 = z$ или $\lambda_1 = z,\ \lambda_2 \ne z$	$e^{\alpha x}\left(ax^2 + bx + c\right)$	$e^{\alpha x}x\left(Ax^2 + Bx + C\right)$
	$a_1\cos\beta x + a_2\sin\beta x$	$x\left(A_1\cos\beta x + A_2\sin\beta x\right)$
	$e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$	$xe^{\alpha x}\left(M_l(x)\cos\beta x + N_l(x)\sin\beta x\right)$, $l = \max\{m, n\}$
3. $\lambda_1 = \lambda_2 = z$	$e^{\alpha x}\left(ax^2 + bx + c\right)$	$x^2 e^{\alpha x}\left(Ax^2 + Bx + C\right)$
	$a_1\cos\beta x + a_2\sin\beta x$	$x^2\left(A_1\cos\beta x + A_2\sin\beta x\right)$
	$e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$	$x^2 e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$, $l = \max\{m, n\}$

Системы дифференциальных уравнений

Системой дифференциальных уравнений называется совокупность дифференциальных уравнений, каждое из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их производные.

Система дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n) \end{cases}$$

называется ***нормальной системой дифференциальных уравнений***.

Решением этой системы называется совокупность из n функций $y_1(x),\, y_2(x),\, \ldots,\, y_n(x)$, удовлетворяющая каждому из уравнений этой системы.

Интегрирование нормальной системы n дифференциальных уравнений производится методом сведения системы к одному дифференциальному уравнению n-го порядка.

2.3. ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Проверьте, являются ли указанные функции y_1 – y_5 решениями дифференциального уравнения $y'' + 25y = 0$.

а) $y_1 = \cos 5x$; б) $y_2 = \sin 5x$; в) $y_3 = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$;

г) $y_4 = e^{-5x}$; д) $y_5 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}$.

Решение

а) Найдем первую и вторую производные функции $y_1 = \cos 5x$:

$$y_1' = (\cos 5x)' = -5\sin 5x,$$

$$y_1'' = (-5\sin 5x)' = -25\cos 5x.$$

Подставим $y_1,\, y_1',\, y_1''$ в исходное уравнение:

$$-25\cos 5x + 25\cos 5x = 0.$$

Полученное тождество означает, что $y_1 = \cos 5x$ – решение данного дифференциального уравнения.

г) $y_4' = \left(e^{-5x}\right)' = -5e^{-5x}$,

$$y_4'' = \left(-5e^{-5x}\right)' = 25e^{-5x},$$

$25e^{-5x} + 25\left(-5e^{-5x}\right) = -100e^{-5x} \neq 0$, следовательно, $y_4 = e^{-5x}$ не является решением данного дифференциального уравнения.

Проводя аналогичные рассуждения для остальных функций, убеждаемся, что функции y_1, y_2, y_3 – решения, а y_4, y_5 не являются решениями данного дифференциального уравнения.

2. Решите дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными $y' = \dfrac{y^2+4}{5^x}$. Укажите частное решение (частный интеграл), удовлетворяющее начальному условию $y(1)=0$.

Решение

Поскольку $y' = \dfrac{dy}{dx}$, перепишем данное уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+4}{5^x} \quad \Leftrightarrow \quad 5^x dy = (y^2+4)dx.$$

Последнее уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.

Разделяя переменные в этом уравнении, получаем дифференциальное уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dy}{y^2+4} = \frac{dx}{5^x} \text{ или } \frac{dy}{y^2+4} - 5^{-x}dx = 0.$$

Тогда, проинтегрировав, будем иметь $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2+4} - \int 5^{-x}dx = C$.

Результатом интегрирования является соотношение $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{2} + \dfrac{5^{-x}}{\ln 5} = C$, которое является общим интегралом данного дифференциального уравнения.

Используя начальное условие $\begin{cases} x=1, \\ y=0, \end{cases}$ найдем значение C, соответствующее искомому частному интегралу:

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}0 + \frac{5^{-1}}{\ln 5} = C \;\Rightarrow\; C = \frac{1}{5\ln 5}.$$

Подставляя найденное значение C в общий интеграл, получим искомый частный интеграл.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{2} + \dfrac{5^{-x}}{\ln 5} = \dfrac{1}{5\ln 5}$.

3. Проинтегрируйте однородное дифференциальное уравнение первого порядка $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$.

Решение

Разрешив это уравнение относительно y', получим $y' = \dfrac{y-x}{x+y}$. Правая часть $f(x, y)$ этого уравнения в результате деления числителя и знаменателя на x станет функцией аргумента $\dfrac{y}{x}$:

$$f(x, y) = \frac{y-x}{x+y} = \frac{\frac{y}{x}-1}{1+\frac{y}{x}},$$ значит, уравнение является однородным.

Однородные уравнения интегрируются с помощью подстановки $\dfrac{y}{x} = u(x)$, где $u(x)$ – новая неизвестная функция. При этом $y = xu,\quad y' = (xu)' = u + xu'$. После такой подстановки уравнение $y' = \dfrac{\frac{y}{x}-1}{1+\frac{y}{x}}$ примет вид $u + xu' = \dfrac{u-1}{u+1}$, тогда

$xu' = -\dfrac{u^2+1}{u+1}$. Разделяем переменные в последнем уравнении

$$\frac{u+1}{u^2+1}du + \frac{dx}{x} = 0.$$

Следовательно,

$$\int \frac{u+1}{u^2+1}dU + \int \frac{dx}{x} = C \quad \text{или} \quad \int \frac{udu}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1} + \int \frac{dx}{x} = C \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(u^2+1)}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1} + \int \frac{dx}{x} = C \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\ln\left|u^2+1\right| + \operatorname{arctg} u + \ln|x| = C.$$

Подставляя в последнее равенство $u = \dfrac{y}{x}$, получаем

$\ln\sqrt{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 1} + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \ln|x| = C$ – общий интеграл исходного уравнения.

4. Решите линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка $y' + 6y = e^{2x}$.

Решение

Воспользуемся методом Бернулли, в соответствии с которым будем искать общее решение уравнения в виде произведения двух новых неизвестных функций $y(x) = u(x)v(x)$. Подставляем $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ в уравнение

$$u'v + uv' + 6uv = e^{2x},$$

$(v' + 6v)u + u'v = e^{2x}$.

Выберем функцию $v(x)$, как одно из решений уравнения $v' + 6v = 0$. Тогда функция $u(x)$ будет удовлетворять уравнению $u'v = e^{2x}$. Оба уравнения являются уравнениями с разделяющимися переменными. Решим первое из них:

$$v' + 6v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dx} + 6v = 0 \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} + 6dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} + 6\int dx = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|v| = -6x \Rightarrow \ v = e^{-6x}.$$

Далее ищем функцию $u(x)$ как общее решение второго уравнения

$$u'e^{-6x} = e^{2x} \ \Leftrightarrow \ u' = e^{8x} \ \Rightarrow \ u = \int e^{8x}dx = \frac{1}{8}e^{8x} + C.$$

Тогда общим решением исходного уравнения будет функция $y = uv$, которая имеет вид

$$y = \left(\frac{1}{8}e^{8x} + C\right)e^{-6x}.$$

Ответ: $y = \frac{1}{8}e^{2x} + Ce^{-6x}$.

5. Проинтегрируйте дифференциальное уравнение высшего порядка $y''' = 2x - \cos 7x + e^{3x}$.

Решение

Данное уравнение имеет вид $y^{(n)} = f(x)$ и разрешено относительно старшей производной. Будем понижать порядок уравнения с помощью последовательного интегрирования.

$$y'' = \int\left(2x - \cos 7x + e^{3x}\right)dx = x^2 - \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{3}e^{3x} + C_1,$$

$$y' = \int\left(x^2 - \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{3}e^{3x} + C_1\right)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{49}\cos 7x + \frac{1}{9}e^{3x} + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int\left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{49}\cos 7x + \frac{1}{9}e^{3x} + C_1 x + C_2\right)dx =$$

$$= \frac{x^4}{12} - \frac{1}{343}\sin 7x + \frac{1}{27}e^{3x} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Ответ: $y = \frac{x^4}{12} - \frac{1}{343}\sin 7x + \frac{1}{27}e^{3x} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$ – общее решение данного уравнения.

6. Найдите общее решение линейного однородного дифференциального уравнения. В случае «в» найдите частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

а) $y'' + 6y' + 5y = 0$, б) $y'' - 16y' + 64y = 0$,

в) $y'' + 100y = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{10}\right) = 2,\ y'\left(\dfrac{\pi}{10}\right) = 5.$

Решение

а) $y'' + 6y' + 5y = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$.

$$D = \frac{6^2}{4} - 5 = 4 > 0,\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -5.$$

Тогда, согласно случаю 1 (см. подраздел 2.2), общим решением этого уравнения будет функция $y_{\text{о.о}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}$.

б) $y'' - 16y' + 64y = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - 16\lambda + 64 = 0$.

$$D = \frac{(-16)^2}{4} - 64 = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 8.$$

Тогда, согласно случаю 2 (см. подраздел 2.2), общим решением этого уравнения будет функция $y_{\text{о.о}} = C_1 e^{8x} + C_2 x e^{8x}$.

в) $y'' + 100y = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид

$\lambda^2 + 100 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -100 \Leftrightarrow \lambda^2 = 100i^2 \Leftrightarrow \lambda_1 = 10i,\ \lambda_2 = -10i$.

Тогда $\alpha = \operatorname{Re}\lambda_1 = 0,\ \beta = \operatorname{Im}\lambda_1 = 10$.

Согласно случаю 3 (см. подраздел 2.2), общее решение этого уравнения имеет вид $y_{\text{о.о}} = C_1 \cos 10x + C_2 \sin 10x$.

Используя начальные условия $y\left(\dfrac{\pi}{10}\right) = 2,\ y'\left(\dfrac{\pi}{10}\right) = 5$, найдем C_1 и C_2, соответствующие частному решению.

Вычислим

$$y' = \left(C_1 \cos 10x + C_2 \sin 10x\right)' = -10C_1 \sin 10x + 10C_2 \cos 10x.$$

Поскольку $y\left(\dfrac{\pi}{10}\right) = 2$, то $C_1 \cos\pi + C_2 \sin\pi = 2 \Leftrightarrow -C_1 + 0 = 2 \Leftrightarrow C_1 = -2$.

Аналогично, из условия $y'\left(\dfrac{\pi}{10}\right) = 5$ следует

$$-10C_1\sin\pi+10C_2\cos\pi=5 \Leftrightarrow 0-10C_2=5 \Leftrightarrow C_2=-\frac{1}{2}$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в общее решение, получаем искомое частное решение.

Ответ: $y_{\text{ч.о}}=-2\cos 10x-\frac{1}{2}\sin 10x$.

7. Для линейного неоднородного дифференциального уравнения (ЛНДУ) со специальной правой частью $y''-16y'+64y=f(x)$ составьте частное решение с неопределенными коэффициентами.

а) $f(x)=xe^{8x}$; б) $f(x)=\sin 2x$; в) $f(x)=2x-x^2$.

Решение

а) Для линейного однородного уравнения $y''-16y'+64y=0$ характеристическое уравнение $\lambda^2-16\lambda+64=0$ имеет корни $\lambda_1=\lambda_2=8$.

$f(x)=xe^{8x}$ – правая часть линейного неоднородного уравнения. Откуда $\alpha=8,\ \beta=0$, а контрольное число имеет вид $z=8$.

Так как $z=\lambda_1=\lambda_2$, тогда, как следует из таблицы, представленной в подразделе 2.2, $y_{\text{ч.н}}=x^2(Ax+B)e^{8x}$.

б) $f(x)=\sin 2x$. Контрольное число $z=2i$, причем $z\neq\lambda_1,\ z\neq\lambda_2$, тогда в соответствии с таблицей, представленной в подразделе 2.2, $y_{\text{ч.н}}=A\cos 2x+B\sin 2x$.

в) $f(x)=2x-x^2$. Контрольное число $z=0; z\neq\lambda_1,\ z\neq\lambda_2$, значит, в соответствии с таблицей, представленной в подразделе 2.2, $y_{\text{ч.н}}=Ax^2+Bx+C$.

8. Методом исключения найдите общее решение линейной однородной системы двух дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2y-3x,\\ \dfrac{dy}{dt}=y-2x.\end{cases}$$

Решение

Общим решением линейной системы двух дифференциальных уравнений первого порядка будет совокупность двух функций $x=x(t,C_1,C_2)$, $y=y(t,C_1,C_2)$, которые определены в некоторой области изменения переменных $t,\ C_1,\ C_2$ (C_1, C_2 – произвольные константы) и обращают каждое из данных дифференциальных уравнений в тождество.

Обозначим $\dfrac{dx}{dt}=\dot{x},\ \dfrac{dy}{dt}=\dot{y}$. Продифференцируем по t первое уравнение системы и подставим вместо $\dot{y}$ его выражение из второго уравнения:

$$\ddot{x}=2\dot{y}-3\dot{x}=2(y-2x)-3\dot{x}=2y-4x-3\dot{x}.$$

После этого выразим y из первого уравнения $y=\dfrac{\dot{x}+3x}{2}$ и подставим его в полученное уравнение:

$$\ddot{x}=2y-4x-3\dot{x}.$$

$$\ddot{x}=2\left(\frac{1}{2}\dot{x}+\frac{3}{2}x\right)-4x-3\dot{x} \Leftrightarrow \ddot{x}=\dot{x}+3x-4x-3\dot{x} \Leftrightarrow \ddot{x}+2\dot{x}+x=0.$$

Получим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Его характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2+2\lambda+1=0$. Откуда $\lambda_1=\lambda_2=-1$.

Тогда его общее решение: $x=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}$.

Чтобы найти y, продифференцируем функцию $x(t)$ по t и подставим в первое уравнение системы $\dfrac{dx}{dt}$ и $x(t)$:

$$-C_1e^{-t}+C_2e^{-t}-C_2te^{-t}=2y-3\left(C_1e^{-t}+C_2te^{-t}\right).$$

Выражая y из полученного уравнения, найдем вторую функцию из искомой совокупности:

$$y=\left(C_1+\frac{1}{2}C_2+C_2t\right)e^{-t}.$$

Ответ: $x=(C_1+C_2t)e^{-t}$, $y=\left(C_1+\dfrac{1}{2}C_2+C_2t\right)e^{-t}$.

2.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Проверьте, являются ли указанные функции «а–д» решениями дифференциального уравнения.

1) $y''+625y=0$:

а) $y_1=\cos 25x$; б) $y_2=\sin 25x$; в) $y_3=C_1\cos 25x+C_2\sin 25x$;

г) $y_4=e^{-25x}$; д) $y_5=25e^x$;

2) $y''+6y'+5y=0$:

а) $y_1=e^{-x}$; б) $y_2=\sin x$; в) $y_3=e^{5x}$;

г) $y_4=e^{-5x}$; д) $y_5=C_1e^{-x}+C_2e^{-5x}$;

3) $y''+4y'+4y=0$:

а) $y_1=\cos 2x$; б) $y_2=e^{2x}$; в) $y_3=xe^{2x}$;

г) $y_4 = C_1 x + C_2 x e^{2x}$; д) $y_5 = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$;

4) $y''' - 7y'' + 6y' = 0$:

а) $y_1 = C$; б) $y_2 = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x}$; в) $y_3 = 5 - 6e^{x} + e^{6x}$;

г) $y_4 = x^2$; д) $y_5 = -e^{x}$;

5) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$:

а) $y_1 = \cos 2x$; б) $y_2 = Ce^{x}$; в) $y_3 = \sin 2x$;

г) $y_4 = C_1 e^{2x} + C_2 \cos 2x$; д) $y_5 = C_1 e^{x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$;

6) $y''' + 2y'' + y' = 0$:

а) $y_1 = e^{x}$; б) $y_2 = e^{-x}$; в) $y_3 = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$;

г) $y_4 = \cos x$; д) $y_5 = 2\sin x$.

2. Решите дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Укажите частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию.

1) $y' = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{\sqrt{y}}$, $y(2) = 0$; 2) $(x^2 - 25)y' - 7y^2 = 0$, $y(0) = 1$;

3) $\dfrac{dy}{2x} = \sqrt{4 - y^2}\,dx$, $y(0) = 2$; 4) $y' \sin 2y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \pi$;

5) $y' - \dfrac{y}{x+1} = 0$, $y(0) = 1$; 6) $\sin^2 x\,dy = (y^2 + 9)dx$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

3. Проинтегрируйте однородное дифференциальное уравнение первого порядка с заданным начальным условием.

1) $y' = \sqrt{25 - \dfrac{y^2}{x^2}} + \dfrac{y}{x}$, $y(1) = 0$; 2) $y' = 2^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$, $y(1) = 0$;

3) $y' = \left(\dfrac{y}{x}\right)^3 + \dfrac{y}{x}$, $y(1) = 2$; 4) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 1 + \dfrac{y}{x}$, $y(1) = 1$;

5) $y' = \dfrac{1}{\dfrac{y^2}{x^2} + 1} + \dfrac{y}{x}$, $y(1) = 3$; 6) $y' = \dfrac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$, $y(1) = 0$.

4. Решите линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка (или уравнение Бернулли).

1) $y' + 16y = e^{-x}$, $y(0) = -\dfrac{1}{15}$; 2) $y' - y = e^{x}$; 3) $xy' - 3y = x^2$;

4) $y' + 2y = y^2 e^{x}$; 5) $y'x + y = -xy^2$; 6) $y' = \dfrac{e^{-x}}{1-x} - y$.

5. Проинтегрируйте дифференциальное уравнение высшего порядка, разрешенное относительно старшей производной.

1) $y''' = 7 - x + \sin\dfrac{x}{2}$; 2) $y''' = x^2 + \sin 5x - e^{-x}$; 3) $y''' = 2 + \sqrt{x} - 7e^{-x}$;

4) $y''' = \dfrac{1}{x^3} - 8 + \cos\dfrac{x}{2}$; 5) $y''' = \dfrac{6}{x^3} + 3^x$; 6) $y'' = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$.

6. Найдите частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

1) а) $y'' - 6y' + 5y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$;
   б) $y'' + 16y' + 64y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -8$;
   в) $y'' + y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 13$;

2) а) $y'' - 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -5$;
   б) $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = -5$, $y'(0) = 12$;
   в) $y'' - 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 8$, $y'(0) = 9$;

3) а) $y'' - 8y' + 7y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 7$;
   б) $4y'' + 4y' + y = 0$, $y(0) = -4$, $y'(0) = 11$;
   в) $y'' + 49y = 0$, $y(0) = -4$, $y'(0) = 8$.

7. Составьте частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения со специальной правой частью с неопределенными коэффициентами.

1) $y'' + 16y' + 16y = f(x)$:

а) $f(x) = x$; б) $f(x) = \sin 2x$; в) $f(x) = e^{-8x}$;

2) $y'' - 2y' - 3y = f(x)$:

а) $f(x) = 3x$; б) $f(x) = e^{-x}$; в) $f(x) = e^{3x}\cos x$;

3) $y'' + 49y = f(x)$:

а) $f(x) = x^2 e^{7x}$; б) $f(x) = \sin 7x - \cos 7x$; в) $f(x) = e^x \cos x$.

8. Найдите общее решение линейной системы дифференциальных уравнений.

1) $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 4x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - 3y; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y, \\ \dot{y} = x + 4y; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x} = -7x + 5y, \\ \dot{y} = 4x - 8y; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y, \\ \dot{y} = 4x + 5y; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 8y, \\ \dot{y} = -8x + 4y. \end{cases}$

Ответы

1.

1) y_1, y_2, y_3 – решения, y_4, y_5 – нет; 2) y_1, y_4, y_5 – решения, y_2, y_3 – нет;

3) y_2, y_3, y_5 – решения, y_1, y_4 – нет; 4) $y_1, y_{2,} y_3, y_5$ – решения, y_4 – нет;

5) $y_1, y_{2,} y_3, y_5$ – решения, y_4 – нет; 6) y_2, y_3 – решения, y_1, y_4, y_5 – нет.

2.

1) $y=\dfrac{(x-2)^2}{2^{2/3}}$; 2) $-\dfrac{1}{7y}=\ln\left|\dfrac{x-5}{x+5}\right|-\dfrac{1}{7}$; 3) $\arcsin\dfrac{y}{2}=x^2+\dfrac{\pi}{2}$;

4) $-\cos 2y=2\operatorname{tg}x-3$; 5) $y=x+1$; 6) $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{3}+\operatorname{ctg}x=0$.

3.

1) $\arcsin\dfrac{y}{5x}=\ln|x|$; 2) $\dfrac{2^{-\frac{y}{x}}}{\ln 2}+\ln|x|-\dfrac{1}{\ln 2}=0$; 3) $\dfrac{y^4}{4x^4}=\ln|x|+4$;

4) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln|x|+\dfrac{\pi}{4}$; 5) $\dfrac{y^3}{3x^3}+\dfrac{y}{x}=\ln|x|+12$; 6) $1+\dfrac{y}{x}=\sqrt{x}$.

4.

1) $y=\dfrac{1}{15}e^{-x}$; 2) $y=xe^x+Cx$; 3) $y=Cx^3-x^2$;

4) $y=\dfrac{1}{Ce^{2x}+e^x}$; 5) $y=\dfrac{1}{x\ln x-Cx}$; 6) $y=e^{-x}\ln\left|\dfrac{C}{1-x}\right|$.

5.

1) $y=\dfrac{7x^3}{6}-\dfrac{x^4}{24}+8\cos\dfrac{x}{2}+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$;

2) $y=\dfrac{x^5}{60}+\dfrac{1}{125}\cos 5x+e^{-x}+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$;

3) $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{8}{105}x^{\frac{7}{2}}+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3+7e^{-x}$;

4) $y=\dfrac{1}{2}\ln|x|-\dfrac{4}{3}x^3-8\sin\dfrac{x}{2}+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$;

5) $y=3\ln|x|+\dfrac{3^x}{\ln^3 3}+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$;

6) $y=\dfrac{x^4}{12}+x^2-\ln|x|+C_1x+C_2$.

6.

1) а) $y=e^x+e^{5x}$; б) $y=4e^{-8x}+24xe^{-8x}$; в) $y=5\cos x+13\sin x$;

2) а) $y=-2e^{-x}+e^{3x}$; б) $y=5e^{-3x}+3xe^{-3x}$; в) $y=8e^x\cos 2x+\dfrac{1}{2}e^x\sin 2x$;

3) а) $y=\dfrac{7}{2}e^x+\dfrac{1}{2}e^{7x}$; б) $y=-4e^{-\frac{x}{2}}+9xe^{-\frac{x}{2}}$; в) $y=-4\cos 7x+\dfrac{2}{7}\sin 7x$.

7.

1) а) $y_{\text{ч.н}}=Ax+B$; б) $y_{\text{ч.н}}=A\cos 2x+B\sin 2x$; в) $y_{\text{ч.н}}=Ax^2\cdot e^{-8x}$;

2) а) $y_{\text{ч.н}}=Ax+B$; б) $y_{\text{ч.н}}=Axe^{-x}$; в) $y_{\text{ч.н}}=e^{3x}(A\cos x+B\sin x)$;

3) а) $y_{\text{ч.н}} = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{7x}$; б) $y_{\text{ч.н}} = x\left(A\cos 7x + B\sin 7x\right)$;

в) $y_{\text{ч.н}} = e^{x}\left(A\cos x + B\sin x\right)$.

8.

1) $\begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}, \\ y = 2C_1e^{2t} - 2C_2e^{-2t}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + 2C_2te^{-t}, \\ y = C_1e^{-t} + C_2e^{-t}(2t-1); \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = C_1e^{t} + C_2e^{-t}, \\ y = C_1e^{t} - C_2e^{-t}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = C_1 + C_2e^{6t}, \\ y = -\dfrac{1}{4}C_1 + \dfrac{1}{2}C_2e^{6t}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = 4C_1e^{-3t} + C_2e^{-12t}, \\ y = 5C_1e^{-3t} - C_2e^{-12t}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = C_1e^{t} + C_2e^{9t}, \\ y = -C_1e^{t} + C_2e^{9t}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = C_1e^{-4t} + C_2e^{12t}, \\ y = C_1e^{-4t} - C_2e^{12t}. \end{cases}$

2.5. ТЕСТОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
по теме
«Дифференциальные уравнения»

Задание 1. Решите дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

1) $\left(1+x^2\right)y^3dx - \left(1+y^2\right)xdy = 0$:

а) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2y^2} + \ln\left\|\dfrac{y}{x}\right\| = C$	б) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + \ln\left\|\dfrac{x}{y}\right\| = C$
в) $\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{1}{2x^2} + \ln\left\|\dfrac{x}{y}\right\| = C$	г) $\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{1}{2x^2} + \ln\left\|\dfrac{y}{x}\right\| = C$

2) $\left(x^2+1\right)\left(1-y^2\right)dx - xdy = 0$:

а) $\dfrac{x^2}{2} - \ln\|x\| + \ln\left\|\dfrac{y-1}{y+1}\right\| = C$	б) $\dfrac{x^3}{2} + \ln\|x\| + \ln\left\|\dfrac{y-1}{y+1}\right\| = C$
в) $\dfrac{x^2}{2} + \ln\|x\| + \ln\|y\| = C$	г) $\dfrac{x^2}{2} + \ln\|x\| + \ln\left\|\dfrac{y-1}{y+1}\right\| = C$

3) $xydx - \left(x^2+1\right)dy = 0$:

а) $y = C^{-1}\sqrt{x^2+1}$	б) $y^2 = C + \sqrt{x^2+1}$
в) $y = x^2 + C$	г) $y = C\sqrt{x^2-1}$

4) $xy' = y(\ln x)^{-1}$:

а) $x = C\ln\|y\|$	б) $e^y = C + e^x$
в) $y = Cx$	г) $y = C\ln\|x\|$

5) $dx + e^{2x+y}dy = 0$:

а) $e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{y} = C$	б) $-\frac{1}{2}e^{-2x} + e^{y} = C$
в) $-\frac{1}{2}e^{2x} + e^{y} = C$	г) $\frac{1}{2}e^{-2x} + e^{y} = C$

6) $(1+2y)xdx - 2(1+x^2)^{-1}dy = 0$:

а) $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \ln\lvert 1+2y \rvert = C$	б) $\frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{4} - \ln\lvert 1+2y \rvert = C$
в) $\frac{x^2}{2} - \ln\lvert 1+2y \rvert = C$	г) $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \ln\lvert 1+y \rvert = C$

7) $(xy+x)dy + (xy-y)dx = 0$:

а) $2y + x - \ln\left\lvert \frac{y}{x} \right\rvert = C$	б) $y + x^2 - \ln\left\lvert \frac{y}{x} \right\rvert = C$
в) $y + x - \ln\left\lvert \frac{y}{x} \right\rvert = C$	г) $y + x - \ln\left\lvert \frac{y}{x} \right\rvert = C$

Задание 2. Решите линейное неоднородное дифференциальное уравнение (или уравнение Бернулли).

1) $2xy' - y + xy^2 = 0$:

а) $y = -\frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + 3C}$	б) $y = -\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3C}$
в) $y = -\frac{3x}{x\sqrt{x} + 3C}$	г) $y = \frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + 3C}$

2) $y' + xy = x$:

а) $y = 2 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$	б) $y = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$
в) $y = 1 + Ce^{x^2}$	г) $y = 1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$

3) $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$:

а) $y = (x+C)e^{\sin x}$	б) $y = (x+C)\sin x$
в) $y = (x+C)e^{-\sin x}$	г) $y = (x+C)e^{-\sin 2x}$

4) $(1-x^2)y' + yx = -2x$:

а) $y = C\sqrt{1-x^2} + 2$	б) $y = C\sqrt{1-x} - 2$
в) $y = C\sqrt{1+x^2} - 2$	г) $y = C\sqrt{1-x^2} - 2$

5) $y' + xy = y^2 x$:

а) $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 1$	б) $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$
в) $y^{-1} = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 1$	г) $y^{-1} = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 1$

6) $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1}$:

а) $y = \dfrac{x+C}{1-x}$	б) $y^{-1} = \dfrac{x+C}{1-x}$
в) $y^{-1} = \dfrac{x+C}{x+1}$	г) $y = \dfrac{1-x}{x+C}$

7) $y' + 2xy = 2x^3 y^3$:

а) $y^{-2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \dfrac{1}{2}$	б) $y^{-2} = Ce^{2x^2} + x + \dfrac{1}{2}$
в) $y = Ce^{2x^2} + x^2 + \dfrac{1}{2}$	г) $y^{-2} = Ce^{2x^2} + 1$

Задание 3. Проинтегрируйте однородное дифференциальное уравнение первого порядка с заданным начальным условием.

1) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{y}{x} + 4, \quad y(1) = 2$:

а) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{2x} = \ln\lvert x\rvert + \dfrac{\pi}{8}$	б) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{2x} = \ln\lvert x\rvert + \dfrac{\pi}{8}$
в) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\lvert x\rvert + \dfrac{\pi}{8}$	г) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2y} = \ln\lvert x\rvert + \dfrac{\pi}{8}$

2) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{y}{x} - 9, \quad y(1) = 1$:

а) $\dfrac{y-2x}{y+2x} = x^6$	б) $\dfrac{y-3x}{y+3x} = x^6$
в) $\dfrac{y-3x}{y+3x} = x$	г) $\dfrac{x-3y}{x+3y} = x^6$

3) $y' = 3\sqrt{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} + \dfrac{y}{x}, \quad y(1) = 0$:

а) $\dfrac{x}{y} + \sqrt{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} = x^3$	б) $\dfrac{y}{x} - \sqrt{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} = x^3$
в) $\dfrac{y}{x} + \sqrt{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} = x^3$	г) $\dfrac{y}{x} + \sqrt{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} = x$

4) $y' = \frac{y}{x} - \sqrt{4 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}, \quad y(1) = 0:$

а) $\arcsin\frac{y}{x} + \ln\lvert x\rvert = 0$	б) $\arcsin\frac{y}{4x} + \ln\lvert x\rvert = 0$
в) $\arcsin\frac{y}{4x} + \ln\lvert x\rvert = 5$	г) $\arcsin\frac{y}{4x} - \ln\lvert x\rvert = 0$

5) $y' = \cos^2\frac{y}{x} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = \pi:$

а) $\mathrm{arctg}\frac{y}{x} = \ln\lvert x\rvert$	б) $\mathrm{tg}\frac{x}{y} = \ln\lvert x\rvert$
в) $\mathrm{tg}\frac{y}{x} = \ln\lvert x\rvert$	г) $\mathrm{tg}\frac{y}{x} = 2\ln\lvert x\rvert$

6) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 0:$

а) $e^{\frac{y}{x}} + \ln\lvert x\rvert + 1 = 0$	б) $e^{-\frac{y}{x}} + \ln\lvert x\rvert - 10 = 0$
в) $e^{-\frac{x}{y}} + \ln\lvert x\rvert - 1 = 0$	г) $e^{-\frac{y}{x}} + \ln\lvert x\rvert - 1 = 0$

7) $y' = \sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1:$

а) $2\sqrt{\frac{x}{y}} = \ln\lvert x\rvert + 2$	б) $2\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln\lvert y\rvert + 2$
в) $\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln\lvert x\rvert + 2$	г) $2\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln\lvert x\rvert + 2$

Задание 4. Найдите частное решение дифференциального уравнения.

1) $y'' + 6y' + 45y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 9:$

а) $y = \cos 6x + \sin 6x$	б) $y = e^{-3x}\cos 6x$
в) $y = e^{-3x}\cos 6x + e^{-3x}\sin 6x$	г) $y = e^{-3x}\cos 6x + 2e^{-3x}\sin 6x$

2) $y'' - 16y' + 15y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 17:$

а) $y = e^{x} + e^{15x}$	б) $y = e^{x} - e^{15x}$
в) $y = 2e^{x} + e^{15x}$	г) $y = e^{-x} + e^{15x}$

3) $9y'' + 6y' + y = 0, y(0) = 9, y'(0) = 1:$

а) $y = 9e^{-\frac{x}{3}} + 5xe^{-\frac{x}{3}}$	б) $y = 9e^{-\frac{x}{3}} + 4xe^{-\frac{x}{3}}$
в) $y = e^{-\frac{x}{3}} + 9xe^{-\frac{x}{3}}$	г) $y = e^{-\frac{x}{3}} - xe^{-\frac{x}{3}}$

4) $y''+169y=0, y(0)=3, y'(0)=13$:

а) $y=3\cos 13x+\sin 13x$	б) $y=\sin 13x-3\cos 13x$
в) $y=2\sin 13x+5\cos 13x$	г) $y=e^{13x}$

5) $y''-12y'+20y=0, y(0)=-1, y'(0)=15$:

а) $y=2e^{2x}-e^{10x}$	б) $y=-\dfrac{25}{8}e^{2x}+\dfrac{17}{8}e^{10x}$
в) $y=e^{2x}\sin 10x$	г) $y=xe^{2x}$

6) $y''-14y'+49y=0, y(0)=8, y'(0)=9$:

а) $y=8e^{7x}-47e^{-7x}$	б) $y=2e^{7x}+5xe^{7x}$
в) $y=8e^{7x}-47xe^{7x}$	г) $y=8xe^{7x}-47e^{7x}$

7) $y''-12y'+40y=0, y(0)=3, y'(0)=4$:

а) $y=e^{6x}\cos 2x-e^{6x}\sin 2x$	б) $y=3e^{6x}\cos 2x$
в) $y=-7e^{6x}\sin 2x$	г) $y=3e^{6x}\cos 2x-7e^{6x}\sin 2x$

Задание 5. Найдите общее решение дифференциального уравнения третьего порядка.

1) $y'''=\dfrac{5}{x^3}-e^{2x}+\sin 3x$:

а) $y=e^{2x}+\cos 3x+\dfrac{5}{2}\ln\lvert x\rvert+C_3$
б) $y=\dfrac{e^{2x}}{8}+\dfrac{1}{27}\cos 3x+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2+C_3$
в) $y=-\dfrac{e^{2x}}{8}+\dfrac{1}{27}\cos 3x+\dfrac{5}{2}\ln\lvert x\rvert+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$
г) $y=-\dfrac{e^{x}}{8}+\dfrac{1}{27}\cos 3x+\dfrac{5}{2}\ln\lvert x\rvert+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$

2) $y'''=6x-1+8e^{\frac{x}{2}}$:

а) $y=64e^{\frac{x}{2}}-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{4}+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$	б) $y=C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$
в) $y=64e^{\frac{x}{2}}-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{4}+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$	г) $y=64e^{\frac{x}{2}}-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{4}$

3) $y'''=210x^4+27e^{-3x}+\cos x$:

а) $y=-e^{3x}+x^7+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$	б) $y=x^7+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$
в) $y=-e^{-3x}+x^7+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$	г) $y=-e^{-3x}+x^7+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x$

4) $y''' = \frac{60}{x^5} - 20e^{2x} + 25\cos x$:

а) $y = \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{5}{2x^2} - \frac{5}{2}e^{2x} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$
б) $y = -\frac{1}{5}\sin 5x - \frac{5}{2x^2} - \frac{5}{2}e^{2x} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$
в) $y = -\frac{5}{2}e^{2x} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$
г) $y = -\frac{5}{2x^2} - \frac{5}{2}e^{2x} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$

5) $y''' = 11x^3 + \sin\frac{x}{6} + 1$:

а) $y = \frac{11}{120}x^6 + \frac{1}{6}x^3 + 216\cos\frac{x}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$
б) $y = 216\cos\frac{x}{6} + C_2x + C_3$
в) $y = \frac{11}{120}x^6 + \frac{1}{6}x^3 + 216\cos\frac{x}{6}$
г) $y = x^6 + x^3 + \cos\frac{x}{6} + C_1x^2 + C_2x + C_3$

6) $y''' = -16e^{2x} + \sin x - 2\cos x$:

а) $y = -2e^{2x} + \cos x + 2\sin x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$
б) $y = -2e^{2x} - \cos x + 2\sin x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$
в) $y = e^{2x} + \cos x + 2\sin x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$
г) $y = -2e^{2x} + \sin x + 2\cos x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$

7) $y''' = \frac{120}{x^3} - 5e^x + 64\sin 4x$:

а) $y = -5e^x + \cos x + 60\ln\lvert x\rvert + C_2x + C_3$
б) $y = -5e^x + \cos 4x + 60\ln\lvert x\rvert + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$
в) $y = e^x - 5\cos 4x + 60\ln\lvert x\rvert + C_2x + C_3$
г) $y = \cos 4x + C_2x + C_3$

Задание 6. Укажите вид частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения со специальной правой частью для двух случаев «а» и «б» (числовых значений коэффициентов не находить).

1) $y'' + 13y' + 12y = f(x)$: а) $f(x) = x - 2$; б) $f(x) = xe^{-x}$.

№ п/п	а	б
1	$y_{\text{ч.н}} = A$	$y_{\text{ч.н}} = (Ax + B)e^{-x}$
2	$y_{\text{ч.н}} = Ae^{x}$	$y_{\text{ч.н}} = Ax + B$
3	$y_{\text{ч.н}} = Ax^2 + Bx$	$y_{\text{ч.н}} = x(Ax + B)e^{-x}$
4	$y_{\text{ч.н}} = Ax + B$	$y_{\text{ч.н}} = Axe^{-x}$

2) $y'' - 16y' + 15y = f(x)$: а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = xe^{15x}$.

№ п/п	а	б
1	$y_{\text{ч.н}} = A\sin x$	$y_{\text{ч.н}} = e^{15x}(Ax + B)$
2	$y_{\text{ч.н}} = A\sin x + B\cos x$	$y_{\text{ч.н}} = xe^{5x}(Ax + B)$
3	$y_{\text{ч.н}} = Ax + B$	$y_{\text{ч.н}} = xe^{15x}(Ax + B)$
4	$y_{\text{ч.н}} = x(A\sin x + B\cos x)$	$y_{\text{ч.н}} = x^2e^{15x}(Ax + B)$

3) $9y'' + 6y' + y = f(x)$: а) $f(x) = (2x - 1)e^{x}$; б) $f(x) = (5x + 3)e^{\frac{-x}{3}}$.

№ п/п	а	б
1	$y_{\text{ч.н}} = Ae^{x}$	$y_{\text{ч.н}} = x^2(Ax + B)e^{-\frac{x}{3}}$
2	$y_{\text{ч.н}} = (Ax + B)e^{x}$	$y_{\text{ч.н}} = (Ax + B)e^{-\frac{x}{3}}$
3	$y_{\text{ч.н}} = A\cos x + B\sin x$	$y_{\text{ч.н}} = Ax^2e^{-\frac{x}{3}}$
4	$y_{\text{ч.н}} = (Ax + B)e^{-x}$	$y_{\text{ч.н}} = x(Ax + B)e^{-\frac{x}{3}}$

4) $y'' + 169y = f(x)$: а) $f(x) = 1 - 3x + 4x^2$; б) $f(x) = 3\sin 13x - 4\cos 13x$.

№ п/п	а	б
1	$y_{\text{ч.н}} = Ax + B$	$y_{\text{ч.н}} = x(A\sin 13x + B\cos 13x)$
2	$y_{\text{ч.н}} = Ax^2 + Bx + C$	$y_{\text{ч.н}} = A\sin 13x + B\cos 13x$
3	$y_{\text{ч.н}} = A$	$y_{\text{ч.н}} = Axe^{13x}$
4	$y_{\text{ч.н}} = Axe^{x}$	$y_{\text{ч.н}} = (Ax + B)e^{13x}$

5) $y'' - 12y' + 20y = f(x)$: а) $f(x) = e^{2x}$; б) $f(x) = 2x$.

№ п/п	а	б
1	$y_{\text{ч.н}} = (Ax+B)e^{2x}$	$y_{\text{ч.н}} = Ax^2 + Bx + C$
2	$y_{\text{ч.н}} = xAe^{-2x}$	$y_{\text{ч.н}} = A$
3	$y_{\text{ч.н}} = x^2 Ae^{2x}$	$y_{\text{ч.н}} = Ax + B$
4	$y_{\text{ч.н}} = xAe^{2x}$	$y_{\text{ч.н}} = A\sin x + B\cos x$

6) $y'' - 14y' + 49y = f(x)$: а) $f(x) = 7xe^{7x}$; б) $f(x) = \cos x$.

№ п/п	а	б
1	$y_{\text{ч.н}} = x(Ax+B)e^{7x}$	$y_{\text{ч.н}} = A\cos x + B\sin x$
2	$y_{\text{ч.н}} = x^2(Ax+B)e^{7x}$	$y_{\text{ч.н}} = x(A\cos x + B\sin x)$
3	$y_{\text{ч.н}} = (Ax+B)e^{7x}$	$y_{\text{ч.н}} = Ax + B$
4	$y_{\text{ч.н}} = Ax^2 e^{7x}$	$y_{\text{ч.н}} = (Ax+B)e^{x}$

7) $y'' - 12y' + 40y = f(x)$: а) $f(x) = x^2 - x$; б) $f(x) = e^{6x} \cdot \cos 2x$.

№ п/п	а	б
1	$y_{\text{ч.н}} = Ax + B$	$y_{\text{ч.н}} = x\left(Ae^{6x}\cos 2x + Be^{6x}\sin 2x\right)$
2	$y_{\text{ч.н}} = A$	$y_{\text{ч.н}} = A\cos 2x + B\sin 2x$
3	$y_{\text{ч.н}} = Ax^3$	$y_{\text{ч.н}} = e^{6x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$
4	$y_{\text{ч.н}} = Ax^2 + Bx + C$	$y_{\text{ч.н}} = xAe^{6x}\cos 2x$

Задание 7. Найдите общее решение линейной системы дифференциальных уравнений.

1) $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 4y, \\ \dot{y} = -2x - 3y: \end{cases}$

а) $\begin{cases} x = 5C_1e^{-7t}, \\ y = -C_2e^{-t} \end{cases}$	б) $\begin{cases} x = 2C_1e^{-7t} + C_2e^{-t}, \\ y = C_1e^{-7t} - C_2e^{-t} \end{cases}$
в) $\begin{cases} x = 2C_1e^{-7t}, \\ y = C_1e^{-7t} - C_2e^{-t} \end{cases}$	г) $\begin{cases} x = C_1e^{-7t} + C_2e^{-t}, \\ y = C_1e^{-7t} + C_2e^{-t} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = 8x + y: \end{cases}$

а) $\begin{cases} x = C_1e^{5t} - C_2e^{-t}, \\ y = 2C_1e^{5t} + 4C_2e^{-t} \end{cases}$	б) $\begin{cases} x = -C_2e^{-t}, \\ y = 4C_2e^{-t} \end{cases}$
в) $\begin{cases} x = C_1e^{5t} + C_2e^{-t}, \\ y = 2C_1e^{5t} \end{cases}$	г) $\begin{cases} x = C_1e^{5t} + C_2e^{-t}, \\ y = 2C_1e^{5t} + 4C_2e^{-t} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 3y, \\ \dot{y} = -8x - 5y: \end{cases}$

а) $\begin{cases} x = 3C_1e^{-2t} + C_2e^{3t}, \\ y = -8C_1e^{-2t} - C_2e^{3t} \end{cases}$	б) $\begin{cases} x = C_2e^{3t}, \\ y = -8C_1e^{-2t} - C_2e^{3t} \end{cases}$
в) $\begin{cases} x = 3C_1e^{-2t} + C_2e^{3t}, \\ y = -C_2e^{3t} \end{cases}$	г) $\begin{cases} x = C_1e^{-2t} + 3C_2e^{3t}, \\ y = -8C_1e^{-2t} - C_2e^{3t} \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dot{x} = -x + 5y, \\ \dot{y} = x + 3y: \end{cases}$

а) $\begin{cases} x = -C_1e^{-2t} + 5C_2e^{4t}, \\ y = C_1e^{-2t} + C_2e^{4t} \end{cases}$	б) $\begin{cases} x = C_2e^{4t}, \\ y = C_1e^{-2t} \end{cases}$
в) $\begin{cases} x = -5C_1e^{-2t} + C_2e^{4t}, \\ y = C_1e^{-2t} + C_2e^{4t} \end{cases}$	г) $\begin{cases} x = C_1e^{-2t} + C_2e^{4t}, \\ y = 5C_1e^{-2t} + C_2e^{4t} \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 6y, \\ \dot{y} = -4x - 2y: \end{cases}$

а) $\begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^{-8t}, \\ y = 4C_2e^{-8t} \end{cases}$	б) $\begin{cases} x = 6C_2e^{-8t}, \\ y = -C_1 + 4C_2e^{-8t} \end{cases}$
в) $\begin{cases} x = C_1e^{2t} + 6C_2e^{-8t}, \\ y = C_1e^{2t} - 5C_2e^{-8t} \end{cases}$	г) $\begin{cases} x = C_1e^{2t} + 6C_2e^{-8t}, \\ y = -C_1e^{2t} + 4C_2e^{-8t} \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 8y, \\ \dot{y} = -3x - 3y: \end{cases}$

а) $\begin{cases} x = -\dfrac{4}{3}C_1e^{t} + \dfrac{2}{3}C_2e^{-5t}, \\ y = C_1 + C_2e^{-5t} \end{cases}$	б) $\begin{cases} x = \dfrac{4}{3}C_1e^{t} + \dfrac{2}{3}C_2e^{-5t}, \\ y = C_1e^{t} + C_2e^{-5t} \end{cases}$
в) $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}C_2e^{-5t}, \\ y = C_1e^{t} + C_2e^{-5t} \end{cases}$	г) $\begin{cases} x = -\dfrac{4}{3}C_1e^{t} + \dfrac{2}{3}C_2e^{-5t}, \\ y = C_1e^{t} + C_2e^{-5t} \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y, \\ \dot{y} = -7x - 3y: \end{cases}$

а) $\begin{cases} x = C_1e^{4t} - 5C_2e^{-8t}, \\ y = -C_1e^{4t} + 7C_2e^{-8t} \end{cases}$	б) $\begin{cases} x = C_1e^{4t}, \\ y = -C_1e^{4t} + 7C_2e^{-8t} \end{cases}$
в) $\begin{cases} x = C_1e^{4t} + 5C_2e^{-8t}, \\ y = -C_1e^{4t} + 7C_2e^{-8t} \end{cases}$	г) $\begin{cases} x = 5C_2e^{-8t}, \\ y = -C_1e^{4t} \end{cases}$

3. РЯДЫ

В результате изучения данной темы студент должен научиться:

– исследовать сходимость знакоположительных рядов;

– исследовать сходимость знакочередующихся рядов и (в случае сходимости) вычислять их сумму с заданной точностью;

– находить радиус и область сходимости степенных рядов;

– раскладывать функции в степенные ряды;

– использовать разложения функций в степенные ряды для приближенного вычисления значений функций и определенных интегралов;

– выполнять разложение функций в ряды Фурье.

3.1. ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Числовые ряды

1. Для числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$ выпишите члены ряда с указанными номерами: a_1, a_n, a_{n+1}. Составьте n-ю частичную сумму S_n и по определению найдите сумму ряда $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

2. Найдите сумму числового ряда (если он сходится).

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-2^n}{10^n}$.

3. 1) Проанализируйте, какой из признаков сходимости наиболее подходит для исследования сходимости каждого из приведенных рядов.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+3)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{2n+5}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n^2+5}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot\sin\frac{\pi}{n^3}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln^2(n+1)}$.

2) Исследуйте сходимость приведенных выше рядов, применив для этого выбранный признак сходимости.

4. Исследуйте абсолютную (условную) сходимость знакочередующегося ряда. В случае сходимости найдите его сумму с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{(n+3)!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{3n+1}{2n+5}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n\cdot n!}$.

Степенные ряды

1. Найдите радиус, интервал и область сходимости степенного ряда.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x-3)^n}{(n^2+1) \cdot 4^n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{(n+3)!}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n$.

2. Разложите функцию $f(x)$ в ряд по степеням x и вычислите интеграл $\int_0^{0,1} f(x)dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ (укажите количество членов ряда, необходимых для достижения заданной точности).

1) $f(x) = \sin 100x^2$; 2) $f(x) = \frac{1-e^{-2x}}{x}$; 3) $f(x) = \ln(1+\frac{x}{5})$.

Ряды Фурье

1. Разложите в ряд Фурье 2π-периодическую функцию, заданную на промежутке $[-\pi; \pi)$: $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi \le x \le 0, \\ x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$ Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

2. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = 3x$, заданную на промежутке $[0; \pi)$, продолжив ее на интервал $(-\pi; 0)$: 1) четным образом; 2) нечетным образом. Постройте графики четного и нечетного продолжения данной функции.

Ответы

Числовые ряды

1. $a_1 = \frac{1}{3}$; $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$; $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{3^{n+1}}$; $S_n = \frac{3^n + (-1)^{n+1}}{4 \cdot 3^n}$; $S = \frac{1}{4}$.

2. 1) расходится; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{3}{4}$.

3. 1) а) признак Даламбера; б) признак Коши; в) признак сравнения; г) признак сравнения; д) интегральный признак;

2) а) сходится; б) расходится; в) расходится; г) сходится; д) сходится.

4. 1) сходится абсолютно; $S \approx S_3 = -0,029$; 2) расходится; 3) сходится абсолютно; $S \approx S_4 = 0,393$.

Степенные ряды

1. 1) $\mathrm{R} = 2$, $[-2; 2)$; 2) $\mathrm{R} = 4$, $[-1; 7]$; 3) $\mathrm{R} = +\infty$, $(-\infty; +\infty)$; 4) $\mathrm{R} = 0$, $\{-1\}$.

2. 1) $\sin 100x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 100^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{4n+2}$; $0{,}031$, $n=2$;

2) $\frac{1-e^{-2x}}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{n!} x^{n-1}$; $0{,}190$, $n=2$;

3) $\ln\left(1+\frac{x}{5}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 5^{n+1}} x^{n+1}$; $0{,}001$, $n=1$.

Ряды Фурье

1.

$$f(x) = \frac{4+\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x - \frac{1}{2n}\sin 2nx - \frac{4-\pi}{\pi(2n-1)}\sin(2n-1)x\right),$$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$; $S(2\pi n) = 1$, $S(\pi + 2\pi n) = \frac{2+\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Графики функции $f(x)$ и суммы ряда Фурье $S(x)$ представлены на рис. 3.1 и 3.2 соответственно.

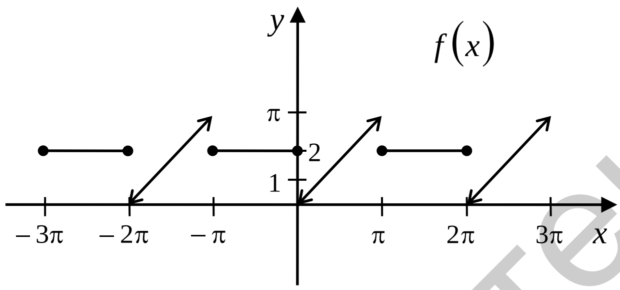


Рис. 3.1

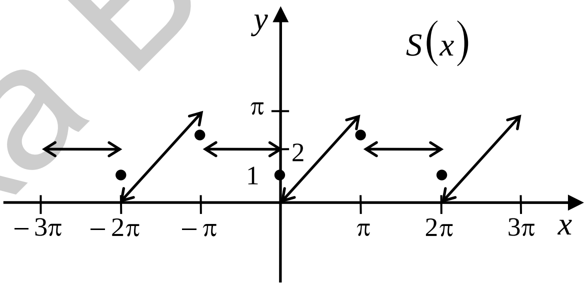


Рис. 3.2

2. 1) $f(x) = \frac{3\pi}{2} - \frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$, $x \in [0;\pi)$.

2) $f(x) = 6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$, $x \in [0;\pi)$.

Графики четного и нечетного продолжения функции $f(x)$ представлены на рис. 3.3 и 3.4 соответственно.

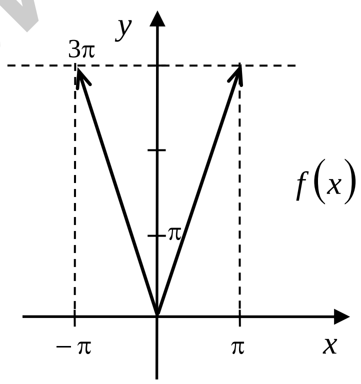


Рис. 3.3

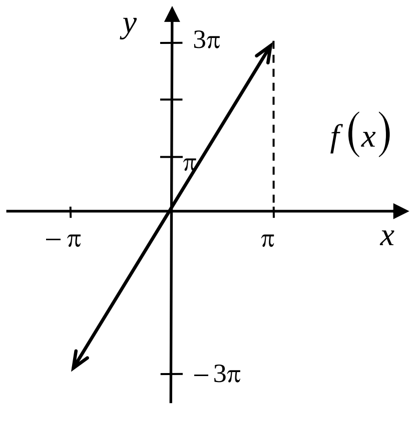


Рис. 3.4

3.2. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Числовые ряды

Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{3.1}$$

где $u_n \in \mathbb{R}$, называется **числовым рядом**, числа u_i называются членами ряда, u_n – общий член ряда.

Сумма n первых членов ряда (3.1) называется его ***n*-й частичной суммой** и обозначается S_n: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Числовой ряд (3.1) называется **сходящимся**, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, который называется суммой данного ряда: $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. Если предел последовательности частичных сумм ряда (3.1) равен бесконечности или не существует, то ряд называется **расходящимся**.

Остатком ряда (3.1) называется ряд

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} + \ldots = \sum_{p=1}^{\infty} u_{n+p} .$$

Для сходящегося ряда справедливо представление $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S = S_n + r_n$.

Необходимый признак сходимости числового ряда: если числовой ряд (3.1) сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Данное условие является необходимым, но не достаточным, т. е. из того, что $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, не следует, что числовой ряд (3.1) является сходящимся, поэтому его используют как достаточный признак расходимости.

Достаточный признак расходимости: если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то числовой ряд (3.1) является расходящимся.

Достаточные признаки сходимости знакоположительных числовых рядов:

1) Признак сравнения.

Пусть знакоположительные числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ таковы, что $a_n \le b_n$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, тогда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует и сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

2) Признак сравнения в предельной форме.

Если знакоположительные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ таковы, что существует конечный отличный от нуля $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0$, то эти ряды либо оба сходятся, либо оба расходятся.

3) Признак Даламбера.

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакоположительный ряд и существует $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то 1) при $q<1$ ряд сходится; 2) при $q>1$ ряд расходится; 3) при $q=1$ необходимы дополнительные исследования.

4) Радикальный признак Коши.

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакоположительный ряд и существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то 1) при $q<1$ ряд сходится; 2) при $q>1$ ряд расходится; 3) при $q=1$ необходимы дополнительные исследования.

5) Интегральный признак Коши.

Если члены знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ монотонно убывают и непрерывная при $x \ge 1$ функция $y = f(x)$ такова, что $f(n) = a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ либо одновременно сходятся, либо расходятся.

Эталонные числовые ряды:

1) Ряд, составленный из членов геометрической прогрессии $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots$. Данный ряд является сходящимся при $|q|<1$ и расходящимся при $|q| \ge 1$.

2) **Гармонический** ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ расходится.

3) **Обобщенный гармонический ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots$ является сходящимся при $\alpha > 1$ и расходящимся при $\alpha \le 1$.

Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots, \tag{3.2}$$

где $u_n > 0$, $u_n \in \mathbb{R}$, называется **знакочередующимся** числовым рядом.

Признак Лейбница. Если для знакочередующегося ряда (3.2) выполняются два условия: 1) $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$ (т. е. последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает); 2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то этот ряд сходится. При этом для n-го остатка r_n справедливо неравенство $|r_n| \le u_{n+1}$.

Ряд (3.2) называется **абсолютно сходящимся**, если сходящимся является ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, т. е. ряд, составленный из абсолютных величин его членов, сходится.

Ряд (3.2) называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Степенные ряды

Выражение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{3.3}$$

называется **степенным рядом** по степеням x, при этом числа $c_n \in \mathbb{R}$ называются **коэффициентами** степенного ряда.

Наряду с простейшим степенным рядом (3.3) рассматривается степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)^2 + \ldots + c_n (x - x_0)^n + \ldots, \tag{3.4}$$

называемый **степенным рядом по степеням** $(x - x_0)$, где x_0 – центр разложения, c_n – коэффициенты ряда.

Теорема Абеля. Если степенной ряд (3.3) сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится для любых x, таких, что $|x| < |x_0|$. Если же степенной ряд (3.3) расходится в точке x_1, то он расходится для любых x, таких, что $|x| > |x_1|$.

Из теоремы Абеля следует, что для любого степенного ряда существует такое число $\mathrm{R} > 0$, называемое **радиусом сходимости** этого ряда, для которого ряд сходится, если $|x| < \mathrm{R}$ и ряд расходится, если $|x| > \mathrm{R}$.

Отметим, что в точках $x = \mathrm{R}$ и $x = -\mathrm{R}$ ряд (3.3) может быть как сходящимся, так и расходящимся, поэтому на концах **интервала сходимости** $(-\mathrm{R}; \mathrm{R})$ сходимость ряда (3.3) проверяется в каждом случае отдельно.

Если ряд (3.3) сходится только в точке $x = 0$, то полагают, что $\mathrm{R} = 0$. Если ряд сходится для $\forall\, x \in \mathbb{R}$, его радиус сходимости полагают равным ∞.

Радиус сходимости ряда (3.3) можно найти по одной из формул

$$\mathrm{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad \text{либо} \quad \mathrm{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Отметим, что данные формулы применимы только в том случае, когда степенной ряд является «полным», т. е. все (!) коэффициенты c_n отличны от нуля.

Радиус сходимости степенного ряда (3.4) также находится по указанным выше формулам; в этом случае интервалом сходимости является интервал $(x_0 - \mathrm{R};\, x_0 + \mathrm{R})$ с центром в точке x_0, который находится как решение неравенства $|x - x_0| < \mathrm{R}$.

Ряд Тейлора бесконечно дифференцируемой в окрестности точки x_0 функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Если $x_0 = 0$, то частным случаем ряда Тейлора является ряд по степеням x, называемый **рядом Маклорена:**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n .$$

Разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

1) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$;

2) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$;

3) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \; x \in \mathbb{R}$;

4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad x \in (-1; 1]$;

5) $(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$, $x \in (-1; 1)$.

В частности, для $\alpha = -1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n , \quad x \in (-1; 1) .$$

Подставляя в данное разложение $(-x)$ вместо x, получаем

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n , \quad x \in (-1; 1) .$$

Ряды Фурье

Тригонометрическим рядом Фурье 2π-периодической функции $f(x)$ называется функциональный ряд вида

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \tag{3.5}$$

коэффициенты a_0, a_n, b_n которого находятся по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nxdx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nxdx.$$

Теорема Дирихле. Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ удовлетворяет двум условиям:

1) $f(x)$ – кусочно-непрерывна, т. е. она является непрерывной или имеет конечное число точек разрыва первого рода;

2) $f(x)$ – кусочно-монотонна, т. е. она является монотонной на всем отрезке либо этот отрезок можно разбить на конечное число таких интервалов, на каждом из которых функция монотонна.

Тогда ряд Фурье (3.5), составленный для функции $f(x)$, сходится на этом отрезке к функции $S(x)$. При этом:

1) $S(x) = f(x)$ в точках непрерывности функции $f(x)$;

2) если x_0 – точка разрыва функции $f(x)$, то $S(x_0) = \dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$;

3) $S(\pi) = S(-\pi) = \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

Если функция $f(x)$ является нечетной, то она разлагается в ряд Фурье по синусам кратных дуг, который имеет следующий вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

при этом коэффициенты b_n находятся по формуле $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin nxdx,\ n \in \mathbb{N}$.

Если функция $f(x)$ является четной, то она разлагается в ряд Фурье по косинусам кратных дуг, который имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

при этом коэффициенты a_0, a_n находятся по формулам

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos nxdx,\ n \in \mathbb{N}.$$

Если функция $f(x)$ является $2l$-периодической, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad (3.6)$$

при этом коэффициенты a_0, a_n, b_n находятся по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\frac{\pi n x}{l}dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

3.3. ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Числовые ряды

1. Исследуйте сходимость знакоположительных числовых рядов.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{n^3+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)^2}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+3}{n+2}\right)^n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln n}}{n}$.

Решение

1) Для исследования сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{n^3+1}$ используем признак сравнения рядов в предельной форме.

Сравним данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{n^3+1}$ с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который является расходящимся.

Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^3\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{n^3+1}$.

Для вычисления этого предела воспользуемся известным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x} = 1$, из которого следует, что $\operatorname{tg}x \sim x$ при $x \to 0$. Поскольку в нашем случае $\frac{1}{n^3+1} \to 0$ при $n\to\infty$, то $\operatorname{tg}\frac{1}{n^3+1} \sim \frac{1}{n^3+1}$ при $n\to\infty$.

Следовательно, продолжая вычисление предела, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n^3\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3+1} = 1.$$

Так как найденное значение $l = 1 > 0$, то исследуемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{n^3+1}$ расходится так же, как и гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

2) Поскольку n-й член данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^2}{n!}$ содержит факториал, то для исследования его сходимости удобно использовать признак Даламбера.

Так как $a_n = \frac{(n+3)^2}{n!}$, тогда $a_{n+1} = \frac{((n+1)+3)^2}{(n+1)!} = \frac{(n+4)^2}{(n+1)!} = \frac{(n+4)^2}{n!(n+1)}$.

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^2 \cdot n!}{(n+1)!(n+3)^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^2 \cdot \frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Поскольку найденное значение $q = 0 < 1$, значит, исследуемый ряд сходится.

3) Вид n-го члена исследуемого ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+3}{n+2}\right)^n$ подсказывает, что для выяснения его сходимости можно использовать радикальный признак Коши.

Так как $a_n = \left(\frac{4n+3}{n+2}\right)^n$, то $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4n+3}{n+2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{n+2} = 4$.

Поскольку в нашем случае $q = 4 > 1$, то исследуемый ряд расходится.

4) Для исследования сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln n}}{n}$ удобно использовать интегральный признак Коши.

Так как $a_n = \frac{\sqrt{\ln n}}{n}$, то $f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$. Эта функция удовлетворяет всем условиям интегрального признака Коши.

Вычислим несобственный интеграл от функции $f(x)$ по промежутку $[1; \infty)$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \sqrt{\ln x}\, \frac{dx}{x} = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \Rightarrow dt = \dfrac{dx}{x} \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = b \Rightarrow t = \ln b \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_0^{\ln b} \sqrt{t}\, dt = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\ln b} \right) = \frac{2}{3} \lim_{b\to+\infty} (\ln b)^{\frac{3}{2}} = +\infty.$$

Таким образом, несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ расходится, а значит, расходящимся является и исследуемый ряд.

2. Исследуйте сходимость знакочередующегося ряда и в случае сходимости найдите его сумму с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^3 \cdot 7^n}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot n}{n^2 + 3}$.

Решение

1) Проверим, является ли данный ряд абсолютно сходящимся. Для этого рассмотрим ряд, составленный из модулей его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \cdot 7^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \cdot 7^n}.$$

Исследуем его сходимость с помощью радикального признака Коши.

Так как $a_n = \dfrac{1}{n^3 \cdot 7^n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^3 \cdot 7^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^3} \cdot 7} = \dfrac{1}{7} < 1$.

Таким образом, ряд из модулей сходится, а значит, исходный знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^3 \cdot 7^n}$ сходится абсолютно.

Найдем сумму S этого ряда с точностью $\varepsilon = 0{,}001$. Для этого достаточно найти такой номер n, чтобы для частичной суммы S_n с этим номером выполнялось неравенство $|S - S_n| < \varepsilon = 10^{-3}$. Тогда $S \approx S_n$ с тремя верными знаками после запятой. Пусть $S = S_n + r_n$, где r_n – n-й остаток ряда, S_n – n-я частичная сумма. По признаку Лейбница n-й остаток ряда, взятый по модулю, не превосходит модуля первого отбрасываемого члена ряда, т. е. $|r_n| = |S - S_n| \le |a_{n+1}|$. Очевидно, если $|a_{n+1}| < \varepsilon = 10^{-3}$, то тем более и $|S - S_n| < \varepsilon = 10^{-3}$, т. е. сумма S_n будет приближать сумму ряда S с заданной точностью ε. Найдем наименьший номер n, для которого $|a_{n+1}| \le 0{,}001$:

$$|a_{n+1}| = \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)^3 \cdot 7^{n+1}} \right| = \frac{1}{(n+1)^3 \cdot 7^{n+1}} \le \frac{1}{1000} \iff (n+1)^3 \cdot 7^{n+1} \ge 1000.$$

Методом подбора убеждаемся, что последнее неравенство выполняется, начиная с n, равного 2. Значит, сумма S данного ряда приближенно равна второй частичной сумме S_2, т. е. $S \approx S_2 = \dfrac{1}{1 \cdot 7} - \dfrac{1}{2^3 \cdot 7^2} = 0{,}143 - 0{,}003 = 0{,}140$.

2) Для исследования абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 3}$ используем признак сравнения в предельной форме.

Так как ряд из модулей членов исходного ряда имеет вид $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^2+3}$, то для сравнения возьмем гармонический ряд с общим членом $b_n=\frac{1}{n}$, который является расходящимся.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n^2+3}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+3}=1\neq 0$.

Таким образом, ряд из модулей расходится, а значит, знакочередующийся ряд не является абсолютно сходящимся.

Проверим, выполняются ли условия признака Лейбница для исследуемого ряда.

а) $\frac{2}{7}>\frac{3}{12}>\ldots>\frac{n}{n^2+3}>\frac{n+1}{(n+1)^2+3}>\ldots$.. Первое условие выполняется.

б) Второе условие также верно, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+3}=0$.

Таким образом, по признаку Лейбница данный ряд сходится. В силу того что ряд не является абсолютно сходящимся, его сходимость условная.

Степенные ряды

1. Найдите радиус, интервал и область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n-1)\cdot 3^n}$.

Решение

Для нахождения радиуса сходимости R степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ воспользуемся формулой $\mathrm{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$.

Так как $c_n=\frac{1}{(2n-1)\cdot 3^n}$, $c_{n+1}=\frac{1}{(2(n+1)-1)\cdot 3^{n+1}}=\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{n+1}}$, то

$$\mathrm{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot 3^{n+1}}{(2n-1)\cdot 3^n}=3.$$

Интервал сходимости степенного ряда определяется неравенством $|x-x_0|<\mathrm{R}$. В нашем случае $|x+2|<3$ (т. к. $x_0=-2,\ \mathrm{R}=3$), значит, $-3<x+2<3 \Leftrightarrow -5<x<1$, т. е. $(-5;1)$ – интервал сходимости.

Исследуем поведение ряда на границах этого интервала.

Подставив в исходный ряд значение $x=-5$, получаем знакочередующийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$.

Проверим, выполняются ли для него условия признака Лейбница.

1) $u_n=\frac{1}{2n-1}$. Очевидно, что $1>\frac{1}{3}>\frac{1}{5}>\ldots>\frac{1}{2n-1}>\ldots$. Первое условие выполнено.

2) $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0 \Rightarrow$ второе условие тоже выполнено.

Таким образом, в соответствии с признаком Лейбница ряд сходится. Это означает, что точка $x=-5$ принадлежит области сходимости. Сходимость в точке $x=-5$ является условной, поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$, составленный из модулей членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$, расходится. Действительно, при сравнении его с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}.$$

Подставив в исходный степенной ряд значение $x=1$, получаем расходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$. Значит, точка $x=1$ не входит в область сходимости.

Таким образом, областью сходимости степенного ряда является промежуток $[-5;1)$, при этом областью абсолютной сходимости является интервал $(-5;1)$.

2. Разложите функцию $f(x)$ в ряд Маклорена и найдите область его сходимости:

1) $f(x)=\frac{e^{-x^2}-1}{x}$; 2) $f(x)=\frac{x}{2+3x}$.

Решение

1) Воспользуемся известным разложением функции e^t в ряд Маклорена (см. подраздел 3.2):

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!},\quad t\in(-\infty;+\infty).$$

В этот ряд вместо t подставим $(-x^2)$, вычтем 1, а затем разделим почленно на x. В результате получим искомый ряд для функции $f(x)$:

$$f(x)=\frac{e^{-x^2}-1}{x}=\frac{1}{x}\left(1+\left(-x^2\right)+\frac{\left(-x^2\right)^2}{2!}+\frac{\left(-x^2\right)^3}{3!}+\ldots+\frac{\left(-x^2\right)^n}{n!}+\ldots-1\right)=$$

$=\frac{1}{x}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n-1}}{n!}$, который сходится при $x\in(-\infty;+\infty)$.

2) Чтобы получить ряд Маклорена для функции $f(x)=\dfrac{x}{2+3x}$, представим ее в виде: $f(x)=\dfrac{x}{2+3x}=\dfrac{x}{2\left(1+\frac{3}{2}x\right)}=\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{3}{2}x}$.

Теперь воспользуемся известным разложением функции $\dfrac{1}{1+t}$ в ряд по степеням t (см. подраздел 3.2):

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\ldots+(-1)^n t^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n,\quad t\in(-1;1).$$

В этот ряд вместо t подставим $\dfrac{3}{2}x$, затем домножим на $\dfrac{x}{2}$, чтобы получить искомое разложение функции $f(x)$ в ряд Маклорена.

$$f(x)=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{2}x}=\frac{x}{2}\left(1-\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}x\right)^2-\left(\frac{3}{2}x\right)^3+\ldots+(-1)^n\left(\frac{3}{2}x\right)^n+\ldots\right)=$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{2}x\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n x^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

Полученный ряд сходится, если $-1<\dfrac{3}{2}x<1 \quad\Leftrightarrow\quad -\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{2}{3}$.

Ряды Фурье

1. Разложите в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x)=\begin{cases}2, & -\pi\le x<0,\\ 2+x, & 0\le x<\pi,\end{cases}$ заданную на промежутке $[-\pi;\pi)$. Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

Решение

Вычислим для функции $f(x)$ коэффициенты Фурье $a_0, a_n, b_n,\ n\in\mathbb{N}$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 2dx + \int_{0}^{\pi}(2+x)dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(2x\Big|_{-\pi}^{0} + \left(2x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(2\pi + 2\pi + \frac{\pi^2}{2}\right) = 4 + \frac{\pi}{2} = \frac{8+\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 2\cos nxdx + \int_{0}^{\pi}(2+x)\cdot\cos nxdx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(2+x)\cdot\cos nxdx = 0 + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(2+x)\cdot\cos nxdx.$$

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся формулой интегрирования по частям $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(2+x)\cos nxdx = \left\{\begin{matrix} u = 2+x \;\Rightarrow\; du = dx \\ dv = \cos nxdx \;\Rightarrow\; v = \frac{1}{n}\sin nx \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(2+x)}{n}\sin \pi x\Bigg|_{0}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right) = -\frac{1}{\pi n}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Bigg|_{0}^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2}(\cos \pi n - \cos 0) =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ -\frac{2}{\pi n^2}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Окончательно получаем $a_k = -\frac{2}{\pi(2k-1)^2}$, $k \in \mathbb{N}$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 2\sin nxdx + \int_{0}^{\pi}(2+x)\cdot\sin nxdx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(2+x)\cdot\sin nxdx = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = -\frac{2}{\pi n}\left(\cos 0 - \cos(-\pi n)\right) = -\frac{2}{\pi n}\left(1 - (-1)^n\right).$$

Интеграл I_2 вычислим по частям.

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(2+x)\cdot\sin nxdx = \left\{\begin{matrix} u = 2+x \;\Rightarrow\; du = dx \\ dv = \sin nxdx \Rightarrow v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2+x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx \right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2+\pi}{n}\cos \pi n + \frac{2}{n}\cos 0 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin nx\right)\Bigg|_0^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(-(2+\pi)\cdot(-1)^n + 2\right).$$

Тогда

$$b_n = I_1 + I_2 = -\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right) + \frac{2-(2+\pi)\cdot(-1)^n}{\pi n} =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(-2\left(1-(-1)^n\right) + 2 - (2+\pi)\cdot(-1)^n\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(-2 + 2\cdot(-1)^n + 2 - 2\cdot(-1)^n - \pi\cdot(-1)^n\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{8+\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \right),$$

$x \neq \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

В соответствии с теоремой Дирихле построенный ряд Фурье сходится к функции $f(x)$ во всех точках непрерывности. В точках $x = \pm\pi$ значения суммы ряда Фурье равны $S(\pi) = S(-\pi) = \dfrac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \dfrac{2+2+\pi}{2} = \dfrac{4+\pi}{2} = 2 + \dfrac{\pi}{2}$.

График функции $f(x)$ строится в соответствии с условием задачи (рис. 3.5). Как показано выше, $S(x)$ отличается от $f(x)$ только значениями в точках $\pi + 2\pi k$: $S(\pi + 2\pi k) = 2 + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ (рис. 3.6).

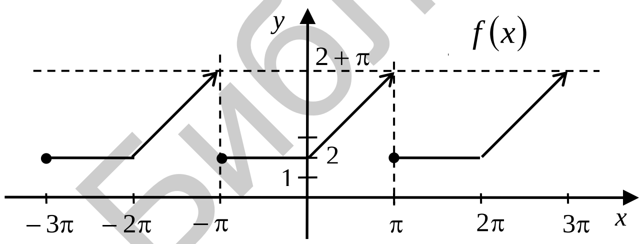


Рис. 3.5

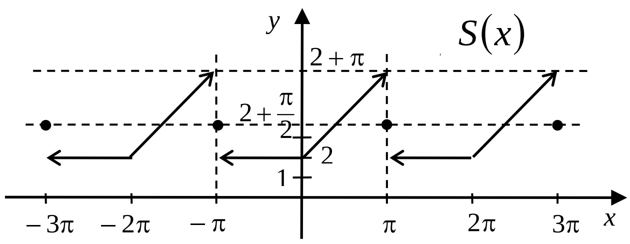


Рис. 3.6

3.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

Числовые ряды

1. Исследуйте сходимость знакоположительного ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{4n^2+1}\right)^{2n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{\sqrt[6]{n}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{3^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+2}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{(n+1)\cdot(n+2)}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n+1}{n\cdot 5^n+2}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}$; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n^2+1)}}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n}$;

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^3}$; 14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+\cos n}{\sqrt[3]{n^2}}$; 15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$;

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{n+2}}$; 17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n}$; 18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;

19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot\sin^n\frac{1}{\sqrt{n}}$; 20) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^2 n}$; 21) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt{\ln n}}$;

22) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln^3 n}$; 23) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln(n+1)}}{n}$; 24) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$.

2. Исследуйте сходимость знакочередующегося ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^n}{7^n(n+6)}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(3n-2)}{3^{n+1}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n!}{2^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$;

7) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\ln n}{\sqrt{n+1}}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)\cdot\ln(n+2)}$.

Степенные ряды

1. Найдите интервал и область сходимости степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^n}{(n+3)\cdot 5^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{4^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}(x-4)^n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)!}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n^2+1}(x-7)^n$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{8^n}(x+6)^n$; 7) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{(n+1)\cdot\ln^2 n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\cdot x^n$;

9) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(n+1)\cdot\sqrt{\ln n}}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(x+1)^n$.

2. Разложите функцию $f(x)$ в ряд Маклорена и найдите область его сходимости:

1) $f(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x}$; 2) $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}$; 3) $f(x)=\frac{\sin x^2}{x}$;

4) $f(x)=\sin x\cdot\sin 3x$; 5) $f(x)=1-\cos x^3$; 6) $f(x)=\sin^2 x$;

7) $f(x)=x\cdot\cos 2x$; 8) $f(x)=\frac{1}{1-x^5}$; 9) $f(x)=\frac{x}{1+3x}$;

10) $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$.

Ряды Фурье

Разложите в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x)$, заданную на промежутке $[-\pi;\pi)$. Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье:

1) $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x<\pi;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ x+1, & 0<x<\pi;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}2-x, & -\pi\le x\le 0,\\ 1, & 0<x<\pi.\end{cases}$

Ответы

Числовые ряды

1. 1) сходится; 2) сходится; 3) сходится;
4) расходится; 5) сходится; 6) расходится;
7) сходится; 8) сходится; 9) сходится;
10) расходится; 11) сходится; 12) расходится;
13) сходится; 14) расходится; 15) сходится;
16) расходится; 17) расходится; 18) сходится;
19) сходится; 20) сходится; 21) расходится;
22) сходится; 23) расходится; 24) расходится.

2. 1) сходится абсолютно; 2) сходится условно;
3) сходится абсолютно; 4) расходится;
5) сходится условно; 6) сходится условно;
7) сходится условно; 8) сходится условно.

Степенные ряды

1. 1) $R=5;\ (-5;5]$; 2) $R=4;\ (-5;3)$; 3) $R=1;\ [3;5]$;

4) $R=\infty;\ (-\infty;+\infty)$; 5) $R=1;\ [6;8)$; 6) $R=8;\ (-14;2)$;

7) $R=1;\ [-1;1]$; 8) $R=\frac{1}{2};\ \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; 9) $R=1;\ [-3;-1)$;

10) $R=1;\ (-2;0)$.

2.

1) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot x^{2n-1}}{n},\quad |x|\le 1;$

2) $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}\cdot x^{n}}{2^n\cdot n!},\quad x\in\mathbb{R};$

3) $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot x^{4n-3}}{(2n-1)!},\quad x\in\mathbb{R};$

4) $f(x)=\sin x\cdot\sin 3x=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}\cdot[4^n-16^n]}{(2n)!}\cdot x^{2n}=-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}\cdot[16^n-4^n]}{(2n)!}\cdot x^{2n},$

$x\in\mathbb{R};$

5) $f(x)=1-\cos x^3=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot x^{6n}}{(2n)!},\quad x\in\mathbb{R};$

6) $f(x)=\sin^2 x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n-1}\cdot x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in\mathbb{R};$

7) $f(x)=x\cos 2x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}\cdot 2^{2n}\cdot x^{2n+1}}{(2n)!},\quad x\in\mathbb{R};$

8) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^5}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{5n},\quad |x|<1;$

9) $f(x)=\dfrac{x}{1+3x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 3^n x^{n+1},\quad |x|<\dfrac{1}{3};$

10) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}=3\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{x^{n+1}}{2^{n+1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{x^{n}}{2^{n+1}},\quad |x|<2.$

Ряды Фурье

1) $f(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1},\qquad x\ne\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\qquad S(\pi k)=-\dfrac{1}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$

Графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье представлены на рис. 3.7 и 3.8 соответственно.

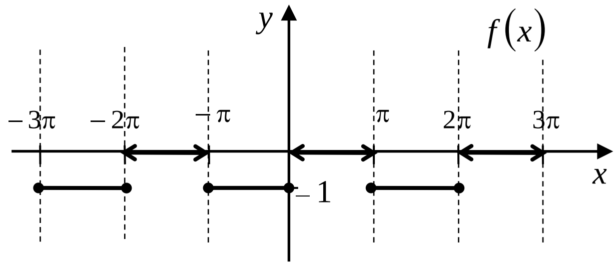


Рис. 3.7

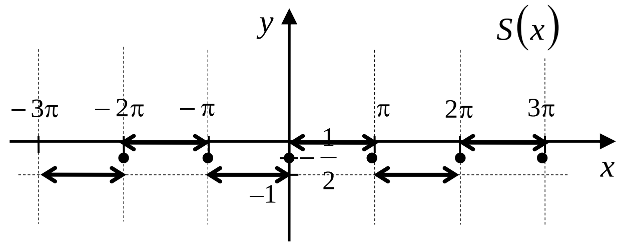


Рис. 3.8

2)

$$f(x)=\frac{\pi+2}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x-\frac{1}{2n}\sin 2nx+\frac{\pi+2}{\pi(2n-1)}\sin(2n-1)x\right),$$

$x\neq\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \ S(2\pi k)=\dfrac{1}{2},\ \ S(\pi+2\pi k)=\dfrac{\pi+1}{2},\ \ k\in\mathbb{Z}.$

Графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье представлены на рис. 3.9 и 3.10 соответственно.

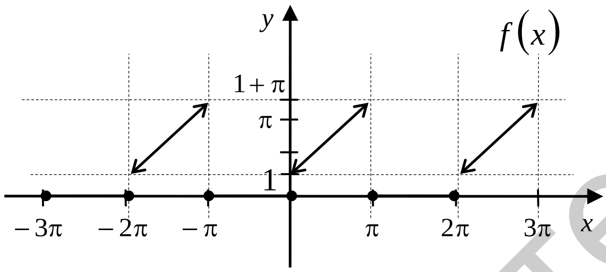


Рис. 3.9

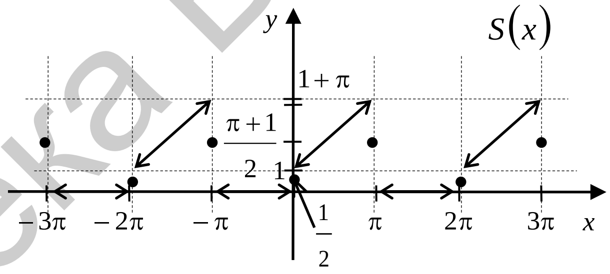


Рис. 3.10

3)

$$f(x)=\frac{\pi+6}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\frac{1}{2n}\sin 2nx-\frac{\pi+2}{\pi(2n-1)}\sin(2n-1)x\right),$$

$x\neq\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \ S(2\pi k)=\dfrac{3}{2},\ \ S(\pi+2\pi k)=\dfrac{3+\pi}{2},\ \ k\in\mathbb{Z}.$

Графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье представлены на рис. 3.11 и 3.12 соответственно.

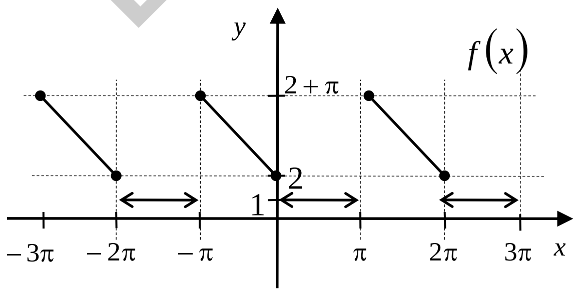


Рис. 3.11

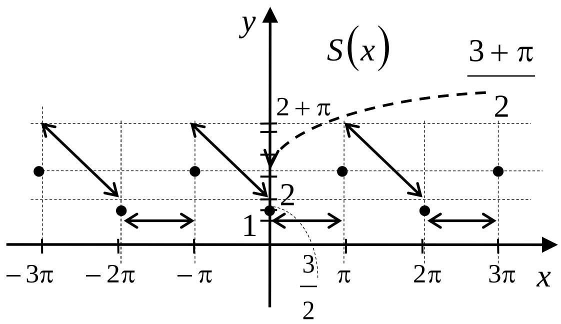


Рис. 3.12

3.5. ТЕСТОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

по теме «Ряды»

I вариант

1. Обоснуйте, какие из приведенных рядов являются сходящимися, используя для этого эталонные ряды и достаточный признак расходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5n}{3n+1}$.

1) а), б); 2) а), в); 3) б), в); 4) а), б), в).

2. Исследуйте сходимость числового ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^3+1} \sin\dfrac{1}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(n+3)}{n!}$.

1) сходится; 2) расходится; 3) сходится абсолютно; 4) сходится условно.

3. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (x+4)^n}{2^n \cdot (n+3)}$.

1) $(-6;-2]$; 2) $(-6;-2)$; 3) $[-6;-2]$; 4) $[-6;-2)$.

4. Вычислите приближенно $\int\limits_{0}^{0,1} \dfrac{\ln(1+x)}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, разложив для этого подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Укажите количество членов ряда, необходимых для достижения заданной точности.

1) $n=4$; $0{,}99$; 2) $n=3$; $0{,}98$; 3) $n=2$; $0{,}098$; 4) $n=1$; 1.

5. Разложите в ряд Фурье 2π-периодическую функцию, заданную на промежутке $[-\pi;\pi)$: $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$ Постройте графики функций $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

1) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2nx}{2n}$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$.

II вариант

1. Обоснуйте, какие из приведенных рядов являются сходящимися, используя для этого эталонные ряды и достаточный признак расходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2 \cdot \sqrt[3]{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{5n-1}$.

1) а); 2) а), в); 3) б); 4) б), в).

2. Исследуйте сходимость числового ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+3)^3}{(2n)!}$.

1) сходится; 2) расходится; 3) сходится абсолютно; 4) сходится условно.

3. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n+1}}{3^n\cdot(2n+3)}$.

1) $(-1;5]$;	2) $(-1;5)$;	3) $[-1;5]$;	4) $[-1;5)$.

4. Вычислите приближенно $\int_0^{0,5}\ln\left(1+x^2\right)dx$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$, разложив для этого подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Укажите количество членов ряда, необходимых для достижения заданной точности.

1) $n=1$; $0{,}042$;	2) $n=4$; $0{,}04$;	3) $n=2$; $0{,}039$;	4) $n=3$; $0{,}038$.

5. Разложите в ряд Фурье 2π-периодическую функцию, заданную на промежутке $[-\pi;\pi)$: $f(x)=\begin{cases}2, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x<\pi.\end{cases}$ Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

1) $f(x)=2-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$;	2) $f(x)=1-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n-1}$;
3) $f(x)=1-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{2n}$;	4) $f(x)=1-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

III вариант

1. Обоснуйте, какие из приведенных рядов являются сходящимися, используя для этого эталонные ряды и достаточный признак расходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{\sqrt[3]{n^2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+3}{8n+1}$.

1) б);	2) а), в);	3) в);	4) а), б), в).

2. Исследуйте сходимость числового ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{3\cdot7\cdot11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin\frac{n}{n^2+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{4n^2-1}\right)^{n^2}$.

1) сходится; 2) расходится; 3) сходится абсолютно; 4) сходится условно.

3. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n-1}}{4^n\cdot(n^2+3)}$.

1) $(-6;2]$;	2) $(-6;2)$;	3) $[-6;2]$;	4) $[-6;2)$.

4. Вычислите приближенно $\int\limits_0^{0,2}\frac{e^{-x}-1}{x}dx$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$, разложив для этого подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Укажите количество членов ряда, необходимых для достижения заданной точности.

1) $n=1;\ -0{,}09$;	2) $n=2;\ -0{,}190$;	3) $n=2;\ -0{,}089$;	4) $n=4;\ -0{,}1$.

5. Разложите в ряд Фурье 2π-периодическую функцию, заданную на промежутке $[-\pi;\pi)$: $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ -2, & 0<x<\pi.\end{cases}$ Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

1) $f(x)=-1-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$;	2) $f(x)=-\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$;
3) $f(x)=-1-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$;	4) $f(x)=-1-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n}$.

IV вариант

1. Обоснуйте, какие из приведенных рядов являются сходящимися, используя для этого эталонные ряды и достаточный признак расходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{8n+3}$.

1) б);	2) а), в);	3) в);	4) а), б), в).

2. Исследуйте сходимость числового ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{n}{n^3+1}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3^{2n}}{(\ln n)^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^n\cdot(n+2)!}{n}$.

1) сходится; 2) расходится; 3) сходится абсолютно; 4) сходится условно.

3. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(5n^2-4)\cdot 8^n}(x-8)^n$.

1) $(0;16]$;	2) $(0;16)$;	3) $[0;16]$;	4) $[0;16)$.

4. Вычислите приближенно $\int\limits_0^{0,8}\frac{1-\cos x}{x}dx$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$, разложив для этого подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Укажите количество членов ряда, необходимых для достижения заданной точности.

1) $n=1;\ 0{,}15$;	2) $n=3;\ 0{,}165$;	3) $n=4;\ 0{,}2$;	4) $n=2;\ 0{,}156$.

5. Разложите в ряд Фурье 2π-периодическую функцию, заданную на промежутке $[-\pi;\pi)$: $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x\le 0,\\ 2, & 0<x<\pi.\end{cases}$ Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

1) $f(x)=\frac{3}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$; 2) $f(x)=3+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$;

3) $f(x)=\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$; 4) $f(x)=\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$.

V вариант

1. Обоснуйте, какие из приведенных рядов являются сходящимися, используя для этого эталонные ряды и достаточный признак расходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[5]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\cdots\frac{3^n-8^n}{4^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{3n-2}$.

1) б); 2) а), в); 3) а); 4) б), в).

2. Исследуйте сходимость числового ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 4^n}{(n+3)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\ln\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{5^n}\right)^{3n}$.

1) сходится; 2) расходится; 3) сходится абсолютно; 4) сходится условно.

3. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n+1}\cdot 4^n}$.

1) $(-3;5]$; 2) $(-3;5)$; 3) $[-3;5]$; 4) $[-3;5)$.

4. Вычислите приближенно $\int_0^{0,5}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x}dx$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$, разложив для этого подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Укажите количество членов ряда, необходимых для достижения заданной точности.

1) $n=4$; $0{,}13$; 2) $n=3$; $0{,}135$; 3) $n=2$; $0{,}2$; 4) $n=1$; $0{,}125$.

5. Разложите в ряд Фурье 2π-периодическую функцию, заданную на промежутке $[-\pi;\pi)$: $f(x)=\begin{cases}2, & -\pi\le x\le 0,\\ -1, & 0<x<\pi.\end{cases}$ Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

1) $f(x)=1+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$; 2) $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$;

3) $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n}$; 4) $f(x)=\frac{1}{4}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n}$.

VI вариант

1. Обоснуйте, какие из приведенных рядов являются сходящимися, используя для этого эталонные ряды и достаточный признак расходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{\sqrt[7]{n^3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+3^n}{8^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{7n-4}$.

1) б);	2) а), в);	3) в);	4) а), б).

2. Исследуйте сходимость числового ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n^3+1}\right)^{2n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot 9\cdot 13\cdot\ldots\cdot(4n+1)}{3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n-2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

1) сходится; 2) расходится; 3) сходится абсолютно; 4) сходится условно.

3. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(x+3)^n}{(n+3)\cdot 5^n}$.

1) $(-8;2]$;	2) $(-8;2)$;	3) $[-8;2]$;	4) $[-8;2)$.

4. Вычислите приближенно $\int_0^1\cos\frac{x^2}{4}dx$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$, разложив для этого подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Укажите количество членов ряда, необходимых для достижения заданной точности.

1) $n=2$; $0{,}994$;	2) $n=3$; 1;	3) $n=1$; $0{,}989$;	4) $n=4$; $1{,}001$.

5. Разложите в ряд Фурье 2π-периодическую функцию, заданную на промежутке $[-\pi;\pi)$: $f(x)=\begin{cases}3, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x<\pi.\end{cases}$ Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

1) $f(x)=3-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$;	2) $f(x)=6-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$;
3) $f(x)=\frac{3}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n}$;	4) $f(x)=\frac{3}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

VII вариант

1. Обоснуйте, какие из приведенных рядов являются сходящимися, используя для этого эталонные ряды и достаточный признак расходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^5}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3^n}{7^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+7}{4n+2}$.

1) а), б);	2) а), в);	3) б);	4) а), б), в).

2. Исследуйте сходимость числового ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{2n}\right)^{2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5n!}$.

1) сходится; 2) расходится; 3) сходится абсолютно; 4) сходится условно.

3. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+1)^n}{\sqrt{n+2}}$.

1) $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right]$;	2) $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$;	3) $\left[-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right]$;	4) $\left[-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

4. Вычислите приближенно $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, разложив для этого подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Укажите количество членов ряда, необходимых для достижения заданной точности.

1) $n = 4$; $0,5$;	2) $n = 2$; $0,494$;	3) $n = 3$; $0,489$;	4) $n = 1$; $0,499$.

5. Разложите в ряд Фурье 2π-периодическую функцию, заданную на промежутке $[-\pi; \pi)$: $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x \le 0, \\ 3, & 0 < x < \pi. \end{cases}$ Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

1) $f(x) = 1 + \frac{8}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$;	2) $f(x) = 2 + \frac{8}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n}$;
3) $f(x) = 4 + \frac{8}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$;	4) $f(x) = 1 + \frac{8}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$.

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В результате изучения данной темы студент должен научиться:

– находить тригонометрическую и показательную формы комплексного числа по его алгебраической форме;

– выполнять операции над комплексными числами;

– вычислять значения функций комплексной переменной;

– исследовать функцию на аналитичность;

– вычислять интегралы от функций комплексной переменной как по общей формуле, так и с помощью интегральной формулы Коши;

– раскладывать аналитическую функцию комплексной переменной в ряд Тейлора;

– находить изолированные особые точки функции комплексной переменной и определять их тип;

– раскладывать функцию комплексной переменной в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки;

– находить вычеты функции комплексной переменной в ее особых точках;

– вычислять интегралы от функций комплексной переменной, используя теорию вычетов;

– находить изображения оригиналов;

– находить оригиналы по их известному изображению;

– решать задачу Коши операционным методом.

4.1. ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Элементы теории функций комплексной переменной

1. Даны комплексные числа $z_1 = -\sqrt{8} + \sqrt{8}i$ и $z_2 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

1) Изобразите их на комплексной плоскости.

2) Запишите число z_1 в тригонометрической форме.

3) Запишите число z_2 в алгебраической форме.

4) Найдите:

а) $z_1 + \overline{z_2}$; б) $\overline{z_1 - z_2}$; в) $\overline{z_1} \cdot z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$; д) $\left(\overline{z_1 - z_2}\right)^{25}$; е) $\sqrt[3]{\overline{z_1} \cdot z_2}$.

2. 1) Постройте линии, заданные уравнениями:

а) $|z-1-i| = 1$; б) $|z-1| = 2$; в) $\arg(z-i) = -\frac{\pi}{4}$,

и область D, заданную системой неравенств:

г) $|z-1-i| \geq 1$, $|z-1| < 2$, $-\frac{\pi}{4} \leq \arg(z-i) < \frac{\pi}{4}$.

2) Проверьте, принадлежат ли точки $M_1\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ и $M_2\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ области D.

3. Дано уравнение $\left(4z^4+\pi^2z^2\right)\left(e^z-i\right)=0$ и область D: $\left|z+i\frac{\pi}{2}\right|<2$.

1) Найдите все корни этого уравнения.

2) Определите, какие из корней являются простыми, а какие – кратными.

3) Укажите, какие из корней принадлежат области D.

4. Дана функция $f(z)$ и две точки z_0 и z_1.

1) Выясните, является ли она аналитической на всей комплексной плоскости.

2) В случае положительного ответа найдите $f'(z_0)$ и вычислите $\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)dz$.

а) $f(z)=e^{1-2iz}$, $z_0=\pi$, $z_1=\frac{\pi}{2}$; б) $f(z)=\sin(2z)+iz$, $z_0=i\frac{\pi}{2}$, $z_1=0$.

5. Дана функция $f(z)=(z+1)(\bar{z}-2)$.

1) Выясните, в каких точках она является дифференцируемой.

2) Найдите $f'(z)$ в этих точках.

3) Вычислите $\int\limits_l f(z)dz$, l – отрезок прямой от точки $z_1=-1-i$ до точки $z_2=0$.

6. Функция $f(z)$ в окрестности $\left(0<|z-2i|<R\right)$ своей изолированной особой точки $z_0=2i$ разложена в ряд Лорана $f(z)=\sum\limits_{n=-3}^{\infty}\frac{3^n\cdot(z-2i)^n}{(n+4)!}$.

1) Определите тип особой точки $z_0=2i$.

2) Найдите вычет функции $f(z)$ в этой точке.

3) Вычислите интеграл $\oint\limits_{|z-2i|=1} f(z)dz$.

7. Дана функция $f(z)=(z+i)^2\cdot e^{-\frac{3}{z+i}}$.

1) Найдите ее изолированную особую точку z_0.

2) Определите тип этой особой точки.

3) Найдите вычет функции $f(z)$ в точке z_0.

4) Вычислите интеграл $\oint\limits_{|z+i|=1} f(z)dz$.

8. Вычислите $\oint\limits_{\left|z+i\frac{\pi}{2}\right|=2}\frac{e^z}{4z^4+\pi^2z^2}dz$, используя результаты, полученные при решении задания 3.

Операционное исчисление

1. Найдите изображение оригинала $f(t)$.

1) $f(t)=e^{t}\cos^{3}t$; 2) $f(t)=t\,\mathrm{ch}2t\sin t$;

3) $f(t)=\dfrac{e^{-t}-1+2t}{t}$; 4) $f(t)=\int\limits_{0}^{t}\tau\cdot\mathrm{sh}2\tau d\tau$.

2. Решите операционным методом задачу Коши.

1) $y'+y=e^{t}$, $y(0)=0$;

2) $y''-5y'+4y=4$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$;

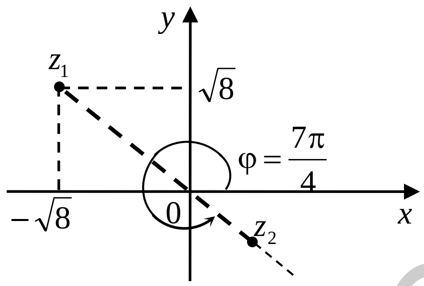
3) $y''-9y=\mathrm{sh}t$, $y(0)=-1$, $y'(0)=3$;

4) $y''+2y'+y=\sin t$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.

Ответы

Элементы теории функций комплексной переменной

1. 1)



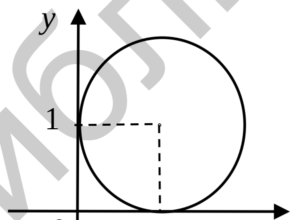
2) $z_1=4\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$;

3) $z_2=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$;

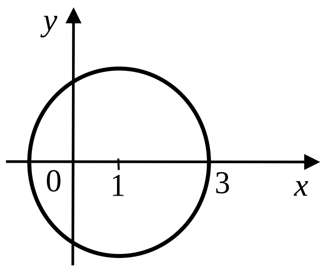
4) а) $-\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$; б) $-3\sqrt{2}-3\sqrt{2}i$; в) -8; г) -2; д) $6^{25}e^{i\frac{5\pi}{4}}$;
е) $1+\sqrt{3}i$, -2, $1-\sqrt{3}i$.

2. 1)

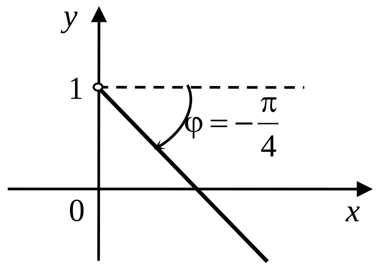
а)



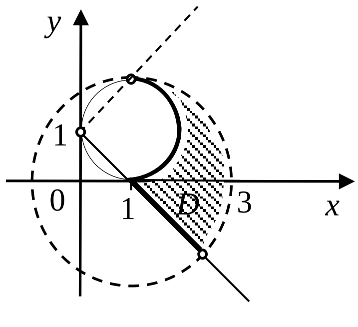
б)



в)



г)



2) $M_1\in D$, $M_2\notin D$.

3. 1) $z=0$, $z=-i\dfrac{\pi}{2}$, $z_k=i\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in Z$;

2) $z=-i\dfrac{\pi}{2}$, $z_k=i\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\neq 0$, $k\in Z$ – простые корни, $z=0$, $z=i\dfrac{\pi}{2}$ – корни кратности 2;

3) $z=0$, $z=-i\dfrac{\pi}{2}$.

4. 1) а) является; б) является; 2) а) $f'(z_0)=-2ei$; $\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)dz=-ei$;

б) $f'(z_0)=2\operatorname{ch}\pi+i$; $\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)dz=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\operatorname{ch}\pi+\dfrac{\pi^2}{8}i$.

5. 1) $z=-1$; 2) $f'(-1)=-3$; 3) $-\dfrac{7}{3}+\dfrac{2}{3}i$.

6. 1) полюс третьего порядка; 2) $\dfrac{1}{18}$; 3) $\dfrac{\pi}{9}i$.

7. 1) $z_0=-i$; 2) существенно особая точка; 3) $-\dfrac{9}{2}$; 4) $-9\pi i$.

8. $\dfrac{2i}{\pi^2}(\pi-1)$.

Операционное исчисление

1. 1) $F(p)=\dfrac{(p-1)(p^2-2p+8)}{(p^2-2p+2)(p^2-2p+10)}$; 2) $F(p)=\dfrac{2p^5+20p^3-110p}{(p^4-6p^2+25)^2}$;

3) $F(p)=\ln\dfrac{p}{p+1}+\dfrac{2}{p}$; 4) $F(p)=\dfrac{4}{(p^2-4)^2}$.

2. 1) $\operatorname{sh}t$; 2) $1-2e^t+e^{4t}$; 3) $-\dfrac{1}{8}\operatorname{sh}t-\dfrac{1}{24}\operatorname{sh}3t-e^{-3t}$;

4) $\dfrac{1}{2}e^{-t}-\dfrac{1}{2}te^{-t}-\dfrac{1}{2}\cos t$.

4.2. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Комплексные числа и действия над ними

Алгебраическая форма комплексного числа: $z = x + iy,\ \ x, y \in \mathbb{R}$.

$x = \operatorname{Re} z$ – ***действительная часть*** комплексного числа z.

$y = \operatorname{Im} z$ – ***мнимая часть*** комплексного числа z.

i – ***мнимая единица***, $i^2 = -1$.

$\bar{z} = x - iy$ – комплексное число, сопряженное числу z.

$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$.

$\overline{(\bar{z})} = z$.

Действия с комплексными числами, записанными в алгебраической форме ($z_1 = x_1 + i\,y_1,\quad z_2 = x_2 + i\,y_2$):

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2);$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1);$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2{}^2 + y_2{}^2},\ \ z_2 \neq 0;$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}; \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}; \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ \ z_2 \neq 0.$$

Модуль комплексного числа $z = x + iy$:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Аргумент комплексного числа $z,\ z \neq 0$:

$\operatorname{Arg} z = \left(\overline{OM}\,\hat{,}\,OX\right)$, где $M(x; y)$ (рис. 4.1).

$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$,

где φ – однозначно определяемый угол из промежутка $(-\pi; \pi]$, φ – ***главное значение*** аргумента.

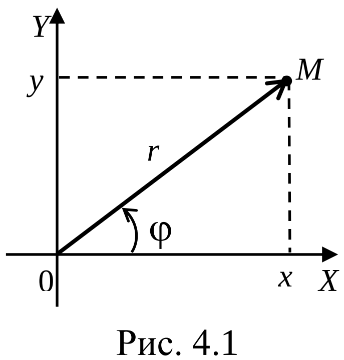


Рис. 4.1

Главные значения аргументов φ для чисел $z = x + iy$ представлены в таблице ниже.

$z = x + iy,\ \ x, y \in \mathbb{R}$		φ
$x > 0$	$y = 0$	0
$x < 0$	$y = 0$	π
$x = 0$	$y > 0$	$\pi/2$
$x = 0$	$y < 0$	$-\pi/2$
$x > 0$	$y \in \mathbb{R}$	$\operatorname{arctg}\left(y/x\right)$
$x < 0$	$y > 0$	$\operatorname{arctg}\left(y/x\right) + \pi$
$x < 0$	$y < 0$	$\operatorname{arctg}\left(y/x\right) - \pi$

Тригонометрическая форма комплексного числа z, $z \neq 0$:

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Действия с комплексными числами, записанными в тригонометрической форме ($z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$):

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$, $z_2 \neq 0$.

Формула Муавра:

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Извлечение корня из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z \neq 0$:

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Формула Эйлера:

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

$z = re^{i\varphi}$ – ***показательная форма*** комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Действия с комплексными числами, записанными в показательной форме $\left(z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}\right)$:

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$; $\qquad \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$;

$z^n = r^n e^{in\varphi}$, $n \in \mathbb{Z}$; $\qquad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Основные элементарные функции комплексной переменной

Показательная функция:

$e^z = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$.

Тригонометрические функции:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z};$$

$\sin z = \sin(x + i y) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$;

$\cos z = \cos(x + i y) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$.

Гиперболические функции:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Логарифмическая функция:

$\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, где $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, $z \neq 0$.

Общая степенная функция:

$z^{\alpha} = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

Обратные тригонометрические функции:

$$\operatorname{Arc}\sin z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right); \qquad \operatorname{Arc}\cos z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right);$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}; \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{iz + 1}{iz - 1}.$$

Дифференцирование функции комплексной переменной

Производная однозначной функции $f(z)$ в точке z_0 определяется как

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0),$$

если этот предел существует и конечен.

Если функция $f(z)$ имеет производную в точке z_0, то она называется ***дифференцируемой*** в этой точке.

Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы:

1) функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке $(x; y)$;

2) в точке $(x; y)$ выполнялись условия Коши – Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Для производной $f'(z)$ справедливы формулы

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Производные основных элементарных функций представлены в таблице ниже.

$c'=0, \quad c\in\mathbb{C}$	$(\cos z)'=-\sin z$	$(\operatorname{ch} z)'=\operatorname{sh} z$
$(z^n)'=n\cdot z^{n-1}, \quad n\in\mathbb{Z}$	$(\operatorname{tg} z)'=\dfrac{1}{\cos^2 z}$	$(\operatorname{th} z)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 z}$
$(e^z)'=e^z$	$(\operatorname{ctg} z)'=-\dfrac{1}{\sin^2 z}$	$(\operatorname{cth} z)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 z}$
$(\sin z)'=\cos z$	$(\operatorname{sh} z)'=\operatorname{ch} z$	$(\ln z)'=\dfrac{1}{z}$

Однозначная функция $f(z)$ называется ***аналитической*** в точке z, если она дифференцируема в самой точке z и некоторой окрестности этой точки.

Действительная функция $u(x,y)$, имеющая в области D непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяющая уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ в любой точке $M(x,y)\in D$, называется ***гармонической*** в области D.

Гармонические функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, связанные между собой условиями Коши – Римана, называются ***сопряженными***.

Для аналитичности функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ в области D необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были сопряженными гармоническими в этой области.

Для всякой гармонической функции $u(x,y)\,(v(x,y))$ в односвязной области D можно найти сопряженную с ней гармоническую функцию $v(x,y)\,(u(x,y))$, которая определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого, т. е. можно восстановить аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ по известной действительной (мнимой) части.

Интегрирование функции комплексной переменной

Пусть $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ – однозначная функция, определенная и непрерывная в области D, l – кусочно-гладкая (замкнутая или незамкнутая) ориентированная кривая, лежащая в области D. Тогда справедлива формула

$$\int_l f(z)dz=\int_l (u+iv)(dx+idy)=\int_l udx-vdy+i\int_l vdx+udy.$$

Свойства интегралов от функции комплексной переменной:

1. $\int_l(\alpha f(z)+\beta g(z))dz=\alpha\int_l f(z)dz+\beta\int_l g(z)dz, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}$;

2. $\int_{l_{AB}} f(z)dz=-\int_{l_{BA}} f(z)dz$, т. е. при изменении ориентации кривой интеграл меняет знак;

3. $\int_{l_1\cup l_2} f(z)dz=\int_{l_1} f(z)dz+\int_{l_2} f(z)dz$;

Если кривая l_{AB} задана уравнением $z = x(t) + iy(t)$, $A = A(x(t_1); y(t_1))$, $B = B(x(t_2); y(t_2))$, то имеет место формула

$$\int\limits_{l_{AB}} f(z)dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(z(t)) \cdot z'(t)dt .$$

Интегральная теорема Коши для односвязной области. Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области *D*, то для любой замкнутой кривой *l*, лежащей в области *D*,

$$\oint\limits_{l} f(z)dz = 0 .$$

Следствие 1. Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области *D*, то значение интеграла от $f(z)$ не зависит от пути интегрирования:

$$\int\limits_{l} f(z)dz = \int\limits_{l_1} f(z)dz ,$$

если кривые l, l_1 лежат в области D и имеют общие начало и конец.

Следствие 2 (***интегральная теорема Коши для многосвязной области***).

Пусть граница Г многосвязной области *D* состоит из замкнутой кусочно-гладкой кривой *l* и попарно не пересекающихся замкнутых кусочно-гладких кривых $l_1, l_2, \ldots, l_n$, расположенных внутри *l*. Если аналитическая в области *D* функция $f(z)$ непрерывна на ее границе Г, то справедлива формула

$$\oint\limits_{l} f(z) = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{l_k} f(z)dz ,$$

при этом кривые l, l_1, $l_2, \ldots, l_n$ ориентированы положительно.

Дифференцируемая в односвязной области *D* функция $F(z)$ называется ***первообразной*** функции $f(z)$ в этой области, если $F'(z) = f(z)$ для $\forall\, z \in D$.

Для интеграла от дифференцируемой в односвязной области *D* функции $f(z)$ вдоль произвольной кривой *l*, соединяющей точки z_1 и z_2, введем обозначение $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz$.

Если функция $f(z)$ дифференцируема в односвязной области *D*, то справедлива формула Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} ,$$

где $F(z)$ – какая-либо первообразная функции $f(z)$ в односвязной области *D*.

Если функции $f(z)$ и $g(z)$ дифференцируемы в односвязной области *D*, то имеет место формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)g'(z)dz = \left(f(z) \cdot g(z) \right)\Big|_{z_1}^{z_2} - \int\limits_{z_1}^{z_2} g(z) \cdot f'(z)dz .$$

Неопределенные интегралы от некоторых однозначных элементарных функций комплексной переменной представлены в таблице ниже.

1	$\int dz = z + C$	5	$\int \sin z dz = -\cos z + C$	9	$\int \operatorname{sh} z dz = \operatorname{ch} z + C$
2	$\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$	6	$\int \cos z dz = \sin z + C$	10	$\int \operatorname{ch} z dz = \operatorname{sh} z + C$
3	$\int \frac{dz}{z} = \ln z + C$	7	$\int \frac{dz}{\cos^2 z} = \operatorname{tg} z + C$	11	$\int \frac{dz}{\operatorname{ch}^2 z} = \operatorname{th} z + C$
4	$\int e^z dz = e^z + C$	8	$\int \frac{dz}{\sin^2 z} = -\operatorname{ctg} z + C$	12	$\int \frac{dz}{\operatorname{sh}^2 z} = -\operatorname{cth} z + C$

Интегральная формула Коши. Если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области *D*, содержащей простую замкнутую кривую *l*, то для любой точки z_0, лежащей внутри *l*, справедлива формула $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ (при этом полагают, что контур *l* ориентирован положительно).

Интегральная формула Коши для производных. Если функция $f(z)$ является аналитической в области *D*, содержащей простую замкнутую кривую *l*, то для любой точки z_0, лежащей внутри *l*, имеет место формула

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{N},$$

при этом полагают, что контур *l* ориентирован положительно.

Ряды в комплексной области

Числовым комплексным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots,$$

где $\{z_n\}$ – последовательность комплексных чисел.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся два действительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n)$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{x_n^2 + y_n^2}$.

Свойства сходящихся рядов

1. ***Необходимый признак сходимости.*** Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

2. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, т. е. из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость.

3. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ существует такой сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ с положительными членами, что $|z_n| \le c_n$ для $\forall n \ge n_0,\ n_0 \in \mathbb{N}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно.

4. ***Признак Даламбера.*** Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L$, то при $L < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно, а при $L > 1$ – расходится.

5. ***Признак Коши.*** Если существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$, то при $L < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно, а при $L > 1$ – расходится.

Функциональным рядом в комплексной области называется выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots,$$

где $\{f_n(z)\}$ – последовательность функций комплексной переменной z.

Комплексным ***степенным*** рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где $z_0, c_n \in \mathbb{C}$, z – комплексная переменная, c_n – коэффициенты ряда.

Областью сходимости степенного ряда называется множество всех таких точек $z \in \mathbb{C}$, в которых этот ряд сходится.

Для каждого степенного ряда существует круг сходимости с центром в точке z_0 и радиусом сходимости $R,\ R \ge 0$, который можно вычислить по формулам $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ или $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$, если эти пределы существуют.

Теорема о почленном дифференцировании и интегрировании степенного ряда. Пусть $R > 0$ – радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. В круге сходимости $|z - z_0| < R$ сумма ряда $S(z)$ является аналитической функцией. Поэтому в любой точке этого круга ряд можно почленно дифференцировать любое число раз и почленно интегрировать вдоль любой гладкой кривой, расположенной в этом круге. Полученные в результате степенные ряды сохраняют тот же круг сходимости.

Теорема о разложении аналитической функции в ряд Тейлора. Если однозначная функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0, то она разлагается в окрестности этой точки в ряд Тейлора:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

коэффициенты c_n которого вычисляются по формуле

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\ n=0,1,2,\ldots,$$

где l: $|z-z_0|=r, r>0$, – окружность с центром в точке z_0, целиком расположенная в окрестности точки z_0, в которой функция $f(z)$ является аналитической.

В частности, функция, аналитическая в окрестности точки $z_0=0$, разлагается в этой окрестности в ряд Маклорена по степеням z: $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$.

Разложения в ряд Маклорена основных элементарных функций

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\ z\in\mathbb{C}.$$

$$\operatorname{sh} z=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots+\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ z\in\mathbb{C}.$$

$$\operatorname{ch} z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!},\ z\in\mathbb{C}.$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ z\in\mathbb{C}.$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^{2n}}{(2n)!},\ z\in\mathbb{C}.$$

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot z^n}{n},\ |z|<1.$$

$$(1+z)^\alpha=1+\alpha z+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{2!}z^2+\ldots+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot z^n+\ldots=$$

$=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot z^n, |z|<1;$ $(1+z)^{\alpha}$ – однозначная ветвь $\varphi(z)=e^{\alpha\ln(1+z)}$ многозначной функции $\Psi(z)=e^{\alpha\,\mathrm{Ln}(1+z)}$, выделяемая условием $\Psi(0)=1$.

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\ |z|<1.$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots+(-1)^n\cdot z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^n,\ |z|<1.$$

Теорема о разложении функции в ряд Лорана. Если функция $f(z)$ является однозначной и аналитической в кольце $r<|z-z_0|<R$, то в каждой точке этого кольца $f(z)$ разлагается в ряд Лорана (ряд по неотрицательным и отрицательным степеням $z-z_0$), т. е. справедлива формула

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\cdot(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

Коэффициенты ряда Лорана вычисляются по формулам:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ n=0,1,2,\ldots;$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_l f(z)\cdot(z-z_0)^{n-1}dz,\ n=1,2,\ldots,$$

где l – окружность $|z-z_0|=\rho,\ r<\rho<R$, обегаемая против часовой стрелки.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\cdot(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots$ по неотрицательным степеням $z-z_0$ называется ***правильной*** или ***регулярной*** частью ряда Лорана. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots$ по отрицательным степеням $z-z_0$ называется ***главной*** частью ряда Лорана.

Нули и изолированные особые точки аналитической функции

Точка z_0 называется ***нулем*** функции $f(z)$, если $f(z_0)=0$. Точка z_0 называется ***нулем порядка k*** $(k\in\mathbb{N})$ функции $f(z)$, если $f(z_0)=f'(z_0)=\ldots=f^{(k-1)}(z_0)=0,\ f^{(k)}(z_0)\neq 0$. В случае $k=1$ точка z_0 называется ***простым нулем*** функции $f(z)$.

Для того чтобы точка z_0 являлась нулем порядка k $(k\in\mathbb{N})$ аналитической функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ разлагалась в ряд Тейлора следующего вида:

$$f(z)=c_k\cdot(z-z_0)^k+c_{k+1}\cdot(z-z_0)^{k+1}+\ldots+c_n\cdot(z-z_0)^n+\ldots,\quad c_k\neq 0.$$

Это равносильно равенству

$$f(z)=(z-z_0)^k\cdot\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ – аналитическая в точке z_0 функция, причем $\varphi(z_0)\neq 0$.

Точка z_0 называется ***изолированной особой*** точкой функции $f(z)$, если существует окрестность этой точки, в которой функция $f(z)$ является аналитической всюду, кроме самой точки z_0.

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется ***устранимой особой*** точкой этой функции, если существует конечный $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Для того чтобы изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ была устранимой особой точкой этой функции, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности точки z_0 разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана не содержало главной части, т. е. имело место представление

$$f(z)=c_0+c_1\cdot(z-z_0)+\ldots+c_n\cdot(z-z_0)^n+\ldots.$$

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется ***полюсом*** этой функции, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является полюсом порядка k $(k\in\mathbb{N})$ этой функции тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности точки z_0 разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана имеет вид

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}+\frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot(z-z_0)^n,\ c_{-k}\neq 0.$$

Это равносильно равенству

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^k},$$

где $\psi(z)$ – аналитическая в точке z_0 функция, причем $\psi(z_0)\neq 0$.

При $k=1$ точка z_0 называется ***простым*** полюсом функции $f(z)$.

<u>Утверждение 1.</u> Точка z_0 является полюсом порядка k функции $\frac{1}{f(z)}$, тогда и только тогда, когда точка z_0 является нулем порядка k функции $f(z)$.

<u>Утверждение 2.</u> Пусть $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, при этом z_0 является нулем порядка m функции $\varphi(z)$ и нулем порядка n функции $\psi(z)$. Тогда, если $m\geq n$, то точка z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$, если $m<n$, то z_0 – полюс порядка $n-m$ функции $f(z)$.

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется ***существенно особой*** точкой этой функции, если при $z \to z_0$ $f(z)$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является существенно особой точкой этой функции в том и только том случае, когда в некоторой окрестности точки z_0 главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ содержит бесконечно много отличных от нуля членов.

Вычеты и их приложения к вычислению интегралов

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется коэффициент c_{-1} в разложении этой функции в ряд Лорана по степеням $z - z_0$. Вычет $f(z)$ в точке z_0 обозначается $\operatorname{res} f(z_0)$. Таким образом,

$$\operatorname{res} f(z_0) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_l f(z)dz,$$

где l – произвольная замкнутая кривая, охватывающая точку z_0 и лежащая в кольце аналитичности $0 < |z - z_0| < R$ функции $f(z)$ (кривая l положительно ориентирована).

Если z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$, то $\operatorname{res} f(z_0) = 0$.

Если z_0 – простой полюс функции $f(z)$, то $\operatorname{res} f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) \cdot f(z)$.

В частности, если $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – аналитические в точке z_0 функции, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то $\operatorname{res} f(z_0) = \dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

Если z_0 – полюс порядка n функции $f(z)$, то $\operatorname{res} f(z_0) = \dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z - z_0)^n \cdot f(z)\right)$.

Если z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то $\operatorname{res} f(z_0)$ находят по определению вычета, а именно, как коэффициент c_{-1} в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки z_0.

Основная теорема Коши о вычетах. Если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области D всюду, за исключением конечного числа особых точек $z_1, \ldots, z_n$, а l – произвольная замкнутая кривая, лежащая в D и содержащая внутри себя точки $z_1, \ldots, z_n$, то

$$\oint_l f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k),$$

при этом l должна быть положительно ориентирована.

Операционное исчисление

Если $f(t)$ – функция действительной переменной t, $0<t<+\infty$, и существует несобственный интеграл

$$F(p)=\int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt, \tag{4.1}$$

зависящий от комплексного параметра $p=\sigma+iw$, то преобразование функции $f(t)$ в функцию $F(p)$ по формуле (4.1) называется ***интегральным преобразованием Лапласа***, при этом функция $F(p)$ называется ***изображением*** функции $f(t)$ по Лапласу, а $f(t)$ – ***функцией-оригиналом***, или ***оригиналом***. Соответствие между оригиналом и изображением обозначается $F(p) \risingdotseq f(t)$, или $f(t) \doteqdot F(p)$.

Функция $f(t)$ называется оригиналом, если она удовлетворяет условиям:

1) $f(t)$ определена при $t\in\mathbb{R}$; $f(t)=0,\ t<0$; $f(0)=\lim\limits_{t\to+0} f(t)$;

2) $f(t)$ – кусочно-непрерывная функция на любом конечном интервале оси *t*;

3) существуют такие числа $M>0,\ \sigma$, что

$$|f(t)|\le Me^{\sigma t},\ t\ge 0. \tag{4.2}$$

Нижняя грань σ_0 всех чисел σ, для которых выполняется неравенство (4.2), называется ***показателем роста*** функции $f(t)$.

Теорема. Всякий оригинал $f(t)$ имеет изображение $F(p)$ являющееся аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p\ge\sigma>\sigma_0$, где σ_0 – показатель роста оригинала $f(t)$.

Имеют место следующие свойства оригиналов и изображений:

1. ***Линейность преобразования Лапласа***. Если $f_1(t),\ f_2(t)$ – оригиналы с показателями роста σ_1 и σ_2 соответственно, то линейная комбинация $\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t),\ \forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}$, – оригинал с показателем роста $\sigma=\max\{\sigma_1,\sigma_2\}$, причем если $f_1(t) \doteqdot F_1(p),\ f_2(t) \doteqdot F_2(p)$, то для $\forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}$ выполнено условие

$$\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t) \doteqdot \alpha_1 F_1(p)+\alpha_2 F_2(p)$$

2. ***Теорема смещения***. Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то для $\forall\alpha\in\mathbb{C}$

$$e^{\alpha t}\cdot f(t) \doteqdot F(p-\alpha).$$

3. ***Теорема запаздывания***. Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и $a>0$, то $f(t-a) \doteqdot e^{-ap}\cdot F(p)$.

4. ***Теорема опережения***. Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и $a>0$, то $f(t+a) \doteqdot e^{ap}\cdot\left(F(p)-\int\limits_0^a f(t)e^{-pt}dt\right)$.

5. ***Теорема подобия***. Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и $\lambda>0$, то $f(\lambda t) \doteqdot \frac{1}{\lambda}\cdot F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$.

6. ***Теорема о дифференцировании оригинала***. Если $f(t)$, $f'(t)$ – оригиналы и $f(t) \doteqdot F(p)$, то $f'(t) \doteqdot p\cdot F(p)-f(0)$, где $f(0)=\lim\limits_{t\to+0} f(t)$.

Следствие. Если $f(t)$, $f'(t),\ldots, f^{(n)}(t)$ – оригиналы, то

$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n\cdot F(p)-p^{n-1}\cdot f(0)-\ldots-p\cdot f^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$.

7. ***Теорема о дифференцировании изображения***. Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то $F^{(n)}(p) \backslash (-1)^n\cdot t^n\cdot f(t)$.

8. ***Теорема об интегрировании оригинала***. Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}$.

9. ***Теорема об интегрировании изображения***. Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и $\int\limits_0^\infty F(s)ds$ сходится, то $\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int\limits_p^\infty F(s)ds$.

Таблица некоторых оригиналов и их изображений представлена ниже.

№ п/п	$f(t)$	$F(p)$	№ п/п	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	7	$\mathrm{ch}\beta t$	$\frac{p}{p^2-\beta^2}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	8	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	9	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
4	$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$	10	$e^{\alpha t}\mathrm{sh}\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2-\beta^2}$
5	$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$	11	$e^{\alpha t}\mathrm{ch}\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\beta^2}$
6	$\mathrm{sh}\beta t$	$\frac{\beta}{p^2-\beta^2}$	12	$t^n\cdot e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$

Если изображение $F(p)$ является однозначной функцией и имеет конечное число особых точек $p_1, p_2, \ldots, p_n$, таких, что $\operatorname{Re} p_k < \sigma_0$, $k = \overline{1, n}, \sigma_0$ – показатель роста оригинала $f(t)$, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p=p_k} \left(F(p) \cdot e^{pt} \right).$$

Если $F(p) = \dfrac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, $P_m(p)$ и $Q_n(p)$ – многочлены степеней m, n соответственно $(m < n)$, $p_1, p_2, \ldots, p_s$ – корни многочлена $Q_n(p)$ с кратностями $l_1, l_2, \ldots, l_s$, $l_1 + l_2 + \ldots + l_s = n$, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{(l_k - 1)!} \lim_{p \to p_k} \frac{d^{l_k - 1}}{dp^{l_k - 1}} \left((p - p_k)^{l_k} \cdot F(p) \cdot e^{pt} \right).$$

Если $p = p_k$, $k = \overline{1, n}$, – простые полюсы функции $F(p)$, то $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lim\limits_{p \to p_k} \left((p - p_k) \cdot F(p) \cdot e^{pt} \right)$.

Если $p = p_k$, $k = \overline{1, n}$, – простые полюсы функции $F(p) = \dfrac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_m(p_k)}{Q_n'(p_k)} \cdot e^{p_k t}.$$

4.3. ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Комплексные числа и действия над ними

1. Даны два комплексных числа $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = -1 + 2i$. Найдите:

а) $z_1 + z_2$; б) $\overline{z_1} - z_2$; в) $\overline{z_1 \cdot z_2}$; г) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Решение

а) Выполним сложение комплексных чисел z_1 и z_2, записанных в алгебраической форме:

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (-1 + 2i) = (2 + (-1)) + i(3 + 2) = 1 + 5i.$$

б) Найдем комплексное число $\overline{z_1}$: $\overline{z_1} = \overline{2 + 3i} = 2 - 3i$.

Выполним вычитание комплексных чисел $\overline{z_1}$ и z_2, записанных в алгебраической форме:

$$\overline{z_1} - z_2 = (2 - 3i) - (-1 + 2i) = (2 - (-1)) + i(-3 - 2) = 3 - 5i.$$

в) Выполним сначала умножение комплексных чисел z_1 и z_2, записанных в алгебраической форме:

$$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(-1+2i) = -2+4i-3i+6i^2 = -2+i-6 = -8+i.$$

Найдем теперь комплексное число $\overline{z_1 \cdot z_2}$, сопряженное комплексному числу $z_1 \cdot z_2$: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{-8+i} = -8-i$.

г) Выполним деление комплексных чисел z_1 и z_2, записанных в алгебраической форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{-1+2i} = \frac{(2+3i)\cdot(-1-2i)}{(-1+2i)\cdot(-1-2i)} = \frac{-2-4i-3i-6i^2}{1+4} = \frac{-2-7i+6}{5} =$$

$$= \frac{4-7i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i.$$

2. Запишите число z в тригонометрической и показательной формах:

а) $z = -\frac{1}{4}$; б) $z = \left(1-\sqrt{2}\right)i$; в) $z = -1-i$.

Изобразите эти числа на комплексной плоскости.

Решение

а) Найдем модуль и аргумент комплексного числа $z = -\frac{1}{4}$:

$$x = \operatorname{Re} z = -\frac{1}{4},\ y = \operatorname{Im} z = 0 \Rightarrow r = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{4},\ \varphi = \pi.$$

Тригонометрическая форма числа $z = -\frac{1}{4}$: $z = \frac{1}{4}(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Показательная форма этого числа: $z = \frac{1}{4}e^{i\pi}$.

Изобразим число $z = -\frac{1}{4}$ на комплексной плоскости (рис. 4.2).

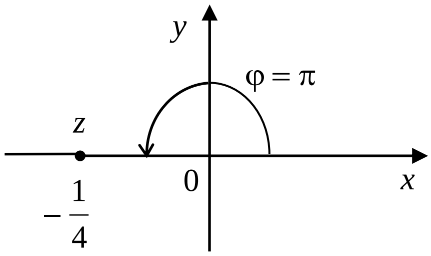


Рис. 4.2

б) Модуль и аргумент комплексного числа $z = \left(1-\sqrt{2}\right)i$ равны: $r = \sqrt{0^2 + \left(1-\sqrt{2}\right)^2} = \left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1$, т. к. $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 1-\sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа $z = \left(1-\sqrt{2}\right)i$ имеет вид

$$z = \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Запишем показательную форму числа $z=\left(1-\sqrt{2}\right)i$: $\quad z=\left(\sqrt{2}-1\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

Изобразим число $z=\left(1-\sqrt{2}\right)i$ на комплексной плоскости (рис. 4.3)

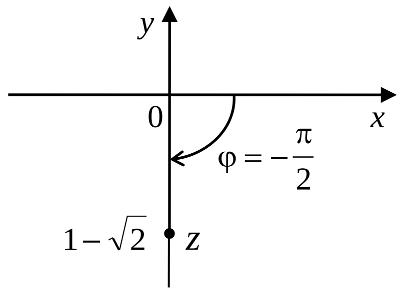


Рис. 4.3

в) Найдем модуль и аргумент комплексного числа $z=-1-i$:

$x=\operatorname{Re} z=-1,\ y=\operatorname{Im} z=-1 \quad\Rightarrow\quad r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},$

$\varphi=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)-\pi=\operatorname{arctg}1-\pi=-\dfrac{3\pi}{4}.$

Тригонометрическая форма комплексного числа $z=-1-i$:

$z=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right).$

Показательная форма комплексного числа $z=-1-i$: $\quad z=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

Изобразим число $z=-1-i$ на комплексной плоскости (рис. 4.4)

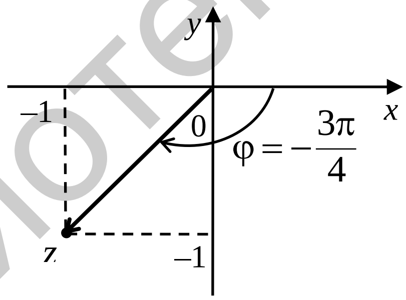


Рис. 4.4

3. Вычислите:

а) i^{2015}; $\qquad$ б) $(-1-i)^{14}$; $\qquad$ в) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{10}$.

Решение

а) Учитывая, что $i^{4n}=1, n\in\mathbb{Z}$, найдем остаток от деления числа 2015 на число 4: $\quad 2015=4\cdot 503+3$. Тогда $i^{2015}=i^3=-i$.

б) Ранее в задаче 2 «в» число $z=-1-i$ записано в показательной форме:

$-1-i=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

Воспользуемся формулой $z^n = r^n e^{in\varphi},\ n \in \mathbb{Z}$.

Тогда $(-1-i)^{14} = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)^{14} = \left(\sqrt{2}\right)^{14} e^{-i\frac{21\pi}{2}} = 2^7 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} = -128i$.

в) Представим числа $z_1 = \sqrt{3} - i$ и $z_2 = 1 + i$ в показательной форме. Найдем модуль и аргумент числа z_1:

$$x_1 = \operatorname{Re} z_1 == \sqrt{3},\ y_1 = \operatorname{Im} z_1 = -1 \ \Rightarrow\ |z_1| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2,$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

Тогда $z_1 = \sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Найдем модуль и аргумент числа z_2:

$$x_2 = \operatorname{Re} z_2 = 1,\ y_2 = \operatorname{Im} z_2 = 1 \Rightarrow |z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{y_2}{x_2} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, $z_2 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Выполним деление чисел z_1 и z_2, применив формулу частного комплексных чисел, записанных в показательной форме:

$$\frac{\sqrt{3}-i}{1+i} = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}.$$

Воспользуемся формулой $z^n = r^n e^{in\varphi}, n \in \mathbb{Z}$, получим

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{10} = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}\right)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10} e^{-i\frac{50\pi}{12}} = 2^5 \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}} = 32e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

4. Найдите все значения корня из заданного комплексного числа и изобразите их на комплексной плоскости.

а) $\sqrt{-\frac{1}{4}}$; б) $\sqrt[3]{-8i}$.

Решение

а) Выше в задаче 2 «а» была получена показательная форма числа $z = -\frac{1}{4} = \frac{1}{4}e^{i\pi}$.

Воспользуемся формулой Муавра $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$, $n\in\mathbb{N}$, $k=0,1,\ldots,n-1$.

$$z_k=\sqrt{-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot e^{i\frac{\pi+2\pi k}{2}}=\frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)},\ \ k=0,1.$$

Значит, существуют два квадратных корня из числа $z=-\frac{1}{4}$:

$$z_0=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}i,\quad z_1=\frac{1}{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}=-\frac{1}{2}i.$$

Корни z_0 и z_1 лежат на окружности радиусом $\frac{1}{2}$ с центром в начале координат (рис. 4.5).

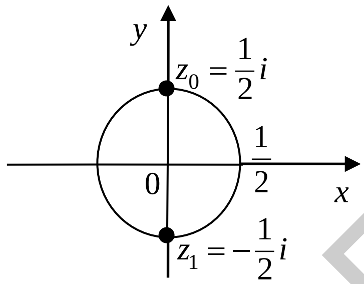


Рис. 4.5

б) Представим число $z=-8i$ в показательной форме. Для этого найдем его модуль и аргумент: $x=\operatorname{Re} z=0$, $y=\operatorname{Im} z=-8 \Rightarrow r=8$, $\varphi=-\frac{\pi}{2}$.

Следовательно, $z=-8i=8e^{-i\frac{\pi}{2}}$ (рис. 4.6).

Воспользуемся формулой Муавра $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$, $n\in\mathbb{N}$, $k=0,1,\ldots,n-1$.
В нашем случае

$$z_k=\sqrt[3]{-8i}=\sqrt[3]{8}\cdot e^{i\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}}=2e^{i\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}}=2e^{i\frac{-\pi+4k\pi}{6}},\ k=0,1,2.$$

Тогда

$$z_0=2e^{-i\frac{\pi}{6}}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{3}-i;$$

$$z_1=2e^{i\frac{\pi}{2}}=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2i;$$

$$z_2=2e^{i\frac{7\pi}{6}}=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}-i.$$

Корни z_0, z_1, z_2 лежат на окружности радиусом 2 с центром в начале координат в вершинах правильного треугольника, вписанного в эту окружность (рис. 4.7).

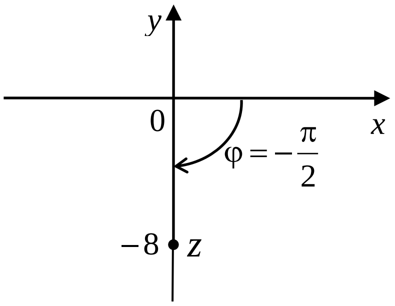


Рис. 4.6

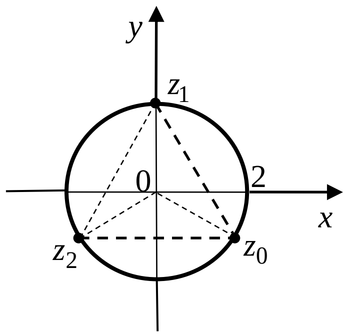


Рис. 4.7

Основные элементарные функции комплексной переменной (ФКП)

1. Вычислите значение функции, используя определение соответствующей ФКП. Ответ запишите в алгебраической форме.

1) $e^{2+i\frac{\pi}{2}}$; 2) $\sin\left(\frac{5\pi}{3}-2i\right)$; 3) $\cos\pi i$; 4) $\mathrm{sh}\frac{\pi}{2}i$;

5) $\mathrm{ch}(1-i)$; 6) $\mathrm{Ln}(-i)$; 7) $(-1)^{\sqrt{2}}$; 8) i^{-2i};

9) $\mathrm{Arc}\sin 2$; 10) $\mathrm{Arc}\cos i$.

Решение

1) Воспользуемся формулой $e^z = e^{x+iy} = e^x\cdot(\cos y + i\sin y)$:

$$e^{2+i\frac{\pi}{2}} = e^2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) = ie^2.$$

2) Для того чтобы вычислить $\sin\left(\frac{5\pi}{3}-2i\right)$, воспользуемся формулой $\sin(x+iy) = \sin x\,\mathrm{ch}\,y + i\cos x\,\mathrm{sh}\,y$:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{3}-2i\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{3}+(-2)i\right) = \sin\frac{5\pi}{3}\mathrm{ch}(-2) + i\cos\frac{5\pi}{3}\mathrm{sh}(-2).$$

Учитывая, что $\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\mathrm{sh}(-z) = -\mathrm{sh}\,z$, $\mathrm{ch}(-z) = \mathrm{ch}\,z$ для $\forall z\in C$, получим $\sin\left(\frac{5\pi}{3}-2i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{ch}2 - i\frac{1}{2}\mathrm{sh}2$.

3) Воспользуемся формулой $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$:

$$\cos\pi i = \frac{e^{i^2\pi}+e^{-i^2\pi}}{2} = \frac{e^{-\pi}+e^{\pi}}{2} = \mathrm{ch}\,\pi.$$

4) Применив формулу $\mathrm{sh}\,z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, получим $\mathrm{sh}\dfrac{\pi}{2}i = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2}$.

Вычислим $e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$ по формуле Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$:

$$e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i;\quad e^{-i\frac{\pi}{2}}=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-i.$$

Тогда $\quad \operatorname{sh}\frac{\pi}{2}i=\frac{i-(-i)}{2}=i$.

5) Применив формулу $\operatorname{ch}z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$, получим $\operatorname{ch}(1-i)=\frac{e^{1-i}+e^{-1+i}}{2}$.

Вычислим e^{1-i} и e^{-1+i} по формуле $e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot(\cos y+i\sin y)$.

$e^{1-i}=e(\cos(-1)+i\sin(-1))=e(\cos 1-i\sin 1)$;

$e^{-1+i}=e^{-1}\cdot(\cos 1+i\sin 1)$.

Тогда

$$\operatorname{ch}(1-i)=\frac{e(\cos 1-i\sin 1)+e^{-1}(\cos 1+i\sin 1)}{2}=\frac{\left(e+e^{-1}\right)\cos 1-i\left(e-e^{-1}\right)\sin 1}{2}=$$

$$=\frac{e+e^{-1}}{2}\cos 1-i\frac{e-e^{-1}}{2}\sin 1=\operatorname{ch}1\cos 1-i\operatorname{sh}1\sin 1.$$

6) Используем определение логарифма числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$: $\operatorname{Ln}z=\ln r+i(\varphi+2k\pi),\ \ k\in\mathbb{Z}$. Для этого предварительно найдем модуль r и аргумент φ данного числа $z=-i$:

$$x=\operatorname{Re}z=0,\ y=\operatorname{Im}z=-1\ \Rightarrow\ r=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1,\quad \varphi=-\frac{\pi}{2}.$$

Тогда $\quad \operatorname{Ln}(-i)=\ln 1+i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=i\pi\left(2k-\frac{1}{2}\right),\ \ k\in\mathbb{Z}$.

7) Найдем $(-1)^{\sqrt{2}}$, используя формулу $z^\alpha=e^{\alpha\operatorname{Ln}z},\ \ \alpha\in\mathbb{C}$: $(-1)^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\operatorname{Ln}(-1)}$.

Вычислим модуль и аргумент числа $z=-1$:

$$x=\operatorname{Re}z=-1,\ y=\operatorname{Im}z=0\ \Rightarrow\ r=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1,\quad \varphi=\pi.$$

Найдем теперь значение $\operatorname{Ln}(-1)$ по формуле $\operatorname{Ln}z=\ln r+i(\varphi+2k\pi),\,k\in\mathbb{Z}$:

$\operatorname{Ln}(-1)=\ln 1+i(\pi+2k\pi)=i\pi(1+2k),\,k\in\mathbb{Z}$.

Тогда $(-1)^{\sqrt{2}}=e^{i\sqrt{2}\pi(1+2k)}=\cos\sqrt{2}\pi(1+2k)+i\sin\sqrt{2}\pi(1+2k),\ \ k\in\mathbb{Z}$.

8) $i^{-2i}=e^{-2i\operatorname{Ln}i}$ в соответствии с формулой $z^\alpha=e^{\alpha\operatorname{Ln}z},\ \alpha\in\mathbb{C}$.

Найдем модуль и аргумент числа $z=i$:

$$x=\operatorname{Re}z=0,\ \ y=\operatorname{Im}z=1\ \Rightarrow\ r=\sqrt{0^2+1^2}=1,\ \ \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Вычислим $\operatorname{Ln}i$ по формуле $\operatorname{Ln}z=\ln r+i(\varphi+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$:

$$\operatorname{Ln}i=\ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=i\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

Тогда $i^{-2i}=e^{-2i\,\mathrm{Ln}\,i}=e^{-2i^2\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right)}=e^{2\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right)}=e^{\pi(1+4k)},\quad k=\mathbb{Z}$.

Заметим, что значения i^{-2i} образуют бесконечное множество действительных чисел вида $e^{\pi(1+4k)},\ k\in\mathbb{Z}$.

9) Воспользуемся формулой $\mathrm{Arc}\sin z=-i\,\mathrm{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$:

$\mathrm{Arc}\sin 2=-i\,\mathrm{Ln}\left(2i+\sqrt{-3}\right)=-i\,\mathrm{Ln}\left(\left(2\pm\sqrt{3}\right)i\right)$, поскольку $\sqrt{-3}=\pm\sqrt{3}i$.

Так как $\left|\left(2+\sqrt{3}\right)i\right|=2+\sqrt{3}$, $\left|\left(2-\sqrt{3}\right)i\right|=2-\sqrt{3}$, то

$\arg\left(\left(2+\sqrt{3}\right)i\right)=\arg\left(\left(2-\sqrt{3}\right)i\right)=\dfrac{\pi}{2}$. Тогда

$$\mathrm{Arc}\sin 2=-i\left(\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)=\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right)-i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

10) Воспользуемся формулой $\mathrm{Arc}\cos z=-i\,\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$:

$$\mathrm{Arc}\cos i=-i\,\mathrm{Ln}\left(i+\sqrt{i^2-1}\right)=-i\,\mathrm{Ln}\left(i+\sqrt{-2}\right)=-i\,\mathrm{Ln}\left(i\pm\sqrt{2}i\right)=-i\,\mathrm{Ln}\left(i\left(1\pm\sqrt{2}\right)\right).$$

Так как $\left|i\left(1+\sqrt{2}\right)\right|=1+\sqrt{2}$, $\left|i\left(1-\sqrt{2}\right)\right|=\sqrt{2}-1$, то

$\arg\left(i\left(1+\sqrt{2}\right)\right)=\dfrac{\pi}{2}$, $\arg\left(i\left(1-\sqrt{2}\right)\right)=-\dfrac{\pi}{2}$. Тогда

$$\mathrm{Ln}\left(i\left(1+\sqrt{2}\right)\right)=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z},$$

$$\mathrm{Ln}\left(i\left(1-\sqrt{2}\right)\right)=\ln\left(\sqrt{2}-1\right)+i\left(-\frac{\pi}{2}+2m\pi\right),\ m\in\mathbb{Z}.$$

После умножения на $-i$ чисел из этих множеств окончательно получаем

$$\mathrm{Arc}\cos i=-i\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)=\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right)-i\ln\left(1+\sqrt{2}\right),\ k\in\mathbb{Z};$$

$$\mathrm{Arc}\cos i=-i\left(\ln\left(\sqrt{2}-1\right)+i\left(-\frac{\pi}{2}+2m\pi\right)\right)=\pi\left(-\frac{1}{2}+2m\right)-i\ln\left(\sqrt{2}-1\right),\ m\in\mathbb{Z}.$$

2. Дано уравнение и область D. Найдите все корни этого уравнения. Определите, какие из корней являются простыми, а какие – кратными. Укажите, какие из корней принадлежат области D.

а) $\left(e^{2z}+1\right)\cdot\left(4z^2+\pi^2\right)=0,\quad D:\ |z-i|<2$;

б) $\sin 4\pi z\cdot\left(16z^2-8z-3\right)=0,\quad D:\ \left|z+\dfrac{i}{2}\right|<1$.

Решение

а) $\left(e^{2z}+1\right)\cdot\left(4z^2+\pi^2\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} e^{2z}+1=0, \\ 4z^2+\pi^2=0, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} e^{2z}=-1, \\ (2z+i\pi)\cdot(2z-i\pi)=0, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2z=\mathrm{Ln}(-1), \\ z=-i\dfrac{\pi}{2}, \\ z=i\dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

Вычислим $\mathrm{Ln}(-1)$. Воспользуемся формулой

$\mathrm{Lnz}=\ln r+i(\varphi+2k\pi),\; k\in\mathbb{Z}$, тогда

$\mathrm{Ln}(-1)=\ln|-1|+i\left(\arg(-1)+2\pi k\right)=\ln 1+i\left(\pi+2k\pi\right)=i\pi(1+2k),\; k\in\mathbb{Z}$

Тогда уравнение $2z=\mathrm{Ln}(-1)$ примет вид $2z=i\pi(1+2k),\; k\in\mathbb{Z}$.

Отсюда $z_k=i\dfrac{\pi}{2}(1+2k),\; k\in\mathbb{Z}$.

Значит, множество всех корней данного уравнения имеет вид

$\left\{z=-i\dfrac{\pi}{2};\; z=i\dfrac{\pi}{2};\; z_k=i\dfrac{\pi}{2}(1+2k),\; k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Чтобы выяснить, какова кратность корней z_k уравнения $e^{2z}+1=0$, нужно проверить, нулями какого порядка являются числа z_k для функции $f(z)=e^{2z}+1$. Найдем $f'(z)$ и $f'(z_k)$:

$$f'(z)=2e^{2z}\Rightarrow f'(z_k)=2e^{i\pi(1+2k)}=2e^{i\pi}=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2\neq 0.$$

Значит, числа $z_k=i\cdot\dfrac{\pi}{2}(1+2k), k\in\mathbb{Z}$, являются простыми нулями функции $f(z)$ и, следовательно, простыми корнями уравнения $e^{2z}+1=0$.

Таким образом, корни $z=-i\dfrac{\pi}{2}$ и $z=i\dfrac{\pi}{2}$ являются простыми корнями уравнения $e^{2z}+1=0$, так как они встречаются в наборе корней z_k при $k=-1$ и $k=0$ и при этом являются простыми корнями уравнения $4z^2+\pi^2=0$. Значит, для исходного уравнения $z=\pm i\dfrac{\pi}{2}$ – корни кратностью 2. Остальные числа $z_k=i\cdot\dfrac{\pi}{2}(1+2k),\; k\in\mathbb{Z},\; k\neq-1,\; k\neq 0$, являются простыми корнями данного уравнения.

Определим теперь, какие из корней уравнения принадлежат области $D:\; |z-i|<2$, которая является открытым кругом радиусом 2 с центром в точке i. Очевидно, что число $z_0 \in D$, если расстояние от z_0 до центра круга i меньше 2 $\Leftrightarrow$ $|z_0 - i| < 2$.

Найдем расстояние от каждого из корней уравнения до центра круга:

для $z = i\frac{\pi}{2}$: $\quad \left| i\frac{\pi}{2} - i \right| = \left| i\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \right| = \frac{\pi}{2} - 1 < 2 \quad \Rightarrow \quad z = i\frac{\pi}{2} \in D$,

для $z = -i\frac{\pi}{2}$: $\quad \left| -i\frac{\pi}{2} - i \right| = \left| -i\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \right| = \frac{\pi}{2} + 1 > 2 \quad \Rightarrow \quad z = -i\frac{\pi}{2} \notin D$,

для $z = i\frac{3\pi}{2}$: $\quad \left| i\frac{3\pi}{2} - i \right| = \left| i\left(\frac{3\pi}{2} - 1\right) \right| = \frac{3\pi}{2} - 1 > 2 \quad \Rightarrow \quad z = i\frac{3\pi}{2} \notin D$.

Значит, $|z_k - i| > 2$ для всех $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$, и, следовательно, только один корень $z = i\frac{\pi}{2}$ принадлежит области D.

б) $\sin 4\pi z \cdot \left(16z^2 - 8z - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 4\pi z = 0, \\ 16z^2 - 8z - 3 = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\pi z = \operatorname{Arc}\sin 0, \\ (4z+1)(4z-3) = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\pi z = \pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ z = -\dfrac{1}{4}, \\ z = \dfrac{3}{4}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_k = \dfrac{k}{4}, \ k \in \mathbb{Z}, \\ z = -\dfrac{1}{4}, \\ z = \dfrac{3}{4}. \end{array}\right.$$

Следовательно, множество всех корней данного уравнения имеет вид

$$\left\{ z = -\frac{1}{4}; \ z = \frac{3}{4}; \ z_k = \frac{k}{4}, \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Проверим, какова кратность корней z_k уравнения $\sin 4\pi z = 0$. Для этого выясним, нулями какого порядка являются числа z_k для функции $f(z) = \sin 4\pi z$.

Найдем $f'(z)$ и вычислим $f'(z_k)$.

$$f'(z) = 4\pi\cos 4\pi z \ \Rightarrow \ f'(z_k) = 4\pi \cdot \cos\left(4\pi \cdot \frac{k}{4}\right) = 4\pi \cdot \cos \pi k = 4\pi \cdot (-1)^k \neq 0.$$

Значит, числа $z_k = \frac{k}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$, являются простыми нулями функции $f(z) = \sin 4\pi z$. Следовательно, числа $z = -\frac{1}{4}$ и $z = \frac{3}{4}$ являются простыми корнями уравнения $\sin 4\pi z = 0$, так как они встречаются в наборе корней z_k при $k = -1$ и $k = 3$ соответственно и одновременно являются простыми корнями уравнения $16z^2 - 8z - 3 = 0$. Значит, для исходного уравнения $z = -\frac{1}{4}$ и $z = \frac{3}{4}$ –

корни кратностью 2, тогда как остальные корни $z_k = \dfrac{k}{4},\ k \neq -1,\ k \neq 3,\quad k \in \mathbb{Z}$,– простые корни.

Определим теперь, какие из корней уравнения принадлежат области $D:\ \left|z + \dfrac{i}{2}\right| < 1$, которая является открытым кругом радиусом 1 с центром в точке $\left(-\dfrac{i}{2}\right)$.

Найдем расстояние от каждого из корней уравнения до центра круга:

$$z = -\frac{1}{4}:\quad \left|-\frac{1}{4} + \frac{i}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{4} < 1 \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{1}{4} \in D,$$

$$z = \frac{3}{4}:\quad \left|\frac{3}{4} + \frac{i}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{4} < 1 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{3}{4} \in D.$$

Решив неравенство $\left|z_k + \dfrac{i}{2}\right| < 1$ для $z_k = \dfrac{k}{4},\ k \in \mathbb{Z}$, получим

$$\left|\frac{k}{4} + \frac{i}{2}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{k^2}{16} + \frac{1}{4}} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k^2}{16} < \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad k^2 < 12 \quad \Leftrightarrow \quad |k| < \sqrt{12}.$$

Откуда следует, что корни $z_k \in D$, если $k \in \{0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3\}$.

Дифференцирование функции комплексной переменной

1. Определите, является ли функция $f(z)$ аналитической хотя бы в одной точке. Найдите производную функции $f(z)$ в точках, в которых она существует.

а) $f(z) = (z-1)\cdot\left(2\bar{z}+1\right)$; б) $f(z) = (z+1)e^{-z}$.

Решение

а) Найдем действительную $u(x, y)$ и мнимую $v(x, y)$ части функции $f(z) = (z-1)\cdot\left(2\bar{z}+1\right)$.

Пусть $z = x + iy$, тогда

$$f(z) = (x + iy - 1)\cdot(2(x - iy) + 1) = (x - 1 + iy)\cdot(2x + 1 - i2y) =$$
$$= 2x^2 + 2y^2 - x - 1 + i3y.$$

Значит, $u(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - x - 1,\ v(x, y) = 3y$.

Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в любой точке $(x; y)$. Вычислим их частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x - 1,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 4y,\quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3.$$

Составим условия Коши – Римана для заданной функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \quad \text{Тогда} \quad \begin{cases} 4x - 1 = 3, \\ 4y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Следовательно, условия Коши – Римана выполняются только в одной точке $(1;0)$. Поэтому функция $f(z)$ является дифференцируемой только в точке $z = 1$ и не является аналитической ни в одной точке комплексной плоскости.

Найдем $f'(z)$. Воспользуемся формулой $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Тогда

$$f'(1) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Bigg|_{\substack{x=1\\ y=0}} = (4x - 1 + i \cdot 0)\big|_{\substack{x=1\\ y=0}} = 3.$$

б) Найдем действительную $u(x, y)$ и мнимую $v(x, y)$ части функции $f(z) = (z+1) \cdot e^{-z}$.

Пусть $z = x + iy$, тогда

$$f(z) = (z+1)e^{-z} = (x + iy + 1)e^{-x-iy} = (x + 1 + iy)e^{-x}(\cos y - i\sin y) =$$
$$= e^{-x}((x+1)\cos y + y\sin y + i(y\cos y - (x+1)\sin y)).$$

Значит, $u(x, y) = e^{-x}((x+1)\cos y + y\sin y)$,

$v(x, y) = e^{-x}(y\cos y - (x+1)\sin y)$

Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются дифференцируемыми в любой точке $(x; y)$. Вычислим их частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x}(x\cos y + y\sin y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-x}(x\sin y - y\cos y),$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-x}(y\cos y - x\sin y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-x}(x\cos y + y\sin y).$$

Поскольку $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ для $\forall x, y \in \mathbb{R}$, то условия Коши – Римана выполняются в любой точке $(x; y)$. Следовательно, функция $f(z)$ является дифференцируемой в любой точке z, а значит, аналитической на всей комплексной плоскости.

Найдем $f'(z)$.

$$f'(z) = (z+1)' \cdot e^{-z} + (z+1)\left(e^{-z}\right)' = 1 \cdot e^{-z} + (z+1)\left(-e^{-z}\right) = e^{-z}(1 - z - 1) = -ze^{-z}.$$

2. Определите, является ли функция $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ гармонической в области $D = \mathbb{R}^2$. В случае положительного ответа восстановите аналитическую функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y)$ и значению $f(-i) = 2i - 1$.

Решение

Найдем частные производные $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ функции $u(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2.$$

Так как $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ для любой точки $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, то функция $u(x, y)$ является гармонической на всей плоскости.

Это дает нам возможность найти сопряженную с ней гармоническую функцию $v(x, y)$ (см. подраздел 4.2 «Дифференцирование ФКП»), являющуюся мнимой частью искомой аналитической функции $u(x, y) + iv(x, y)$.

Составим условия Коши – Римана:

$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$ которые для найденных значений $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ принимают вид

$$\begin{cases} 2x + 2 = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ -2y = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Проинтегрируем первое равенство по переменной y:

$$\int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int (2x + 2) dy \iff v(x, y) = 2xy + 2y + \varphi(x),$$

откуда найдем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x).$$

В соответствии со вторым равенством последней системы имеем

$$2y + \varphi'(x) = 2y \iff \varphi'(x) = 0 \iff \varphi(x) = C.$$

Подставив $\varphi(x)$ в выражение для $v(x, y)$, получим $v(x, y) = 2xy + 2y + C$.

Составим функцию $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$:

$$f(x + iy) = x^2 - y^2 + 2x + i((2x + 2)y + C) = (x^2 - y^2 + i2xy) + 2(x + iy) + iC =$$
$$= (x + iy)^2 + 2(x + iy) + iC \iff f(z) = z^2 + 2z + iC.$$

Найдем значение произвольной постоянной C из условия

$$f(-i) = 2i - 1 \iff (-i)^2 + 2(-i) + iC = 2i - 1 \iff -1 - 2i + iC = 2i - 1 \iff$$
$$C - 2 = 2 \iff C = 4.$$

Таким образом, функция $f(z)$, с известной действительной частью $u(x, y)$ и удовлетворяющая условию $f(-i) = 2i - 1$, имеет вид $f(z) = z^2 + 2z + 4i$.

Интегрирование функций комплексной переменной

1. Вычислите $\int\limits_l \operatorname{Im}(z^2)dz$, где l – отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = -1 + 2i$.

Решение

Найдем уравнение прямой, проходящей через точки $z_1 = 0$ и $z_2 = -1 + 2i$. Так как прямая проходит через начало координат, то ее уравнение будем искать в виде $y = kx$. Определим k. Подставим в это уравнение координаты точки $z_2 = (-1; 2)$, получим $2 = -1 \cdot k \Leftrightarrow k = -2$.

Значит, уравнение прямой, проходящей через точки z_1 и z_2, в декартовых координатах имеет вид $y = -2x$, а комплексная форма этого уравнения примет вид $z = x - i2x$. На отрезке $z_1 z_2$ этой прямой переменная x изменяется от 0 до $-1 = \operatorname{Re} z_2$. Найдем dz: $dz = (1 - 2i)dx$.

Вычислим значение функции $f(z) = \operatorname{Im}(z^2)$ в точках заданной прямой: $z^2 = (x - i2x)^2 = x^2(1 - 2i)^2 = x^2(-3 - 4i) \Rightarrow \operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}(-3x^2 - i4x^2) = -4x^2$.

Подставив все вычисленные значения в исходный интеграл, получим

$$\int\limits_l \operatorname{Im}(z^2)dz = \int\limits_0^{-1} -4x^2(1 - 2i)dx = -4(1 - 2i)\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{-1} = \frac{4}{3} - i\frac{8}{3}.$$

2. Вычислите $\int\limits_l \operatorname{Re}(z + 1)dz$ по дуге l параболы $y = -x^2$ от точки $z_1 = 2 - 4i$ до точки $z_2 = 1 + i$.

Решение

Напишем уравнение дуги параболы l в комплексной форме: $z = x - ix^2$, где x изменяется от $x_1 = \operatorname{Re} z_1 = 2$ до $x_2 = \operatorname{Re} z_2 = 1$.

Найдем dz: $dz = \left(x - ix^2\right)' dx = (1 - i2x)dx$.

Вычислим значение функции $f(z) = \operatorname{Re}(z + 1)$ в точках кривой l:

$f(z) = \operatorname{Re}(z + 1) = \operatorname{Re}(x - ix^2 + 1) = x + 1$.

Тогда

$$\int\limits_l \operatorname{Re}(z + 1)dz = \int\limits_2^1 (x + 1)\cdot(1 - i2x)dx = \int\limits_2^1 (x + 1 - i2x^2 - i2x)dx =$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+x-i\frac{2x^3}{3}-i\frac{2x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=\left(2+2-i\frac{16}{3}-i4\right)-\left(\frac{1}{2}+1-i\frac{2}{3}-i\right)=$$

$$=4-i\frac{28}{3}-\left(\frac{3}{2}-i\frac{5}{3}\right)=4-i\frac{28}{3}-\frac{3}{2}+i\frac{5}{3}=\frac{5}{2}-i\frac{23}{3}.$$

3. Вычислите $\int\limits_l z^{-3}\cdot|z|\,dz$, где l – дуга окружности $|z|=1$ от точки $z_1=-i$ до точки $z_2=1$.

Решение

Параметрические уравнения окружности $|z-z_0|=R$ радиусом R с центром в точке $z_0=(x_0;y_0)$ имеют вид $x=x_0+R\cos t,\ y=y_0+R\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$.

Тогда параметрические уравнения окружности $|z|=1$ радиусом $R=1$ с центром в точке $z_0=0$ примут вид $x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$, откуда $z(t)=x(t)+iy(t)\ \Rightarrow\ z=\cos t+i\sin t\ \Leftrightarrow\ z=e^{it}$.

Таким образом, уравнение окружности $|z|=1$ в комплексной форме имеет вид $z=e^{it}, 0\le t\le 2\pi$.

Найдем dz: $dz=\left(e^{it}\right)'dt=ie^{it}dt$.

Вычислим значение функции $f(z)=z^{-3}|z|$ в точках кривой l:

$f(z(t))=\left(e^{-it}\right)^3\cdot\left|e^{it}\right|=e^{-i3t}$.

Учитывая, что точка $z_1=-i$ окружности l соответствует значению $t_1=-\frac{\pi}{2}$, а точка $z_2=1$ – значению $t_2=0$, получим

$$\int\limits_l z^{-3}\cdot|z|\,dz=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}e^{-i3t}\cdot ie^{it}dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}ie^{-i2t}dt=-\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}e^{-i2t}d(-i2t)=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-i2t}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=-\frac{1}{2}\left(e^0-e^{i\pi}\right)=-\frac{1}{2}(1-(-1))=-1.$$

4. Вычислите $\int\limits_l\left(z^3+\sin z\right)dz$, где l – дуга окружности $|z|=1$ от точки $z_1=-i$ до точки $z_2=1$.

Решение

Функция $f(z)=z^3+\sin z$ является аналитической на всей комплексной плоскости. Поэтому интеграл от этой функции не зависит от пути интегрирования и по любой кривой l с началом в точке $z_1=-1$ и концом в точке $z_2=1$ принимает одно и то же значение:

$$\int\limits_l \left(z^3+\sin z\right)dz=\int\limits_{z_1}^{z_2}\left(z^3+\sin z\right)dz.$$

Для вычисления полученного определенного интеграла воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz=F(z_2)-F(z_1)$, в соответствии с которой

$$\int\limits_l \left(z^3+\sin z\right)dz=\int\limits_{z_1}^{z_2}\left(z^3+\sin z\right)dz=\left(\frac{z^4}{4}-\cos z\right)\Bigg|_{-i}^{1}=$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\cos 1\right)-\left(\frac{(-i)^4}{4}-\cos(-i)\right)=\frac{1}{4}-\cos 1-\left(\frac{1}{4}-\cos i\right)=\cos i-\cos 1=$$

$$=\frac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2}-\cos 1=\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}-\cos 1=\operatorname{ch}1-\cos 1.$$

5. Вычислите $\int\limits_l (2z+1)\cos z dz$, где l – отрезок прямой от точки $z_1=0$ до точки $z_2=-i$.

Решение

Функция $f(z)=(2z+1)\cos z$ является аналитической на всей комплексной плоскости. Поэтому интеграл от этой функции по любой кривой l с началом в точке z_1 и концом в точке z_2 принимает одно и то же значение:

$$\int\limits_l (2z+1)\cos z dz=\int\limits_{z_1}^{z_2}(2z+1)\cos z dz.$$

Для вычисления полученного определенного интеграла воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)g'(z)dz=\left(f(z)\cdot g(z)\right)\Big|_{z_1}^{z_2}-\int\limits_{z_1}^{z_2} g(z)\cdot f'(z)dz,$$

в соответствии с которой

$$\int_l (2z+1)\cos z dz = \int_0^{-i}(2z+1)\cos z dz = \begin{bmatrix} f(z)=2z+1 \\ g'(z)=\cos z \\ f'(z)=2 \\ g(z)=\int \cos z dz = \sin z \end{bmatrix} =$$

$$= (2z+1)\sin z\Big|_0^{-i} - \int_0^{-i} \sin z \cdot 2dz = (2z+1)\sin z\Big|_0^{-i} + 2\cos z\Big|_0^{-i} =$$

$$= (-2i+1)\sin(-i) + 2\cos(-i) - 2\cos 0 = (2i-1)\sin i + 2\cos i - 2 =$$

$$= (2i-1)\frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i} + 2\frac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2} - 2 = (2i-1)\frac{e^1 - e^{-1}}{2}i + 2\frac{e^{-1}+e^1}{2} - 2 =$$

$$= i(2i-1)\mathrm{sh}1 + 2\mathrm{ch}1 - 2 = 2(\mathrm{ch}1 - \mathrm{sh}1 - 1) - i\,\mathrm{sh}1.$$

6. Вычислите $\oint\limits_l \frac{e^z}{z^2+2z-3}dz$, где l – окружность:

а) $|z+i|=1$; б) $|z+i|=2$; в) $|z+i|=4$.

Решение

Найдем изолированные особые точки подынтегральной функции:

$$z^2+2z-3=0 \Leftrightarrow (z+3)\cdot(z-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-3, \\ z_2=1. \end{array}\right.$$

а) Определим, какие из полученных точек лежат в круге D с границей $|z+i|=1$. Для этого вычислим расстояние от точки z_i до центра $z_0=-i$ этого круга.

$z_1=-3$: $|-3+i|=\sqrt{(-3^2)+1^2}=\sqrt{10}>1 \Rightarrow z_1=-3 \notin D$;

$z_2=1$: $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}>1 \Rightarrow z_2=1 \notin D$.

Значит, подынтегральная функция $f(z)=\frac{e^z}{z^2+2z-3}$ является аналитической в круге D. Отсюда в силу интегральной теоремы Коши получаем

$$\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{e^z}{z^2+2z-3}dz = 0.$$

б) Определим теперь, какие из точек $z_1=-3$ и $z_2=1$ лежат в круге D: $|z+i|<2$ радиусом $R=2$ с центром в точке $z_0=-i$. Найдем расстояние от точки z_i до точки z_0:

$z_1=-3$: $|-3+i|=\sqrt{(-3^2)+1^2}=\sqrt{10}>2 \Rightarrow z_1=-3 \notin D$;

$z_2=1$: $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}<2 \Rightarrow z_2=1 \in D$.

Значит, точка $z_2=1$ лежит в круге D с границей $|z+i|=2$.

Представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{e^z}{z^2+2z-3}=\frac{e^z}{(z+3)(z-1)}=\frac{\dfrac{e^z}{z+3}}{z-1}=\frac{f_1(z)}{z-1},$$

где $f_1(z)$ – аналитическая функция в данном круге.

Воспользуемся интегральной формулой Коши $\oint\limits_l \frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i\cdot f(z_0)$:

$$\oint\limits_{|z+i|=2}\frac{e^z}{z^2+2z-3}dz=\oint\limits_{|z+i|=2}\frac{\dfrac{e^z}{z+3}}{z-1}dz=2\pi i\cdot\left(\frac{e^z}{z+3}\right)\Bigg|_{z=1}=2\pi i\frac{e}{4}=i\frac{\pi e}{2}.$$

в) Определим, какие из точек $z_1=-3$ и $z_2=1$ лежат в круге *D*: $|z+i|<4$ радиусом $R=4$ с центром в точке $z_0=-i$. Найдем расстояние от точки z_i до точки z_0:

$z_1=-3$: $|-3+i|=\sqrt{10}<4 \Rightarrow z_1=-3\in D$;

$z_2=1$: $|1+i|=\sqrt{2}<4 \Rightarrow z_2=1\in D$.

Следовательно, обе точки $z_1=-3$ и $z_2=1$ лежат в круге *D*.

Построим две непересекающиеся окружности l_1: $|z+3|=r$, l_2: $|z-1|=r,\ r>0$, лежащие внутри круга $|z+i|<4$. В результате получим трехсвязную область, ограниченную окружностями l, l_1, l_2 (рис. 4.8). По теореме Коши для многосвязной области данный интеграл примет вид

$$\oint\limits_l \frac{e^z}{z^2+2z-3}dz=\oint\limits_{l_1}\frac{e^z}{z^2+2z-3}dz+\oint\limits_{l_2}\frac{e^z}{z^2+2z-3}dz.$$

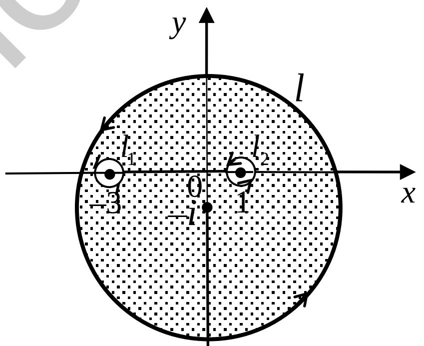


Рис. 4.8

Для вычисления каждого из интегралов справа воспользуемся интегральной формулой Коши $\oint\limits_l \frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i\cdot f(z_0)$:

$$\oint\limits_{l_1} \frac{e^z}{z^2+2z-3}dz = \oint\limits_{|z+3|=r} \frac{\frac{e^z}{z-1}}{z+3}dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{e^z}{z-1}\right)\Bigg|_{z=-3} = 2\pi i \frac{e^{-3}}{-4} = -i\frac{\pi e^{-3}}{2};$$

$$\oint\limits_{l_2} \frac{e^z}{z^2+2z-3}dz = \oint\limits_{|z-1|=r} \frac{\frac{e^z}{z+3}}{z-1}dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{e^z}{z+3}\right)\Bigg|_{z=1} = 2\pi i \frac{e}{4} = i\frac{\pi e}{2}.$$

Окончательно получим

$$\oint\limits_{|z+i|=4} \frac{e^z}{z^2+2z-3}dz = -i\frac{\pi e^{-3}}{2} + i\frac{\pi e}{2} = i\frac{\pi e^{-3}}{2}\left(e^4-1\right).$$

7. Вычислите $\oint\limits_{l} \frac{e^z}{(z-1)^2(z+3)}dz$, где l – окружность $|z+i|=2$.

Решение

Найдем особые точки подынтегральной функции: $(z-1)^2(z+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=1, \\ z_2=-3. \end{array}\right.$ Легко проверить, что точка $z_1=1$ принадлежит кругу $|z+i|<2$, а точка $z_2=-3$ – ему не принадлежит. Для вычисления интеграла запишем его в виде

$$\oint\limits_{l} \frac{e^z}{(z-1)^2(z+3)}dz = \oint\limits_{|z+i|=2} \frac{\frac{e^z}{(z+3)}}{(z-1)^2}dz$$

и применим интегральную формулу Коши для первой производной:

$$\oint\limits_{l} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = 2\pi i \cdot f'(z_0).$$

Тогда

$$\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{\frac{e^z}{z+3}}{(z-1)^2}dz = \frac{2\pi i}{1!}\cdot\left(\frac{e^z}{z+3}\right)'\Bigg|_{z=1} = 2\pi i \cdot \left(\frac{\left(e^z\right)'\cdot(z+3) - e^z\cdot(z+3)'}{(z+3)^2}\right)\Bigg|_{z=1} =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{e^z\cdot(z+3)-e^z}{(z+3)^2}\Bigg|_{z=1} = 2\pi i \cdot \frac{3e}{16} = i\frac{3\pi e}{8}.$$

Ряды в комплексной области

1. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=0$ и укажите область сходимости полученного ряда:

1) $f(z)=e^{-z}$; 2) $f(z)=\sin^2 z$; 3) $f(z)=\sqrt[3]{8+z}$;

4) $f(z)=z\ln\left(1-z^2\right)$; 5) $f(z)=\ln\left(12-z-z^2\right)$; 6) $f(z)=\dfrac{1}{z-2}$;

7) $f(z)=\dfrac{z^2}{(1+z)^2}$.

Решение

1) Воспользуемся разложением функции e^z в ряд Маклорена:

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\ z\in\mathbb{C}.$$

Заменив в нем z на $(-z)$, получим

$$f(z)=e^{-z}=1+(-z)+\frac{(-z)^2}{2!}+\ldots+\frac{(-z)^n}{n!}+\ldots=$$

$$=1-z+\frac{z^2}{2!}-\ldots+\frac{(-1)^n\cdot z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^n}{n!}.$$

Так как разложение функции e^z справедливо для $\forall z\in\mathbb{C}$, то и разложение функции e^{-z} имеет место на всей комплексной плоскости.

2) Учитывая, что $\sin^2 z=\frac{1}{2}(1-\cos 2z)$, воспользуемся разложением функции $\cos z$ в ряд Маклорена:

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n\cdot z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^{2n}}{(2n)!},\ z\in\mathbb{C}.$$

Заменив в нем z на $2z$, получим

$$\cos 2z=1-\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n\cdot(2z)^{2n}}{(2n)!}+\ldots=$$

$$=1-\frac{2^2z^2}{2!}+\frac{2^4\cdot z^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}\cdot z^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

Тогда

$$f(z)=\sin^2 z=\frac{1}{2}(1-\cos 2z)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\left(1-\frac{2^2z^2}{2!}+\frac{2^4\cdot z^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}\cdot z^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2^2z^2}{2!}-\frac{2^4\cdot z^4}{4!}+\ldots-\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}\cdot z^{2n}}{(2n)!}-\ldots\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n-1}\cdot z^{2n}}{(2n)!}.$$

Так как разложение функции $\cos z$ справедливо на всей комплексной плоскости, то и разложение функции $\sin^2 z$ имеет место для $\forall z\in\mathbb{C}$.

3) Запишем функцию $f(z)$ как $\sqrt[3]{8+z}=\sqrt[3]{8\cdot\left(1+\frac{z}{8}\right)}=2\cdot\left(1+\frac{z}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Воспользуемся разложением функции $(1+z)^{\alpha}$ в ряд Маклорена:

$$(1+z)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot z^{n},\ |z|<1.$$

Подставив $\alpha=\frac{1}{3}$ и заменив z на $\frac{z}{8}$, получим

$$f(z)=\sqrt[3]{8+z}=2\cdot\left(1+\frac{z}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=2\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}\cdot\left(\frac{z}{8}\right)^{n}\right)=$$

$$=2\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdots\frac{4-3n}{3}}{n!}\cdot\frac{z^{n}}{8^{n}}\right)=\ 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot1\cdot2\cdot5\cdots(3n-4)}{3^{n}\cdot2^{3n-1}\cdot n!}\cdot z^{n}.$$

Так как разложение функции $(1+z)^{\alpha}$ справедливо в круге $|z|<1$, то разложение функции $\sqrt[3]{8+z}$ имеет место для $\forall z$, удовлетворяющего неравенству $\left|\frac{z}{8}\right|<1$, т. е. для всех z, принадлежащих кругу $|z|<8$.

4) Воспользуемся разложением функции $\ln(1+z)$ в ряд Маклорена:

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot z^{n}}{n},|z|<1.$$

Заменив в нем z на $\left(-z^{2}\right)$, получим

$$\ln\left(1-z^{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot\left(-z^{2}\right)^{n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-1)^{n}\cdot z^{2n}}{n}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}\cdot z^{2n}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n}.$$

Отсюда

$$f(z)=z\cdot\ln\left(1-z^{2}\right)=-z\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{n}.$$

Так как разложение функции $\ln(1+z)$ справедливо для любого z, удовлетворяющего неравенству $|z|<1$, то разложение функции $z\cdot\ln\left(1-z^{2}\right)$ имеет место для всех таких z, что $\left|-z^{2}\right|<1$, т. е. для $\forall z$, принадлежащего кругу $|z|<1$.

5) Запишем функцию $f(z)$ в виде

$$f(z)=\ln\left(12-z-z^2\right)=\ln\left[(z+4)\cdot(3-z)\right]=\ln\left[12\cdot\left(1+\frac{z}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{z}{3}\right)\right]=$$

$$=\ln 12+\ln\left(1+\frac{z}{4}\right)+\ln\left(1-\frac{z}{3}\right).$$

Воспользуемся разложением функции $\ln(1+z)$ в ряд Маклорена: $\ln(1+z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot z^n}{n},\ |z|<1.$

Для разложения функции $\ln\left(1+\frac{z}{4}\right)$ заменим в нем переменную z на $\frac{z}{4}$, а для разложения функции $\ln\left(1-\frac{z}{3}\right)$ – переменную z на $\left(-\frac{z}{3}\right)$. В результате получим $\ln\left(1+\frac{z}{4}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot\left(\frac{z}{4}\right)^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot z^n}{4^n\cdot n}$;

$$\ln\left(1-\frac{z}{3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot\left(-\frac{z}{3}\right)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-1)^n\cdot z^n}{3^n\cdot n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{3^n\cdot n}.$$

Тогда

$$f(z)=12+\ln\left(1+\frac{z}{4}\right)+\ln\left(1-\frac{z}{3}\right)=12+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot z^n}{4^n\cdot n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{3^n\cdot n}=$$

$$=12-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n+4^n}{12^n\cdot n}\cdot z^n.$$

Так как разложение функции $\ln(1+z)$ справедливо для всех z, удовлетворяющих условию $|z|<1$, то разложение функции $f(z)$ имеет место для всех z, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases}\left|\frac{z}{4}\right|<1,\\ \left|-\frac{z}{3}\right|<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|<4,\\ |z|<3\end{cases}\Leftrightarrow |z|<3,$$ т. е. для $\forall z$, принадлежащего кругу $|z|<3$.

6) Представим функцию $f(z)$ в виде

$$f(z)=\frac{1}{z-2}=\frac{1}{-2\cdot\left(1-\frac{z}{2}\right)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}.$$

Воспользуемся разложением функции $\frac{1}{1-z}$ в ряд Маклорена:

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n,\ |z|<1.$$

Заменив в нем z на $\frac{z}{2}$, получим $\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$.

Тогда $f(z)=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$.

Так как разложение функции $\frac{1}{1-z}$ справедливо для всех z, удовлетворяющих условию $|z|<1$, то разложение функции $f(z)$ имеет место для любого z, удовлетворяющего неравенству $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, т. е. для $\forall z$, принадлежащего кругу $|z|<2$.

7) Решим задачу двумя способами:

1 способ. Запишем функцию $f(z)$ как $f(z)=\frac{z^2}{(1+z)^2}=z^2\cdot(1+z)^{-2}$.

Воспользуемся разложением функции $(1+z)^{\alpha}$:

$$(1+z)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot z^n,\ |z|<1.$$

Подставив $\alpha=-2$, получим

$$f(z)=z^2\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)\cdot(-3)\cdots(-2-n+1)}{n!}\cdot z^n\right)=$$

$$=z^2\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3\cdots(n+1)}{n!}\cdot z^n\right)=z^2\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+1)!}{n!}\cdot z^n\right)=$$

$$=z^2\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(n+1)\cdot z^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(n+1)\cdot z^{n+2}.$$

Так как разложение функции $(1+z)^{\alpha}$ имеет место при всех z, удовлетворяющих неравенству $|z|<1$, то и разложение функции $f(z)$ справедливо в круге $|z|<1$.

2 способ. Представим функцию $f(z)$ в виде $f(z)=\frac{z^2}{(1+z)^2}=z^2\cdot\left(-\frac{1}{1+z}\right)'$.

Воспользуемся разложением функции $\frac{1}{1+z}$: $\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^n,\ |z|<1$.

После почленного дифференцирования этого ряда в круге $|z|<1$, получим

$$\left(\frac{1}{1+z}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n \cdot z^{n-1}, \ |z| < 1.$$

Тогда

$$f(z) = z^2 \cdot \left(-\frac{1}{1+z}\right)' = -z^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n \cdot z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot n \cdot z^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot (n+1) \cdot z^{n+2}, \ |z| < 1.$$

2. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z - z_0$ и укажите область сходимости полученного ряда.

1) $f(z) = e^{3z-2}$, $z_0 = 1$; 2) $f(z) = \sin 2z$, $z_0 = \frac{\pi}{4}$;

3) $f(z) = \sqrt{z}$, $z_0 = 4$; 4) $f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$, $z_0 = 1$.

Решение

1) Запишем функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = e^{3z-2} = e^{3\cdot(z-1)+3-2} = e^{3\cdot(z-1)+1} = e \cdot e^{3\cdot(z-1)}.$$

Воспользуемся разложением функции e^z в ряд Маклорена:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Заменяя в нем z на $3(z-1)$, получим

$$f(z) = e \cdot e^{3(z-1)} = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3(z-1))^n}{n!} = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n \cdot (z-1)^n}{n!}.$$

Так как разложение функции e^z справедливо для любого $z \in \mathbb{C}$, то и разложение функции $f(z)$ имеет место на всей комплексной плоскости.

2) Запишем функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = \sin 2z = \sin\left(2\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Воспользуемся разложением функции $\cos z$ в ряд Маклорена:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot z^{2n}}{(2n)!}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Заменяя в нем z на $2\left(z - \frac{\pi}{4}\right)$, получим

$$f(z)=\cos\left(2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\left(2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 4^n\cdot\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!}.$$

Так как разложение функции $\cos z$ имеет место для любого $z\in\mathbb{C}$, то и разложение функции $f(z)$ справедливо на всей комплексной плоскости.

3) Преобразуем функцию $f(z)$ к виду

$$f(z)=\sqrt{z}=\sqrt{(z-4)+4}=\sqrt{4\cdot\left(1+\frac{z-4}{4}\right)}=2\cdot\left(1+\frac{z-4}{4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Воспользуемся разложением функции $(1+z)^{\alpha}$ в ряд Маклорена:

$$(1+z)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot z^n,\ |z|<1.$$

Подставив $\alpha=\frac{1}{2}$ и заменив z на $\frac{z-4}{4}$, получим

$$f(z)=2\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\cdot\left(\frac{z-4}{4}\right)^n\right)=$$

$$=2\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-3)}{8^n\cdot n!}\cdot(z-4)^n\right).$$

Так как разложение функции $(1+z)^{\alpha}$ справедливо в круге $|z|<1$, то разложение функции $f(z)$ имеет место для любого z, удовлетворяющего неравенству $\left|\frac{z-4}{4}\right|<1$, т. е. для любого z, принадлежащего кругу $|z-4|<4$.

4) Представим функцию $f(z)$ в виде суммы простейших дробей:

$$f(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}=\frac{1}{(z-2)\cdot(z-3)}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-3}.$$

Найдем значения неопределенных коэффициентов *A* и *B*. Для этого правую часть последнего равенства приведем к общему знаменателю:

$$\frac{1}{(z-2)\cdot(z-3)}=\frac{A\cdot(z-3)+B\cdot(z-2)}{(z-2)\cdot(z-3)}.$$

Приравнивая числители, получим равенство многочленов $1=A(z-3)+B(z-2)$, которое выполняется тогда и только тогда, когда коэффициенты при одинаковых степенях z совпадают, т. е.

$z:\quad A+B=0,$

$z^0:\quad -3A-2B=1.$

Решая систему, получим $A=-1,\ B=1$.

Отсюда $f(z) = -\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3}$.

Запишем функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = -\frac{1}{(z-1)+1-2} + \frac{1}{(z-1)+1-3} = -\frac{1}{(z-1)-1} + \frac{1}{-2\left(1-\frac{z-1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1-(z-1)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}.$$

Воспользуемся разложением функции $\frac{1}{1-z}$ в ряд Маклорена:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \; |z| < 1.$$

Для разложения функции $\frac{1}{1-(z-1)}$ заменяем в нем z на $(z-1)$, для разложения функции $\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}$ заменяем в нем z на $\frac{z-1}{2}$. В результате получим искомый ряд для функции $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} \cdot (z-1)^n.$$

Так как разложение функции $\frac{1}{1-z}$ справедливо в круге $|z| < 1$, то разложение функции $f(z)$ имеет место для всех z, удовлетворяющих системе неравенств $\begin{cases} |z-1| < 1, \\ \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow |z-1| < 1$, т. е. для $\forall z$ из круга $|z-1| < 1$.

3. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

1) $f(z) = \frac{1}{z \cdot (z+2)}, \; 0 < |z+2| < 2$;

2) $f(z) = \frac{1}{z \cdot (z+2)}, \; 0 < |z| < 2$;

3) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}, \; 0 < |z-i| < 2$;

4) $f(z) = z^2 \cdot e^{-\frac{1}{z^2}}, \; 0 < |z| < +\infty$;

5) $f(z) = \sin \frac{z}{z-1}, \; 0 < |z-1| < +\infty$;

6) $f(z) = z \cdot \cos \frac{1}{z^2}, \; 0 < |z| < +\infty$.

Решение

1) Функция $f(z)=\dfrac{1}{z\cdot(z+2)}$ является аналитической в кольце $0<|z+2|<2$, поэтому ее можно разложить в этой области в ряд Лорана по степеням $z+2$. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z)=\frac{1}{z\cdot(z+2)}=\frac{1}{(z+2)}\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{z+2}\cdot\frac{1}{(z+2)-2}=\frac{1}{z+2}\cdot\frac{1}{-2\cdot\left(1-\dfrac{z+2}{2}\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z+2}{2}}.$$

Поскольку в указанном кольце выполняется неравенство $\left|\dfrac{z+2}{2}\right|<1$, для разложения сомножителя $\dfrac{1}{1-\dfrac{z+2}{2}}$ можно использовать ряд Маклорена функции $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$, $|z|<1$.

Используя для нашего случая $\dfrac{z+2}{2}$ вместо z, получим

$$\frac{1}{1-\dfrac{z+2}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2}{2}\right)^n, \text{ где } \left|\frac{z+2}{2}\right|<1.$$

Подставим это выражение в исходную функцию $f(z)$:

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z+2}{2}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^{n-1}}{2^{n+1}}.$$

Функция $f(z)$ разложена в ряд Лорана в указанном кольце.

2) Так как функция $f(z)=\dfrac{1}{z\cdot(z+2)}$ является аналитической в кольце $0<|z|<2$, то ее можно разложить в этой области в ряд Лорана по степеням z.

Представим $f(z)$ в виде $f(z)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z+2}\right)$.

Чтобы разложить слагаемое $\frac{1}{z+2}$ в ряд по степеням z, функцию $\frac{1}{z+2}$ запишем в виде $\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)}$.

Воспользуемся разложением функции $\frac{1}{1+z}$ в ряд Маклорена:

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\ |z|<1.$$

Заменяя в нем z на $\frac{z}{2}$, получим $\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n$.

Заметим, что полученный ряд сходится в данном кольце, т. к. в области $0<|z|<2$ переменная z удовлетворяет неравенству $\left|\frac{z}{2}\right|<1$.

Отсюда имеем

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+2}}=$$

$$=\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{z^n}{2^{n+2}},\ 0<|z|<2.$$

3) Для того чтобы разложить функцию $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ в ряд Лорана по степеням $z-i$ в кольце $0<|z-i|<2$, представим $f(z)$ в виде

$$f(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{z-i}-\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{z+i}.$$

Функцию $\frac{1}{z+i}$ запишем следующим образом:

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{(z-i)+i+i}=\frac{1}{2i\left(1+\frac{z-i}{2i}\right)}=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}.$$

Воспользуемся разложением функции $\frac{1}{1+z}$ в ряд Маклорена: $\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\ |z|<1$, заменив в котором z на $\frac{z-i}{2i}$, получим

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}=\frac{1}{2i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{2i}\right)^n.$$

Поскольку в области $0<|z-i|<2$ переменная z удовлетворяет неравенству $\left|\frac{z-i}{2i}\right|=\frac{|z-i|}{2}<1$, полученный ряд сходится к функции $\frac{1}{z+i}$.

Отсюда

$$f(z)=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{z-i}-\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{z+i}=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{z-i}-\frac{1}{(2i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{2i}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{z-i}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2i)^{n+2}}=\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-i)^n}{(2i)^{n+2}},\ 0<|z-i|<2.$$

4) Функция $z^2\cdot e^{-\frac{1}{z^2}}$ является аналитической в кольце $0<|z|<+\infty$, поэтому ее можно разложить в этой области в ряд Лорана по степеням z.

Воспользуемся разложением функции e^z в ряд Маклорена:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\ z\in\mathbb{C}.$$

Заменяя в нем переменную z на $\left(-\frac{1}{z^2}\right)$, получим

$$f(z)=z^2\cdot e^{-\frac{1}{z^2}}=z^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n}{n!}=z^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}\cdot n!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{z^{2n-2}},\ 0<|z|<+\infty.$$

5) Функция $f(z)=\sin\frac{z}{z-1}$ является аналитической в кольце $0<|z-1|<\infty$ и ее можно разложить в этой области по степеням $z-1$.

Преобразуем функцию $f(z)$ следующим образом:

$$f(z)=\sin\frac{z}{z-1}=\sin\frac{(z-1)+1}{z-1}=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=$$

$$=\sin 1\cdot\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\cdot\sin\frac{1}{z-1}.$$

Воспользуемся разложением функций $\sin z$ и $\cos z$ в ряд Маклорена:

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot z^{2n+1},\ z\in\mathbb{C};\quad \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot z^{2n},\ z\in\mathbb{C}.$$

Заменяя в них z на $\frac{1}{z-1}$, получим

$$f(z)=\sin 1\cdot\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\cdot\sin\frac{1}{z-1}=$$

$$= \sin 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{1}{(z-1)^{2n}} + \cos 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{(z-1)^{2n+1}},\ 0 < |z-1| < \infty .$$

6) Функция $f(z) = z \cdot \cos\frac{1}{z^2}$ является аналитической в кольце $0 < |z| < \infty$ и ее можно разложить в ряд Лорана по степеням z.

Воспользуемся разложением функции $\cos z$ в ряд Маклорена

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot z^{2n},\ z \in \mathbb{C},$$

заменив в котором z на $\frac{1}{z^2}$, получим

$$f(z) = z \cdot \cos\frac{1}{z^2} = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \left(\frac{1}{z^2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{1}{z^{4n-1}},\ 0 < |z| < \infty .$$

Нули и изолированные особые точки аналитической функции

Найдите изолированные особые точки функции $f(z)$ и определите их характер, для полюсов укажите порядок.

1) $f(z) = \frac{1}{z^4 + 2z^3}$; 2) $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 + 2z}$; 3) $f(z) = \frac{e^{2z} - 1}{z^2(z^2 + \pi^2)}$;

4) $f(z) = \frac{1}{(e^{2z} - 1) \cdot z}$; 5) $f(z) = \frac{\sin \pi z}{z^4 - 1}$; 6) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$;

7) $f(z) = \frac{z}{\sin z}$; 8) $f(z) = \frac{e^{2z^2} - 1}{z^3}$; 9) $f(z) = z \cdot \operatorname{ch}\frac{i}{z-2}$.

Решение

1) Найдем нули функции $g(z)$ – знаменателя дроби $f(z)$:

$g(z) = z^4 + 2z^3 = z^3 \cdot (z+2)$.

Функция $g(z)$ имеет два нуля в точках: $z = 0,\ z = -2$, причем $z = 0$ – нуль третьего порядка, $z = -2$ – простой нуль. Поэтому функция $f(z)$ имеет два полюса: $z = 0$ – третьего порядка, $z = -2$ – первого порядка (простой полюс).

2) Функция $f(z)$ имеет две изолированные особые точки: $z = 0,\ z = -2$. Рассмотрим точку $z = 0$. Используя разложение в ряд Тейлора для функции e^z в окрестности точки $z_0 = 0$, получим

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 + 2z} = \frac{z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots}{z \cdot (z+2)} = \frac{z \cdot \left(1 + \frac{z}{2!} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{n!} + \ldots\right)}{z \cdot (z+2)}.$$

Найдем предел функции $f(z)$ при $z \to 0$:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1+\dfrac{z}{2!}+\ldots+\dfrac{z^{n-1}}{n!}+\ldots}{z+2}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $z=0$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$.

Рассмотрим точку $z=-2$. Представим функцию $f(z)$ в виде

$$f(z)=\frac{1}{z+2}\cdot\frac{e^z-1}{z}=\frac{1}{z+2}\cdot\psi(z),\text{ где } \psi(z)=\frac{e^z-1}{z}.$$

Так как функция $\psi(z)$ является аналитической в точке $z=-2$ и $\psi(-2)=\dfrac{e^{-2}-1}{-2}\neq 0$, то функция $f(z)$ имеет в точке $z=-2$ простой полюс.

3) Особыми точками функции $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ являются нули ее знаменателя $\psi(z)=z^2\cdot\left(z^2+\pi^2\right) \Leftrightarrow \psi(z)=z^2\cdot(z-i\pi)(z+i\pi)$.

Очевидно, $\psi(z)$ имеет нуль второго порядка в точке $z=0$ и простые нули в точках $z=i\pi,\ z=-i\pi$.

Найдем теперь нули числителя $\varphi(z)=e^{2z}-1$:

$e^{2z}-1=0 \Leftrightarrow e^{2z}=1 \Leftrightarrow 2z=\mathrm{Ln}\,1$.

Вычислим $\mathrm{Ln}\,1$. Воспользуемся формулой:

$\mathrm{Ln}\,z=\ln r+i\cdot(\varphi+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$, в которой $z=1,\ r=1,\ \varphi=0$.

Тогда

$\mathrm{Ln}\,1=\ln 1+i\cdot(0+2k\pi)=i2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Отсюда уравнение $2z=\mathrm{Ln}\,1 \Leftrightarrow 2z=i2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow z=ik\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Следовательно, функция $\varphi(z)$ имеет нули в точках $z_k=ik\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Определим порядок нулей z_k. Вычислим $\varphi'(z_k)$:

$\varphi'(z)=2e^{2z} \Rightarrow \varphi'(z_k)=2e^{i2k\pi}=2\neq 0$.

Значит, $z_k,\ k\in\mathbb{Z}$, – простые нули функции $\varphi(z)$.

Таким образом, $z=0$ является простым нулем числителя $\varphi(z)$ и нулем второго порядка знаменателя $\psi(z)$. Это означает, что $z=0$ – простой полюс функции $f(z)$. Точки $z=\pm i\pi$ являются простыми нулями как числителя $\varphi(z)$, так и знаменателя $\psi(z)$, а значит, эти точки – устранимые особые точки $f(z)$.

4) Нули знаменателя $g(z)=\left(e^{2z}-1\right)\cdot z$ будут особыми точками дроби $f(z)$:

$$\left(e^{2z}-1\right)\cdot z=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0,\\ e^{2z}-1=0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0,\\ z=ik\pi,\ k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

$\{z=0;\ z_k=ik\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ – множество всех нулей функции $g(z)$.

Точка $z=0$ содержится в наборе $z_k = ik\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$, при $k=0$. Определим порядок нулей z_k функции $g(z)$. Для точки $z=0$ имеем

$$g'(z)=e^{2z}-1+2e^{2z}\cdot z \Rightarrow g'(0)=0,$$

$$g''(z)=4e^{2z}\cdot(z+1) \Rightarrow g''(0)=4\neq 0.$$

Следовательно, $z=0$ – нуль второго порядка функции $g(z)$.

Выясним, нулями какого порядка являются точки $z_k = ik\pi,\ \ k\neq 0,\ \ k\in\mathbb{Z}$:

$$g'(z_k)=e^{i2k\pi}-1+2ik\pi e^{i2k\pi}=i2k\pi\neq 0.$$

Значит, точки $z_k = ik\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0,$ – простые нули функции $g(z)$.

Таким образом, функция $f(z)$ в точке $z=0$ имеет полюс второго порядка, а в точках $z_k = ik\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0,$ – простые полюсы.

5) Разложим знаменатель $\psi(z)=z^4-1$ функции $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ на множители: $\psi(z)=(z-1)\cdot(z+1)\cdot(z-i)\cdot(z+i)$. Отсюда следует, что $z=1,\ z=-1,\ z=i,\ z=-i$ – простые нули функции $\psi(z)$, которые и являются особыми точками функции $f(z)$.

Установим тип этих особых точек. Для этого найдем нули числителя $\varphi(z)=\sin\pi z$. Тогда получим: $\sin\pi z=0 \Leftrightarrow \pi z=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow z_k=k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Для определения порядка нулей $z_k=k,\ k\in\mathbb{Z}$ найдем $\varphi'(z_k)$:

$$\varphi'(z)=\pi\cos\pi z \Rightarrow \varphi'(z_k)=\pi\cos\pi k=\pi\cdot(-1)^k\neq 0.$$

Значит, $z_k=k,\ k\in\mathbb{Z}$, – простые нули числителя $\varphi(z)$.

Заметим, что простые нули $z=i,\ z=-i$ знаменателя $\psi(z)$ не встречаются в наборе простых нулей z_k числителя $\varphi(z)$ ни при каком целом значении k.

Это означает, что точки $z=i,\ z=-i$ являются простыми полюсами функции $f(z)$. Точки $z=1$ и $z=-1$ – простые нули как знаменателя $\psi(z)$, так и числителя $\varphi(z)$. Поэтому эти точки являются устранимыми особыми точками функции $f(z)$.

6) Найдем нули функции $g(z)=\sin z$ – знаменателя дроби $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$.

$$\sin z=0 \Leftrightarrow z=k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Следовательно, функция $g(z)$ имеет нули в точках $z_k=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Определим их порядок. Найдем $g'(z_k)$, получим

$$g'(z)=\cos z \Rightarrow g'(z_k)=\cos k\pi=(-1)^k\neq 0.$$

Значит, $z_k=k\pi, k\in\mathbb{Z}$, – простые нули функции $g(z)$. Поэтому функция $f(z)$ имеет простые полюсы в этих точках.

7) Особыми точками функции $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ будут нули ее знаменателя $\psi(z)=\sin z$.

Функция $\psi(z)$ имеет простые нули в точках $z_k=k\pi, k\in\mathbb{Z}$ (см. решение задачи 6).

Установим тип особых точек $z_k=k\pi, k\in\mathbb{Z}$, функции $f(z)$. Для этого найдем нули ее числителя $\varphi(z)=z$. Функция $\varphi(z)$ имеет простой нуль в точке $z=0$.

Заметим, что $z=0$ встречается в наборе z_k при $k=0$.

Таким образом, $z=0$ является простым нулем как числителя $\varphi(z)$, так и знаменателя $\psi(z)$ функции $f(z)$. Поэтому $z=0$ – устранимая особая точка функции $f(z)$. Точки $z_k=k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0$, являются простыми нулями знаменателя $\psi(z)$, при этом $\varphi(z_k)\neq 0$. Значит, $z_k=k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0$, – простые полюсы функции $f(z)$.

8) Функция $f(z)=\dfrac{e^{2z^2}-1}{z^3}$ имеет единственную особую точку $z=0$.

Для определения типа особой точки разложим $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $0<|z|<+\infty$, используя разложение функции e^z в ряд Маклорена: $e^z=1+\dfrac{z}{1!}+\dfrac{z^2}{2!}+\ldots+\dfrac{z^n}{n!}+\ldots$. Заменив в нем z на $2z^2$, получим

$$e^{2z^2}=1+2z^2+\frac{\left(2z^2\right)^2}{2!}+\ldots+\frac{\left(2z^2\right)^n}{n!}+\ldots=1+2z^2+\frac{2^2z^4}{2!}+\ldots+\frac{2^nz^{2n}}{n!}+\ldots.$$

Функция $f(z)$ представляется следующим рядом Лорана в кольце $0<|z|<+\infty$:

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\cdot\left(e^{2z^2}-1\right)=\frac{1}{z^3}\cdot\left(2z^2+\frac{2^2z^4}{2!}+\ldots+\frac{2^nz^{2n}}{n!}+\ldots\right)=\frac{2}{z}+2z+\ldots.$$

Как видно, главная часть ряда Лорана содержит одно слагаемое $\dfrac{2}{z}$. Значит, $z=0$ – полюс первого порядка функции $f(z)$.

9) Функция $f(z)=z\cdot\operatorname{ch}\dfrac{i}{z-2}$ имеет единственную особую точку $z=2$.

Запишем $f(z)$ в виде $f(z)=((z-2)+2)\cdot\operatorname{ch}\dfrac{i}{z-2}$.

Для разложения функции в ряд Лорана в кольце $0<|z-2|<+\infty$ воспользуемся разложением функции $\operatorname{ch}z$ в ряд Маклорена по степеням z:

$\operatorname{ch} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$. Заменив в нем z на $\frac{i}{z-2}$, получим

$$\operatorname{ch}\frac{i}{z-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\cdot\left(\frac{i}{z-2}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{2n}}{(2n)!(z-2)^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(z-2)^{2n}}.$$

Тогда в кольце $0<|z-2|<\infty$ ряд Лорана функции $f(z)$ имеет вид

$$f(z)=((z-2)+2)\cdot\operatorname{ch}\frac{i}{z-2}=((z-2)+2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(z-2)^{2n}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{1}{(z-2)^{2n-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{1}{(z-2)^{2n}}.$$

Так как главная часть ряда Лорана содержит бесконечно много ненулевых членов, то $z=2$ – существенно особая точка функции $f(z)$.

Вычисление интегралов с помощью вычетов

Вычислите интеграл $\oint_l f(z)dz$, где l – заданный контур, который обходится в положительном направлении.

1) $f(z)=\frac{1}{z^2+2z}$; l: $|z+1|=0{,}5$;

2) $f(z)=\frac{1}{z^4+2z^3}$; l: $|z+2|=1$;

3) $f(z)=\frac{1}{z(z+2)^2}$; l: $|z+2+i|=1{,}5$;

4) $f(z)=\frac{e^z-1}{z^2+2z}$; l: $|z|=1$;

5) $f(z)=\frac{e^z-1}{z^4+2z^3}$; l: $|z+1+i|=2$;

6) $f(z)=\frac{e^z-1}{z(z+2)^2}$; l: $|z+2|=1$;

7) $f(z)=\frac{e^{2z}-1}{z^2(z^2+\pi^2)}$; l: $|z-2i|=3$;

8) $f(z)=\frac{1}{(e^{2z}-1)\cdot z}$; l: $|z|=\frac{3}{2}\pi$.

Решение

1) Подынтегральная функция $f(z)=\frac{1}{z(z+2)}$ имеет два простых полюса в точках $z=0$ и $z=-2$.

Проверим, какие из этих особых точек принадлежат области D: $|z+1|<0{,}5$.

Так как $|0+1|=1>0{,}5$ и $|-2+1|=1>0{,}5$, то $z=0\notin D$ и $z=-2\notin D$. Следовательно, функция $f(z)$ является аналитической в области D, поэтому

$$\oint_{|z+1|=0{,}5}\frac{dz}{z^2+2z}=0.$$

2) Подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{1}{z^3(z+2)}$ имеет два полюса: $z=0$ – третьего порядка и $z=-2$ – первого порядка (см. решение задачи 1 из пункта «Нули и изолированные особые точки»).

Выясним, какие из этих особых точек попали в круг: $|z+2|<1$. Для этого найдем расстояние от каждой из них до центра $z_0=-2$:

$z=0$: $|0+2|=2>1$;

$z=-2$: $|-2+2|=0<1$.

Значит, $z=0\notin D$, $z=-2\in D$. Следовательно, в круге D функция $f(z)$ является аналитической всюду, за исключением точки $z=-2$.

Найдем вычет функции в простом полюсе $z=-2$. Воспользовавшись формулой $\operatorname{res} f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot f(z)$, получим

$$\operatorname{res} f(-2)=\lim_{z\to-2}(z+2)\cdot\frac{1}{z^3(z+2)}=\lim_{z\to-2}\frac{1}{z^3}=-\frac{1}{8}.$$

Отсюда по основной теореме Коши о вычетах имеем

$$\oint\limits_{|z+2|=1}\frac{dz}{z^4+2z^3}=2\pi i\cdot\operatorname{res} f(-2)=2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{\pi}{4}i.$$

3) Подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{1}{z(z+2)^2}$ имеет в точке $z=0$ простой полюс, в точке $z=-2$ – полюс второго порядка.

Определим, какие из этих особых точек принадлежат области D: $|z+2+i|<1{,}5$.

Так как $|0+2+i|=\sqrt{5}>1{,}5$ и $|-2+2+i|=1<1{,}5$, то $z=0\notin D$ и $z=-2\in D$. Значит, в области D функция $f(z)$ является аналитической всюду, за исключением точки $z=-2$.

Найдем вычет функции в полюсе второго порядка $z=-2$. Воспользовавшись формулой $\operatorname{res} f(z_0)=\dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-z_0)^n\cdot f(z)\right)$ для $n=2$, получим

$$\operatorname{res} f(-2)=\lim_{z\to-2}\left((z+2)^2\cdot\frac{1}{z(z+2)^2}\right)'=\lim_{z\to-2}\left(\frac{1}{z}\right)'=\lim_{z\to-2}\left(-\frac{1}{z^2}\right)=-\frac{1}{4}.$$

Отсюда по основной теореме Коши о вычетах имеем

$$\oint\limits_{|z+2+i|=1{,}5}\frac{dz}{z(z+2)^2}=2\pi i\cdot\operatorname{res} f(-2)=2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}i.$$

4) Подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z(z+2)}$ имеет две особые точки: $z=0$ – устранимая особая точка и $z=-2$ – простой полюс (см. решение задачи 2 из пункта «Нули и изолированные особые точки»).

Выясним, какие из этих особых точек попали в область D: $|z|<1$.

Учитывая, что $|0|<1$ и $|-2|=2>1$, получим $z=0\in D$ и $z=-2\notin D$. Значит, в области D функция $f(z)$ является аналитической всюду, за исключением точки $z=0$.

Отсюда, в силу того что $\operatorname{res} f(0)=0$, по основной теореме Коши о вычетах имеем $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{e^z-1}{z^2+2z}dz=2\pi i\cdot\operatorname{res} f(0)=2\pi i\cdot 0=0$.

5) Подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^3(z+2)}$ имеет два полюса: $z=0$ – второго порядка и $z=-2$ – простой полюс.

Выясним, какие из этих особых точек попали в область D: $|z+1+i|<2$.

Так как $|0+1+i|=\sqrt{2}<2$ и $|-2+1+i|=\sqrt{2}<2$, то $z=0\in D$ и $z=-2\in D$. Следовательно, в области D функция $f(z)$ является аналитической всюду, за исключением точек $z=0$ и $z=-2$.

Найдем вычеты функции $f(z)$ в полюсе второго порядка $z=0$ и простом полюсе $z=-2$.

$$\operatorname{res} f(0)=\lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot f(z)\right)'=\lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot\frac{e^z-1}{z^3(z+2)}\right)'=\lim_{z\to 0}\left(\frac{1+\dfrac{z}{2!}+\ldots\dfrac{z^{n-1}}{n!}+\ldots}{z+2}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\left(\dfrac{1}{2!}+\ldots\dfrac{(n-1)z^{n-2}}{n!}+\ldots\right)\cdot(z+2)-\left(1+\dfrac{z}{2!}+\ldots\dfrac{z^{n-1}}{n!}+\ldots\right)}{(z+2)^2}=\frac{1-1}{(0+2)^2}=0.$$

$$\operatorname{res} f(-2)=\lim_{z\to -2}(z+2)\cdot f(z)=\lim_{z\to -2}(z+2)\cdot\frac{e^z-1}{z^4+2z^3}=\lim_{z\to -2}\frac{e^z-1}{z^3}=\frac{1-e^{-2}}{8}.$$

Отсюда по основной теореме Коши о вычетах имеем

$$\oint\limits_{|z+1+i|=2}\frac{e^z-1}{z^4+2z^3}dz=2\pi i\cdot\left(\operatorname{res} f(0)+\operatorname{res} f(-2)\right)=2\pi i\cdot\left(0+\frac{1-e^{-2}}{8}\right)=\frac{1-e^{-2}}{4}\pi i.$$

6) Подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z(z+2)^2}$ имеет две особые точки: $z=0$ – устранимая особая точка и $z=-2$ – полюс второго порядка (см. решение задачи 3).

Проверим, какие из них попали в область D: $|z+2|<1$.

Учитывая, что $|0+2|=2>1$ и $|-2+2|=0<1$, получим $z=0\notin D$ и $z=-2\in D$. Следовательно, функция $f(z)$ в области D является аналитической всюду, за исключением точки $z=-2$.

Найдем вычет функции $f(z)$ в полюсе второго порядка $z=-2$.

$$\operatorname{res} f(-2)=\lim_{z\to-2}\left((z+2)^2\cdot f(z)\right)'=\lim_{z\to-2}\left((z+2)^2\cdot\frac{e^z-1}{z\cdot(z+2)^2}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to-2}\left(\frac{e^z-1}{z}\right)'=\lim_{z\to-2}\frac{e^z\cdot z-\left(e^z-1\right)}{z^2}=\frac{-2e^{-2}-e^{-2}+1}{4}=\frac{1-3e^{-2}}{4}.$$

Отсюда по теореме о вычетах имеем

$$\oint\limits_{|z+2|=1}\frac{e^z-1}{z\cdot(z+2)^2}dz=2\pi i\cdot\operatorname{res} f(-2)=2\pi i\cdot\frac{1-3e^{-2}}{4}=\frac{1-3e^{-2}}{2}\pi i.$$

7) Точка $z=0$ является простым полюсом, а точки $z=\pm i\pi$ – устранимыми особыми точками подынтегральной функции $f(z)=\dfrac{e^{2z}-1}{z^2\left(z^2+\pi^2\right)}$ (см. решение задачи 3 из пункта «Нули и изолированные особые точки»).

Проверим, какие из них попали в область D: $|z-2i|<3$.

Так как $|0-2i|=2<3$, $|\pi i-2i|=\pi-2<3$, $|-\pi i-2i|=\pi+2>3$, то $z=0\in D$, $z=i\pi\in D$, $z=-i\pi\notin D$. Следовательно, функция $f(z)$ является в области D аналитической всюду, за исключением точек $z=0$ и $z=i\pi$.

Найдем вычеты функции $f(z)$ в точках $z=i\pi$ и $z=0$. В устранимой особой точке $z=i\pi$ $\operatorname{res} f(i\pi)=0$.

$$\operatorname{res} f(0)=\lim_{z\to0}z\cdot f(z)=\lim_{z\to0}z\cdot\frac{e^{2z}-1}{z^2\cdot\left(z^2+\pi^2\right)}=$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{2+2z+\frac{4}{3}z^2+\ldots+\frac{2^n z^{n-1}}{n!}+\ldots}{z^2+\pi^2}=\frac{2}{\pi^2}.$$

Отсюда по теореме Коши о вычетах получим

$$\oint\limits_{|z-2i|=3}\frac{e^{2z}-1}{z^2\left(z^2+\pi^2\right)}dz=2\pi i\cdot\left(\operatorname{res} f(0)+\operatorname{res} f(i\pi)\right)=2\pi i\cdot\left(\frac{2}{\pi^2}+0\right)=\frac{4}{\pi}i.$$

8) Подынтегральная функция $f(z)=\frac{1}{\left(e^{2z}-1\right)\cdot z}$ имеет в точке $z=0$ – полюс второго порядка, а в точках $z_k=ik\pi,\ k\neq 0$ – простые полюсы (см. решение задачи 4 из пункта «Нули и изолированные особые точки»).

Выясним, какие из особых точек принадлежат области D: $|z|<\frac{3}{2}\pi$.

Учитывая, что $z=0\in D$, $z=\pm i\pi\in D$, $z_k=ik\pi\notin D$ для всех целых $k\neq 0,\ k\neq\pm 1$, получим, что в области D $f(z)$ аналитическая всюду, за исключением точек $z=0$ и $z=\pm i\pi$.

Найдем вычет функции $f(z)$ в полюсе второго порядка $z=0$.

$$\operatorname{res} f(0)=\lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot f(z)\right)'=\lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot\frac{1}{\left(e^{2z}-1\right)\cdot z}\right)'=\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{e^{2z}-1}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{2z+2z^2+\frac{4}{3}z^3+\ldots+\frac{2^n z^n}{n!}+\ldots}\right)'=\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{2+2z+\frac{4}{3}z^2+\ldots+\frac{2^n z^{n-1}}{n!}+\ldots}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(-\frac{1}{\left(2+2z+\frac{4}{3}z^2+\ldots+\frac{2^n z^{n-1}}{n!}+\ldots\right)^2}\right)\cdot\left(2+\frac{8}{3}z+\ldots+\frac{2^n(n-1)z^{n-2}}{n!}+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

Найдем вычеты функции $f(z)$ в простых полюсах $z=\pm i\pi$. Воспользовавшись формулой $\operatorname{res} f(z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$, получим

$$\operatorname{res} f(i\pi)=\left.\frac{1}{\left(\left(e^{2z}-1\right)\cdot z\right)'}\right|_{z=i\pi}=\left.\frac{1}{2e^{2z}\cdot z+\left(e^{2z}-1\right)}\right|_{z=i\pi}=$$

$$=\frac{1}{2i\pi e^{2i\pi}+\left(e^{2i\pi}-1\right)}=\frac{1}{2i\pi}.$$

$$\operatorname{res} f(-i\pi)=\left.\frac{1}{\left(\left(e^{2z}-1\right)\cdot z\right)'}\right|_{z=-i\pi}=\left.\frac{1}{2e^{2z}\cdot z+\left(e^{2z}-1\right)}\right|_{z=-i\pi}=$$

$$=\frac{1}{-2i\pi e^{-2i\pi}+\left(e^{-2i\pi}-1\right)}=-\frac{1}{2i\pi}.$$

Отсюда по основной теореме Коши о вычетах имеем

$$\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}\pi} \frac{dz}{\left(e^{2z}-1\right)\cdot z} = 2\pi i\cdot\left(\operatorname{res} f(0)+\operatorname{res} f(i\pi)+\operatorname{res} f(-i\pi)\right)=$$

$$=2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2i\pi}-\frac{1}{2i\pi}\right)=-i\pi.$$

Операционное исчисление

1. Найдите изображение данного оригинала.

1) $f(t)=\sin^2 t$; 2) $f(t)=\sin t\cdot\sin 3t$; 3) $f(t)=e^t\cdot\sin^2 t$;

4) $f(t)=e^{-2t}\cdot\sin t\cdot\sin 3t$; 5) $f(t)=t\cdot\sin 2t$; 6) $f(t)=t^2\cdot\operatorname{ch}(3t)$;

7) $f(t)=\int\limits_0^t \tau^2\sin\tau d\tau$; 8) $f(t)=\dfrac{\sin 2t}{t}$; 9) $f(t)=\int\limits_0^t \dfrac{\cos 2\tau-\cos 4\tau}{\tau}d\tau$.

Решение

1) Запишем функцию $f(t)$ в виде $f(t)=\sin^2 t=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)$. Отсюда, используя свойство линейности, в силу теоремы подобия $f(\lambda t)\risingdotseq\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$, получим

$$f(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t \risingdotseq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4}=\frac{2}{p\cdot\left(p^2+4\right)}.$$

2) Воспользуемся формулой $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$. Тогда функция $f(t)$ примет вид

$$f(t)=\sin t\cdot\sin 3t=\frac{1}{2}(\cos 2t-\cos 4t).$$

Отсюда

$$f(t)\risingdotseq\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+16}=\frac{6p}{\left(p^2+4\right)\cdot\left(p^2+16\right)}.$$

3) Используя результат решения задачи 1, в силу теоремы смещения $e^{\alpha t}\cdot f(t)\risingdotseq F(p-\alpha)$, получим

$$f(t)=e^t\cdot\sin^2 t \risingdotseq \frac{2}{(p-1)\cdot\left((p-1)^2+4\right)}=\frac{2}{(p-1)\cdot\left(p^2-2p+5\right)}.$$

4) Воспользуемся результатом, полученным при решении задачи 2. Тогда по теореме смещения имеем

$$f(t)=e^{-2t}\sin t\sin 3t \doteqdot \frac{6(p+2)}{\left((p+2)^2+4\right)\cdot\left((p+2)^2+16\right)}=\frac{6p+12}{\left(p^2+4p+8\right)\cdot\left(p^2+4p+20\right)}.$$

5) Воспользуемся теоремой о дифференцировании изображения: $t\cdot f(t) \doteqdot -F'(p)$.

Найдем сначала изображение $f(t)=\sin 2t$:

$$f(t)=\sin 2t \doteqdot \frac{2}{p^2+4}.$$

Тогда $f(t)=\sin 2t \doteqdot -\left(\dfrac{2}{p^2+4}\right)'=\dfrac{4p}{\left(p^2+4\right)^2}$.

6) Воспользуемся теоремой о дифференцировании изображения: $t^2\cdot f(t) \doteqdot F''(p)$.

Найдем изображение $f(t)=\mathrm{ch}(3t)$:

$$f(t)=\mathrm{ch}(3t) \doteqdot \frac{p}{p^2-9}.$$

Тогда

$$t^2\cdot\mathrm{ch}(3t) \doteqdot \left(\frac{p}{p^2-9}\right)''=\left(\frac{p^2-9-2p^2}{\left(p^2-9\right)^2}\right)'=\left(\frac{-p^2-9}{\left(p^2-9\right)^2}\right)'=$$

$$=\frac{-2p\left(p^2-9\right)^2+\left(p^2-9\right)\cdot 4p\cdot\left(p^2-9\right)}{\left(p^2-9\right)^4}=\frac{-2p^3+18p+4p^3+36p}{\left(p^2-9\right)^3}=\frac{2p^2+54p}{\left(p^2-9\right)^3}.$$

7) Воспользуемся теоремой об интегрировании оригинала: $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \doteqdot \dfrac{F(p)}{p}$, где $f(t)=t^2\cdot\sin t$.

Найдем последовательно изображения $\sin t,\ t^2\sin t,\ \int\limits_0^t \tau^2\sin\tau d\tau$.

$$\sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1},$$

$$t^2 \cdot \sin t \doteqdot \left(\frac{1}{p^2+1}\right)'' = \left(-\frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}\right)' = \frac{-2\cdot\left(p^2+1\right)^2 + 8p^2\cdot\left(p^2+1\right)}{\left(p^2+1\right)^4} =$$

$$= \frac{-2p^2 - 2 + 8p^2}{\left(p^2+1\right)^3} = \frac{6p^2-2}{\left(p^2+1\right)^3}.$$

Тогда $\displaystyle\int_0^t \tau^2 \sin\tau d\tau \doteqdot \frac{6p^2-2}{p\cdot\left(p^2+1\right)^3}$.

8) Воспользуемся теоремой об интегрировании изображения: $\displaystyle\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_\rho^\infty F(s)ds$, где $f(t) = \sin 2t$.

Найдем сначала изображение $\sin 2t$: $\displaystyle\sin 2t \doteqdot \frac{2}{p^2+4}$.

Тогда $$\frac{\sin 2t}{t} \doteqdot \int_p^\infty \frac{2}{s^2+4}ds = 2\lim_{A\to\infty}\int_p^A \frac{ds}{s^2+4} = 2\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{s}{2}\Big|_p^A\right) =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{A}{2} - \operatorname{arctg}\frac{p}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{p}{2} = \operatorname{arcctg}\frac{p}{2}.$$

9) Воспользуемся теоремой об интегрировании оригинала: $\displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}$, где $\displaystyle f(t) = \frac{\cos 2t - \cos 4t}{t}$.

Найдем сначала изображение $\cos 2t - \cos 4t$, получим

$$\cos 2t - \cos 4t \doteqdot \frac{p}{p^2+4} - \frac{p}{p^2+16}.$$

Тогда по теореме об интегрировании изображения найдем

$$\frac{\cos 2t - \cos 4t}{t} \doteqdot \int_p^\infty\left(\frac{s}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+16}\right)ds = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left(s^2+4\right) - \frac{1}{2}\ln\left(s^2+16\right)\right)\Big|_p^A =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\ln\left(\frac{s^2+4}{s^2+16}\right)\Big|_p^A = \frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\left(\ln\frac{A^2+4}{A^2+16} - \ln\frac{p^2+4}{p^2+16}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{p^2+16}{p^2+4}.$$

Отсюда окончательно получим

$$\int_0^t \frac{\cos 2\tau - \cos 4\tau}{\tau}d\tau \doteqdot \frac{1}{2p}\ln\frac{p^2+16}{p^2+4}.$$

2. Решите операционным методом задачу Коши.

1) $y'' + 2y' - 3y = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

2) $y'' - y' = \cos 3t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Решение

1) Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$.

Найдем изображения $y'(t)$ и $y''(t)$. Используя теорему о дифференцировании оригинала, с учетом начальных условий получим

$$y'(t) \risingdotseq p \cdot Y(p) - y(0) = p \cdot Y(p),$$

$$y''(t) \risingdotseq p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2 \cdot Y(p) - 1.$$

Составим операторное уравнение для данного уравнения. Учитывая, что $e^{-t} \risingdotseq \dfrac{1}{p+1}$, имеем

$$p^2 \cdot Y(p) - 1 + 2p \cdot Y(p) - 3 \cdot Y(p) = \frac{1}{p+1} \Rightarrow Y(p) = \frac{p+2}{(p+1)\cdot(p-1)\cdot(p+3)}.$$

Воспользуемся формулой $y(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{p=p_k} \left(F(p) \cdot e^{pt}\right)$:

$$y(t) = \operatorname*{res}_{p=-1}\left(\frac{p+2}{(p+1)(p-1)(p+3)} e^{pt}\right) + \operatorname*{res}_{p=1}\left(\frac{p+2}{(p+1)(p-1)(p+3)} e^{pt}\right) +$$

$$+ \operatorname*{res}_{p=-3}\left(\frac{p+2}{(p+1)(p-1)(p+3)} e^{pt}\right) = \lim_{p\to-1} \frac{p+2}{(p-1)(p+3)} e^{pt} + \lim_{p\to1} \frac{p+2}{(p+1)(p+3)} e^{pt} +$$

$$+ \lim_{p\to-3} \frac{p+2}{(p+1)(p-1)} e^{pt} = -\frac{1}{4} e^{-t} + \frac{3}{8} e^{t} - \frac{1}{8} e^{-3t}.$$

Следовательно, $y(t) = -\dfrac{1}{4} e^{-t} + \dfrac{3}{8} e^{t} - \dfrac{1}{8} e^{-3t}$.

2) Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$.

Найдем изображения $y'(t)$ и $y''(t)$. В силу теоремы о дифференцировании оригинала, получим

$$y'(t) \risingdotseq p \cdot Y(p) - y(0) = p \cdot Y(p) - 1;$$

$$y''(t) \risingdotseq p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2 \cdot Y(p) - p - 1.$$

Учитывая, что $\cos 3t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+9}$, составим операторное уравнение для данного уравнения:

$$p^2 \cdot Y(p) - p - 1 - (p \cdot Y(p) - 1) = \frac{p}{p^2 + 9}.$$

Тогда $\qquad Y(p) = \dfrac{p^3 + 10p}{p \cdot (p-1) \cdot \left(p^2 + 9\right)}.$

Найдем теперь разложение $Y(p)$ в виде суммы простейших дробей:

$$Y(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp + D}{p^2 + 9}.$$

Отсюда имеем

$$A(p-1)\left(p^2+9\right) + Bp\left(p^2+9\right) + (Cp + D)\left(p^2 - p\right) = p^3 + 10p \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} p^3: \\ p^2: \\ p^1: \\ p^0: \end{array} \begin{cases} A + B + C = 1, \\ -A + D - C = 0, \\ 9A + 9B - D = 10, \\ -9A = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = \dfrac{11}{10}, \\ C = -\dfrac{1}{10}, \\ D = -\dfrac{1}{10}. \end{cases}$$

Тогда $Y(p)$ примет вид

$$Y(p) = \frac{11}{10} \cdot \frac{1}{p-1} - \frac{1}{10} \cdot \frac{p+1}{p^2+9} = \frac{11}{10} \cdot \frac{1}{p-1} - \frac{1}{10} \cdot \frac{p}{p^2+9} - \frac{1}{30} \cdot \frac{3}{p^2+9}.$$

Следовательно, $\quad y(t) = \dfrac{11}{10} e^t - \dfrac{1}{10} \cos 3t - \dfrac{1}{30} \sin 3t.$

4.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

Комплексные числа и действия над ними

1. Даны комплексные числа z_1 и z_2. Найдите:

1) $z_1 + z_2$; 2) $z_1 - \overline{z_2}$; 3) $\overline{z_1 \cdot z_2}$; 4) $\dfrac{\overline{z_1}}{z_2}$; 5) $2(z_1 + z_2) \cdot \dfrac{\overline{z_1}}{z_2} + \dfrac{\overline{z_1 \cdot z_2}}{z_1 - \overline{z_2}}$;

а) $z_1 = 2 - i,\ z_2 = 1 + 3i$; б) $z_1 = -1 - 2i,\ z_2 = -1 + i$.

2. Данное комплексное число z запишите:
1) в тригонометрической форме; 2) в показательной форме; 3) изобразите на комплексной плоскости.

а) $z = 1 - \sqrt{3}$; б) $z = 2i$; в) $z = -i + 1$; г) $z = \dfrac{-3 - \sqrt{3}i}{2}$.

3. Вычислите и запишите результат в алгебраической форме:

1) $z = i^{3017}$; 2) $z = (-1 + i)^{12}$; 3) $z = \left(\dfrac{-\sqrt{3} + i}{1 + i}\right)^{10}$; 4) $z = \left(-1 - i\sqrt{3}\right)^6 \cdot (1 - i)^{-14}$.

4. 1) Найдите все значения корня и 2) изобразите их на комплексной плоскости.

а) $\sqrt{-9}$; б) $\sqrt{\dfrac{i}{4}}$; в) $\sqrt{-1 + i\sqrt{3}}$; г) $\sqrt[3]{64}$; д) $\sqrt[3]{-\dfrac{i}{27}}$; е) $\sqrt[3]{-1 - i}$; ж) $\sqrt[4]{-16}$.

5. Даны комплексные числа $z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$ и $z_2 = 2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

Найдите:

1) $\overline{\overline{z_1} - z_2}$; 2) $z_1 \cdot z_2$; 3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$; 4) $\left(\overline{z_1} \cdot z_2\right)^{10}$; 5) $\sqrt[3]{z_1 \cdot z_2}$.

6. 1) Найдите корни z_1 и z_2 квадратного уравнения $(2 + i)z^2 - (5 - i)z + (2 - 2i) = 0$.
2) Напишите уравнение окружности с центром в точке $z_0 = 0$ и радиусом, равным расстоянию между точками z_1 и z_2.

7. 1) Постройте линии, заданные уравнениями:

а) $|z + 1| = 1$; б) $|z - i| = 1$; в) $\arg(z + 1) = \dfrac{\pi}{4}$;

и область D, заданную системой неравенств:

г) $|z + 1| \le 1,\ |z - i| < 1,\ \dfrac{\pi}{4} \le \arg(z + 1) < \dfrac{\pi}{2}$.

2) Проверьте, принадлежит ли точка $z_0 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ области D.

8. 1) Постройте линии, заданные уравнениями:

а) $|z+1-i|=1$; б) $\mathrm{Im}z=3$; в) $\arg z=\frac{3\pi}{4}$;

и область *D*, заданную системой неравенств:

г) $|z+1-i|>1$, $\mathrm{Im}z\le 3$, $\mathrm{Im}z>1$, $\frac{\pi}{2}\le \arg z<\frac{3\pi}{4}$.

2) Проверьте, принадлежит ли точка $z_0=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ области *D*.

Функции комплексной переменной

1. Вычислите значение функции, используя определение соответствующей ФКП. Результат запишите в алгебраической форме.

1) $e^{-2-i\pi}$; 2) $\sin\left(\frac{5\pi}{6}-3i\right)$; 3) $\mathrm{sh}(i\pi)$; 4) $\mathrm{ch}\left(-i\frac{\pi}{2}\right)$; 5) $\mathrm{th}(1-i\pi)$;

6) $\ln(2i)$; 7) $\mathrm{Ln}(-1-i)$; 8) i^{3i}; 9) 1^{-i}; 10) $\mathrm{Arcsin}\, i$.

2. Дано уравнение и область *D*.

1) Найдите все корни этого уравнения.

2) Определите, какие из корней являются простыми, а какие – кратными.

3) Укажите, какие из корней принадлежат области *D*.

а) $(e^z-1)(z^2+4\pi^2)=0$, D: $|z-i2\pi|<8$;

б) $(\sin z-1)(2z^2+3\pi z)=0$, D: $|z+\pi|<\frac{3\pi}{2}$;

в) $(\mathrm{ch}(i\pi z)+1)(z^2-z-2)=0$, D: $|z-2|<\frac{5}{2}$.

Дифференцирование функций комплексной переменной

1. Дана функция $f(z)$.

1) Определите, является ли функция $f(z)$ аналитической хотя бы в одной точке.

2) Найдите производную функции $f(z)$ в точках, в которых она существует.

а) $f(z)=\bar{z}^2+2z-1$; б) $f(z)=2\mathrm{ch}z+3i$.

2. 1) Покажите, что данная функция является гармонической в указанной области.

2) Восстановите аналитическую в области D функцию $f(z)$ по известной ее действительной $u(x,y)$ или мнимой $v(x,y)$ части и значению $f(z_0)$.

а) $u(x,y)=x^3-3xy^2+3x^2-6x-3y^2+5$, $f(i)=2-3i$, $D=\mathbb{C}$;

б) $v(x,y)=y^2-2y-x^2+1$, $f(2i)=i-1$, $D=\mathbb{C}$;

в) $u(x,y)=e^{1+y}\cos x$, $f(-i)=1+3i$, $D=\mathbb{C}$;

г) $v(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{3}{5}$, $f(2-i)=\frac{1}{5}+i\frac{2}{5}$, $D=\mathbb{C}$.

Интегрирование функций комплексной переменной

Вычислите интегралы по указанным кривым.

1) $\int_l \left(z^2 - 2\bar{z} + 3\right)dz$, l – отрезок прямой от точки $z_1 = 1 + i$ до точки $z_2 = i$;

2) $\int_l z\bar{z}\,dz$, l – отрезок прямой от точки $z_1 = i$ до точки $z_2 = 1$;

3) $\int_l \operatorname{Re} z dz$, l – дуга параболы $y = -x^2$ от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 - i$;

4) $\int_l \bar{z}^2\,dz$, l – дуга окружности $|z-1| = 1$, соединяющая точки $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 0$ (обход против часовой стрелки);

5) $\int_l z \operatorname{Im} z\,dz$, l – дуга окружности $|z| = 1$, соединяющая точки $z_1 = -1$ и $z_2 = 1$ (обход против часовой стрелки);

6) $\int_l \left(2z^3 + 4z\right)dz$, l – произвольная кривая, соединяющая точки $z_1 = -i$ и $z_2 = 1 + i$;

7) $\int_l ze^{-2z}dz$, l – произвольная кривая, соединяющая точки $z_1 = i\dfrac{\pi}{2}$ и $z_2 = i\pi$;

8) $\int_l (z-1)\sin z dz$, l – произвольная кривая, соединяющая точки $z_1 = 0$ и $z_2 = i$;

9) $\displaystyle\int_{|z+i|=1} \frac{\cos z}{z^2+1}dz$; 10) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{e^{-z}}{z^2+\pi^2}dz$; 11) $\displaystyle\oint_{|z+i|=1} \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}$; 12) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z+1)}dz$

(в заданиях 9 – 12 контур обходится в положительном направлении).

Ряды в комплексной области

1. Разложите функцию $f(z)$ в ряд по степеням $z - z_0$ и определите область сходимости полученного ряда.

1) $f(z) = e^{2z}$, $z_0 = 0$; 2) $f(z) = \cos 3z$, $z_0 = 0$;

3) $f(z) = \sqrt{4-z}$, $z_0 = 0$; 4) $f(z) = \dfrac{z^3}{4 - z^2}$, $z_0 = 0$;

5) $f(z) = \ln\left(z^2 + 3z + 2\right)$, $z_0 = 0$; 6) $f(z) = \dfrac{3}{1 + z - 2z^2}$, $z_0 = 0$;

7) $f(z) = e^z$, $z_0 = -1$; 8) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 6z + 5}$, $z_0 = 3$;

9) $f(z) = \ln\left(z^2 + 6z + 12\right)$, $z_0 = -3$; 10) $f(z) = \sqrt[3]{z}$, $z_0 = 8$.

2. Найдите разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности особой точки z_0 и укажите область сходимости этого ряда.

1) $f(z)=e^{\frac{1}{z+2}}$; 2) $f(z)=z\cdot e^{-\frac{1}{z}}$; 3) $f(z)=\frac{\cos z}{z^2}$;

4) $f(z)=\sin\frac{1}{z+i}$; 5) $f(z)=\operatorname{ch}\frac{2}{z+3}$; 6) $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z}$.

Нули и изолированные особые точки аналитических функций

Найдите изолированные особые точки функции $f(z)$ и определите их характер.

1) $f(z)=\frac{z+1}{z^2-2z}$; 2) $f(z)=\frac{1}{\left(z^2+4\right)^2}$; 3) $f(z)=\frac{e^z+1}{z\cdot\left(z^2+\pi^2\right)}$;

4) $f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z^2}$; 5) $f(z)=\frac{z+4}{(z+2)^2\cdot(z-3)}$; 6) $f(z)=\frac{\sin 2z}{(z+1)\cdot\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}$;

7) $f(z)=z^3\cdot e^{-\frac{1}{z}}$; 8) $f(z)=z\cdot\cos\frac{2}{z-2}$; 9) $f(z)=\frac{\cos z}{z^2}$;

10) $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z+i}$.

Вычеты и их приложения

Вычислите интегралы по указанным контурам:

1. $\oint\limits_l \frac{z+1}{z^2-2z}dz$.

1) l: $|z+i|=\frac{1}{2}$; 2) l: $|z|=1$; 3) l: $|z-2|=1$; 4) l: $|z-1|=2$.

2. $\oint\limits_l \frac{dz}{\left(z^2+4\right)^2}$. 1) l: $|z-2i|=2$; 2) l: $|z|=3$.

3. $\oint\limits_l \frac{e^z+1}{z\cdot\left(z^2+\pi^2\right)}dz$. 1) l: $|z+i\pi|=1$; 2) l: $|z|=2$.

4. $\oint\limits_l \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z^2}dz$. 1) l: $|z-1|=\frac{1}{2}$; 2) l: $|z|=\frac{1}{2}$; 3) l: $|z|=2$.

5. $\oint\limits_l \frac{z+4}{(z+2)^2\cdot(z-3)}dz$. 1) l: $|z+2|=1$; 2) l: $|z-3|=2$; 3) l: $|z|=4$.

6. $\oint\limits_{l} \dfrac{\sin 2z}{(z+1)\cdot\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)^2}dz$. 1) $l:\ \left|z-\dfrac{\pi}{2}\right|=1$; 2) $l:\ |z+1|=\dfrac{1}{2}$.

7. Вычислите интеграл.

1) $\int\limits_{|z|=1} z^3\cdot e^{-\frac{1}{z}}dz$; 2) $\int\limits_{|z-2|=3} z\cdot\cos\dfrac{2}{z-2}dz$; 3) $\int\limits_{|z+i\pi|=4} \dfrac{\cos z}{z^2}dz$; 4) $\int\limits_{|z-i|=5} z^2\cdot\sin\dfrac{1}{z+i}dz$.

Операционное исчисление

1. Найдите изображение данного оригинала.

1) $f(t)=\cos^3 t$; 2) $f(t)=\mathrm{sh}^2 t$; 3) $f(t)=e^{2t}\cdot\cos^2 t$;

4) $f(t)=e^{-t}\cdot\cos t\cdot\cos 5t$; 5) $f(t)=t\cdot\mathrm{sh}3t$; 6) $f(t)=t^2\cdot\cos 2t$;

7) $f(t)=\int\limits_0^t \tau^2 e^{-2\tau}d\tau$; 8) $f(t)=\dfrac{e^{3t}-e^{-3t}}{t}$; 9) $f(t)=\dfrac{\sin^2 t}{t}$;

10) $f(t)=\int\limits_0^t \dfrac{e^{3\tau}-e^{-3\tau}}{\tau}d\tau$.

2. Решите операционным методом задачу Коши.

1) $y''+4y=t^2,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$;

2) $y''+y'=t\cdot e^{-t},\ y(0)=y'(0)=0$;

3) $y''+y'+y=7e^{2t},\ y(0)=1,\ y'(0)=4$.

Ответы

Комплексные числа и действия над ними

1.

1) а) $3+2i$; б) $-2-i$; 2) а) $1+2i$; б) $-i$; 3) а) $5-5i$; б) $3-i$;

4) а) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$; б) $\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$; 5) а) $4-4i$; б) $-6+2i$.

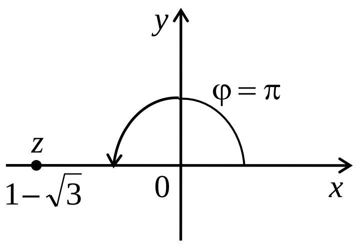
2. 1)

а) $z=\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)$; б) $z=2\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$;

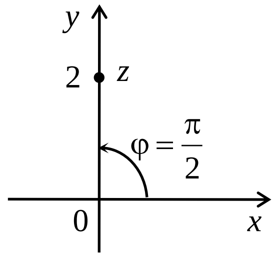
в) $z=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$; г) $z=\sqrt{3}\cdot\left(\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$.

2) а) $z=\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot e^{i\pi}$; б) $z=2e^{i\frac{\pi}{2}}$; в) $z=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$; г) $z=\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

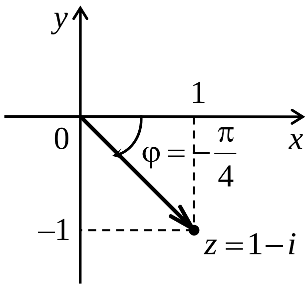
3) а)



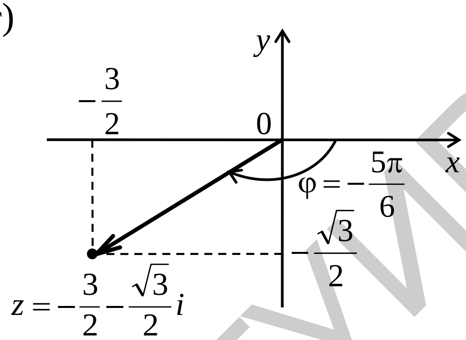
б)



в)



г)



3. 1) $z=i$; 2) $z=-64$; 3) $z=16\sqrt{3}-16i$; 4) $z=-\dfrac{1}{2}i$.

4. 1)

а) $z_0=3i,\ z_1=-3i$;

б) $z_0=\dfrac{\sqrt{2}}{4}+i\dfrac{\sqrt{2}}{4},\ z_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}-i\dfrac{\sqrt{2}}{4}$;

в) $z_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ z_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$;

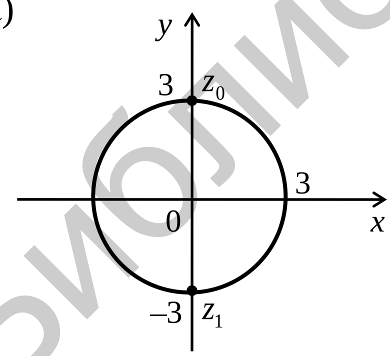
г) $z_0=4,\ z_1=-2+2\sqrt{3}i,\ z_2=-2-2\sqrt{3}i$;

д) $z_0=\dfrac{\sqrt{3}}{6}-i\dfrac{1}{6},\ z_1=\dfrac{1}{3}i,\ z_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}-i\dfrac{1}{6}$;

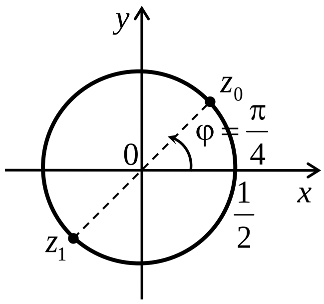
е) $z_0=\sqrt[6]{2}e^{-i\frac{\pi}{4}},\ z_1=\sqrt[6]{2}e^{i\frac{5\pi}{12}},\ z_2=\sqrt[6]{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}$;

ж) $z_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2},\ z_1=-\sqrt{2}+i\sqrt{2},\ z_2=-\sqrt{2}-i\sqrt{2},\ z_3=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

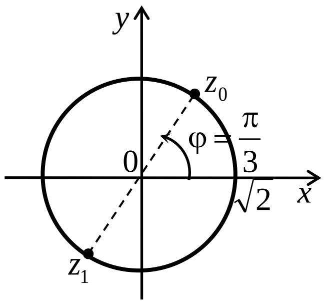
2) а)



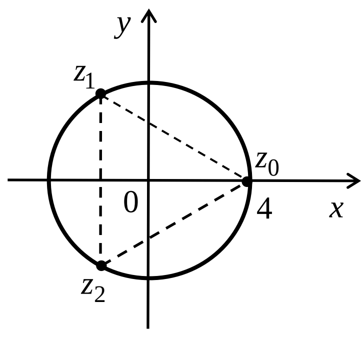
б)



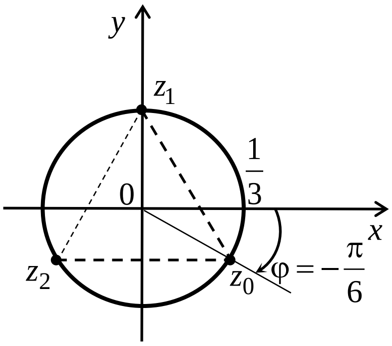
в)



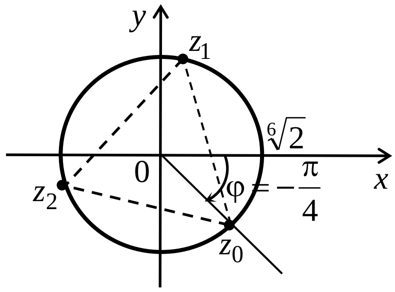
г)



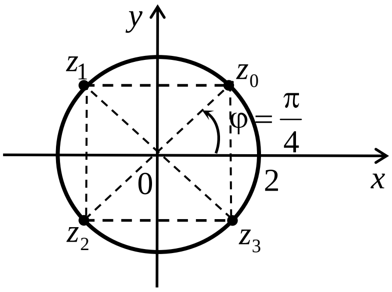
д)



е)



ж)



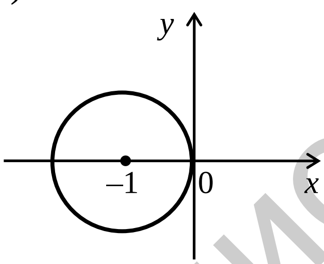
5. 1) $2\sqrt{3}+3+i\left(6-\sqrt{3}\right)$; 2) $-24i$; 3) $-\sqrt{3}+i$;

4) $24^{10}\cdot\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 5) $2\sqrt[3]{3}i,\ 2\sqrt[3]{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right),\ 2\sqrt[3]{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$.

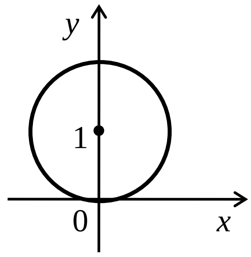
6. 1) $z_1=1-i,\ z_2=-1+i$; 2) $|z|=2\sqrt{2}$.

7. 1)

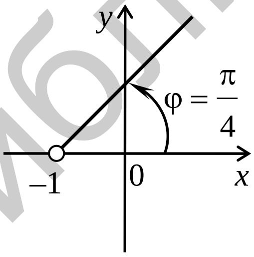
а)



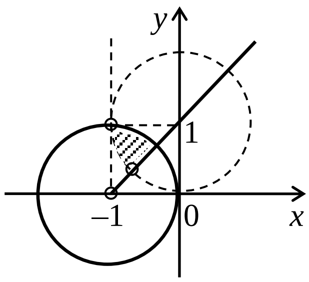
б)



в)



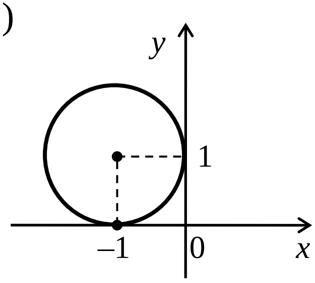
г)



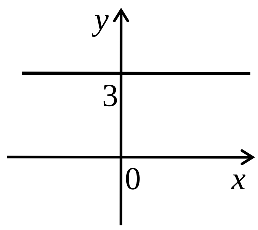
2) Принадлежит.

8. 1)

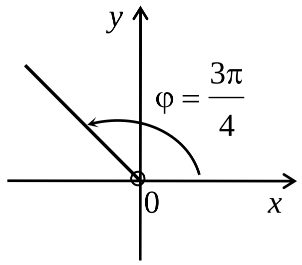
а)



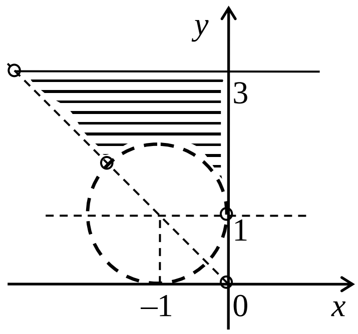
б)



в)



г)



2) Не принадлежит.

Функции комплексной переменной

1.

1) $-e^{-2}$; 2) $\frac{1}{2}\mathrm{ch}3+i\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{sh}3$; 3) $-i$; 4) -1; 5) $\mathrm{th}1$;

6) $\ln 2+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}$; 7) $\frac{1}{2}\ln 2+i\left(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}$;

8) $e^{-\frac{3\pi}{2}-6k\pi},\ k\in\mathbb{Z}$; 9) $e^{2k\pi},\ k\in\mathbb{Z}$; 10) $\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

2.

1) а) $\{i2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$; б) $\left\{0;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; в) $\{2;\ 1+2k,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

2) а) $\pm i2\pi$ – корни кратностью 2; $z_k=i2k\pi,\ k\neq 1,\ k\neq -1$ – простые корни;

б) $z=0$ – простой корень; $z=-\frac{3\pi}{2}$ – корень кратностью 3; $z_k=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\neq -2$ – корни кратностью 2;

в) $z=2$ – простой корень, $z=-1$ – корень кратностью 3; $z_k=1+2k,\ k\neq -1$ – корни кратностью 2.

3) а) $0;\ i2\pi;\ i4\pi$; б) $0;\ -\frac{3\pi}{2}$; в) $1;\ 2;\ 3$.

Дифференцирование функций комплексной переменной

1.

1) а) не является аналитической ни в одной точке комплексной плоскости;
б) является аналитической на всей комплексной плоскости.

2) а) $f'(0)=2$; б) $f'(z)=2\mathrm{sh}z$.

2.

1) гармоническая в области D.

2) а) $f(z)=z^3+3z^2-6z+5+4i$; б) $f(z)=-iz^2-2z-1+i$;

в) $f(z)=e^{1-iz}+3i$; г) $f(z)=-\frac{1}{z}+\frac{3}{5}+i\frac{3}{5}$.

Интегрирование функций комплексной переменной

1) $-\frac{4}{3}-3i$; 2) $\frac{2}{3}-\frac{2}{3}i$; 3) $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}i$; 4) $i(\pi-2)$;

5) $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}i$; 6) $-\frac{1}{2}+4i$; 7) $-\frac{1}{2}-\frac{3\pi}{4}i$; 8) $\mathrm{ch}1-\mathrm{sh}1-1-i$;

9) $-\pi\mathrm{ch}1$; 10) 0; 11) $-\frac{\pi}{2}$; 12) $2\pi\left(1-e^{-1}\right)i$.

Ряды в комплексной области

1.

1) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\cdot z^n}{n!},\ z\in\mathbb{C}$; 2) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 9^n\cdot z^{2n}}{(2n)!},\ z\in\mathbb{C}$;

3) $f(z)=2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!\cdot z^n}{2^{3n-1}\cdot n!},\ |z|<4$; 4) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+3}}{4^{n+1}},\ |z|<2$;

5) $f(z)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{\left(2^n+1\right)\cdot z^n}{2^n\cdot n},\ |z|<1$;

6) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\cdot\left(1+(-1)^n\cdot 2^{n+1}\right),\ |z|<\frac{1}{2}$; 7) $f(z)=e^{-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{n!},\ z\in\mathbb{C}$;

8) $f(z)=-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)\cdot\frac{(z-3)^n}{2^n\cdot n!},\ |z-3|<2$;

9) $f(z)=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(z+3)^{2n}}{3^n\cdot n},\ |z+3|<\sqrt{3}$;

10) $f(z)=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot 5\cdot 7\ldots(3n-4)}{3^n\cdot 2^{3n-1}\cdot n!}\cdot(z-8)^n,\ |z-8|<1$.

2.

1) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+2)^n\cdot n!},\ 0<|z+2|<+\infty$;

2) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n-1}\cdot n!},\ 0<|z|<+\infty$;

3) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^{2n-2}}{(2n)!},\ 0<|z|<+\infty$;

4) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z+i)^{2n+1}\cdot(2n+1)!},\ 0<|z+i|<+\infty$;

5) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(z+3)^{2n}\cdot(2n)!},\ 0<|z+3|<+\infty$;

6) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n-1}\cdot(2n+1)!},\ 0<|z|<+\infty$.

Нули и изолированные особые точки аналитических функций

1) $z=0,\ z=2$ – простые полюсы; 2) $z=\pm 2i$ – полюсы второго порядка;

3) $z=0$ – простой полюс, $z=\pm i\pi$ – устранимые особые точки;

4) $z=\pm 1$ – простые полюсы, $z=0$ – существенно особая точка;

5) $z=3$ – простой полюс, $z=-2$ – полюс второго порядка;

6) $z=-1,\ z=\frac{\pi}{2}$ – простые полюсы; 7) $z=0$ – существенно особая точка;

8) $z=2$ – существенно особая точка; 9) $z=0$ – существенно особая точка;

10) $z=-i$ – существенно особая точка.

Вычеты и их приложения

1. 1) 0; 2) $-i\pi$; 3) $3\pi i$; 4) $2\pi i$.

2. 1) $\frac{\pi}{16}$; 2) 0.

3. 1) 0; 2) $\frac{4i}{\pi}$.

4. 1) $-\pi e i$; 2) $2\pi \operatorname{sh}1 i$; 3) 0.

5. 1) $-\frac{14\pi}{25}i$; 2) $\frac{14\pi}{25}i$; 3) 0.

6. 1) $-\frac{8\pi}{\pi+2}i$; 2) $-\frac{8\pi\sin 2}{(\pi+2)^2}i$.

7. 1) $\frac{\pi}{12}i$; 2) $-4\pi i$; 3) 0; 4) $-\frac{7\pi}{3}i$.

Операционное исчисление

1.

1) $\frac{p(p^2+7)}{(p^2+1)(p^2+9)}$; 2) $\frac{2}{p(p^2-4)}$; 3) $\frac{p^2-4p+6}{(p-2)(p^2-4p+8)}$;

4) $\frac{p(p^2+26)}{(p^2+36)(p^2+16)}$; 5) $\frac{6p}{(p^2-9)^2}$; 6) $\frac{-2p^3+24p}{(p^2+4)^3}$;

7) $\frac{2}{p(p+2)^3}$; 8) $\ln\frac{p+3}{p-3}$; 9) $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{p^2+4}}{p}$; 10) $\frac{1}{p}\ln\frac{p+3}{p-3}$.

2. 1) $\frac{1}{8}t^2-\frac{1}{16}+\frac{13}{16}\cos 2t$; 2) $1-e^{-t}-te^{-t}-\frac{1}{2}t^2e^{-t}$; 3) $e^{2t}+\frac{4}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$.

4.5. ТЕСТОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
по теме
«Элементы теории функций комплексной переменной.
Операционное исчисление»

I вариант

1. Дана функция $f(z) = z\operatorname{Re} z + z^2$.

1) Выясните, в каких точках она является дифференцируемой.

2) Найдите $f'(z)$ в этих точках.

3) Вычислите $\int_l f(z)dz$, l – отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 - i$.

№ п/п	1	2	3	4
а	i	0	$1-i$	1
б	$\frac{1}{2}$	$-i$	0	$1+2i$
в	$\frac{2}{3} - i\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3} + i\frac{1}{3}$	$1 + i\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3} - i\frac{4}{3}$

2. Функция $f(z)$ в окрестности $(0 < \|z+i\| < R)$ своей изолированной особой точки $z_0 = -i$ разложена в ряд Лорана $f(z) = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{4^n \cdot (n+3)!}$.

а) Определите тип особой точки $z_0 = -i$.

б) Найдите вычет функции $f(z)$ в этой точке.

в) Вычислите интеграл $\oint_{|z+i|=\frac{1}{3}} f(z)dz$.

№ п/п	1	2	3	4
а	полюс второго порядка	простой полюс	существенно особая точка	устранимая особая точка
б	4	-4	2	0
в	0	$2\pi i$	$-2\pi i$	$4\pi i$

3. Вычислите $\oint_{|z-i|=\frac{5}{4}} \frac{dz}{4z^4 + z^2}$.

1) -2;	2) -2π;	3) 2π;	4) π.

4. Решите операционным методом задачу Коши $y'' + y = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

1) $1 - \cos t + \sin t$;	2) $1 - e^t + \cos t$;	3) $e^{-t} + \sin t$;	4) $1 - \cos t - \sin t$.

II вариант

1. Дана функция $f(z) = \cos(3iz) + 2z$ и две точки $z_0 = -1$, $z_1 = 2i$.

а) Выясните, в каких точках она является аналитической.
б) Найдите $f'(z)$ в этих точках.

в) Вычислите $\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)dz$.

№ п/п	1	2	3	4
а	является аналитической на всей комплексной плоскости	является аналитической в точках $z_n = -\frac{n\pi}{3}i,\ n\in\mathbb{Z}$	не является аналитической ни в одной точке комплексной плоскости	является аналитической в точке $z=0$
б	не существует	$-3\operatorname{sh}3+2$	$3\cos 3+2$	$3\operatorname{sh}3+2$
в	$\frac{1}{3}\operatorname{ch}3-5+i\frac{\cos 6}{6}$	$\frac{1}{3}\operatorname{sh}3+3+i\frac{\sin 6}{3}$	$-\frac{1}{3}\operatorname{sh}3-3-i\frac{\sin 6}{6}$	$\frac{1}{3}\operatorname{sh}3-5+i\frac{\sin 6}{6}$

2. Дана функция $f(z)=\dfrac{\cos(a(z-i))}{(z-i)^5}$, $a\in\mathbb{C}$.

а) Найдите ее изолированную особую точку z_0.
б) Определите тип этой особой точки.

в) При каких значениях a вычет функции $f(z)$ в точке z_0 равен $-\frac{2}{3}$.

г) Вычислите интеграл $\oint\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} f(z)dz$.

№ п/п	1	2	3	4
а	$z_0=0$	не существует	$z_0=-i$	$z_0=i$
б	полюс пятого порядка	устранимая особая точка	существенно особая точка	простой полюс
в	$\sqrt{2}+i\sqrt{2}$	± 2	$\pm 1\pm i$	$\pm\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}$
г	$\frac{4\pi}{3}i$	$-\frac{4\pi}{3}i$	$\frac{2\pi}{3}i$	0

3. Вычислите $\oint\limits_{|z+3i|=4} \dfrac{dz}{z^4-16}$.

1) $\frac{\pi}{16}+i\frac{\pi}{8}$; 2) $\frac{\pi}{16}$; 3) 0; 4) $-\frac{\pi}{16}-i\frac{\pi}{8}$.

4. Решите операционным методом задачу Коши $y''-y-6y=t$, $y(0)=y'(0)=0$.

1) $-\frac{1}{6}t+\frac{1}{45}e^{-3t}+\frac{1}{20}e^{2t}$; 2) $-\frac{1}{6}t-\frac{1}{36}-\frac{1}{45}e^{3t}$;

3) $-\frac{1}{6}t+\frac{1}{36}+\frac{1}{45}e^{3t}-\frac{1}{20}e^{-2t}$; 4) $\frac{1}{9}t-\frac{1}{20}e^{3t}+\frac{1}{20}e^{-2t}$.

III вариант

1. Дана функция $f(z)=\left(\bar{z}+1\right)^2+2z$.

а) Выясните, в каких точках она является дифференцируемой.

б) Найдите $f'(z)$ в этих точках.

в) Вычислите $\int\limits_l f(z)dz$, l – отрезок прямой от точки $z_1=0$ до точки $z_2=-1-i$.

№ п/п	1	2	3	4
а	1	$1+i$	-1	0
б	0	2	-2	1
в	$\frac{1}{3}+i\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}-i\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}-i\frac{1}{3}$	$2+2i$

2. Функция $f(z)$ в окрестности $\left(0<\lvert z+2i\rvert<R\right)$ своей изолированной особой точки $z_0=-2i$ разложена в ряд Лорана $f(z)=\sum\limits_{n=-4}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{a^{2n}\cdot(3n+8)!}$, $a\in\mathbb{C}$.

а) Определите тип особой точки z_0.

б) При каких значениях a вычет функции $f(z)$ в точке z_0 равен $-\frac{1}{30}$.

в) Вычислите интеграл $\oint\limits_{\lvert z+2i\rvert=\frac{1}{4}} f(z)dz$.

№ п/п	1	2	3	4
а	полюс второго порядка	полюс четвертого порядка	устранимая особая точка	существенно особая точка
б	$\pm 2i$	± 2	$2i$	$\pm i$
в	$\frac{2}{3}\pi i$	$\frac{\pi}{15}i$	$-\frac{\pi}{15}i$	0

3. Вычислите $\oint\limits_{\lvert z-2i\rvert=3}\frac{dz}{z^5-8z^2}$.

1) $\frac{\pi}{48}\left(\sqrt{3}-i\right)$;	2) $\frac{\pi}{48}$;	3) $\pi\left(\sqrt{3}-i\right)$;	4) $\frac{\pi}{48}\left(\sqrt{3}+i\right)$.

4. Решите операционным методом задачу Коши $y''+y=\operatorname{sh}t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

1) $\frac{1}{2}\operatorname{ch}t+\frac{1}{2}\cos t$;	2) $-\frac{1}{2}\operatorname{sh}t+\frac{1}{2}\cos t$;	3) $\frac{1}{2}\operatorname{sh}t+\frac{1}{2}\sin t$;	4) $\frac{1}{2}\operatorname{sh}t-\frac{1}{2}\sin t$.

IV вариант

1. Дана функция $f(z)=\operatorname{sh}(2\pi z)-3z^3+1$ и две точки $z_0=i$, $z_1=-i$.

а) Выясните, в каких точках она является аналитической.

б) Найдите $f'(z)$ в этих точках.

в) Вычислите $\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)dz$.

№ п/п	1	2	3	4
а	является аналитической в области $\lvert z\rvert<1$	является аналитической в точках $z=\pm i$	не является аналитической ни в одной точке комплексной плоскости	является аналитической на всей комплексной плоскости
б	$9+2\pi$	$-9+2\pi$	9	не существует
в	$\frac{1}{\pi}+\frac{3}{2}+2i$	$\frac{1}{\pi}-\frac{3}{2}-2i$	$\frac{1}{\pi}-2i$	$-2i$

2. Дана функция $f(z)=(z+i)\cdot e^{\frac{a}{z+i}}$, $a\in\mathbb{C}$.

а) Найдите ее изолированную особую точку z_0.

б) Определите тип этой особой точки.

в) При каких значениях a вычет функции $f(z)$ в точке z_0 равен $\frac{27}{8}$.

г) Вычислите интеграл $\oint\limits_{\lvert z+i\rvert=0,1} f(z)dz$.

№ п/п	1	2	3	4
а	$z_0=-i$	$z_0=i$	не существует	$z_0=2i$
б	простой полюс	устранимая особая точка	существенно особая точка	полюс второго порядка
в	3	$\pm 3;\ \pm 3i$	± 3	$3;\ 3i$
г	$\frac{\pi}{8}i$	0	$\frac{27\pi}{4}i$	$-\frac{27\pi}{4}i$

3. Вычислите $\oint\limits_{\lvert z-3i\rvert=\frac{7}{2}} \frac{dz}{z^4+3z^2-4}$.

1) $\frac{\pi}{10}$;	2) $-\frac{\pi}{10}-\frac{2\pi}{5}i$;	3) $-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}i$;	4) $-\frac{\pi}{10}$.

4. Решите операционным методом задачу Коши $y''-y'=1$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

1) $e^{-t}+t$;	2) $\operatorname{sh}t+t$;	3) $e^{t}-t$;	4) $e^{-t}+1$.

V вариант

1. Дана функция $f(z)=3z\cdot\bar{z}+z^2+2\bar{z}$.

а) Выясните, в каких точках она является дифференцируемой.

б) Найдите $f'(z)$ в этих точках.

в) Вычислите $\int\limits_l f(z)dz$, l – отрезок прямой от точки $z_1=-1+i$ до точки $z_2=0$.

№ п/п	1	2	3	4
а	$-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}i$	0
б	$-\frac{10}{3}+\frac{1}{3}i$	$\frac{10}{3}$	2	$-\frac{10}{3}$
в	$\frac{5}{2}+\frac{8}{3}i$	$\frac{2}{3}-\frac{8}{3}i$	$-\frac{2}{3}-\frac{8}{3}i$	$\frac{5}{3}-\frac{5}{3}i$

2. Дана функция $f(z)=\dfrac{\sin\left(a\left(z+\frac{i}{2}\right)\right)}{\left(z+\frac{i}{2}\right)^4}$, $a\in\mathbb{C}$.

а) Найдите ее изолированную особую точку z_0.

б) Определите тип этой особой точки.

в) При каких значениях a вычет функции $f(z)$ в точке z_0 равен $\frac{1}{48}$.

г) Вычислите интеграл $\oint\limits_{\left|z+\frac{i}{2}\right|=0,3} f(z)dz$.

№ п/п	1	2	3	4
а	$-\frac{i}{2}$	$\frac{i}{2}$	i	$-i$
б	устранимая особая точка	полюс четвертого порядка	существенно особая точка	полюс третьего порядка
в	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{3}}{4}i$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$; $1\pm\sqrt{3}i$
г	$-\frac{\pi}{24}i$	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}i$	$\frac{\pi}{24}i$

3. Вычислите $\oint\limits_{|z+i|=\frac{3}{2}} \dfrac{dz}{z\cdot\left(z^2+1\right)^2}$.

1) $2\pi i$;	2) $-3\pi i$;	3) $3\pi i$;	4) πi.

4. Решите операционным методом задачу Коши $y'' - 2y' + y = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

1) $1 - e^t + te^t$;	2) $1 + e^{-t} + te^{-t}$;	3) $1 + e^t - te^t$;	4) $1 - e^t$.

VI вариант

1. Дана функция $f(z) = e^{1-2\pi z}$ и две точки $z_0 = -i$, $z_1 = i$.

а) Выясните, в каких точках она является аналитической.

б) Найдите $f'(z)$ в этих точках.

в) Вычислите $\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)dz$.

№ п/п	1	2	3	4
а	является аналитической в точках $z = \pm i$	является аналитической в области $\lvert z\rvert < 1$	не является аналитической ни в одной точке комплексной плоскости	является аналитической на всей комплексной плоскости
б	$2\pi e$	$-2\pi e$	$\pi e i$	0
в	0	$-\dfrac{e}{\pi}i$	$\dfrac{e}{\pi}$	$\dfrac{e}{\pi}i$

2. Функция $f(z)$ в окрестности $\left(0 < \left|z - \dfrac{i}{3}\right| < R\right)$ своей изолированной особой точки $z_0 = \dfrac{i}{3}$ разложена в ряд Лорана $f(z) = \sum\limits_{n=-6}^{\infty} \dfrac{\left(z - \frac{i}{3}\right)^n}{2^n \cdot (2n+5)!}$.

а) Определите тип особой точки $z_0 = \dfrac{i}{3}$.

б) Найдите вычет функции $f(z)$ в этой точке.

в) Вычислите интеграл $\oint\limits_{\left|z-\frac{i}{3}\right|=\frac{1}{2}} f(z)dz$.

№ п/п	1	2	3	4
а	полюс шестого порядка	существенно особая точка	полюс 3-его порядка	устранимая особая точка
б	$-\dfrac{1}{12}$	$-\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{12}$
в	$-\dfrac{\pi}{6}i$	$\dfrac{\pi}{6}i$	$-\dfrac{2\pi}{3}i$	$\dfrac{2\pi}{3}i$

3. Вычислите $\oint\limits_{|z+1|=\frac{3}{2}} \dfrac{dz}{z^2\cdot\left(z^3+1\right)}$.

1) $2\pi i$;	2) $\dfrac{\pi}{3}i$;	3) $\dfrac{2\pi}{3}i$;	4) $-\dfrac{2\pi}{3}i$.

4. Решите операционным методом задачу Коши $y''+y'-2y=t$, $y(0)=0,\ y'(0)=-1$.

1) $-\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{4}e^{-2t}$;	2) $-\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}e^{-2t}$;	3) $\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{4}e^{-2t}$;	4) $-\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}e^{-2t}-\dfrac{1}{2}e^{t}$.

VII вариант

1. Дана функция $f(z)=\bar{z}\cdot\operatorname{Im}z+z^2$.

а) Выясните, в каких точках она является дифференцируемой.

б) Найдите $f'(z)$ в этих точках.

в) Вычислите $\int\limits_{l} f(z)dz$, l – отрезок прямой от точки $z_1=0$ до точки $z_2=-1+2i$.

№ п/п	1	2	3	4
а	$1+i$	$1-i$	0	$2i$
б	$-2i$	0	1	-1
в	$\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}i$	$\dfrac{21}{3}+\dfrac{2}{3}i$	$-\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}i$	$\dfrac{21}{3}-\dfrac{2}{3}i$

2. Дана функция $f(z)=(z-2i)^4\cdot\operatorname{sh}\dfrac{i}{z-2i}$.

а) Найдите ее изолированную особую точку z_0.

б) Определите тип этой особой точки.

в) Найдите вычет функции $f(z)$ в точке z_0.

г) Вычислите интеграл $\oint\limits_{|z-2i|=\frac{1}{4}} f(z)dz$.

№ п/п	1	2	3	4
а	$2i$	$-2i$	-2	2
б	полюс пятого порядка	простой полюс	существенно особая точка	устранимая особая точка
в	$-\dfrac{1}{60}$	$\dfrac{i}{120}$	$-\dfrac{i}{120}$	$\dfrac{1}{120}$
г	$-\dfrac{\pi i}{30}$	$\dfrac{\pi}{60}$	$-\dfrac{\pi}{60}$	$\dfrac{\pi i}{60}$

3. Вычислите $\oint\limits_{\left|z+\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{2}} \dfrac{dz}{z\cdot\left(9z^2-1\right)}$.

1) $-3\pi i$;	2) πi;	3) $\dfrac{3\pi}{2}i$;	4) $-\pi i$.

4. Решите операционным методом задачу Коши $y''+4y=\operatorname{ch}t$, $y(0)=0,\ y'(0)=0$.

1) $\frac{1}{5}\operatorname{ch}t+\frac{1}{5}\operatorname{sh}2t$;	2) $\frac{1}{5}\operatorname{ch}t-\frac{1}{5}\cos 2t$;	3) $\frac{1}{5}\operatorname{ch}2t+\frac{1}{5}\cos t$;	4) $\frac{1}{5}\operatorname{sh}t-\frac{1}{5}\sin 2t$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Араманович, И. Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И. Г. Араманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1968. – 416 с.

2. Бугров, Я. С. Высшая математика: учеб. пособие для вузов. В 3 т. Т. 3 : Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1981. – 448 с.

3. Волковыский, Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного : учеб. пособие / Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 312 с.

4. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости : учеб. пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1981. – 304 с.

5. Лаврентьев, М. Я. Методы теории функций комплексного переменного / М. Я. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – СПб. : Лань, 2002. – 749 с.

6. Маркушевич, А. И. Теория аналитических функций. В 2 т. Т. 1 : Начала теории / А. И. Маркушевич. – СПб. : Лань, 2009. – 496 с.

7. Маркушевич, А. И. Теория аналитических функций. В 2 т. Т. 2 : Дальнейшее построение теории / А. И. Маркушевич. – СПб. : Лань, 2009. – 624 с.

8. Воднев, В. Т. Основные математические формулы : справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович; под ред. Ю. С. Богданова. – Минск : Выш. шк., 1988. – 269 с.

9. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2 / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-Пресс, 2006. – 256 с.

10. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики : учеб. пособие для втузов / Г. И. Кручкович [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1970. – 512 с.

11. Сборник задач по математике для втузов : учеб. пособие для втузов. В 2 ч. Ч. 2 : Специальные разделы математического анализа / В. А. Болгов [и др.] ; под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1966. – 368 с.

12. Сидоров, Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного : учеб. пособие для вузов / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. – М. : Наука, 1989. – 480 с.

13. Шахно, К. У. Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления / К. У. Шахно. – Минск : Выш. шк., 1975. – 400 с.

14. Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты) : учеб. пособие для вузов / В. Ф. Чудесенко. – М. : Высш. шк., 1999. – 126 с.

Св. план 2016, поз. 41

Учебное издание

Черняк Жанна Альбертовна
Малышева Ольга Николаевна
Мокеева Ольга Александровна и др.

КОМПЛЕКС ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

В двух частях

Часть 2

ПОСОБИЕ

Редактор *Е. И. Герман*
Компьютерная правка, оригинал-макет *В. М. Задоля*

Подписано в печать 12.04.2017. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс». Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 10,58. Уч.-изд. л. 11,0. Тираж 150 экз. Заказ 80.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014, №2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
ЛП №02330/264 от 14.04.2014.
220013, Минск, П. Бровки, 6