

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

А. П. Курулёв

**Теория электрических цепей.
Справочник**

В 3-х частях

Часть 1

Электрические цепи постоянного и переменного тока

*Рекомендовано УМО вузов Республики Беларусь
по образованию в области информатики и радиоэлектроники
в качестве учебно-методического пособия
для студентов учреждений, обеспечивающих получение
высшего образования по специальностям,
закрепленным за УМО*

Минск БГУИР 2012

УДК 621.3.011.7(035.5)(076)
ББК 31.211я2
К93

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра электротехники учреждения образования
«Военная академия Республики Беларусь», протокол №9 от 23 мая 2011 г.;

доцент кафедры автоматизации технологических процессов и электроники
учреждения образования «Белорусский государственный технологический
университет» кандидат технических наук, доцент И. Ф. Кузьмицкий

Курулёв, А. П.
К93 Теория электрических цепей. Справочник : учеб.-метод. пособие.
В 3-х ч. Ч.1: Электрические цепи постоянного и переменного тока /
А. П. Курулёв. – Минск : БГУИР, 2012. – 90 с.
ISBN 978-985-488-821-7 (ч. 1).

Учебно-методическое пособие охватывает следующие темы: электрические
цепи постоянного и синусоидального токов, трехфазные и избирательные цепи.
Предназначено для студентов специальностей вузов, закрепленных за УМО
по образованию в области информатики и радиоэлектроники.

УДК 621.3.011.7(035.5)(076)
ББК 31.211я2

ISBN 978-985-488-821-7(ч.1)
ISBN 978-985-488-820-0

© Курулёв А.П., 2012
© УО «Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники», 2012

Предисловие

Учебно-методическое пособие представляет собой краткую, без математических выводов и теоретических обоснований систематизированную презентацию основных положений и закономерностей электрорадиотехнических цепей.

Содержание первой части пособия охватывает круг вопросов, предусмотренных типовой программой по курсу «Теория электрических цепей» для электротехнических специальностей вузов: электрические цепи постоянного и синусоидального токов, трёхфазные и избирательные цепи.

Подробно рассмотрены свойства последовательного, параллельного и индуктивно связанных контуров.

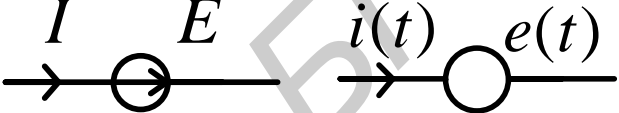
При написании пособия автор руководствовался опытом, накопленным им во время многолетнего преподавания курсов «Теория электрорадиоцепей», «Электротехника», «Теория электрических цепей» в Военной академии Республики Беларусь и в БГУИР.

Автор благодарен заведующему кафедрой электротехники Военной академии Республики Беларусь кандидату технических наук, доценту А. Н. Малашину, доценту кафедры автоматизации технологических процессов и электроники Белорусского государственного технологического университета И. Ф. Кузьмицкому, а также доценту кафедры теоретических основ электротехники БГУИР кандидату технических наук, доценту Д. П. Кукину и старшему преподавателю Н. А. Иваницкой за тщательное рецензирование рукописи. Пожелания и замечания просьба направлять по адресу: 220013, г. Минск, ул. П. Бровки 6, БГУИР.

1. Линейные электрические цепи постоянного тока

1.1. Основные понятия и определения теории электрических цепей

Электрическая цепь – совокупность элементов и устройств, образующих путь для электрического тока, электрические процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий об электродвижущей силе (ЭДС), токе и напряжении.

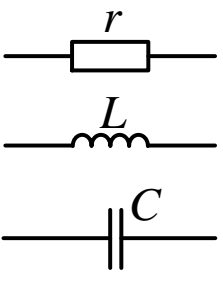
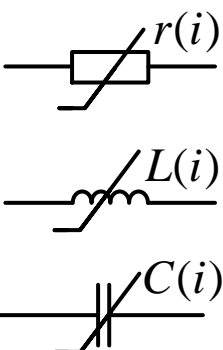
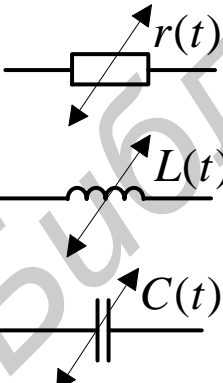
Электрический ток	$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$ $q \text{ Кл}, t \text{ с}, i \text{ А, мА, мкА}$ $A \times 10^{-3} \quad A \times 10^{-6}$
ЭДС источника электрической энергии	 $E \text{ В, мВ, кВ, МВ}$ $B \times 10^{-3} \quad B \times 10^3 \quad B \times 10^6$
Электрическое напряжение	$u(t) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{dW}{dq}$ $W \text{ Дж}, q \text{ Кл}$ $u \text{ В, мВ, кВ, МВ}$ $B \times 10^{-3} \quad B \times 10^3 \quad B \times 10^6$
Электрическое напряжение как разность потенциалов	$u = \varphi_1 - \varphi_2$ $\varphi = \frac{A}{q} \quad A \text{ Дж}, q \text{ Кл}$ $\varphi \text{ В, мВ, кВ, МВ}$ $B \times 10^{-3} \quad B \times 10^3 \quad B \times 10^6$

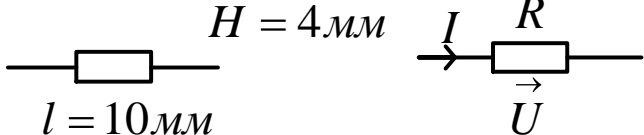

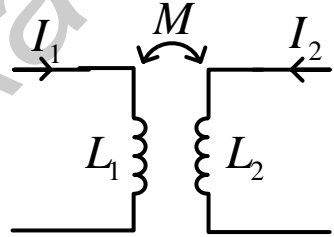
Элемент электрической цепи – отдельное устройство, входящее в состав электрической цепи и выполняющее в ней определённую функцию. К числу основных элементов электрической цепи относят резистор, катушку индуктивности и конденсатор. Каждый из этих элементов предназначен для использования, соответственно, его электрического сопротивления, индуктивности и ёмкости.

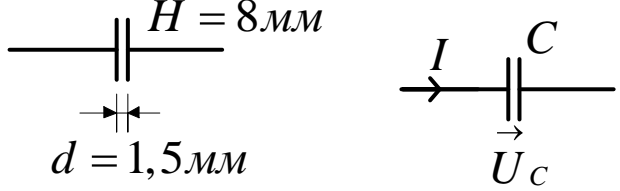
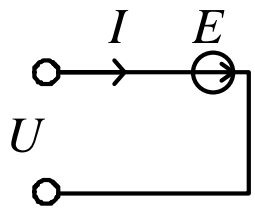
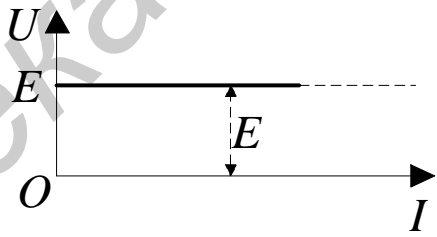
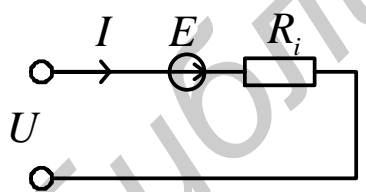
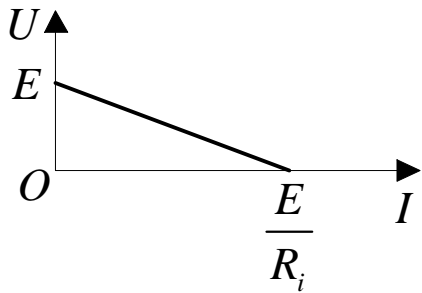
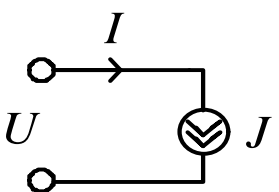
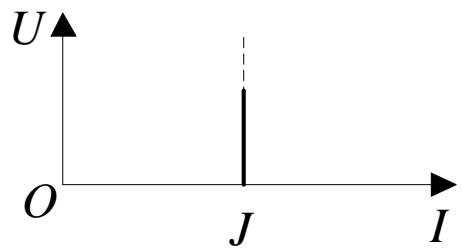
Различают пассивные и активные элементы электрической цепи.

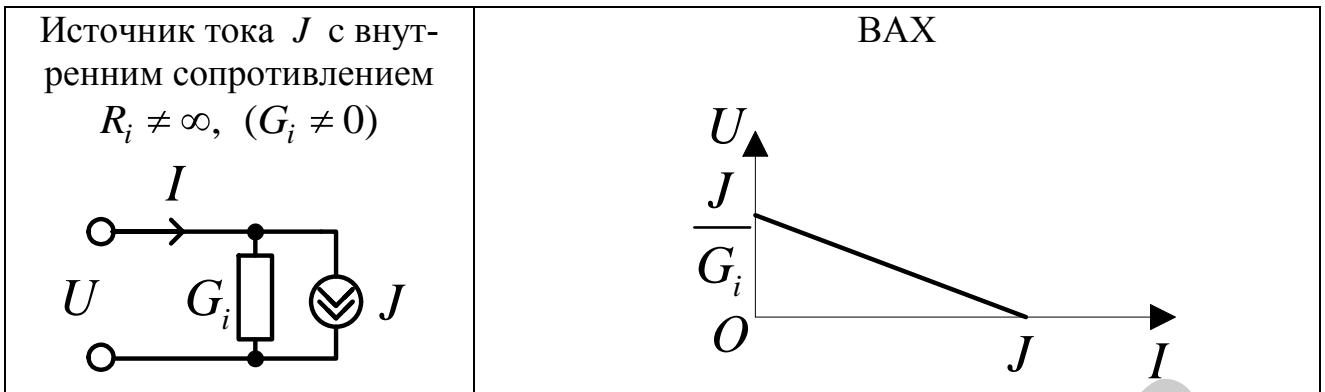
Пассивные элементы – это элементы электрической цепи, в которых рассеивается или накапливается электрическая энергия.

Активные элементы – это источники энергии.

Пассивные элементы электрической цепи	
<p>Линейные</p> 	<p>Параметры (r, L и C) не зависят от приложенного к ним напряжения и проходящего через них тока</p>
<p>Нелинейные</p> 	<p>Параметры (r, L и C) зависят от значения или направления действующего напряжения и силы проходящего тока</p>
<p>Элементы с постоянными параметрами</p>	<p>Параметры (r, L и C) не зависят от времени</p>
<p>Элементы с переменными параметрами</p> 	<p>Параметры (r, L и C) изменяются во времени по определённому закону</p>

<p>Резистор с сопротивлением R</p>	 <p>$R = \frac{U}{I} = \frac{B}{A}$</p> <p>$R$ Ом, кОм, МОм Ом $\times 10^3$, Ом $\times 10^6$</p>
<p>Проводимость</p>	<p>$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U} = \frac{A}{B}$ или $\left[\frac{1}{\text{Ом}} \right] \rightarrow \text{См} - \text{сименс}$</p>
<p>Катушка индуктивности с индуктивностью L</p>	 <p>r от 1,5 до 4мм</p> <p>$U_L = L \frac{dI}{dt}$ $L \left[\frac{B \cdot c}{A} \right]$ или Ом \cdot с</p> <p>[Гн(Г), мГн(мГ), мкГн(мкГ)] Гн $\times 10^{-3}$ Гн $\times 10^{-6}$</p>
<p>Взаимная индуктивность</p>	 <p>$M = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$ или $M = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$</p> <p>$M$ [Гн(Г), мГн(мГ), мкГн] Гн $\times 10^{-3}$ Гн $\times 10^{-6}$</p>
<p>Потокоцепление</p>	<p>$\Psi = w \Phi$</p> <p>Φ Вб – магнитный поток катушки</p> <p>w – число витков катушки</p> <p>$\Phi = Bs$</p> <p>B Тл – магнитная индукция</p> <p>s [м²] – сечение провода катушки</p> <p>$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{w \Phi}{I} = \frac{wBs}{I}$</p>

<p>Конденсатор с ёмкостью C</p>	 <p> $H = 8\text{мм}$ $d = 1,5\text{мм}$ </p> <p> $U_c = \frac{1}{C} \int Idt$ </p> <p> $I = C \frac{dU_c}{dt} \rightarrow C \left[\frac{A \cdot c}{B} \right]$ или $C\text{м} \cdot c$ </p> <p> $C \Phi, \text{мк}\Phi, \text{н}\Phi, \text{п}\Phi$ $\Phi \times 10^{-6}, \Phi \times 10^{-9}, \Phi \times 10^{-12}$ </p> <p> $C = \frac{q}{U_c} = \frac{K\epsilon}{B} \Phi$ </p>
<p>Независимые (автономные) активные элементы электрической цепи</p>	
<p>Идеальный источник ЭДС E с внутренним сопротивлением $R_i = 0$</p> 	<p>При коротком замыкании идеального источника ЭДС</p> <p>$I \rightarrow \text{max}$</p> <p>ВАХ (вольт-амперная характеристика) идеального источника ЭДС</p> 
<p>Источник ЭДС с внутренним сопротивлением $R_i \neq 0$</p> 	<p>ВАХ</p> 
<p>Идеальный источник тока J с внутренним сопротивлением $R_i \rightarrow \infty, (G_i \rightarrow 0)$</p> 	<p>При холостом ходе $U \rightarrow \text{max}$</p> <p>ВАХ</p> 



У зависимых (неавтономных) источников электрической энергии напряжение (сила тока) зависит от значений напряжения или силы тока, действующего на входе или выходе источника электрической энергии.

В зависимости от соотношения геометрических размеров l реальной электрической цепи и длины волны λ , воздействующих на цепь, различают:

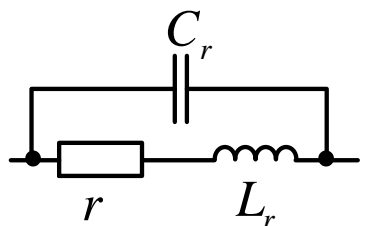
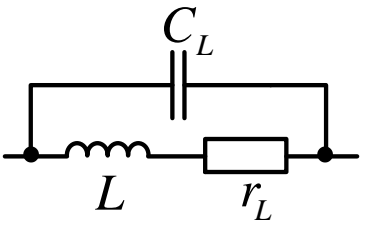
- цепи с сосредоточенными параметрами ($l \ll \lambda$),
- цепи с распределёнными параметрами ($l \gg \lambda$).

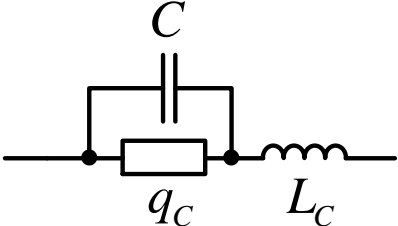
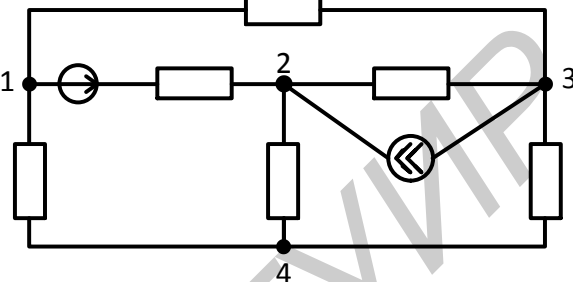
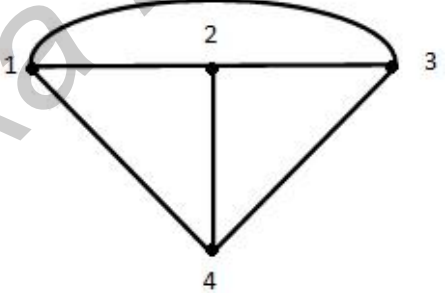
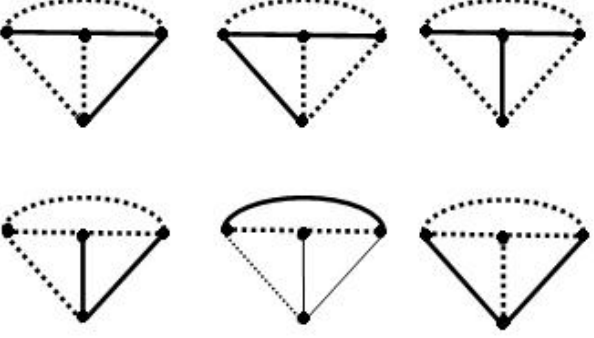

В электрической цепи с сосредоточенными параметрами r, L и C сосредоточены на отдельных её участках.

В электрической цепи с распределёнными параметрами r, L и C распределены вдоль цепи (длинные линии).

Схема электрической цепи – графическое изображение электрической цепи, содержащее условные обозначения её элементов и показывающее их соединение. В схему включают идеализированные элементы, которые являются математической моделью, описывающей физические явления в реальном элементе.

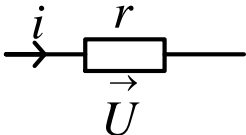
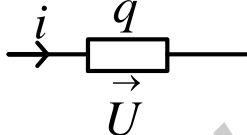
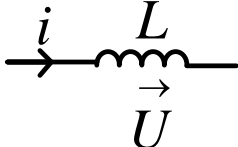
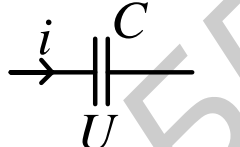

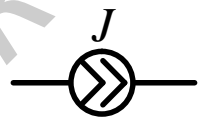
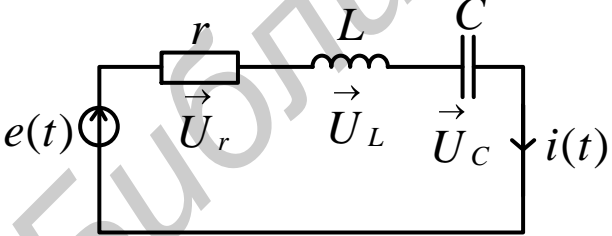
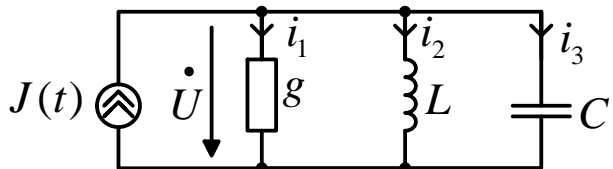
Идеализированная модель резистора – сопротивление r , конденсатора – ёмкость C , катушки индуктивности – индуктивность L .

<p>Эквивалентная схема резистора</p>	
<p>Эквивалентная схема катушки индуктивности</p>	

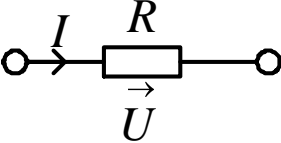
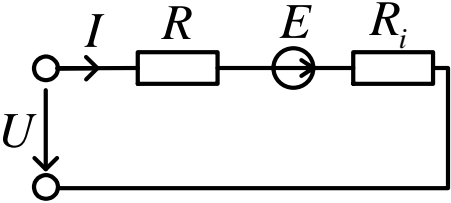
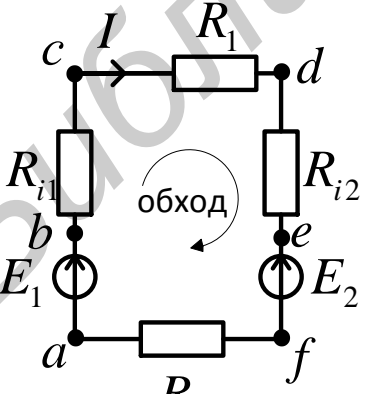
<p>Эквивалентная схема конденсатора</p>	
<p>Элементы топологии (геометрии) электрической цепи</p>	
<p>Ветвь – участок электрической цепи, состоящий из одного или нескольких последовательно соединённых элементов, через которые проходит один и тот же ток</p>	 <p>12, 23, 14, 24, 34, 13 – ветви 1, 2, 3, 4 – узлы 123, 124, 234 – контуры</p>
<p>Узел – место соединения трёх и более ветвей</p>	
<p>Контур – любой замкнутый путь, образованный несколькими ветвями и узлами</p>	
<p>Граф – изображение схемы электрической цепи, в которой ветви схемы представлены отрезками-ветвями графа, а узлы – точками-узлами графа</p>	
<p>Дерево графа – любая совокупность ветвей графа, соединяющих все его узлы без образования контуров</p>	
<p>Связь (хорда) графа – это ветвь графа, не принадлежащая его дереву</p>	<p>Сплошные линии – деревья графа, пунктирные – хорды графа</p>
<p>Направленный граф – граф с указанием условно-положительных направлений токов или направлений в виде отрезков со стрелками</p>	

Элементы топологии (геометрии) электрической цепи
 Дуальные элементы и схемы

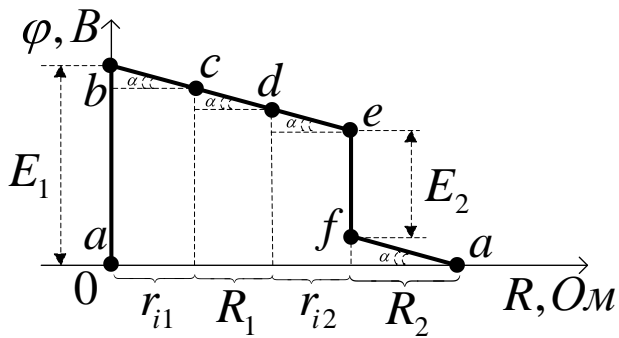
Условие дуальности – закон изменения напряжения на элементе цепи по форме аналогичен закону изменения тока в другом (дуальном) элементе цепи.

Дуальные элементы	
 <p>$U = r \cdot i$</p>	 <p>$i = q \cdot U$</p>
 <p>$U = L \frac{di}{dt}$ $i = \frac{1}{L} \int U dt$</p>	 <p>$i = C \frac{dU}{dt}$ $U = \frac{1}{C} \int i dt$</p>
 <p>$e(t) = E_m \cos \omega t$</p>	 <p>$J t = I_m \cos \omega t$</p>
Дуальные схемы	
 <p>$e t = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$</p>	 <p>$J t = qu + C \frac{dU}{dt} + \frac{1}{L} \int U dt$</p>

1.2. Законы Ома и Кирхгофа в цепях постоянного тока

Законы Ома	
<p>Закон Ома для участка цепи без ЭДС</p> 	$I = \frac{U}{R}, \quad I = UG$
<p>Закон Ома для цепи с ЭДС</p> 	$I = \frac{U \pm E}{R + R_i}$ <p>В цепи с неизменными R и E:</p> $I = \frac{U \pm \sum_{k=1}^n E_k}{\sum_{j=1}^m R_j}, \text{ где}$ <p>$\sum_{k=1}^n E_k$ – алгебраическая сумма ЭДС, $\sum_{j=1}^m R_j$ – арифметическая сумма сопротивлений</p>
<p>Закон Ома для замкнутой цепи</p>  <p style="text-align: center;">Рис.1</p>	$I = \frac{U \pm \sum_{k=1}^n E_k}{\sum_{j=1}^m R_j}, \text{ где}$ <p>$\sum_{k=1}^n E_k$ – алгебраическая сумма ЭДС, $\sum_{j=1}^m R_j$ – арифметическая сумма сопротивлений</p> <p>Для данной схемы (при $E_1 > E_2$):</p> $I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_{i1} + R_2 + R_{i2}}$

Потенциальная диаграмма – это график распределения потенциалов в замкнутой цепи (для рис. 1)



Если $\varphi_a = 0$ – базисная точка, то

$$\begin{aligned}\varphi_b &= \varphi_a + E_1 = E_1 \\ \varphi_c &= \varphi_b - R_{i1}I = E_1 - R_{i1}I \\ \varphi_d &= \varphi_c - R_1I = E_1 - R_{i1}I - R_1I \\ \varphi_e &= \varphi_d - R_{i2}I = E_1 - R_{i1}I - R_1I - R_{i2}I \\ \varphi_f &= \varphi_e - E_2 = E_1 - E_2 - I(R_{i1} + R_{i2} + R_1)\end{aligned}$$

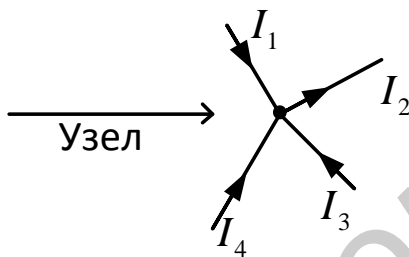
$$\varphi_a = \varphi_f - R_2I = 0.$$

Так как $I = \frac{U}{R_{общ}} \rightarrow const$, то

$$I = \frac{U}{R_{общ}} = tg\alpha, \quad \alpha \rightarrow const$$

Законы Кирхгофа

Первый закон Кирхгофа



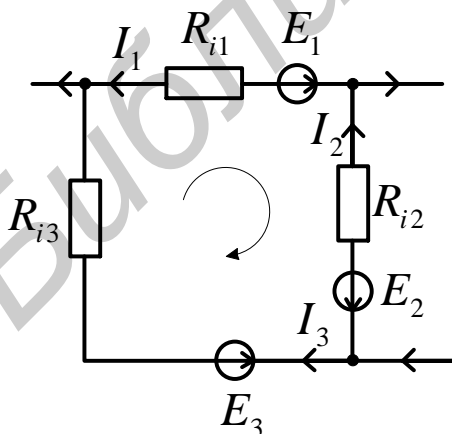
$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

Алгебраическая сумма токов

$$I_1 - I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

К узлу – «+», от узла – «-»

Второй закон Кирхгофа



$$\sum_{i=1}^n E_i = \sum_{k=1}^n I_k R_k$$

алгебраическая алгебраическая
сумма сумма

$$E_1 + E_2 - E_3 = -R_{i1}I_1 - R_{i2}I_2 + R_3I_3$$

ЭДС и ток совпадают
с обходом – «+»

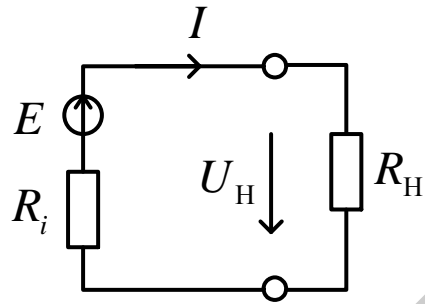
ЭДС и ток направлены навстречу обходу – «-»

Режимы работы цепи

Режим нагрузки

$$I_H = \frac{E}{R_i + R_H}$$

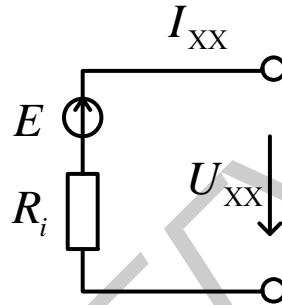
$$U_H = I_H R_H = \frac{E}{R_i + R_H} R_H$$



Режим холостого хода (XX)

$$I_{XX} = 0$$

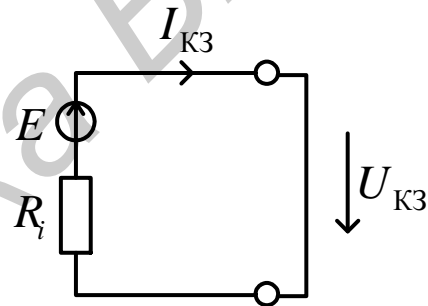
$$U_{XX} = E$$



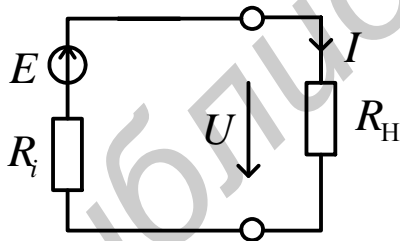
Режим короткого замыкания (КЗ)

$$U_{КЗ} = 0$$

$$I_{КЗ} = I_{max} = \frac{E}{R_i}$$



Баланс мощностей



$$\left. \begin{aligned} P_{ист} &= EI \\ P_0 &= EI \end{aligned} \right\} \text{— мощность источника} \\ \text{(полная мощность)}$$

$$P_i = R_i I^2 \text{— мощность потерь}$$

$$P_H = R_H I^2 \text{— мощность, потребляемая} \\ \text{нагрузкой}$$

$$P_0 = P_i + P_H$$

$$EI = R_H I^2 + R_i I^2$$

Активная мощность

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = U^2 G = I^2 R$$

P Вт, кВт, МВт

$$Вт \times 10^3 \quad Вт \times 10^6$$

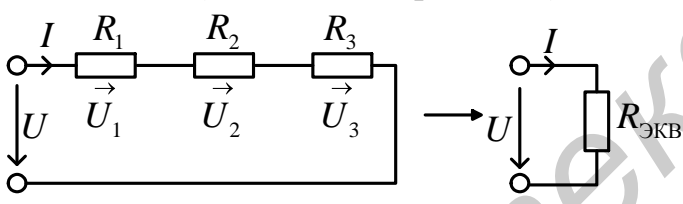
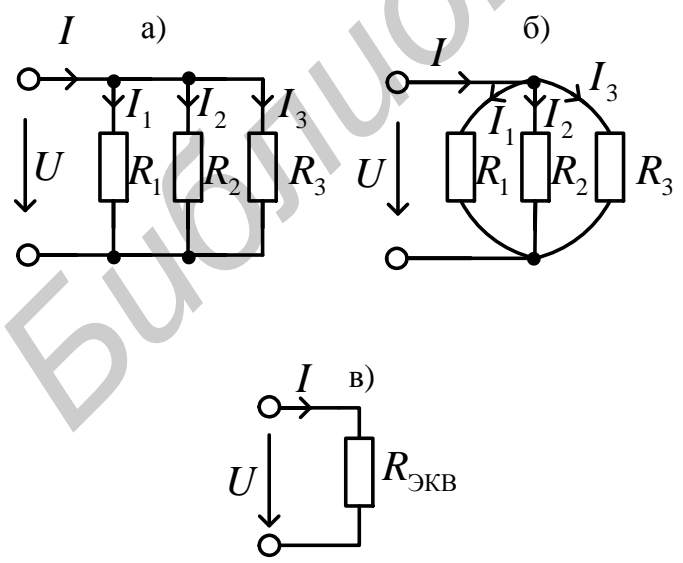
Уравнение баланса мощностей

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n E_i I_i}_{\text{алгебраическая}} = \underbrace{\sum_{k=1}^n I_k^2 R_k}_{\text{арифметическая}}$$

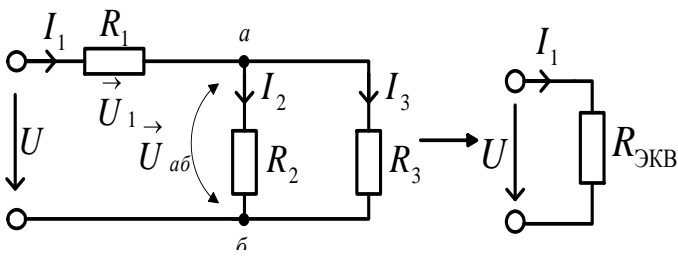
алгебраическая арифметическая
сумма сумма

Условие передачи максимальной активной мощности в нагрузку	
$P = R_H I^2; I = \frac{E}{R_i + R_H}; P = \frac{E^2 R_H}{(R_i + R_H)^2}$ <p>Экстремум $\frac{dP}{dR_H} = 0$ при $R_i = R_H$</p>	<p>Коэффициент полезного действия (КПД):</p> $\eta = \frac{P_H}{P_0} = \frac{P_H}{P_i + P_H} = \frac{R_H}{R_i + R_H}$ <p>при $R_i = R_H, \eta = 0,5$</p>

1.3. Эквивалентные преобразования электрических цепей

<p>Последовательное соединение сопротивлений (делитель напряжения)</p> 	$U = U_1 + U_2 + U_3$ $R_{\text{ЭКВ}} = R_1 + R_2 + R_3$ <p>Свойство: напряжение пропорционально сопротивлению</p> $U_1 = R_1 I, U_2 = R_2 I, U_3 = R_3 I$
<p>Параллельное соединение сопротивлений (делитель тока)</p> 	$I = I_1 + I_2 + I_3$ $\frac{1}{R_{\text{ЭКВ}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ $R = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$ $G_{\text{ЭКВ}} = G_1 + G_2 + G_3$ <p>Свойство: ток пропорционален величине, обратной сопротивлению</p>

Смешанное соединение сопротивлений



$$R_{\text{ЭКВ}} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

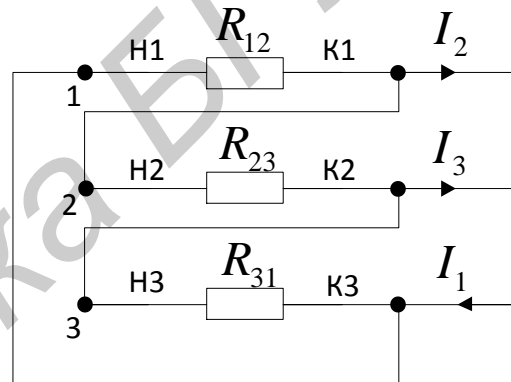
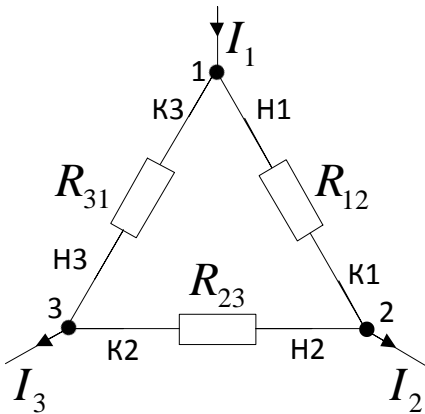
$$U = U_1 + U_{a\bar{b}}; U_{a\bar{b}} = I_1 \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

Правило плеч:

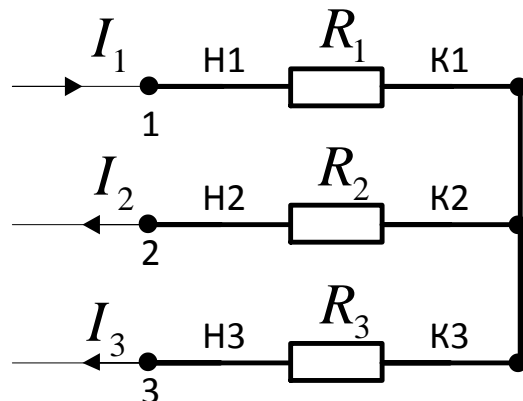
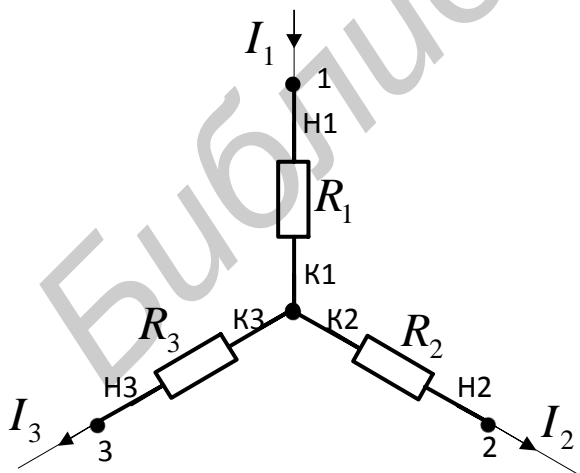
$$I_2 = \frac{U_{a\bar{b}}}{R_2} = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

$$I_3 = \frac{U_{a\bar{b}}}{R_3} = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

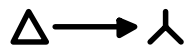
«Треугольник» сопротивлений



«Звезда» сопротивлений



Преобразование



$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Преобразование

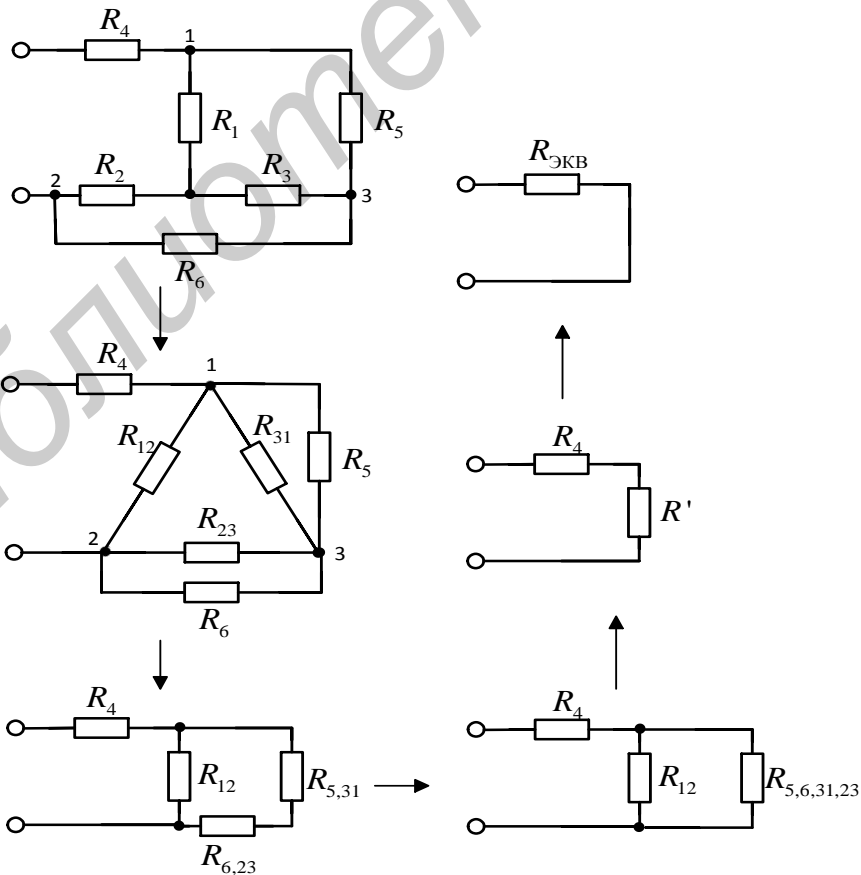


$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}$$

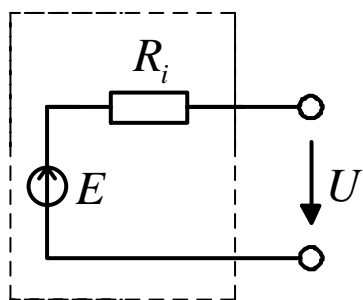
$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3R_1}{R_2}$$

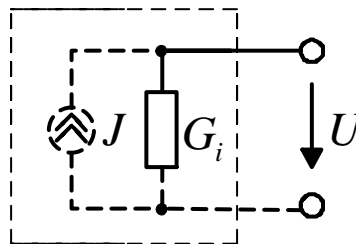
Пример преобразования



Эквивалентные преобразования источников электрической энергии



или



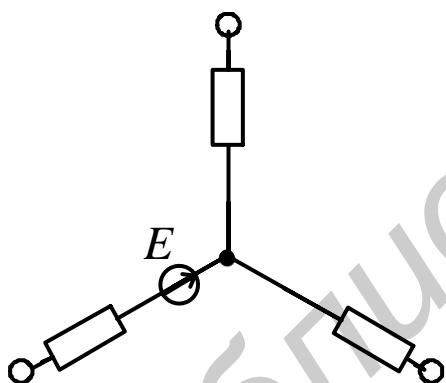
$$E = \frac{J}{G_i} \quad R_i = \frac{1}{G_i}$$

источник напряжения

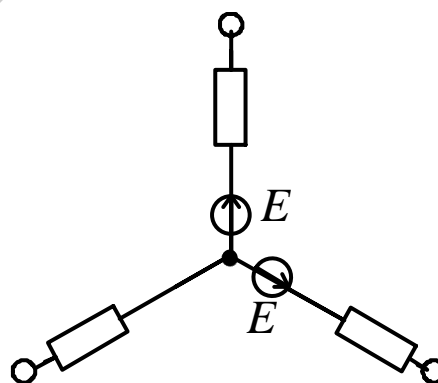
$$J = \frac{E}{R_i} \quad G_i = \frac{1}{R_i}$$

источник тока

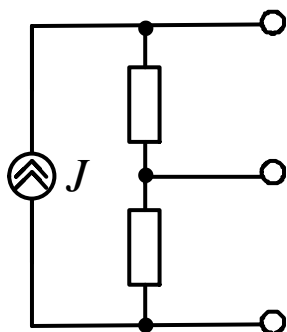
Перенос идеального источника напряжения E



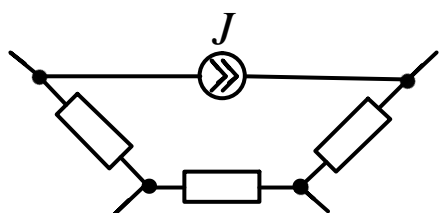
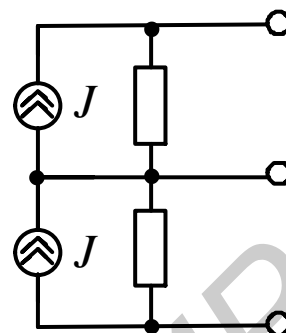
или



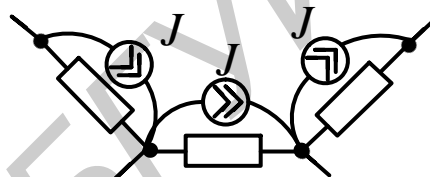
Перенос идеального источника тока J



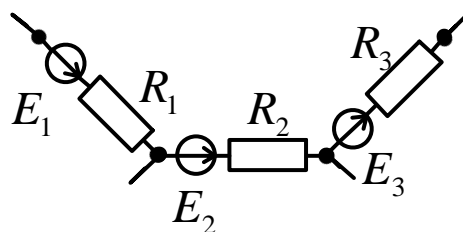
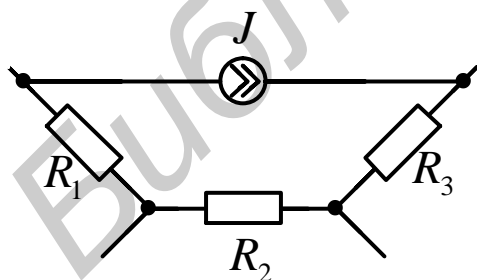
или



или



Перенос идеального источника тока J с преобразованием в источник напряжения E



$$E_1 = R_1 J \quad E_2 = R_2 J \quad E_3 = R_3 J$$

В системе $R_{11}, R_{22}, \dots, R_{nn}$ – собственные сопротивления независимых контуров; $R_{12}, R_{21}, \dots, R_{n1}$ – взаимные сопротивления между независимыми контурами; I_I, I_{II}, \dots, I_N – контурные токи.

Взаимные сопротивления положительны при совпадении направлений проходящих через них контурных токов и отрицательны, если контурные токи встречны.

Для схемы, приведённой на рис. 1.1:

$$\left. \begin{aligned} (R_{i1} + R_3)I_I - R_3I_{II} &= E_1; \\ -R_3I_I + (R_3 + R_4 + R_2)I_{II} + R_2I_2 &= 0; \end{aligned} \right\}$$

По найденным контурным токам находим токи в ветвях:

$$I_1 = I_I, \quad I_3 = |I_I - I_{II}|, \quad I_4 = I_{II}, \quad I_2 = I_{II} + J_2.$$

Метод узловых потенциалов (напряжений)

Число уравнений равно числу узлов. Для схемы, приведённой на рис. 1.1:

$$\left. \begin{aligned} G_{11}\varphi_1 + G_{12}\varphi_2 + G_{13}\varphi_3 &= I_I; \\ G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 + G_{23}\varphi_3 &= I_{II}; \\ G_{31}\varphi_1 + G_{32}\varphi_2 + G_{33}\varphi_3 &= I_{III}; \end{aligned} \right\}$$

В системе G_{11}, G_{22}, G_{33} – собственные проводимости узлов; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – потенциалы узлов; $G_{12}, G_{21}, G_{13}, G_{31}, G_{23}, G_{32}$ – взаимные проводимости между узлами (взаимные проводимости всегда отрицательны); I_I, I_{II}, I_{III} – узловые токи (как алгебраическая сумма токов в прилегающих к узлу ветвях).

Число уравнений можно сократить, положив равным нулю потенциал одного из узлов. Например, при $\varphi_1 = 0$ из системы удаляется первый столбец и первая строка:

$$\left. \begin{aligned} G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 + G_{23}\varphi_3 &= I_{II}; \\ G_{31}\varphi_1 + G_{32}\varphi_2 + G_{33}\varphi_3 &= I_{III}; \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \varphi_2 - \frac{1}{R_4} \varphi_3 &= \frac{E}{R_{i1}} \\ -\frac{1}{R_4} \varphi_2 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) \varphi_3 &= J_2. \end{aligned} \right\}$$

Найдя из последней системы потенциалы узлов φ_2 и φ_3 , определяем токи во всех ветвях (учитывая, что $\varphi_1 = 0$):

$$\varphi_2 = \varphi_1 + E_1 - I_1 R_{i1}, \text{ откуда } I_1 = \frac{E_1 - \varphi_2}{R_{i1}};$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + I_3 R_3, \text{ откуда } I_3 = \frac{\varphi_2}{R_3};$$

$$\varphi_3 = \varphi_1 + I_2 R_2, \text{ откуда } I_2 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_2};$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 - I_4 R_4, \text{ откуда } I_4 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_4};$$

Метод наложения

Позволяет определить токи в ветвях электрической цепи по закону Ома. Основан на принципе наложения (или суперпозиции): ток в любой ветви ЛЭЦ, содержащей несколько источников ЭДС, определяют как алгебраическую сумму частных токов, созданных в этой ветви каждым источником в отдельности.

Пример: схему, изображённую на рисунке 1.1, считая в ней источники E и J идеальными, используя принцип суперпозиции, разбивают на две (рис. 1.2 и 1.3).

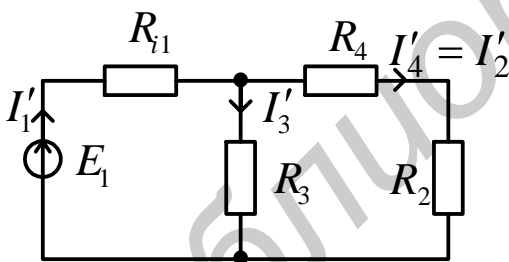


Рисунок 1.2

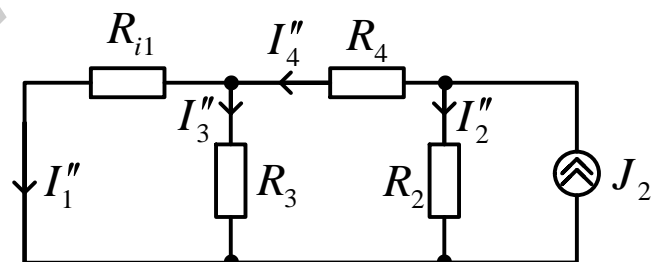


Рисунок 1.3

Частичные токи в схеме на рис. 1.2:

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_{i1} + \frac{R_3 R_2 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4}}; \quad I'_3 = I'_1 \frac{R_2 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4}; \quad I'_4 = I'_2 = I'_1 - I'_3.$$

Частичные токи в схеме на рисунке 1.3:

$$I_2'' = J_2 \frac{\left(\frac{R_{i1}R_3}{R_{i1} + R_3} + R_4 \right)}{R_2 + R_4 + \frac{R_{i1}R_3}{R_{i1} + R_3}}; \quad I_4'' = J_2 - I_2''; \quad I_3'' = I_4'' \frac{R_{i1}}{R_{i1} + R_3}.$$

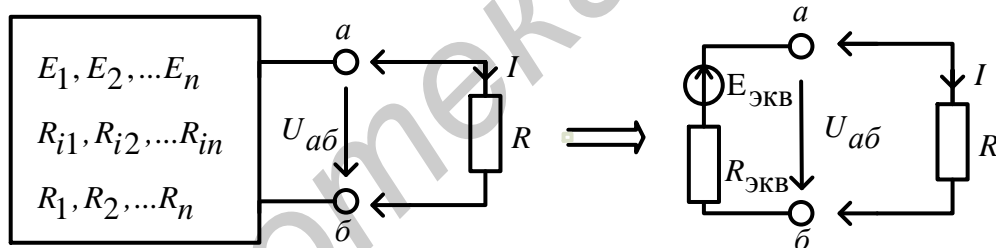
Искомые токи в схеме на рисунке 1.1:

$$I_1 = |I_1' - I_1''|; \quad I_2 = I_2' + I_2'';$$

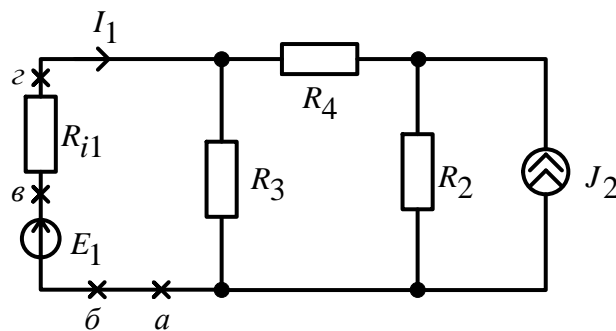
$$I_3 = I_3' + I_3''; \quad I_4 = |I_4' - I_4''|;$$

Метод эквивалентного генератора

Применяется для определения тока в одной из ветвей сложной электрической цепи. Метод основан на теореме об эквивалентном генераторе, которая утверждает, что ток I в любой ветви ab не изменится, если остальную часть электрической цепи заменить эквивалентным источником напряжения, ЭДС которого $E_{\text{ЭКВ}}$ равна напряжению на зажимах a и b при условии, что источники ЭДС и тока – идеальны, т.е. могут быть заменены, соответственно, короткозамкнутыми проводниками и разрывами цепи.

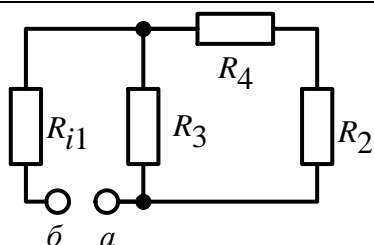


Пример: для нахождения тока в ветви с R_{i1} возможны несколько вариантов её разрыва:

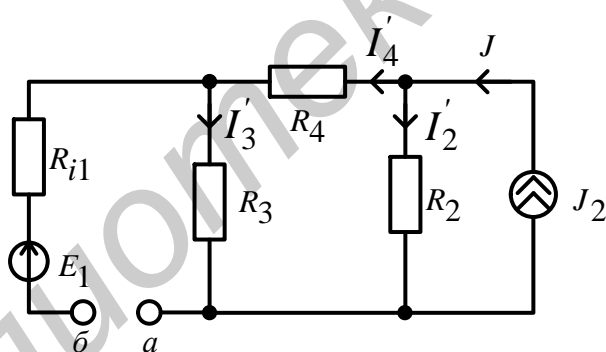


1) а-б	$I_1 = \frac{E_{\text{ЭКВ}}}{R_{\text{ЭКВ}}} = \frac{U_{a\bar{b}}}{R_{a\bar{b}}}$
2) а-в	$I_1 = \frac{E_{\text{ЭКВ}} \pm E_1}{R_{\text{ЭКВ}}} = \frac{U_{a\bar{b}} \pm E_1}{R_{a\bar{b}}}$
3) а-г	$I_1 = \frac{E_{\text{ЭКВ}} \pm E_1}{R_{\text{ЭКВ}} + R_{i1}} = \frac{U_{a\bar{g}} \pm E_1}{R_{a\bar{g}} + R_{i1}}$
4) в-г	$I_1 = \frac{E_{\text{ЭКВ}}}{R_{\text{ЭКВ}} + R_{i1}} = \frac{U_{\bar{b}g}}{R_{\bar{b}g} + R_{i1}}$

Для варианта а-б:



$$R_{\text{ЭКВ}} = R_{i1} + \frac{R_3 R_2 + R_4}{R_3 + R_2 + R_4}$$



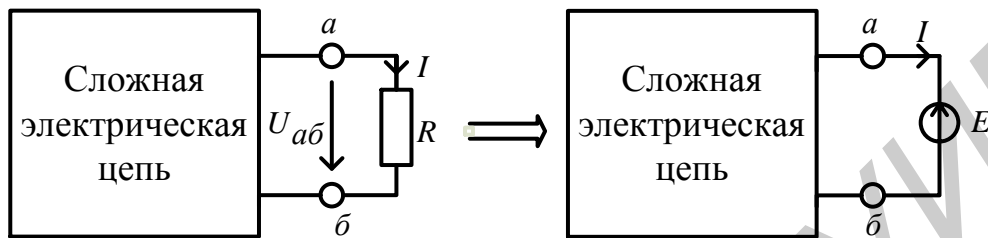
$$U_{a\bar{b}} = \varphi_a - \varphi_{\bar{b}};$$

$$\varphi_{\bar{b}} = \varphi_a + R_3 I'_3 - E_1;$$

$$U_{a\bar{b}} = E_1 - R_3 I'_3, \quad I'_3 = J_2 \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4};$$

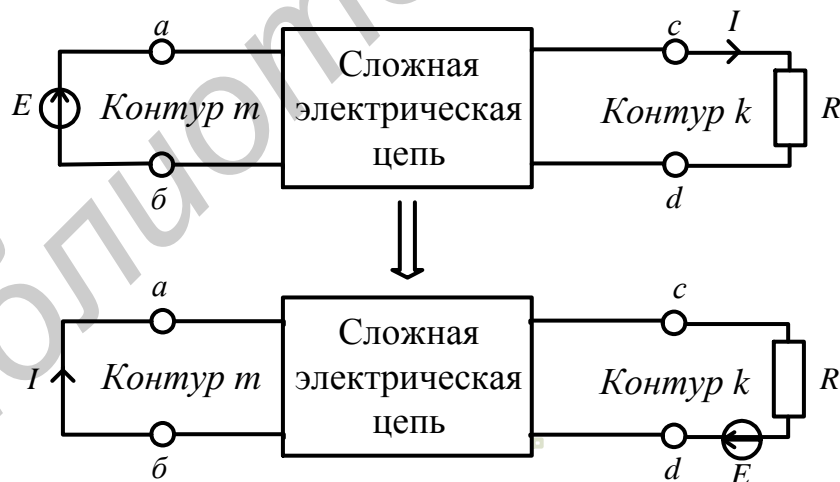
1.5. Теорема компенсации и принцип взаимности

Теорема компенсации утверждает, что любое сопротивление электрической цепи можно заменить идеальным источником ЭДС, у которого значение ЭДС равно падению напряжения на этом сопротивлении, а направление ЭДС противоположно направлению тока, проходящего через это сопротивление.



$$E = U_{ab} = RI$$

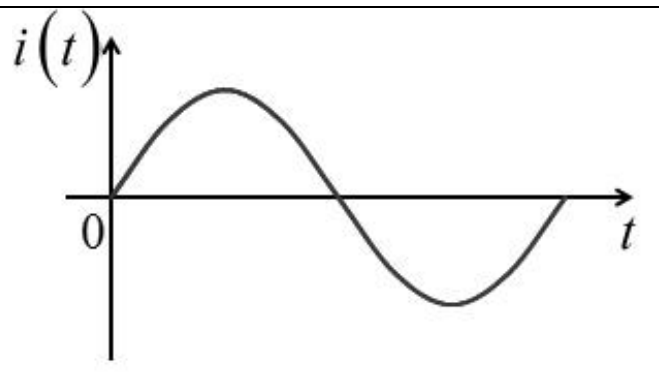
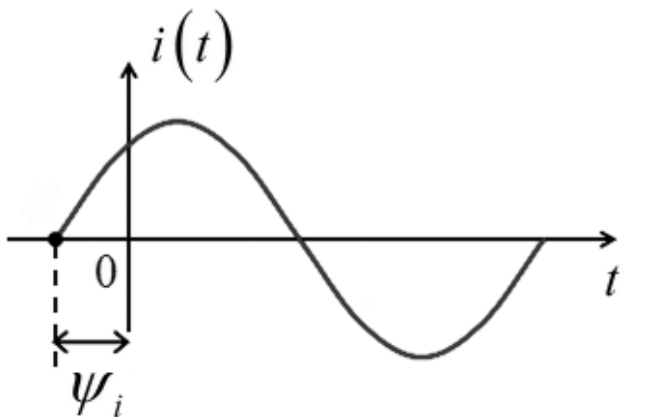
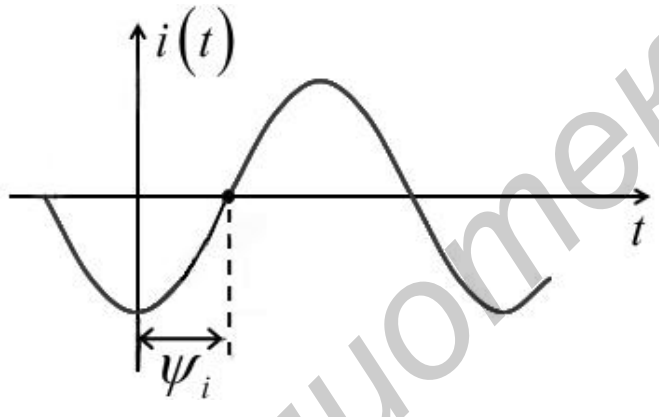
Принцип взаимности утверждает, что если ЭДС E , действуя в ветви ab контура m , не содержащего других источников ЭДС, создает в ветви cd сопротивлением R (контур k) ток I , то эта же ЭДС, действуя в ветви cd , вызывает в ветви ab такой же ток I .

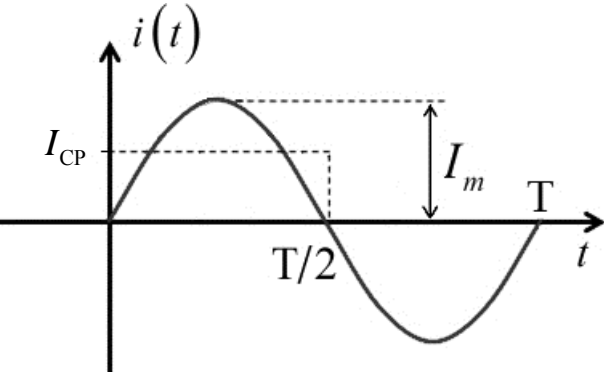


2. Электрические цепи синусоидального тока

2.1. Основные характеристики синусоидального тока

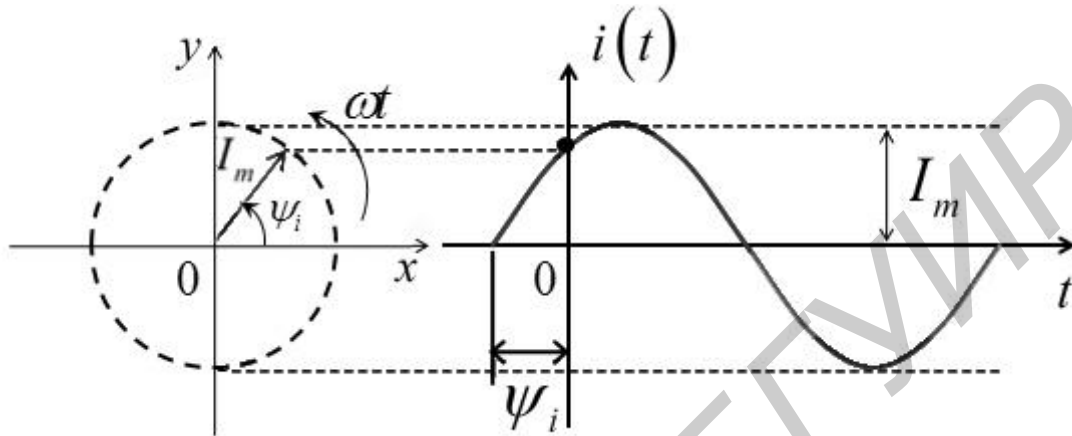
<p>Мгновенное значение синусоидального тока (напряжения)</p> $i(t) = I_m \sin \theta(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$ <p>где $\theta(t) = \omega t + \psi_i$ – полная фаза</p>	
<p>Амплитуда тока (напряжения, ЭДС) – максимальное значение функции</p>	$I_m [A], U_m [B], E_m [B]$
<p>Период – время, за которое совершается одно полное колебание</p>	$T [c, мс, мкс, нс]$ $c \times 10^{-3}, c \times 10^{-6}, c \times 10^{-9}$
<p>Частота – число периодов в секунду</p>	$f = \frac{1}{T} [c^{-1}]$ или Гц, кГц, МГц, ГГц $Гц \times 10^3, Гц \times 10^6, Гц \times 10^9$
<p>Угловая (круговая) частота – скорость изменения полной фазы тока (напряжения, ЭДС)</p>	$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \left[\frac{рад}{c} \right]$ или $[c^{-1}]$ при $f = 50 Гц, \omega = 314 c^{-1}$
<p>Полная фаза – аргумент синусоидального тока, отсчитываемый от точки перехода тока через нуль (или максимум) к положительному значению</p>	$\theta(t) = \omega t + \psi_i$ рад или градусы
<p>Начальная фаза – значение фазы синусоидального тока (напряжения, ЭДС) при $t = 0$</p>	ψ рад или градусы

	$\psi_i = 0$
	$\psi_i > 0$ (опережение)
	$\psi_i < 0$ (отставание)
<p>Сдвиг фаз между гармоническими колебаниями – разность начальных фаз</p>	$\varphi = \psi_u - \psi_i$ рад или градус
$\varphi = 0$	совпадение в фазе
$\varphi = \pm\pi$	в противофазе
$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$	в квадратуре

<p>Среднее значение тока (напряжения, ЭДС) или средневывпрямленное значение, соответствующее полуволне</p> 	$I_{CP} = 2 \left[\frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i(t) dt \right],$ <p>при $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ и $\psi_i = 0$</p> $I_{CP} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t dt = \frac{4I_m}{T\omega} =$ $= \frac{2I_m}{\pi} \approx 0,637I_m$
<p>Действующее значение тока (напряжения, ЭДС) – среднеквадратичное значение тока за период</p>	$I_D(I) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt},$ <p>при $\psi_i = 0$</p> $I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} =$ $= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707I_m$

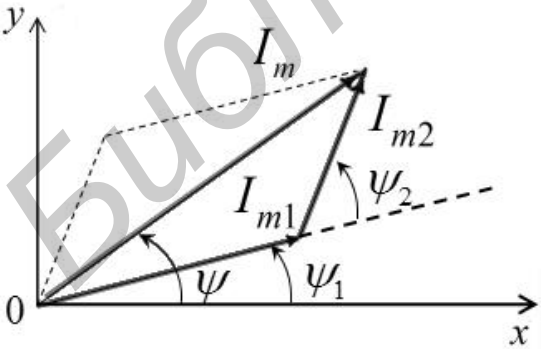
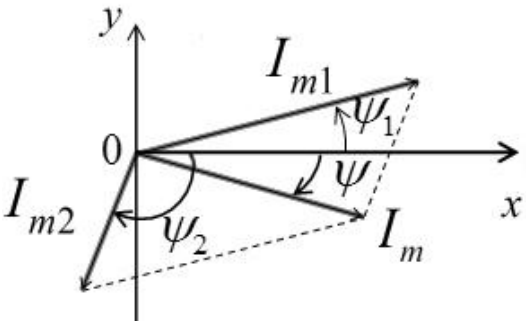
2.2. Представление синусоидального тока проекциями вращающегося вектора и комплексными величинами

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

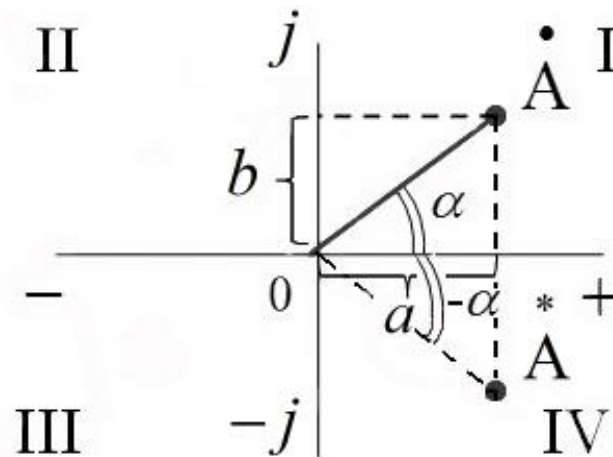


Проекция вектора I_m на вертикальную ось равна $i(t) = I_m \sin \psi_i$, что соответствует мгновенному значению тока $i(t)$ при $t = 0$.

Проекция вектора I_m на горизонтальную ось равна $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$, что соответствует мгновенному значению тока $i(t)$ в любой момент времени.

Сложение векторов	Вычитание векторов
$i_1(t) = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_1)$ $i_2(t) = I_{m2} \sin(\omega t + \psi_2)$ $i(t) = i_1(t) + i_2(t) = I_m \sin(\omega t + \psi)$  <p>I_m – длинная диагональ</p>	$i(t) = i_1(t) - i_2(t) = I_m \sin(\omega t + \psi)$  <p>I_m – короткая диагональ</p>

Комплексные величины



\bullet $A = a + jb$	Алгебраическая форма записи
\bullet $A = Ae^{j\alpha}$ $*$ $A = Ae^{-j\alpha}$	Показательная форма записи
\bullet $A = A\cos\alpha + jA\sin\alpha$	Тригонометрическая форма записи

Основные комплексные величины	
\bullet $*$ A, A^* $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ a, b α $\alpha = \pm \arctg \frac{b}{a}$ $\alpha = \pi \pm \arctg \frac{b}{a}$	Комплексное и комплексно-сопряженное числа Модуль комплексного числа Действительная (вещественная) и мнимая части комплексного числа Аргумент комплексного числа в I и IV квадрантах во II и III квадрантах

$\dot{I}_m(t) = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} =$ $= \underbrace{I_m \cos(\omega t + \psi_i)}_{\text{Re}[\dot{I}_m(t)]} + \underbrace{j I_m \sin(\omega t + \psi_i)}_{\text{Im}[\dot{I}_m(t)]}$					<p>Комплексный мгновенный синусоидальный ток (комплекс мгновенного значения тока)</p> <p><i>Re</i> (Real) – проекция на вещественную ось</p> <p><i>Im</i> (Imaginary) – проекция на мнимую ось</p>
$\dot{I}_m(t) = \underbrace{I_m e^{j\psi_i}}_{\dot{I}_m = I_m \cdot e^{j\psi_i}} \cdot e^{j\omega t}$					<p>Комплексная амплитуда тока</p> <p>Оператор вращения</p>
ωt	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{2}$	
$e^{j\omega t}$	1	j	-1	$-j$	
$\frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_i}$					
$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$					Действующий ток
$\dot{I} = I \cdot e^{j\psi_i}$					Комплексный действующий ток

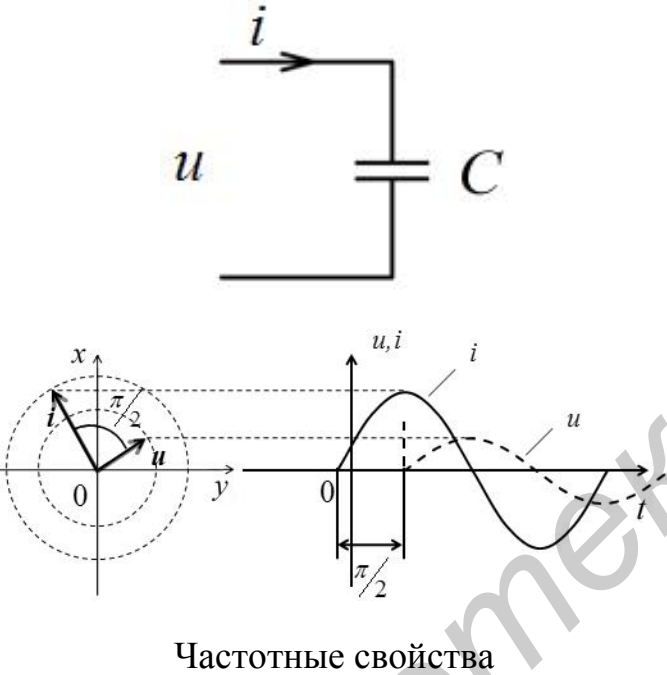
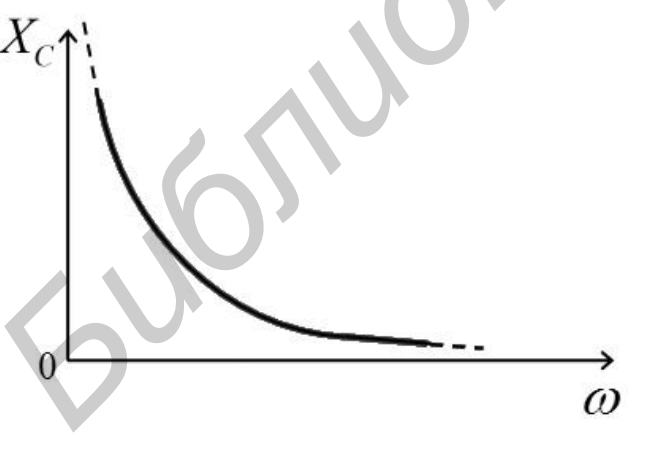
2.3. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме

Комплексное сопротивление	
$Z = r + jx = z \cdot e^{j\varphi_z} =$ $= z \cos \varphi + jz \sin \varphi$ $z = \frac{U_m}{I_m}$ $\varphi_z = \psi_u - \psi_i$ r, x	<p>Модуль комплексного сопротивления</p> <p>Аргумент комплексного сопротивления</p> <p>Активная и реактивная части комплексного сопротивления</p>
Комплексная проводимость	
$Y = \frac{1}{Z} = \frac{r}{r^2 + x^2} - j \frac{x^2}{r^2 + x^2} =$ $= g - jb = y \cdot e^{j\varphi_Y}$ y, g, b $y = \frac{I_m}{U_m} = \sqrt{g^2 + b^2}$ $\varphi_Y = -\varphi_z$	<p>Модуль, активная и реактивная части комплексной проводимости</p> <p>Аргумент комплексной проводимости</p>

Закон Ома	
$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z}$ $Z = z \cdot e^{j\varphi}$ $z = \sqrt{r^2 + jx^2}$ <p>r, x</p> $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}$	<p>Комплексная амплитуда тока</p> <p>Комплексное сопротивление цепи</p> <p>Модуль комплексного сопротивления цепи</p> <p>Активная и реактивная составляющие комплексного сопротивления цепи</p> <p>Комплекс действующего тока</p>
Законы Кирхгофа	
$\sum_{k=1}^n \dot{I}_{mk} = 0; \sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0$ $\sum_{k=1}^n \dot{E}_{mk} = \sum_{l=1}^m \dot{U}_{ml} = \sum_{l=1}^m \dot{I}_{ml} \cdot Z_l$	<p>1-й закон Кирхгофа</p> <p>2-й закон Кирхгофа</p>

2.4. Элементы R, L и C в цепи синусоидального тока

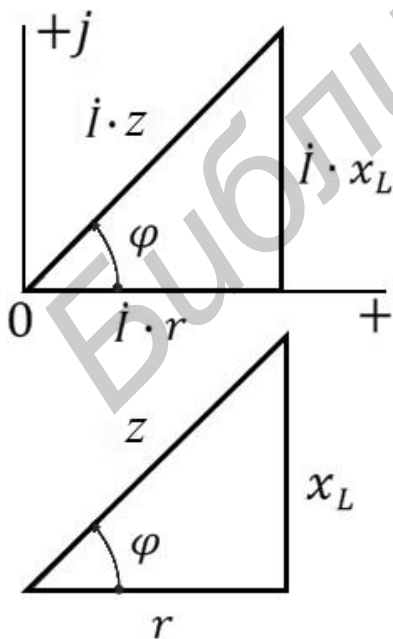
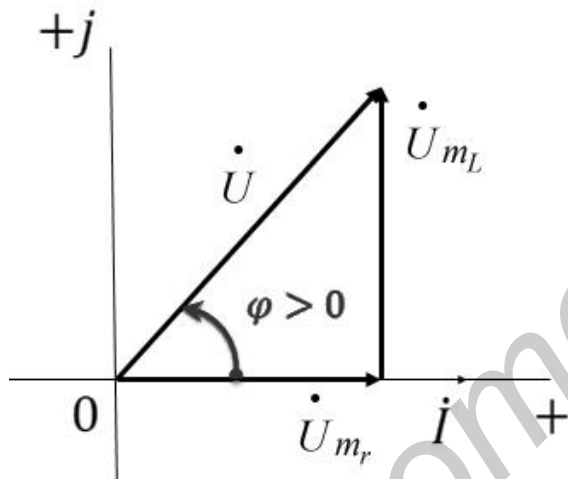
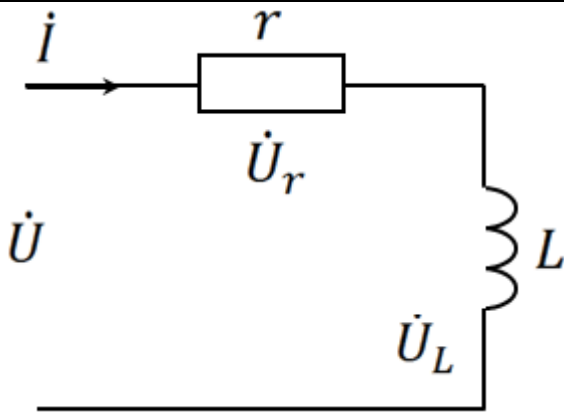
Активное сопротивление	
	$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ $i(t) = \frac{U_m \sin(\omega t + \psi_u)}{r}$ $\frac{U_m}{r} = I_m, Z = r, Y = g$ $\psi_u = \psi_i$ $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$
Индуктивность	
	$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ $u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ $U_m = I_m \cdot \omega L$ $\psi_u = \psi_i + \frac{\pi}{2}$ $\varphi = \psi_u - \psi_i = \frac{\pi}{2}$ <p>Напряжение опережает ток по фазе на $\frac{\pi}{2}$</p> $X_L = \omega L = f(\omega)$
<p>Частотные свойства</p>	<p>при $\omega = 0, X_L = 0, X_L$ эквивалентно короткозамкнутому (КЗ) проводнику</p> <p>при $\omega \rightarrow \infty, X_L \rightarrow \infty, X_L$ эквивалентно холостому ходу (ХХ)</p>

$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \omega L \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = jX_L$ $Y = \frac{1}{Z} = -j\frac{1}{X_L} = -jb_L$	<p>Сопротивление индуктивности реактивно и положительно</p> <p>Проводимость индуктивности реактивна и отрицательна</p>
<p>Емкость</p>	
 <p style="text-align: center;">Частотные свойства</p> 	$u_c(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ $i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ $I_m = \omega C \cdot U_m$ $\psi_i = \psi_u + \frac{\pi}{2}$ $\varphi = \psi_u - \psi_i = -\frac{\pi}{2}$ <p>Напряжение отстает по фазе от тока на $\frac{\pi}{2}$</p> $X_C = \frac{1}{\omega C} = f(\omega)$ <p>при $\omega = 0$, $X_C \rightarrow \infty$, X_C эквивалентно холостому ходу (ХХ)</p> <p>при $\omega = \infty$, $X_C \rightarrow 0$, X_C эквивалентно короткозамкнутому (КЗ) проводнику</p> <p>Сопротивление емкости реактивно и отрицательно</p>
$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{1}{\omega C} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = -jX_C$	

$$Y = \frac{1}{Z} = j\omega C = jb_c$$

Проводимость емкости реактивна и положительна

RL-цепь



$$\dot{U}_m = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$\dot{I}_m = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \dot{U}_{m_r} + \dot{U}_{m_L} = \\ &= U_{m_r} \cdot e^{j\psi_i} + U_{m_L} \cdot e^{j(\psi_i + \frac{\pi}{2})} = \\ &= \underbrace{I_m \cdot e^{j\psi_i}}_{\dot{I}_m} \underbrace{(r + j\omega L)}_Z \end{aligned}$$

$$\varphi = \psi_u - \psi_i$$

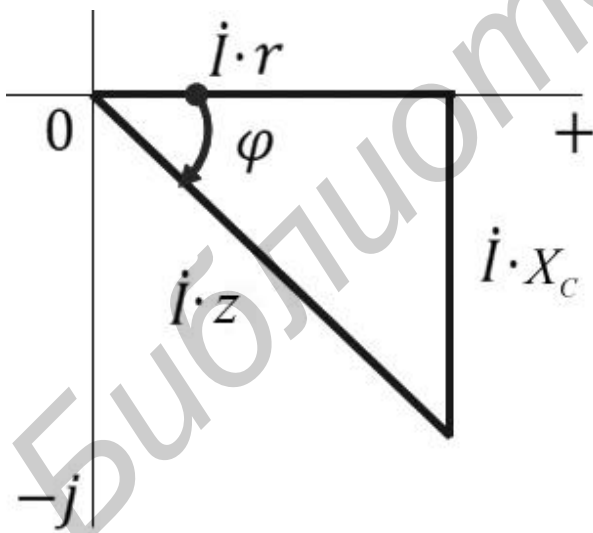
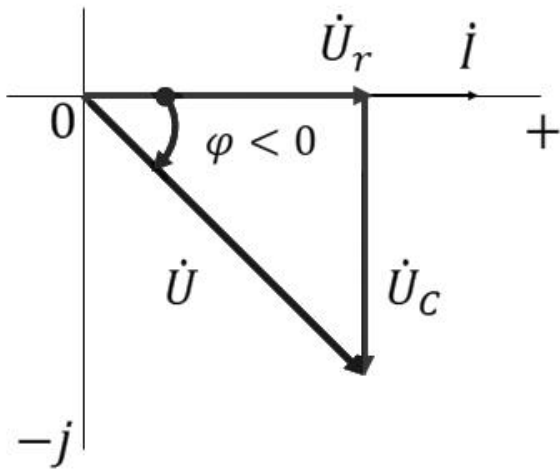
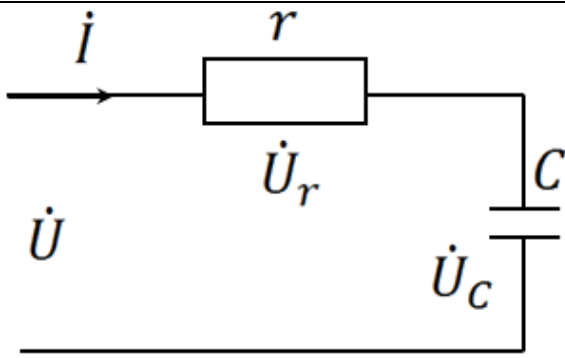
$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$z = \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{X_L}{r}$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}}$$

RC-цепь

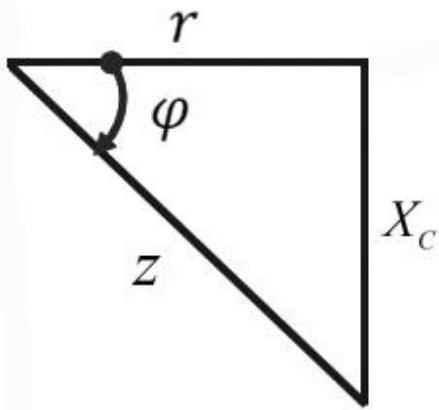


$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \dot{U}_{m_r} + \dot{U}_{m_L} = \\ &= U_{m_r} \cdot e^{j\psi_i} + U_{m_L} \cdot e^{j(\psi_i - \frac{\pi}{2})} = \\ &= \underbrace{I_m \cdot e^{j\psi_i}}_{\dot{I}_m} \underbrace{\left(r - j \frac{1}{\omega C} \right)}_z \end{aligned}$$

$$0 \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2}$$

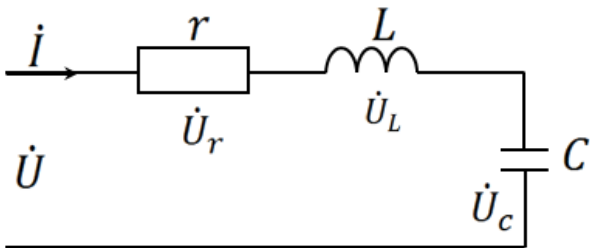
$$z = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2}$$



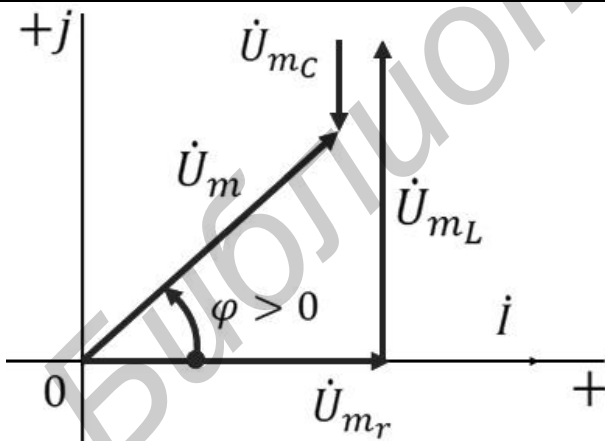
$$\varphi = -\arctg \frac{1}{\omega r C}$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

Последовательное соединение элементов RLC



$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \dot{U}_{m_r} + \dot{U}_{m_L} + \dot{U}_{m_C} = \dot{I}_m (r + jX) = \\ &= \dot{I}_m \left[r + j \underbrace{(X_L - X_C)}_X \right] = \dot{I}_m \cdot Z \end{aligned}$$



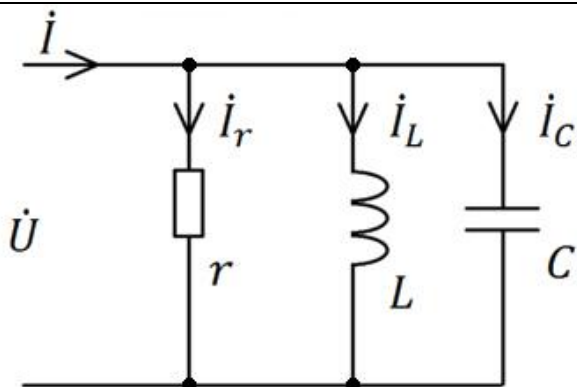
$$X_L > X_C$$

$$\dot{U}_{m_L} > \dot{U}_{m_C}$$

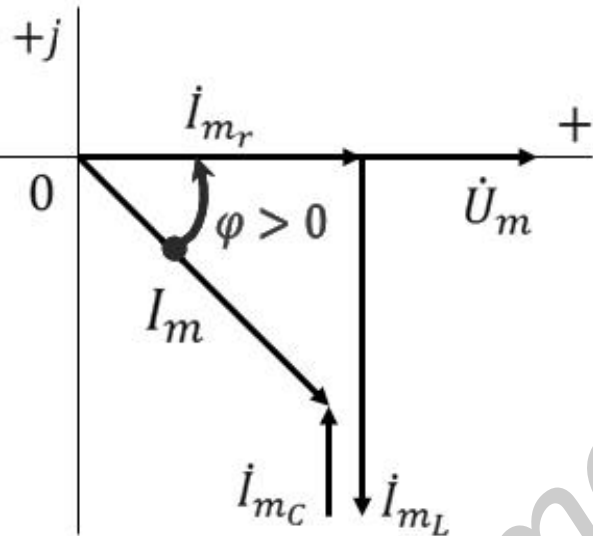
Входное сопротивление цепи носит активно-индуктивный характер

	$X_L < X_C$ $\dot{U}_{mL} < \dot{U}_{mC}$ <p>Входное сопротивление цепи носит активно-емкостной характер</p>
	$X_L = X_C$ $\dot{U}_{mL} = \dot{U}_{mC}$ <p>Резонанс напряжений</p> $\dot{U}_m = \dot{U}_{m_r}$ <p>Входное сопротивление цепи носит активный характер</p> $\dot{I}_{m_{max}} = \frac{U_m}{r}$
	$X_L = X_C \quad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ <p>Резонансная частота</p> $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

Параллельное соединение элементов RLC



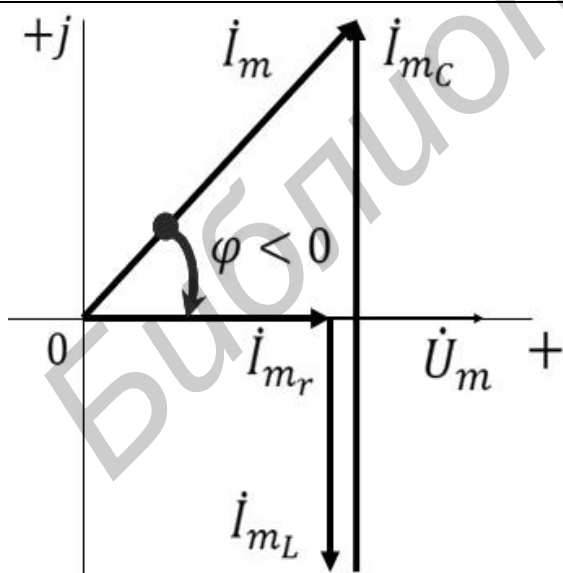
$$\begin{aligned} \dot{I}_m &= \dot{I}_{m_r} + \dot{I}_{m_L} + \dot{I}_{m_C} = \dot{U}_m (g - jb) = \\ &= \dot{U}_m g - j(b_L - b_C) = \dot{U}_m Y \end{aligned}$$



$$b_L > b_C$$

$$\dot{I}_{m_L} > \dot{I}_{m_C}$$

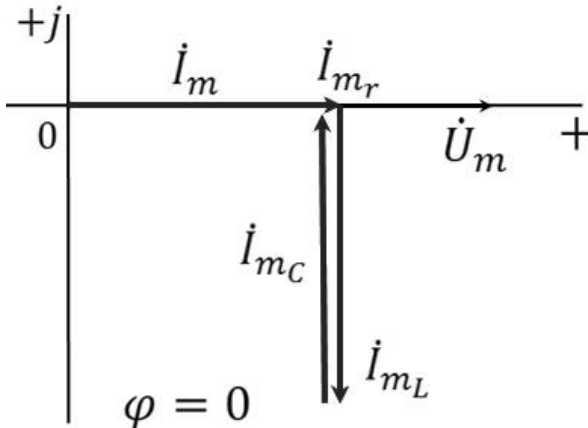
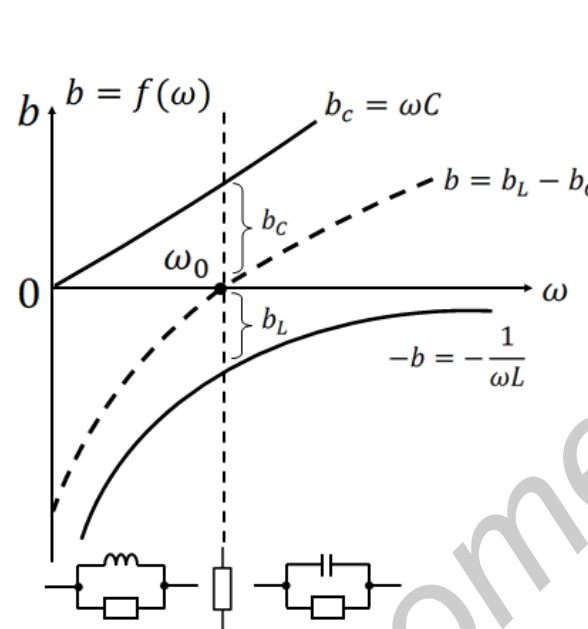
Входная проводимость цепи носит активно-индуктивный характер



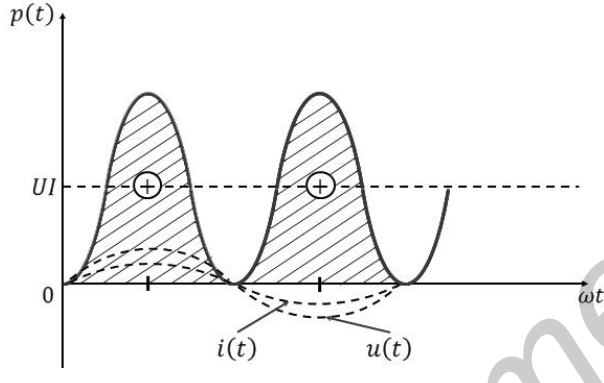
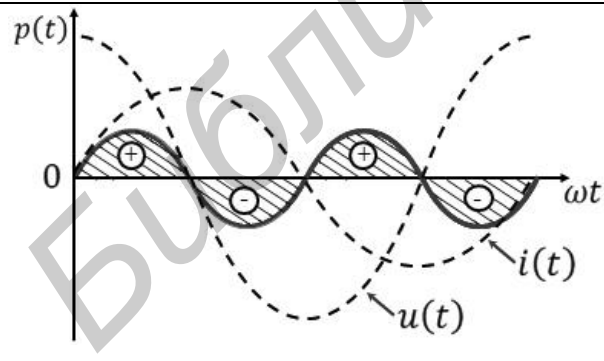
$$b_L < b_C$$

$$\dot{I}_{m_L} < \dot{I}_{m_C}$$

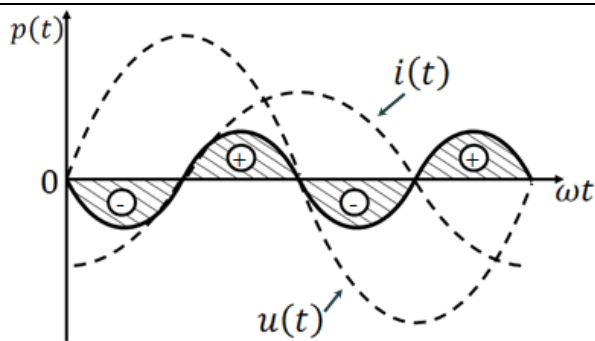
Входная проводимость цепи носит активно-емкостный характер

 <p>$\varphi = 0$</p>	$b_L = b_C$ $\dot{I}_{m_L} = \dot{I}_{m_C}$ <p>Резонанс токов</p> $\dot{I}_m = \dot{I}_{m_r}$ <p>Входная проводимость цепи носит активный характер</p>
 <p>$b = f(\omega)$</p> <p>$b_c = \omega C$</p> <p>$b = b_L - b_c$</p> <p>ω_0</p> <p>b_L</p> <p>$-b = -\frac{1}{\omega L}$</p>	$b_L = b_C \quad \frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

2.5. Мощность в цепи синусоидального тока

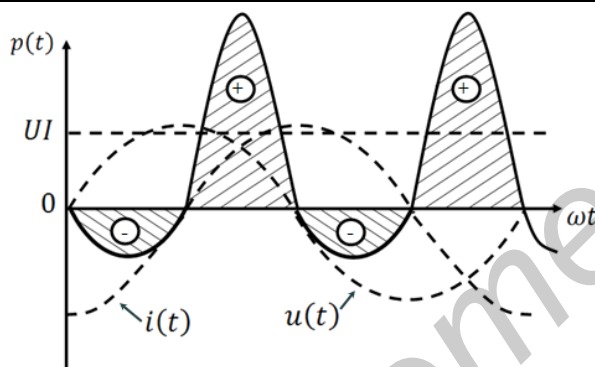
Мгновенная мощность	
$p(t) = u(t) \cdot i(t)$ $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ $p(t) = U_m I_m \sin(\omega t + \psi_u) \cdot \sin(\omega t + \psi_i)$	
<p>при $\psi_u = 0$</p> $p(t) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi), \text{ где } U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, I = \frac{I_m}{\sqrt{2}},$ $\varphi = \psi_u - \psi_i$	
$\varphi = 0, \cos \varphi = 1$	
	$p(t) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi) =$ $= UI - UI \cos 2\omega t$
$\varphi = \frac{\pi}{2}, \cos \varphi = 0$	
	$p(t) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \frac{\pi}{2}) =$ $= UI \sin 2\omega t$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}, \cos\varphi = 0$$



$$p(t) = UI\cos\varphi - UI\cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -UI\sin 2\omega t$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \cos\varphi \leq 1$$



$$p(t) = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t - \varphi)$$

Активная мощность

$$P = UI\cos\varphi \quad \text{Вт, кВт, МВт}$$

Реактивная мощность

$$Q = UI\sin\varphi \quad \text{вар}$$

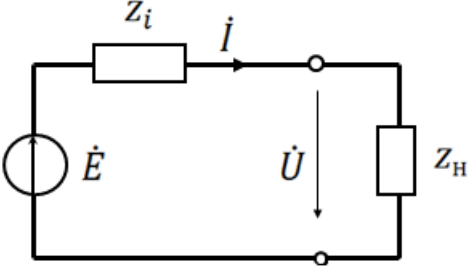
$$Q_L = I^2\omega L$$

$$Q_C = -U^2\omega C$$

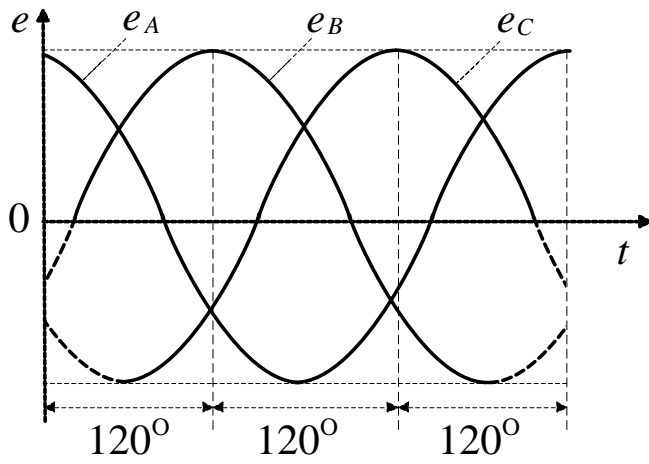
Полная мощность

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI \quad \text{ВА}$$

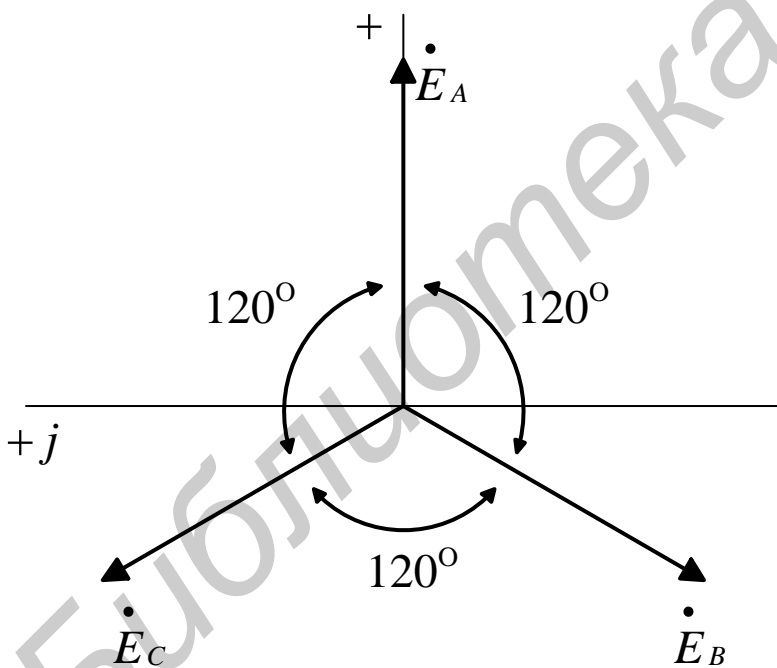
$$\cos\varphi = \frac{P}{S}$$

<p>Комплексная мощность</p>	$\hat{S} = \dot{U} \dot{I}^* = UI \cdot e^{j(\psi_u - \psi_i)} =$ $= \underbrace{UI \cos \varphi}_P + j \underbrace{UI \sin \varphi}_Q = P + jQ$ $ \hat{S} = \sqrt{P^2 + Q^2} = S$
<p>Условия передачи максимальной активной мощности в нагрузку</p>	
 <p>1-е условие: $x_H = -x_i$</p> <p>2-е условие: $r_H = r_i$</p> <p>КПД</p> <p>Баланс мощности</p>	$Z_i = r_i + jx_i$ $Z_H = r_H + jx_H$ $I = \frac{E}{z} = \frac{E}{\sqrt{(r_i + r_H)^2 + (x_i + x_H)^2}}$ $P_H = I^2 r_H = \frac{E^2 \cdot r_H}{(r_i + r_H)^2 + (x_i + x_H)^2}$ $P_H = \frac{E^2 \cdot r_H}{(r_i + r_H)^2}$ $P_H = \frac{E^2}{4r_i} = \frac{E^2}{4r_H}$ $\eta = \frac{P_H}{P_0} = \frac{I^2 \cdot r_H}{I^2 \underbrace{(r_i + r_H)}_{2r_H}} = 0,5$ $\sum_{l=1}^m \dot{E}_l \dot{I}_l^* = \sum_{k=1}^n \dot{U}_k \dot{I}_k^*$ $\sum_{l=1}^m \hat{S}_l = \sum_{k=1}^n \hat{S}_k$ $\underbrace{\sum_{l=1}^m (P_l + jQ_l)}_{\text{источник}} = \underbrace{\sum_{k=1}^n (P_k + jQ_k)}_{\text{нагрузка}}$ $P_l \approx P_k, Q_l \approx Q_k$

2.6. Цепи трёхфазного тока



$A \rightarrow B \rightarrow C$ – прямая последовательность фаз
 $A \rightarrow C \rightarrow B$ – обратная последовательность фаз

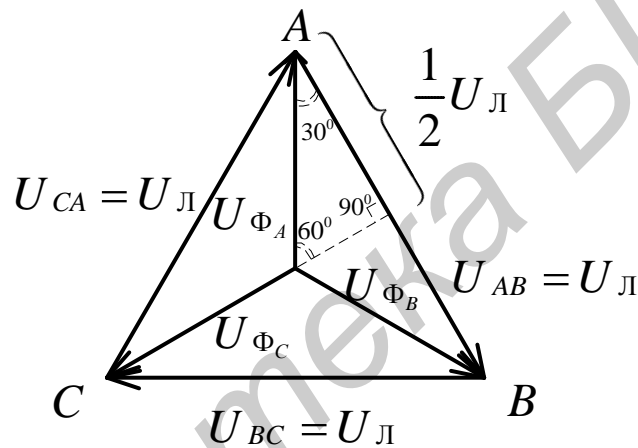
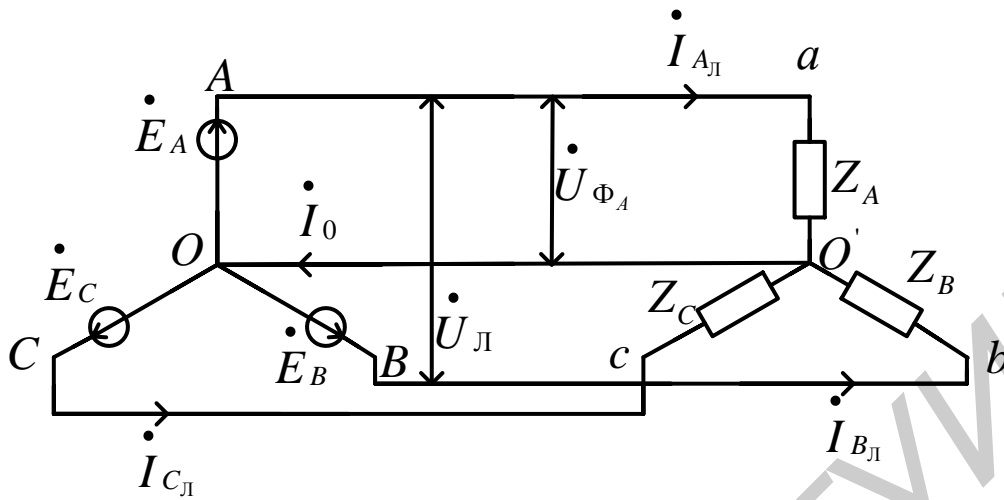


$$\dot{E}_A = E e^{j0}$$

$$\dot{E}_B = E e^{-j120^\circ}$$

$$\dot{E}_C = E e^{j120^\circ}$$

Соединение сопротивлений нагрузки «звездой»



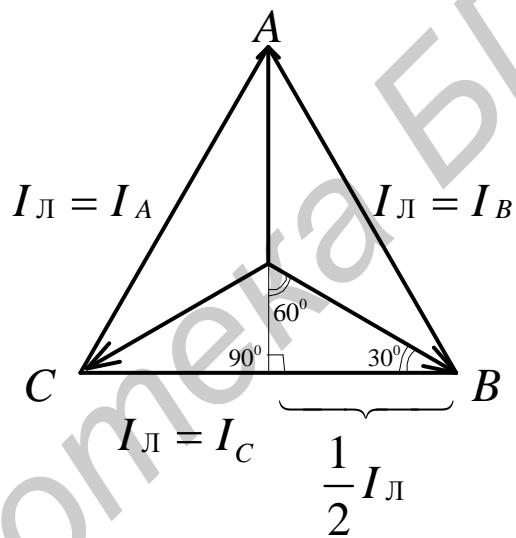
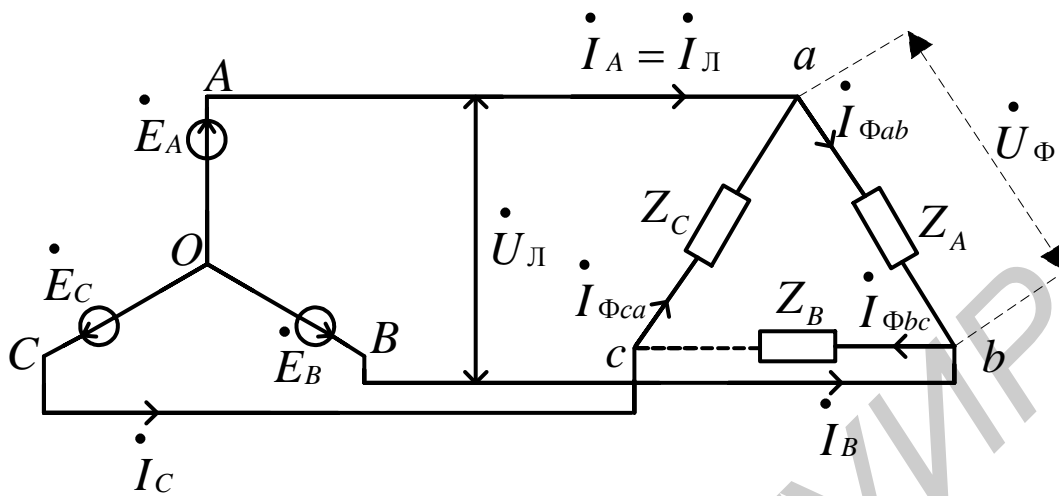
$$\frac{1}{2} U_{Л} = U_{\Phi} \sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} U_{\Phi}$$

$$U_{Л} = \sqrt{3} U_{\Phi} \quad I_{Л} = I_{\Phi}$$

Фазное напряжение U_{Φ} – это напряжение между фазным и нейтральным проводами.

Линейное напряжение $U_{Л}$ – это напряжение между фазными проводами

Соединение сопротивлений нагрузки «треугольником»

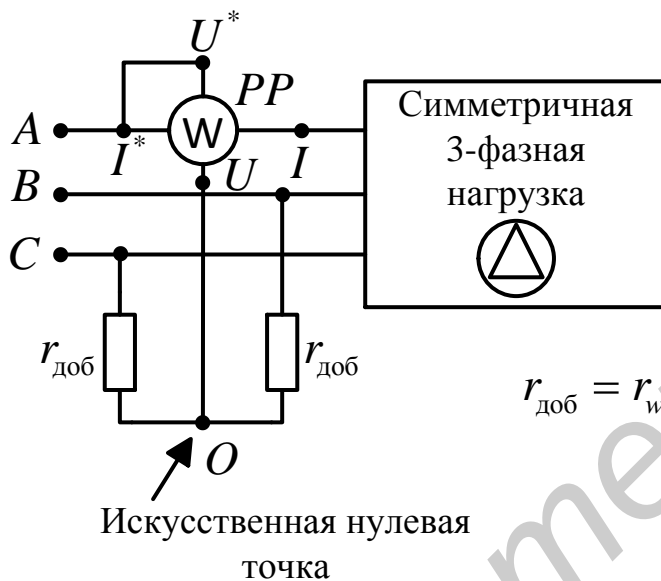
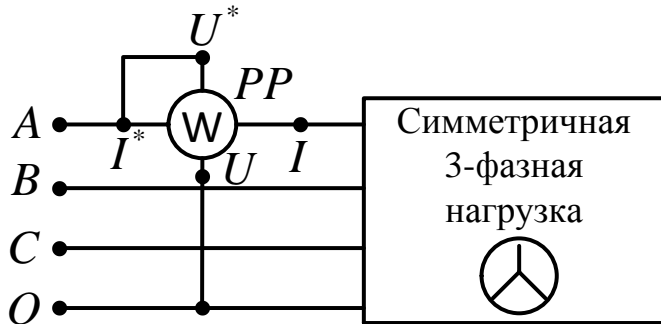


$$\frac{1}{2} I_L = I_\Phi \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} I_\Phi$$

$$I_L = \sqrt{3} I_\Phi \quad U_L = U_\Phi$$

Мощность в трёхфазной цепи

Симметричная система



Активная мощность

$$P_{\Phi} = P_{\Phi a} + P_{\Phi b} + P_{\Phi c} = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \cos \varphi_{\Phi} = 3P_{\Phi}$$

$$\star U_{\Phi} = \frac{U_{Л}}{\sqrt{3}}, I_{\Phi} = I_{Л}$$

$$P = 3 \frac{U_{Л}}{\sqrt{3}} I_{Л} = \sqrt{3} U_{Л} I_{Л} \cos \varphi_{\Phi}$$

$$\triangle I_{\Phi} = \frac{I_{Л}}{\sqrt{3}}, U_{\Phi} = U_{Л}$$

$$P = 3 \frac{I_{Л}}{\sqrt{3}} U_{Л} =$$

$$= \sqrt{3} U_{Л} I_{Л} \cos \varphi_{\Phi}$$

Реактивная мощность

$$Q_{\Phi} = Q_{\Phi a} + Q_{\Phi b} + Q_{\Phi c} = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \sin \varphi_{\Phi} = 3Q_{\Phi}$$

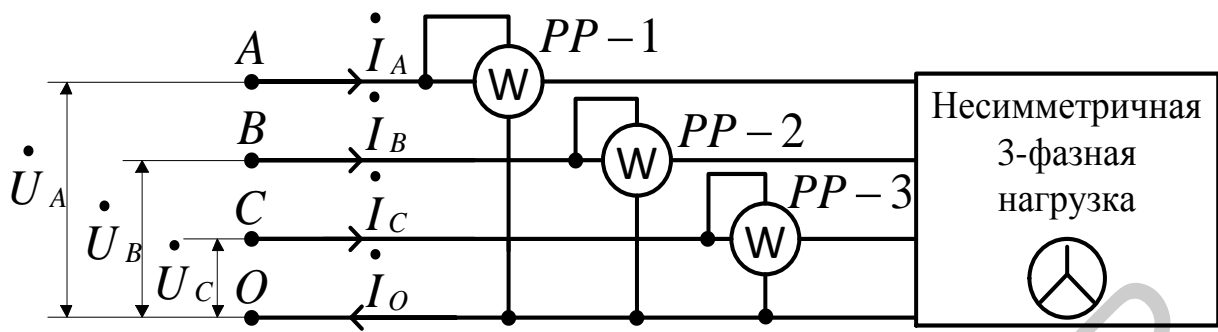
Полная мощность

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

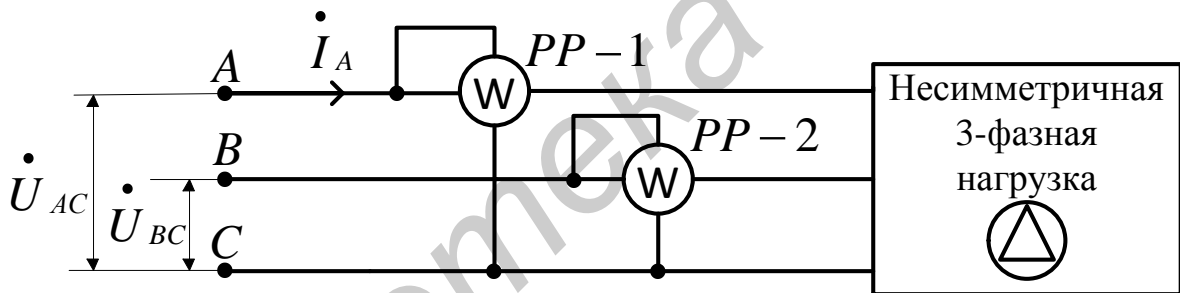
$$S = \sqrt{3U_{Л}^2 I_{Л}^2 \cos^2 \varphi_{\Phi} + 3U_{Л}^2 I_{Л}^2 \sin^2 \varphi_{\Phi}} = \sqrt{3} U_{Л} I_{Л}$$

$$S = \sqrt{9U_{\Phi}^2 I_{\Phi}^2 \cos^2 \varphi_{\Phi} + 9U_{\Phi}^2 I_{\Phi}^2 \sin^2 \varphi_{\Phi}} = 3U_{\Phi} I_{\Phi}$$

Несимметричная система



3 ваттметра: $P = P_{\Phi 1} + P_{\Phi 2} + P_{\Phi 3}$



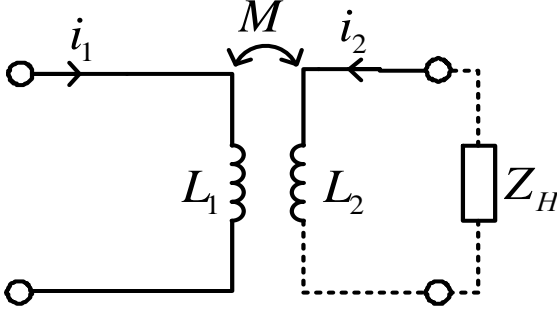
Метод Арона (2 ваттметра):

$$\hat{S} = \dot{U}_A \dot{I}_A^* + \dot{U}_B \dot{I}_B^* + \dot{U}_C \dot{I}_C^*;$$

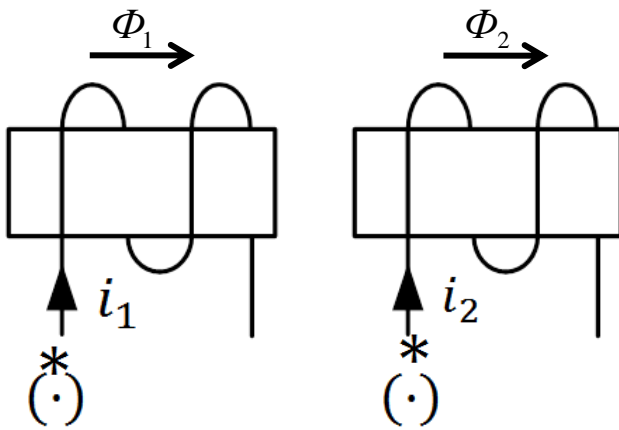
так как $\dot{I}_C = -\dot{I}_A - \dot{I}_B$, то

$$\hat{S} = \left(\dot{U}_A - \dot{U}_C \right) \dot{I}_A^* + \left(\dot{U}_B - \dot{U}_C \right) \dot{I}_B^* = \dot{U}_{AC} \dot{I}_A^* + \dot{U}_{BC} \dot{I}_B^*$$

2.7. Цепи с индуктивной связью

Основные понятия	
	<p>ЭДС самоиндукции:</p> $e_{11} = -L_1 \frac{di_1}{dt}, e_{22} = -L_2 \frac{di_2}{dt}$ <p>ЭДС взаимной индукции:</p> $e_{21} = -M \frac{di_1}{dt}, e_{12} = -M \frac{di_2}{dt}$
$M = \frac{\psi_{12}}{i_2} = \frac{\psi_{21}}{i_1} [\text{Гн}]$	Взаимная индуктивность – отношение потокосцепления к току
$\psi_{12} (\psi_{21})$	Потокосцепление 1-й (2-й) катушки, обусловленное током i_1 i_2 во 2-й (1-й) катушке
$k_{21} = \frac{e_{21}}{e_{11}} = \frac{M}{L_1}$	Степень связи 2-й катушки с 1-й
$k_{12} = \frac{e_{12}}{e_{22}} = \frac{M}{L_2}$	Степень связи 1-й катушки со 2-й
$k = \sqrt{k_{21}k_{12}} = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}$	Коэффициент связи

Согласное включение катушек

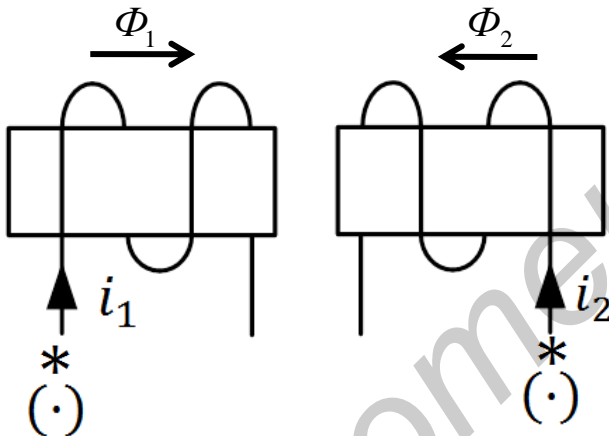


$$e_1 = e_{11} + e_{12}$$

$$e_2 = e_{22} + e_{21}$$

При согласном включении магнитные потоки двух катушек имеют одинаковое направление и результирующие ЭДС (e_1, e_2), равные сумме их ЭДС самоиндукции (e_{11}, e_{22}) и взаимной индукции (e_{11}, e_{21})

Встречное включение катушек

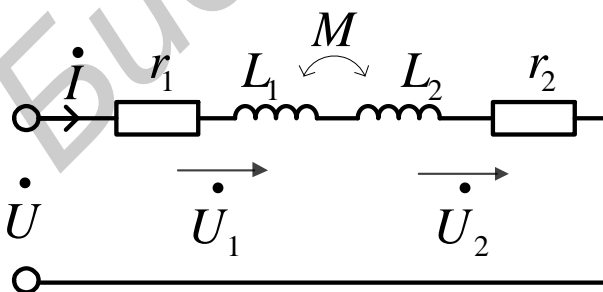


$$e_1 = e_{11} - e_{12}$$

$$e_2 = e_{22} - e_{21}$$

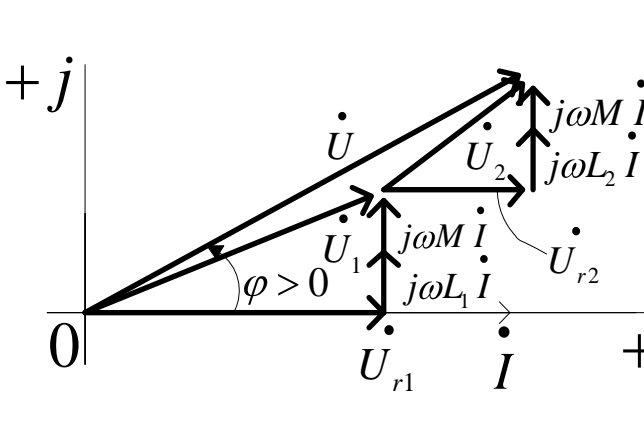
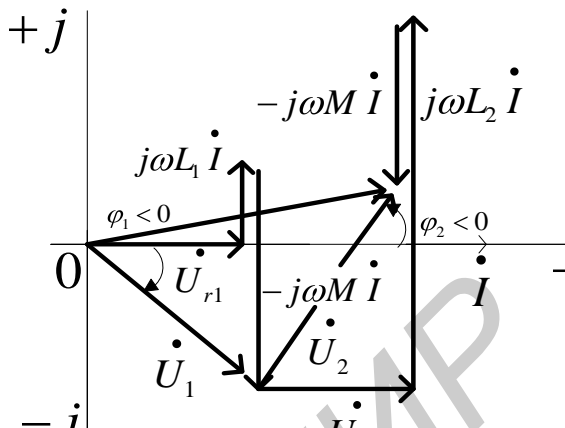
При встречном включении магнитные потоки двух катушек направлены встречно и результирующие ЭДС равны разности их ЭДС самоиндукции и взаимной индукции

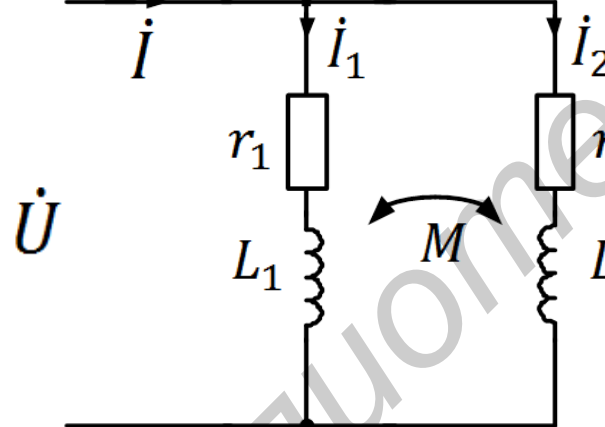
Последовательное включение индуктивно связанных катушек

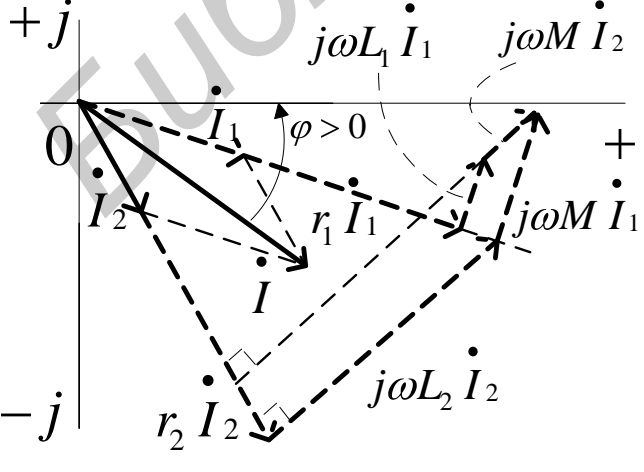
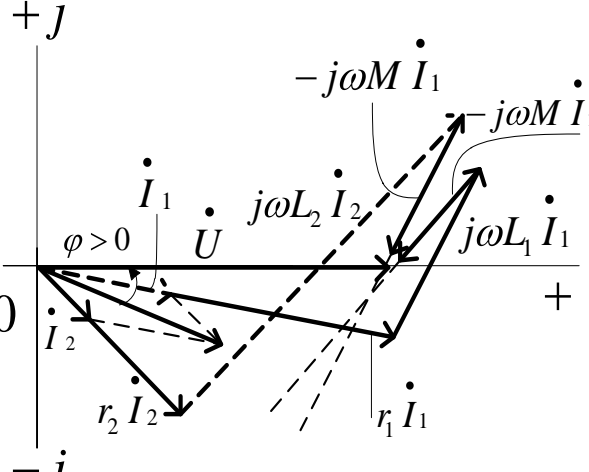


2-й закон Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= r_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} \pm j\omega M \dot{I} + \\ &+ r_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} \pm j\omega M \dot{I} = \\ &= \left[\underbrace{(r_1 + r_2)}_{r_{\text{ЭКВ}}} + j\omega \underbrace{(L_1 + L_2 \pm 2M)}_{L_{\text{ЭКВ}}} \right] \dot{I} \end{aligned}$$

Согласное включение катушек	Встречное включение катушек
 <p style="text-align: center;">$L_{\text{ЭКВ}} = L_1 + L_2 + 2M$</p>	 <p style="text-align: center;">$L_{\text{ЭКВ}} = L_1 + L_2 - 2M$ При $L_1 > L_2$ - ёмкостный эффект</p>

Параллельное соединение индуктивно связанных катушек	
	<p>2-й закон Кирхгофа для каждой ветви:</p> $\dot{U} = r_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2$ $\dot{U} = r_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1$

Согласное включение катушек	Встречное включение катушек
	

2.8. Трансформатор

Трансформатор без магнитопровода при встречном включении обмоток	
	<p>2-й закон Кирхгофа для первичной обмотки трансформатора:</p> $\dot{U}_1 = r_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2$ <p>для вторичной обмотки:</p> $0 = r_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 + \dot{U}_2$
Режимы работы трансформатора	
Режимы работы	Векторные диаграммы
<p>Уравнения трансформатора в режиме нагрузки:</p> $\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= r_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 \\ 0 &= r_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 + \dot{U}_2 \end{aligned} \right\} (2.1)$	
<p>Режим холостого хода ($\dot{I}_2 = 0$):</p> $\left. \begin{aligned} \dot{U}_{1XX} &= r_1 \dot{I}_{1XX} + j\omega L_1 \dot{I}_{1XX} \\ 0 &= -j\omega M \dot{I}_{1XX} + \dot{U}_{2XX} \end{aligned} \right\}$	

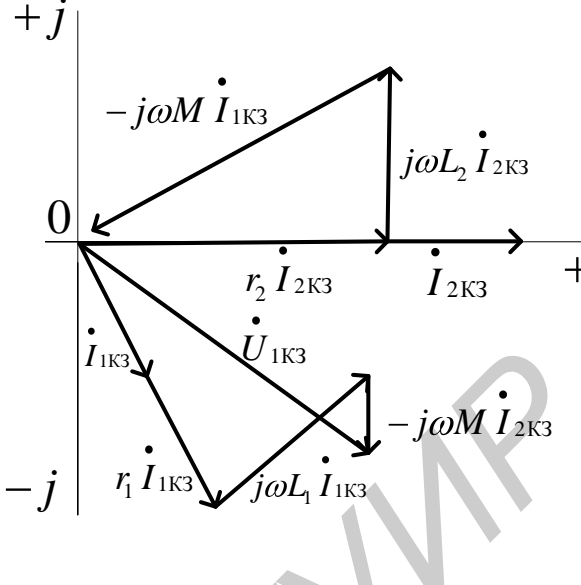
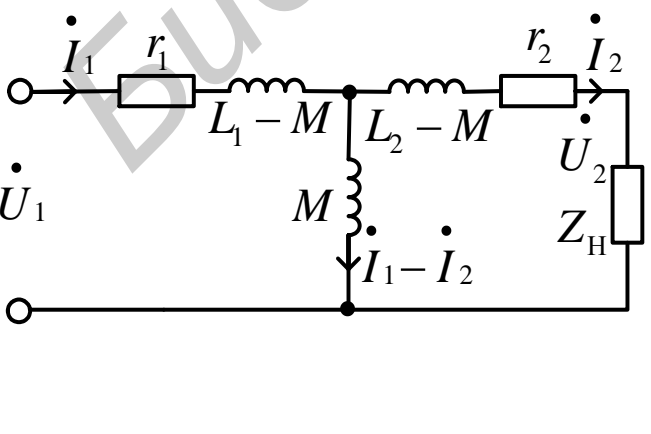
<p>Режим короткого замыкания ($\dot{U}_2 = 0$):</p> $\left. \begin{aligned} \dot{U}_{1КЗ} &= r_1 \dot{I}_{1КЗ} + j\omega M \dot{I}_{1КЗ} - j\omega M \dot{I}_{2КЗ} \\ 0 &= r_2 \dot{I}_{2КЗ} + j\omega L_2 \dot{I}_{2КЗ} - j\omega M \dot{I}_{1КЗ} \end{aligned} \right\}$	
---	--

Схема замещения трансформатора

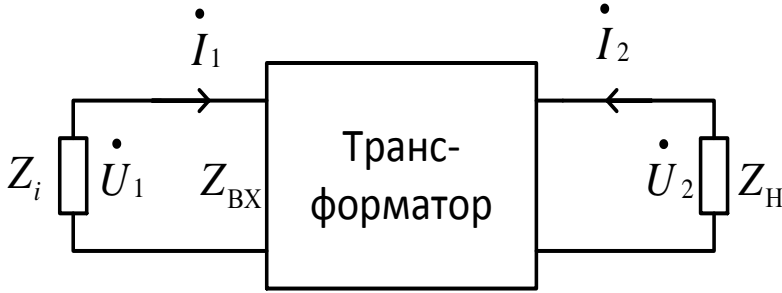
<p>В первое уравнение системы (2.1) добавим $\pm j\omega M \dot{I}_1$</p> <p>Во второе уравнение системы (2.1) добавим $\pm j\omega M \dot{I}_2$</p>	$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= r_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 - \\ &- j\omega M \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_1 \\ 0 &= r_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 - \\ &- j\omega M \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_2 + \\ &+ \dot{U}_2 \end{aligned}$
--	--

Схема замещения

Система уравнений


<p>В схеме замещения отсутствуют индуктивные связи</p> 	$\left\{ \begin{aligned} \dot{U}_1 &= r_1 \dot{I}_1 + j\omega(L_1 - M) \dot{I}_1 + \\ &+ j\omega M (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) \\ 0 &= r_2 \dot{I}_2 + j\omega(L_2 - M) \dot{I}_2 - \\ &- j\omega M (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + \dot{U}_2 \end{aligned} \right.$ <p>При $(L - M) < 0$ элемент $L - M$ можно заменить ёмкостью</p>
--	--

Идеальный трансформатор	
Режим работы	Уравнения
<p>У идеального трансформатора L_1 и L_2 обмоток велики, r_1 и r_2 – малы, коэффициент связи $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1$</p>	<p>Система уравнений (2.1) имеет вид:</p> $\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= j\omega M \dot{I}_1 - j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{aligned} \right\} (2.2)$
<p>Коэффициент трансформации равен отношению числа обмоток</p>	$k_T = \frac{e_2}{e_1} = \frac{-w_2 \frac{d\Phi}{dt}}{-w_1 \frac{d\Phi}{dt}} = \frac{w_2}{w_1}$
<p>Режим холостого хода $\dot{I}_2 = 0$</p>	<p>Система уравнений (2.2) имеет вид:</p> $\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 &= j\omega M \dot{I}_1 \end{aligned} \right\},$ <p>откуда $\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{M}{L_1}$,</p> $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1$ <p>при $M = \sqrt{L_1 L_2}$,</p> <p>тогда $\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\sqrt{L_2}}{\sqrt{L_1}} \approx \frac{w_2}{w_1} = k_T$</p>
<p>Режим короткого замыкания $\dot{U}_2 = 0$</p>	<p>Второе уравнение системы (2.2) имеет вид:</p> $0 = j\omega M \dot{I}_1 - j\omega L_2 \dot{I}_2,$ <p>откуда</p> $\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{L_2}{M} = \frac{\sqrt{L_2}}{\sqrt{L_1}} \approx \frac{w_2}{w_1} = k_T$

Уравнения идеального трансформатора	$\left. \begin{aligned} \dot{U}_2 &= k_T \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 &= k_T \dot{I}_2 \end{aligned} \right\}$
<p style="text-align: center;">Согласующий трансформатор</p> 	$Z_{BX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 / k_T}{k_T \dot{I}_2} = \frac{Z_H}{k_T^2}$ $Z_H = k_T^2 Z_{BX}$

3. Избирательные электрические цепи

3.1. Комплексные функции и частотные характеристики электрических цепей (ЭЦ)

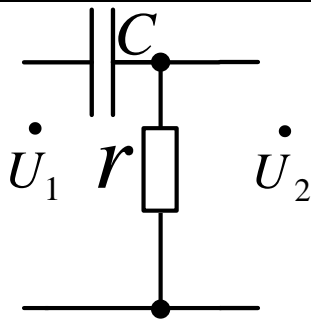
Комплексные функции ЭЦ	
<p>Комплексные функции цепи $K(j\omega)$ есть отношения комплексных токов и напряжений, действующих на входе и выходе цепи при синусоидальном воздействии</p>	 $K(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{F(j\omega)}$ <p>$F(j\omega)$ – воздействие на ЭЦ (ток или напряжение) $X(j\omega)$ – реакция (отклик) ЭЦ (ток или напряжение)</p>

<p>Амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) цепи $K(j\omega)$ есть зависимость амплитуды и фазы проходящего через ЭЦ сигнала от частоты</p>	$K(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{X(\omega)e^{j\varphi_X(\omega)}}{K(\omega)e^{j\varphi_F(\omega)}} =$ $= K(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \underbrace{K(\omega)\cos\varphi(\omega)}_{A(\omega)} +$ $+ \underbrace{jK(\omega)\sin\varphi(\omega)}_{B(\omega)}$
<p>Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) цепи есть зависимость модуля $K(j\omega)$ комплексной функции цепи от частоты. Величина $K(j\omega)$ определяет отношение амплитуды реакции цепи к амплитуде воздействия</p>	$K(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = K(j\omega) =$ $= \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$
<p>Фазочастотная характеристика (ФЧХ) цепи есть зависимость аргумента $\varphi(\omega)$ комплексной функции от частоты. Величина $\varphi(\omega)$ определяет сдвиг по фазе реакции цепи относительно воздействия</p>	$\varphi(\omega) = \varphi_X(\omega) - \varphi_F(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$
<p>Вещественная частотная характеристика (ВЧХ) цепи есть зависимость вещественной части $A(\omega)$ комплексной функции цепи от частоты</p>	$A(\omega) = K(\omega)\cos\varphi(\omega)$

Мнимая частотная характеристика (МЧХ) цепи есть зависимость мнимой части $B(\omega)$ комплексной функции цепи от частоты	$B(\omega) = K(\omega)\sin\varphi(\omega)$
Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) – натуральный логарифм от АЧХ	$\ln K(j\omega) = \ln K(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \underbrace{\ln K(\omega)}_{\text{ЛАЧХ}} + \underbrace{j\varphi(\omega)}_{\text{ФЧХ}}$
Частотные характеристики	
АФХ	$K(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$
АЧХ	$K(\omega) = K(j\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$
ФЧХ	$\varphi(\omega) = \varphi_X(\omega) - \varphi_F(\omega) =$ $= \arg K(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$
ВЧХ	$A(\omega) = \operatorname{Re} K(j\omega) = K(\omega)\cos\varphi(\omega)$
МЧХ	$B(\omega) = \operatorname{Im} K(j\omega) = K(\omega)\sin\varphi(\omega)$
ЛАЧХ	$\ln K(\omega)$

Единицы измерения усиления или затухания (ослабления) проходящего сигнала через согласованную симметричную ЭЦ	
<p>Усилению (затуханию) в 1 непер [Нп] соответствует увеличение (уменьшение) действительного значения напряжения или тока на выходе ЭЦ в $e = 2,718$ раз больше, чем на входе.</p>	<p>Для напряжения (тока):</p> $a_{Нп} = \ln \frac{X}{F} \quad 1 \text{ Нп} ,$ <p>т.к. $\frac{X}{F} = 2,718 ;$</p> $\ln \frac{X}{F} = 2,3 \lg \frac{X}{F} .$ <p>Для мощности:</p> $a_{Нп} = 0,5 \ln \frac{S_{ВЫХ}}{S_{ВХ}} = 1,15 \lg \frac{S_{ВЫХ}}{S_{ВХ}}$
<p>Усилению (затуханию) в 1 бел [Б] соответствует увеличение (уменьшение) полной мощности на выходе ЭЦ в 10 раз относительно входа (2 Б – 100 раз)</p>	<p>Для мощности:</p> $a_{Б} = \lg \frac{S_{ВЫХ}}{S_{ВХ}} \quad 1Б$ <p>Для напряжения (тока):</p> $a_{Б} = \lg \frac{U_2 I_2}{U_1 I_1} = \lg \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^2 = \lg \left(\frac{I_2}{I_1} \right)^2 =$ $= 2 \lg \frac{U_2}{U_1} = 2 \lg \frac{I_2}{I_1} \quad 1Б$
<p>Децибел – единица усиления (затухания), в 10 раз большая (меньшая) бела</p>	$a_{дБ} = 20 \lg \frac{U_2}{U_1} \quad 1дБ$
<p>Усилению (затуханию) в 1 дБ соответствует увеличение (уменьшение) полной мощности проходящего через ЭЦ тока в 1,26 раза или увеличение (уменьшение) величины напряжения (тока) в 1,12 раза</p>	<p>Из соотношения</p> $\frac{a_{дБ}}{a_{Нп}} = \frac{20 \lg \frac{F}{X}}{\ln \frac{F}{X}} = \frac{20 \lg \frac{F}{X}}{2,3 \lg \frac{F}{X}} = 8,686$ <p>следует, что</p> $1 \text{ Нп} \approx 0,8686 \text{ Б} \approx 8,686 \text{ дБ}$ $1 \text{ дБ} \approx 0,1 \text{ Б} \approx 0,115 \text{ Нп}$

3.2. Дифференцирующая цепь



Комплексная функция цепи по напряжению:

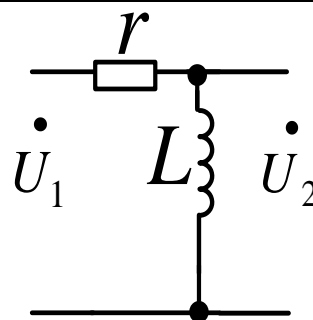
$$K_{U_{Cr}}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}r}{\dot{I}\left(r + \frac{1}{j\omega C}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega rC}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega\tau_u}} =$$

$$= \frac{j\omega\tau_u}{1 + j\omega\tau_u}.$$

Постоянная времени цепи Cr -цепи:

$$\tau_{u_{rC}} = rC$$



Комплексная функция цепи по напряжению:

$$K_{U_{rL}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}j\omega L}{\dot{I}(r + j\omega L)} = \frac{j\omega\tau_u}{1 + j\omega\tau_u}.$$

Постоянная времени $\tau_{urL} = \frac{L}{r}$

RL -цепи характеризует скорость изменения напряжения

Cr -цепь и rL -цепь – дуальны

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{j\omega\tau_u}{1 + j\omega\tau_u} = \frac{\omega\tau_u}{\underbrace{\sqrt{1 + (\omega\tau_u)^2}}_{K_U(\omega) \leftarrow \text{АЧХ}}} \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\text{ФЧХ: } \varphi(\omega) = j \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg} \omega\tau_u \right)$$

$$\text{или } K_U(j\omega) = \frac{j\omega\tau_u}{1 + j\omega\tau_u} = \frac{j\omega\tau_u(1 - j\omega\tau_u)}{1 + (\omega\tau_u)^2} = \frac{\omega\tau_u}{1 + (\omega\tau_u)^2} + j \frac{(\omega\tau_u)^2}{1 + (\omega\tau_u)^2},$$

откуда АЧХ : $K_U(\omega) = \frac{\omega\tau_u}{\sqrt{1+(\omega\tau_u)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(\omega\tau_u)^2}}}$,

ФЧХ: $\varphi(\omega) = \arctg \left[\frac{(\omega\tau_u)^2}{1+(\omega\tau_u)^2} \right] / \left[\frac{\omega\tau_u}{1+(\omega\tau_u)^2} \right] = \arctg \frac{1}{\omega\tau_u}$

АЧХ дифференцирующей цепи

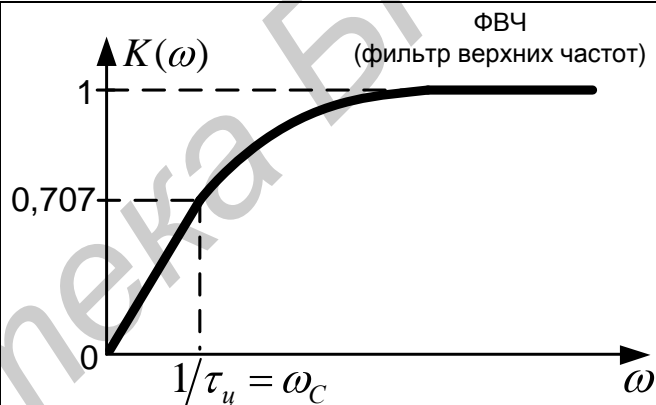
$$K(\omega) = |K(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega\tau_u}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2\tau_u^2}}}$$

При $\omega=0$ $K(\omega) \rightarrow 0$;

при $\omega = \frac{1}{\tau_u} = \omega_c$

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707;$$

при $\omega \rightarrow \infty$ $K(\omega) \rightarrow 1$



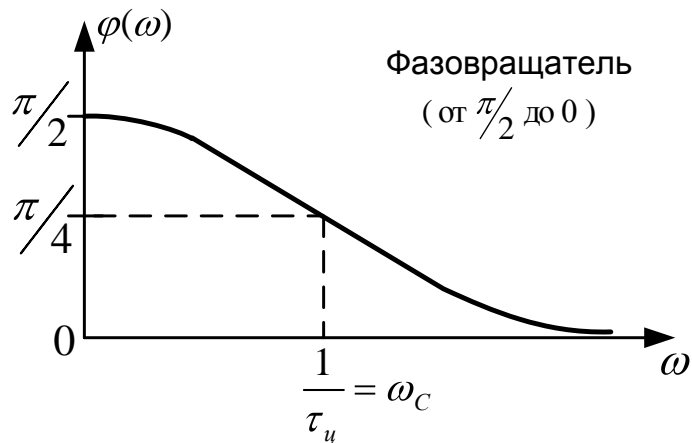
ФЧХ дифференцирующей цепи

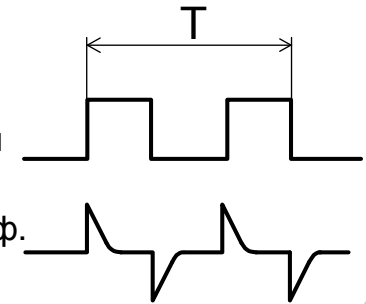
$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{1}{\omega\tau_u} = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega\tau_u$$

при $\omega=0$ $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$;

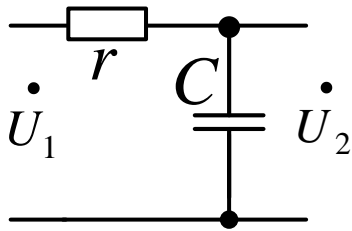
при $\omega = \frac{1}{\tau_u} = \omega_c$ $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{4}$;

при $\omega \rightarrow \infty$ $\varphi(\omega) \rightarrow 0$



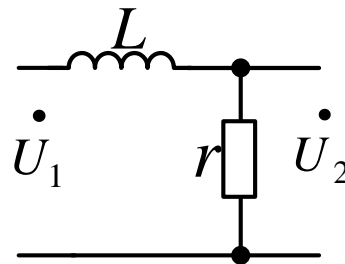
Дифференцирующая цепь	Переходная цепь
<p>При $\omega\tau_u \ll 1$ или $\tau_u \ll T$</p> $K_U(j\omega) = \frac{j\omega\tau_u}{1 + j\omega\tau_u} \approx j\omega\tau_u =$ $= \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1},$ <p>откуда $\dot{U}_2 \approx j\omega\tau_u \dot{U}_1$.</p> <p>Умножение на j есть математическая операция дифференцирования, т.е. при $\tau_u \ll T$ цепь $Cr(rL)$ – дифференцирующая</p>  <p>Вход цепи</p> <p>Выход диф. цепи</p>	<p>При $\omega\tau_u \gg 1$</p> $2\pi f\tau_u \gg 1$ $\frac{2\pi\tau_u}{T} \gg 1$ $\tau_u \gg T$ $K_U(j\omega) = \frac{j\omega\tau_u}{1 + \frac{1}{j\omega\tau_u}} \approx 1 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1},$ <p>откуда $\dot{U}_2 \approx \dot{U}_1$, т.е. при $\tau_u \gg T$ цепь $Cr(rL)$ – переходная, форма сигнала практически не искажается</p>

3.3. Интегрирующая цепь



Комплексная функция rC -цепи по напряжению:

$$K_{U_{rC}}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I} \frac{1}{j\omega C}}{\dot{I} \left(r + \frac{1}{j\omega C} \right)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_u}$$



Комплексная функция Lr -цепи по напряжению:

$$K_{U_{rL}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I} r}{\dot{I} (r + j\omega L r)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_u}$$

Постоянная времени rC -цепи:

$$\tau_{u_{rC}} = rC$$

Постоянная времени Lr -цепи:

$$\tau_{u_{Lr}} = \frac{L}{r}$$

rC -цепь и Lr -цепь – дуальны

АЧХ: $K_U(\omega) = |K_U(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau_u} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau_u)^2}}$

ФЧХ: $K_U(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau_u} = \frac{1 - j\omega\tau_u}{1 + (j\omega\tau_u)^2} = \frac{1}{1 + (j\omega\tau_u)^2} - j \frac{\omega\tau_u}{1 + (j\omega\tau_u)^2},$

откуда $\varphi(\omega) = \arctg \left[-\frac{\omega\tau_u}{1 + (\omega\tau_u)^2} \right] / \left[\frac{1}{1 + (\omega\tau_u)^2} \right] = -\arctg \omega\tau_u$

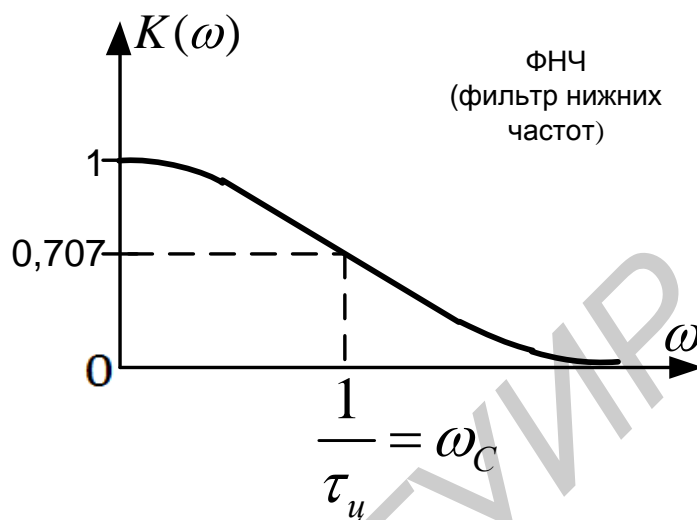
АЧХ интегрирующей цепи

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau_u)^2}}$$

При $\omega = 0$ $K(\omega) = 1$;

при $\omega = \frac{1}{\tau_u} = \omega_c$ $K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

при $\omega \rightarrow \infty$ $K(\omega) \rightarrow 0$.



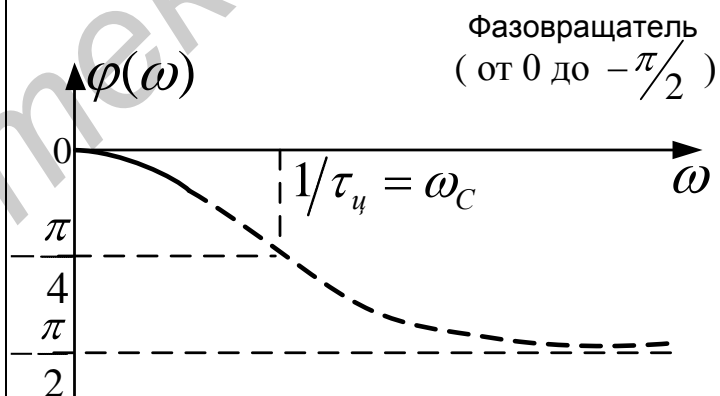
ФЧХ интегрирующей цепи

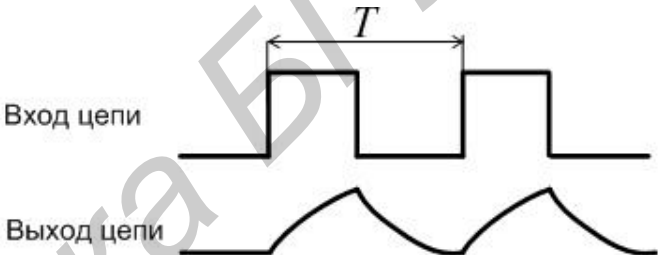
$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega\tau_u$$

$\omega = 0$ $\varphi(\omega) = 0$

$\omega = \frac{1}{\tau_u} = \omega_c$ $\varphi(\omega) = -\pi/4$

$\omega \rightarrow \infty$ $\varphi(\omega) \rightarrow -\pi/2$



Интегрирующая цепь	Переходная цепь
<p>При $\omega\tau_u \ll 1$ или $\tau_u \ll T$</p> $K_U(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau_u} \approx 1 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1},$ <p>откуда $\dot{U}_2 \approx \dot{U}_1$, т.е. при $\tau_u \ll T$</p> <p>цепь $rC(Lr)$ – переходная (форма сигнала практически не искажается)</p>	<p>При $\omega\tau_u \gg 1$ или $\tau_u \gg T$</p> $K_U(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau_u} \approx \frac{1}{j\omega\tau_u} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1},$ <p>откуда $\dot{U}_2 \approx \frac{\dot{U}_1}{j\omega\tau_u}$.</p> <p>Деление на j есть математическая операция интегрирования, т.е. при $\tau_u \gg T$ цепь $rC(Lr)$ – интегрирующая</p>  <p>Вход цепи</p> <p>Выход цепи</p>

3.4. Последовательный колебательный контур

Схема	Параметры
	<p>Первичные: r, L, C</p> <p>Вторичные: $\omega_0, f_0, \rho, Q, d$</p>
<p>Резонансная частота ω_0 – частота, при которой в контуре возникает резонанс напряжений и ток максимален</p>	<p>Резонанс наступает при равенстве нулю реактивного сопротивления контура $X = X_L - X_C = 0$,</p> <p>откуда $\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$,</p> <p>$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, I_{m_0} = \frac{E_m}{r}$</p>

<p>Характеристическое (или волновое) сопротивление ρ – сопротивление индуктивности или емкости на резонансной частоте</p>	$\rho = \omega_0 L \text{ или } \rho = \frac{1}{\omega_0 C},$ <p>т.к. $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ Ом .</p> <p>На практике $\rho \approx 100 \div 500$ Ом</p>
<p>Добротность Q – отношение напряжения на индуктивности или емкости к напряжению на входе контура при резонансе</p>	$Q = \frac{U_{mL0}}{E_m} \text{ или } Q = \frac{U_{mC0}}{E_m},$ <p>т.к. $\omega_{mL0} = \frac{I_{m0}\rho}{E_m} = \frac{(E_m/r) \cdot \rho}{E_m},$</p> <p>то $Q = \frac{\rho}{r}$, или $Q = \frac{\omega_0 L}{r},$</p> <p>или $Q = \frac{1}{\omega_0 Cr}$</p>
<p>Затухание d – величина, обратная Q</p>	$d = \frac{1}{Q}$

Частотные характеристики

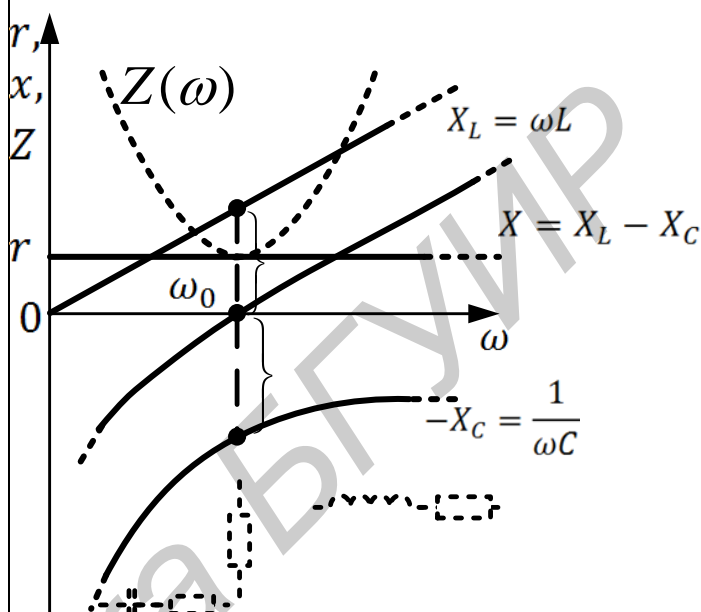
Комплексное входное сопротивление:

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \\ &= r + j(X_L - X_C) = \\ &= r + jX(\omega) = Z(\omega)e^{j\varphi_z(\omega)} \\ Z(\omega) &= \sqrt{r^2 + X^2(\omega)}. \end{aligned}$$

При $\omega < \omega_0$ сопротивление контура $Z(\omega)$ носит активно-емкостный характер, при $\omega > \omega_0$ – активно-индуктивный, при $\omega = \omega_0$ – активный

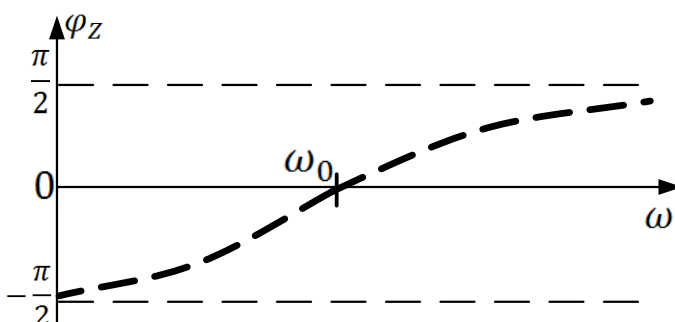
Графики r, X

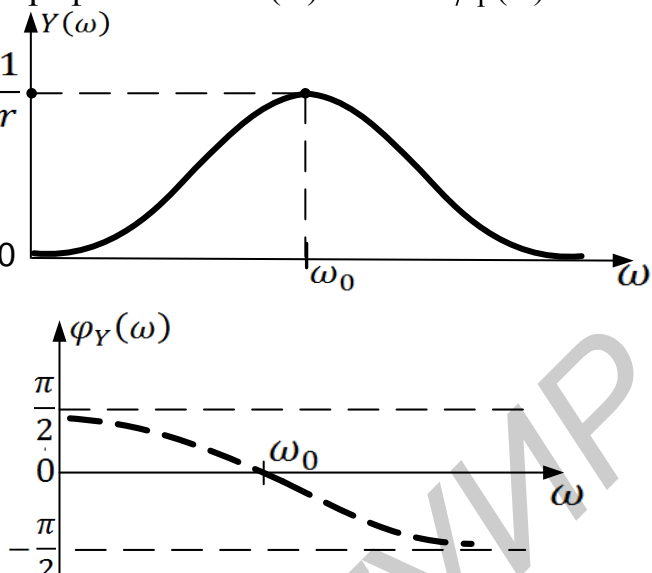
АЧХ: $Z(\omega) = \sqrt{r^2 + X^2(\omega)}$



ФЧХ:

$$\varphi_z(\omega) = \arctg \frac{X(\omega)}{r} = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{r}$$



<p>Комплексная входная проводимость:</p> $Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)} =$ $= \frac{1}{Z(\omega)} e^{-j\varphi_Z(\omega)} = Y(\omega) e^{j\varphi_Y(\omega)},$ $Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + X^2(\omega)}},$ $\varphi_Y(\omega) = -\varphi_Z(\omega)$	<p>Графики АЧХ $Y(\omega)$ и ФЧХ $\varphi_Y(\omega)$</p> 
<p>Фактор расстройки показывает, насколько и в какую сторону частота входного сигнала контура отличается от резонансной частоты ω_0 контура.</p> <p>При $\omega = \omega_0$ $\zeta = 0$; при $\omega > \omega_0$ $\zeta > 0$; при $\omega < \omega_0$ $\zeta < 0$</p>	$Y(j\omega) = \frac{1}{r + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} =$ $= \frac{1}{r \left[1 + j \frac{\omega_0 L}{r} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]} =$ $= \frac{1}{r(1 + jQ\zeta)}.$ $\zeta = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}, \quad \zeta = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}$

Обобщенная расстройка

Абсолютная расстройка

Относительная расстройка

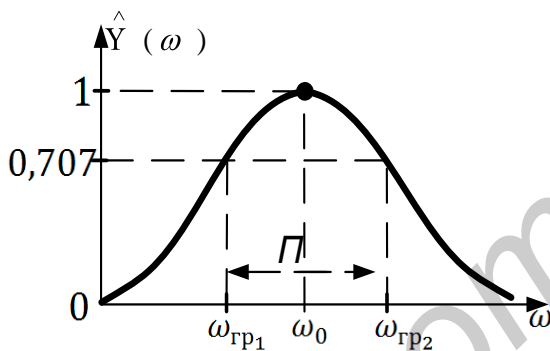
Нормированная АЧХ:

$$\hat{Y}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\zeta^2}}$$

Полоса пропускания контура П – диапазон частот, в пределах которого АЧХ (например $Y(\omega)$)

не ниже уровня $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$ от

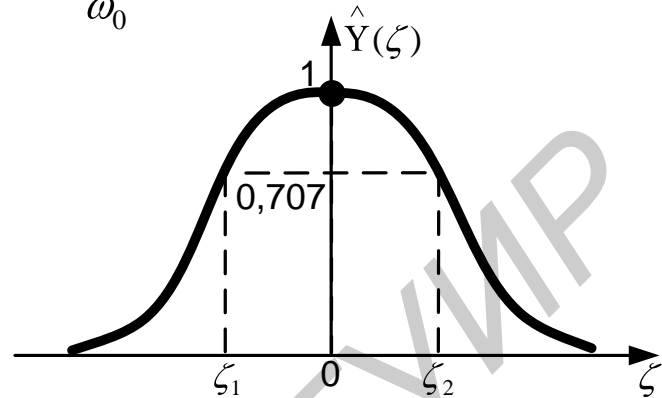
максимального значения



$Q\zeta$

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0$$

$$\delta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$



$$\hat{Y}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\zeta^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда $1+Q^2\zeta^2=2$, $\zeta = \pm \frac{1}{Q}$,

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \mp \frac{1}{Q} = 0 \text{ или}$$

$$\omega^2 \mp 2 \frac{\omega_0}{2Q} \omega - \omega_0^2 = 0.$$

Решение уравнения:

$$\omega_{гр1,2} = \pm \frac{\omega_0}{2Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4Q^2} + \omega_0^2}.$$

Полоса пропускания

$$\Pi = \omega_{гр2} - \omega_{гр1} = \frac{\omega_0}{Q} \text{ или}$$

$$\Delta F = \frac{2\pi f_0}{Q}.$$

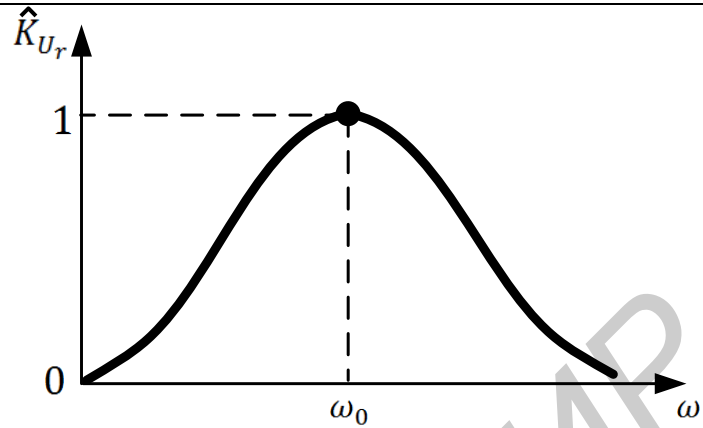
Относительная полоса пропускания

$$\Pi_0 = \frac{\Pi}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = d$$

Комплексные передаточные функции контура

Комплексная передаточная функция по напряжению на активном сопротивлении:

$$K_{U_r}(j\omega) = \frac{\dot{U}_r}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = rY(j\omega) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + X^2(\omega)}}$$



Комплексная передаточная функция по напряжению на емкости:

$$K_{U_C}(j\omega) = \frac{\dot{U}_C}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = Y(j\omega) \cdot \frac{1}{\omega C}$$

Максимальное значение АЧХ:

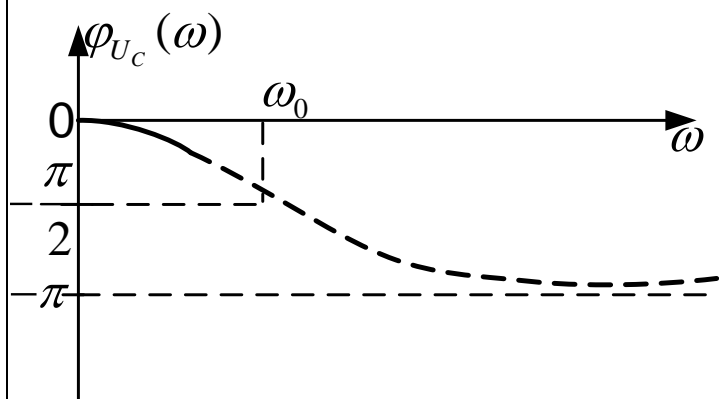
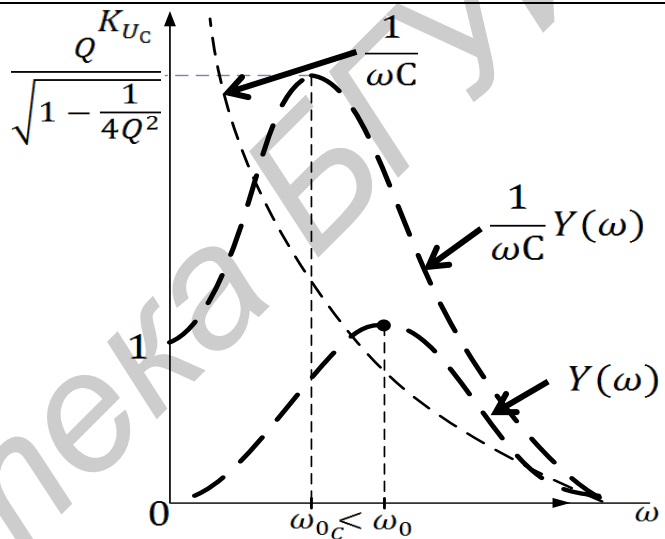
$$K_{U_C}(\omega) = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

на частоте $\omega_{0C} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \approx$

$$\approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)$$

ФЧХ:

$$\varphi_{U_C}(\omega) = -\pi/2 + \varphi_Y(\omega)$$



Комплексная передаточная функция по напряжению на индуктивности:

$$K_{U_L}(j\omega) = \frac{\dot{U}_L}{\dot{U}_{ВХ}} = Y(j\omega) \cdot \omega L.$$

Максимальное значение АЧХ:

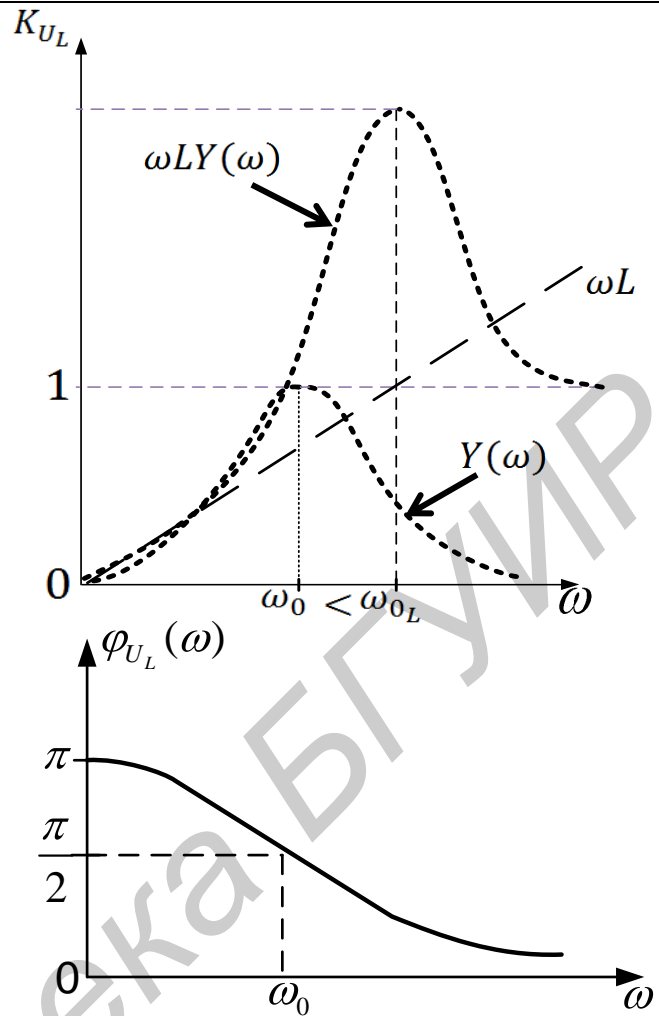
$$K_{U_L}(\omega) = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

на частоте

$$\omega_{0L} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{4Q^2}\right)$$

ФЧХ:

$$\varphi_{U_L}(\omega) = \pi/2 + \varphi_Y(\omega)$$

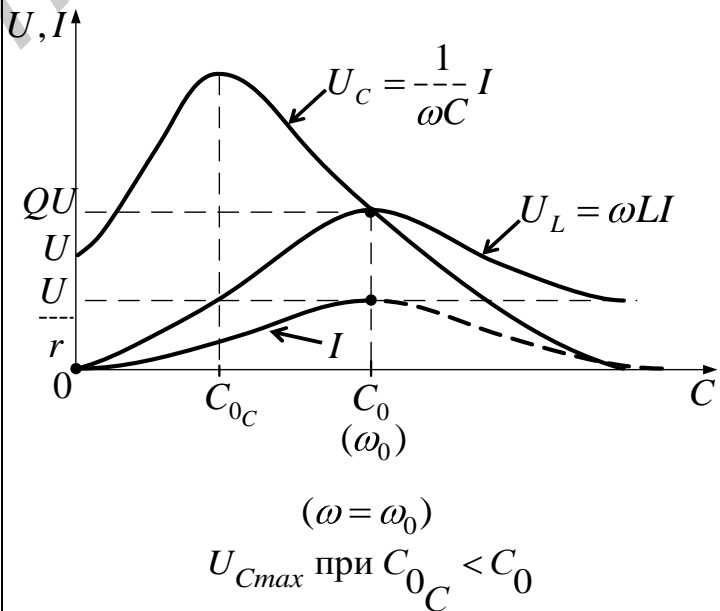


Настроечные кривые:

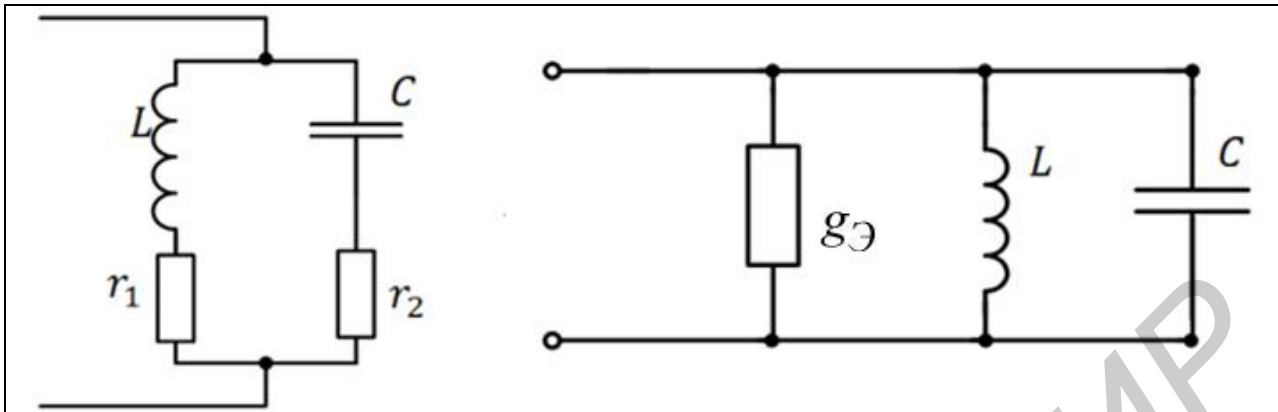
$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}},$$

$$U_L = I\omega L = \frac{U\omega L}{\sqrt{r^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}},$$

$$U_C = I \frac{1}{\omega C} = \frac{U}{\omega C \sqrt{r^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$



3.5. Простой параллельный колебательный контур



Вторичные параметры

Входная проводимость \dot{Y}

при $r_1 \ll \omega L$,

$r_2 \ll \frac{1}{\omega C}$.

$$\dot{Y} \approx \underbrace{\frac{r_1}{\omega^2 L^2} + \frac{r_2}{1/\omega^2 C^2}}_{g_{\text{Э}}} +$$

$$+ j \underbrace{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)}_{b_{\text{Э}}} \approx$$

$$\approx g_{\text{Э}} + j b_{\text{Э}}$$

$$\dot{Y} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 = \frac{1}{r_1 + j\omega L} + \frac{1}{r_2 - j1/\omega C} =$$

$$= \frac{r_1}{r_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{r_2}{r_2^2 + 1/\omega^2 C^2} +$$

$$+ j \underbrace{\left(\frac{1/\omega C}{r_2^2 + 1/\omega^2 C^2} - \frac{\omega L}{r_1^2 + \omega^2 L^2} \right)}_{b_{\text{Э}}} =$$

$$= g_{\text{Э}} + j b_{\text{Э}}$$

Резонансная частота ω_p

при $r_1 \ll \omega L$,

$r_2 \ll \frac{1}{\omega C}$,

или

$r_1 \ll \rho$,

$r_2 \ll \rho$

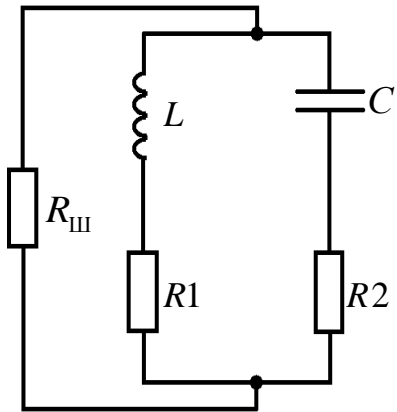
$$\frac{1/\omega_p C}{r_2^2 + 1/\omega_p^2 C^2} - \frac{\omega_p L}{r_1^2 + \omega_p^2 L^2} = 0$$

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - r_1^2}{\rho^2 - r_2^2}},$$

$$\omega_p \approx \omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

<p>Характеристическое сопротивление ρ</p>	$\rho = \omega_0 L, \text{ или } \rho = \frac{1}{\omega_0 C}, \text{ или } \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$
<p>Активная проводимость (сопротивление) на резонансной частоте $g_{\text{Э}0} (R_{0\text{Э}})$</p>	<p>$g_{\text{Экв}} \omega_0$ или</p> $g_{\text{Э}0} = \frac{r_1}{\omega_0 L^2} + \frac{r_2}{\left(\frac{1}{\omega_0 C}\right)^2} = \frac{r_{\text{Э}}}{\rho^2},$ <p>где $r_{\text{Э}} = r_1 + r_2$ – суммарное активное сопротивление потерь.</p> $R_{0\text{Э}} = \frac{1}{g_{\text{Э}0}} = \frac{\rho^2}{r_{\text{Э}}} \text{ при } \omega \approx \omega_0,$ $R_{0\text{Э}} \approx Z_{0\text{Э}}$
<p>Добротность контура Q – отношение тока на индуктивности I_{L_0} или ёмкости I_{C_0} к силе тока контура на резонансной частоте I_0</p>	$Q = \frac{I_{C_0}}{I_0} \text{ или } Q = \frac{I_{L_0}}{I_0}$ $Q = \frac{I_{C_0}}{I_0} = \frac{U/\rho}{U/g_{\text{Э}0}} = \frac{\rho}{r_{\text{Э}}} = \frac{R_{0\text{Э}}}{\rho}$
<p>Затухание d</p>	$d = \frac{1}{Q}$

Ухудшенная добротность контура Q'



R_{III} – шунтирующее сопротивление

$$Q' = \frac{R'}{\rho}$$

$$R' = \frac{R_{0Э} R_{III}}{R_{0Э} + R_{III}}$$

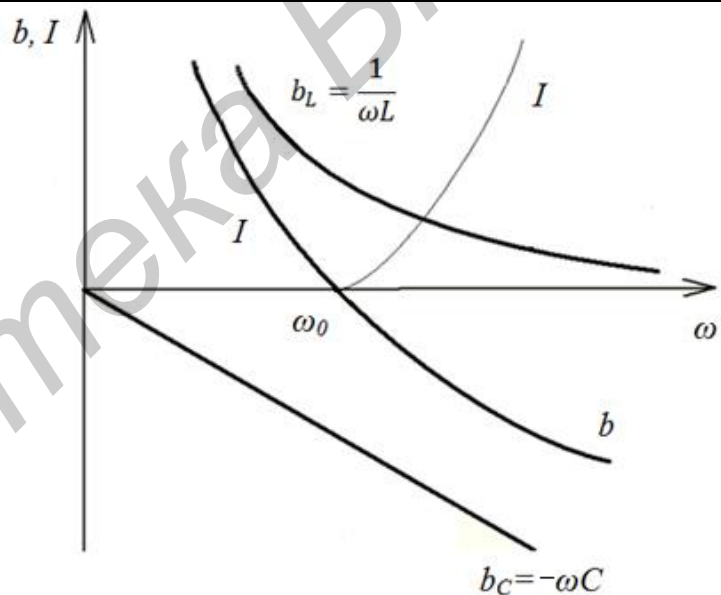
$$Q' = Q \frac{1}{1 + \frac{R_{0Э}}{R_{III}}}$$

Частные характеристики простого параллельного контура

Частотные характеристики проводимостей ветвей

b_L и b_C .

Сила тока $I = |b|U$, поэтому кривая $|b|$ в соответствующем масштабе есть резонансная кривая тока $I \omega$



$$b = b_L + b_C$$

Входное сопротивление контура $Z(j\omega)$ и его нормированное значение $\hat{Z}(\omega)$:

нормированное значение $\hat{Z}(\omega)$:

$$Z(j\omega) = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{1}{Y} =$$

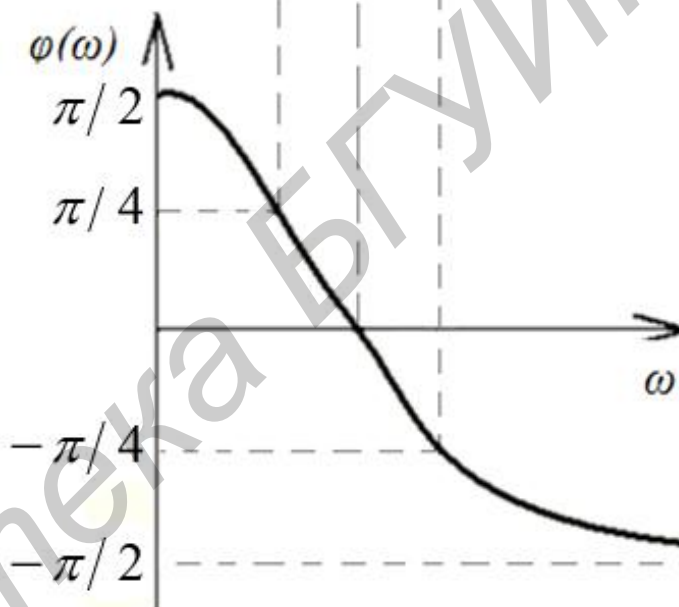
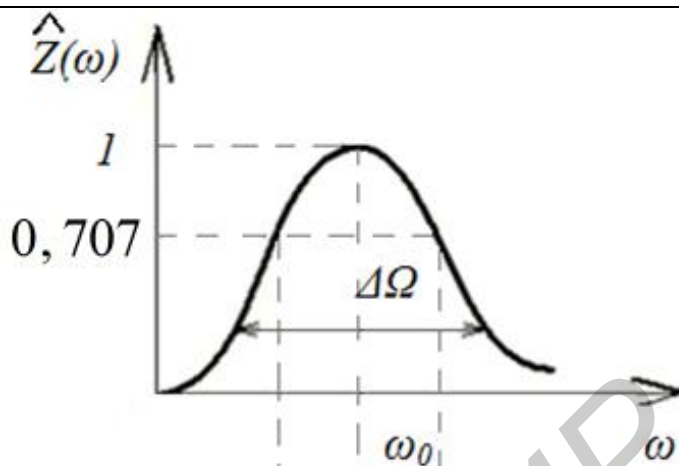
$$= \frac{1}{g_{\text{Э}0} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\left[1 + j \frac{R_{03}}{\rho} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]} \times$$

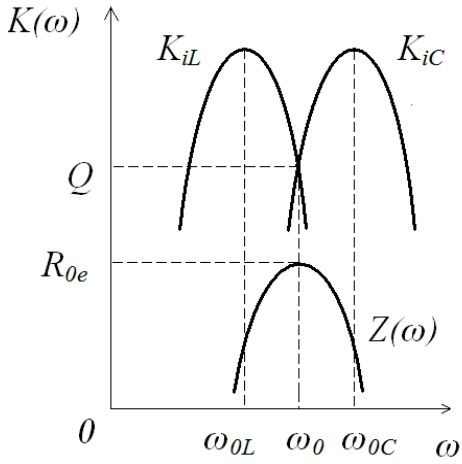
$$\times \frac{1}{g_{\text{Э}0}} = \frac{R_{03}}{1 + jQ\xi}$$

$$\hat{Z}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \xi^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg Q \xi$$



Комплексная передаточная функция контура по току в индуктивности $K_{iL} j\omega_0$ и емкости $K_{iC} j\omega_0$



$$\omega_{0L} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

$$\omega_{0C} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

$$K_{iL} j\omega = \frac{\dot{I}_L}{\dot{I}} = Z j\omega \frac{1}{j\omega L}$$

или

$$K_{iL} j\omega =$$

$$= \frac{1}{g_{\Sigma_0} + j\omega C - \frac{1}{\omega L}}$$

откуда

$$K_{iL} \omega = \frac{1}{\omega L \sqrt{g_{\Sigma_0}^2 + \omega C - \frac{1}{\omega L}}^2}$$

$$K_{iC} j\omega = \frac{\dot{I}_C}{\dot{I}} = Z j\omega j\omega C$$

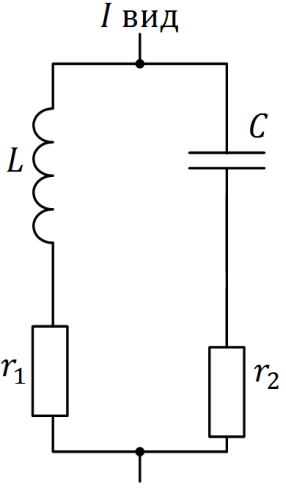
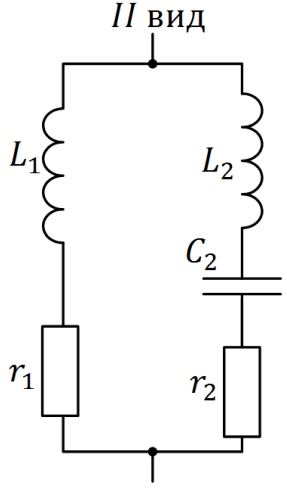
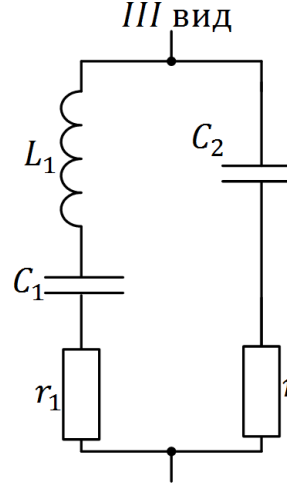
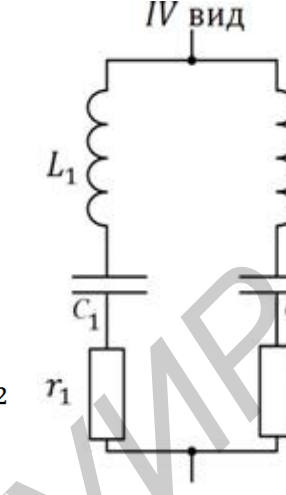
или

$$K_{iC} j\omega = \frac{j\omega C}{g_{\Sigma_0} + j\omega C - \frac{1}{\omega L}},$$

откуда

$$K_{iC} \omega = \frac{\omega C}{\sqrt{g_{\Sigma_0}^2 + \omega C - \frac{1}{\omega L}}^2}$$

3.6. Сложные параллельные колебательные контуры

I вид	II вид	III вид	IV вид
			
Последовательный резонанс			
Контур II вида	$\omega_{0_2} L_2 - \frac{1}{\omega_{0_2} C_2} = 0 \quad \omega_{0_2} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$		
Контур III вида	$\omega_{0_1} L_1 - \frac{1}{\omega_{0_1} C_1} = 0 \quad \omega_{0_1} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$		
Контур IV вида	$\omega_{0_1} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad \omega_{0_2} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$		

Параллельный резонанс

Контур II вида

$$Z_{\text{ЭII}} = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{\omega L_1 \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)}{\omega \underbrace{L_1 + L_2}_{L_{\text{Э}}} - \frac{1}{\omega C_2}}$$

$$L_{\text{Э}} = L_1 + L_2$$

При $r_1 \ll \omega L_1$ и $r_2 \ll \frac{1}{\omega C_2}$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{\text{Э}} C_2}}$$

Контур III вида

$$Z_{\text{ЭIII}} = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \left(-\frac{1}{\omega C_2} \right)}{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{1}{\omega C_2}}$$

$$C_{\text{Э}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

При $r_1 \ll \omega L_1$ и $r_2 \ll \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_{\text{Э}}}}$$

Контур IV вида

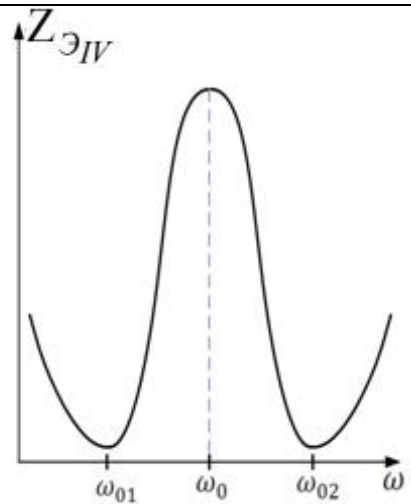
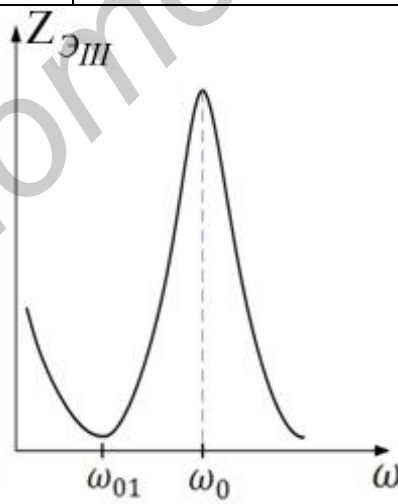
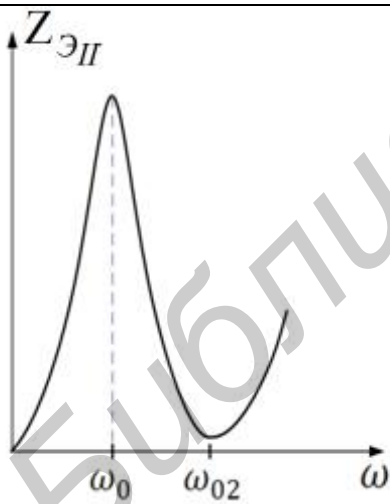
$$Z_{\text{ЭIV}} = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)}{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} + \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}$$

$$L_{\text{Э}} = L_1 + L_2, C_{\text{Э}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

При $r_1 \ll \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}$ и

$$r_2 \ll \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{\text{Э}} C_{\text{Э}}}}$$

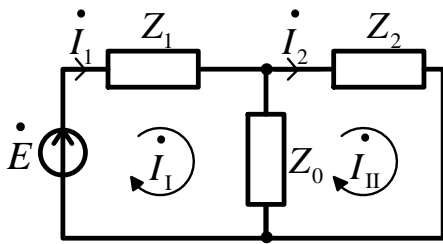


Коэффициент включения p

<p>Контур II вида</p>	$p_{II} = \frac{ x_{10} }{\rho_{\text{Э}}} = \frac{ x_{20} }{\rho_{\text{Э}}}$ $p_{II} = \frac{\omega_0 L_1}{\rho_{\text{Э}}} = \frac{\left \omega_0 L_2 - \frac{1}{\omega_0 C_2} \right }{\rho_{\text{Э}}} =$ $= \frac{\omega_0 L_1}{\omega_0 L_{\text{Э}}} = \frac{L_1}{L_1 + L_2}$ $Z_{0\text{Э}II} = Z_{0\text{Э}} p_{II}^2$ $Q_{II} = Q p_{II}$
<p>Контур III вида</p>	$p_{III} = \frac{1/\omega_0 C_2}{1/\omega_0 C_{\text{Э}}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$ $Z_{0\text{Э}III} = Z_{0\text{Э}} p_{III}^2$ $Q_{III} = Q p_{III}$
<p>Контур IV вида</p>	$p_{IV} = \frac{\omega_0 L_1 - \frac{1}{\omega_0 C_1}}{\rho_{\text{Э}}} = \frac{L_1}{L_{\text{Э}}} - \frac{C_{\text{Э}}}{C_1}$ <p>или</p> $p_{IV} = \frac{\omega_0 L_2 - \frac{1}{\omega_0 C_2}}{\rho_{\text{Э}}} = \frac{L_2}{L_{\text{Э}}} - \frac{C_{\text{Э}}}{C_2}$ $Z_{0\text{Э}IV} = Z_{0\text{Э}} p_{IV}^2$ $Q_{IV} = Q p_{IV}$

3.7. Связанные колебательные контуры

Обобщенная схема системы двух связанных контуров
Вносимые сопротивления



Контурные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} \dot{I}_I + Z_{12} \dot{I}_{II} &= \dot{E} \\ Z_{21} \dot{I}_I + Z_{22} \dot{I}_{II} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$Z_{11} = Z_1 + Z_0,$$

$$Z_{22} = Z_2 + Z_0,$$

$$Z_{12} = Z_{21} = -Z_0.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dot{E} & Z_{12} \\ 0 & Z_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} Z_{11} & \dot{E} \\ Z_{21} & 0 \end{vmatrix}$$

Z_0 – сопротивление связи (индуктивное, емкостное, резистивное, комбинированное)

Коэффициент связи:

$$k = Z_0 / \sqrt{Z'_{11} \cdot Z'_{22}}, \text{ в } Z'_{11} \text{ и } Z'_{22}$$

включают только элементы, однотипные сопротивлению связи.

Ток в первом контуре:

$$\dot{I}_I = \dot{I}_{II} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\dot{E}}{Z_{1\mathcal{E}}},$$

$$Z_{1\mathcal{E}} = Z_{11} - \frac{Z_0^2}{Z_{22}} = Z_{11} + Z_{1ВН}.$$

$$Z_{1ВН} = -\frac{Z_0^2}{Z_{22}} - \text{вносимое сопротивление}$$

первого контура, учитывающее влияние второго контура на ток в первом контуре.

Ток во втором контуре:

$$\dot{I}_I = \dot{I}_{II} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\dot{E} \cdot Z_0}{Z_{2\mathcal{E}} \cdot Z_{11}},$$

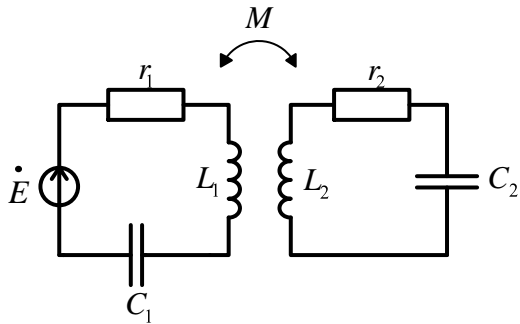
$$Z_{2\mathcal{E}} = Z_{22} - \frac{Z_0^2}{Z_{11}} = Z_{22} + Z_{2ВН}$$

$$Z_{2ВН} = -\frac{Z_0^2}{Z_{11}} - \text{вносимое сопротивление}$$

второго контура, учитывающее влияние первого контура на ток второго контура

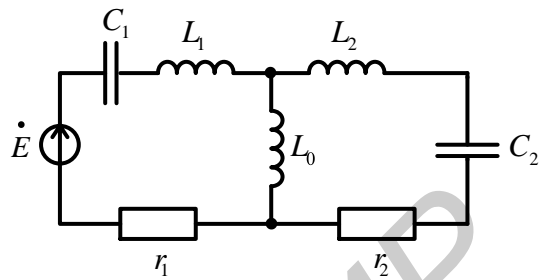
Виды связи между контурами

Индуктивная связь
(трансформаторная)



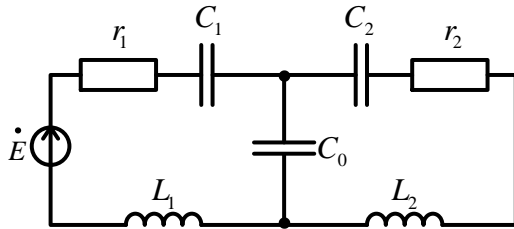
$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

Индуктивная связь (автотрансформаторная)



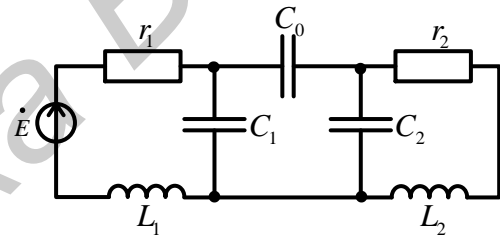
$$k = \frac{L_0}{\sqrt{(L_1 + L_0)(L_2 + L_0)}}$$

Емкостная связь
(внутренняя)

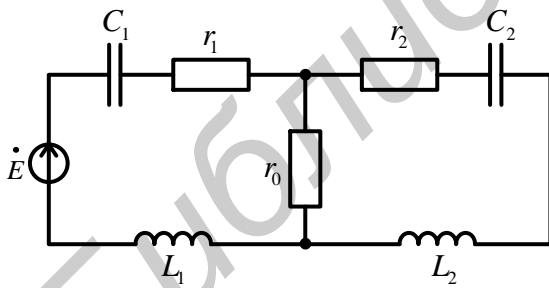


$$k = \frac{\sqrt{C_0 C_1 \cdot C_0 C_2}}{C_0 + C_1} \cdot \frac{C_0 C_2}{C_0 + C_2}$$

Емкостная связь
(внешняя)

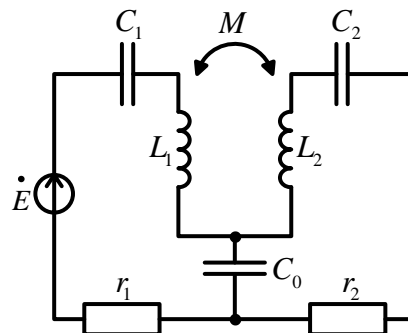


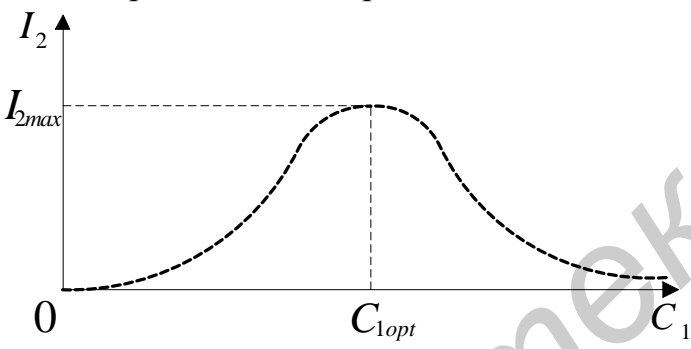
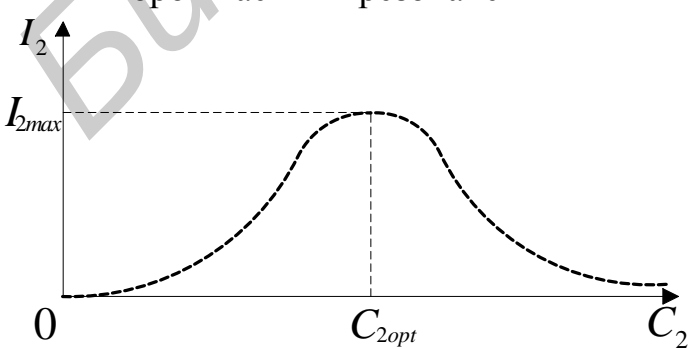
Резистивная (гальваническая) связь



$$k = \frac{r_0}{\sqrt{r_0 + r_1} (r_0 + r_2)}$$

Комбинированная
(индуктивно-емкостная
связь)



Условная оценка связи между контурами	
$0 \leq k \leq 0,01$	очень слабая связь
$0,01 \leq k \leq 0,05$	слабая связь
$0,05 \leq k \leq 0,9$	сильная связь
$0,9 \leq k \leq 1$	очень сильная связь
Настройка системы двух индуктивно связанных контуров	
<p>Настройка в резонанс</p> <p>Настройка в частный резонанс</p>	<p>Настройка в целях получения максимального тока во втором контуре.</p> <p>Настройка, при которой обеспечивается максимальный ток во втором контуре, но этот ток меньше максимально возможного</p>
<p>Первый частный резонанс</p>  $I_{2max} = \frac{E \cdot X_0}{Z_{22} \left(r_1 + \frac{r_2 \cdot X_0^2}{Z_{22}^2} \right)}$	<p>Максимум тока во втором контуре достигается изменением реактивного сопротивления первого контура $X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}$ при неизменном реактивном сопротивлении второго контура $X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}$ и сопротивлении связи $X_0 = \omega M$ (например, путем изменения емкости C_1).</p> <p>Условие первого частного резонанса: $X_{1ЭКВ} = X_1 + X_{1ВН} = 0$</p>
<p>Второй частный резонанс</p> 	<p>Максимум во втором контуре достигается изменением реактивного сопротивления второго контура $X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}$ (например, путем изменения емкости C_2) при неизменном реактивном сопротивлении пер-</p>

	<p>вого контура $X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}$</p> <p>и сопротивлении связи $X_0 = \omega M$.</p> <p>Условие второго частного резонанса:</p> $X_{2\text{экв}} = X_2 + X_{2\text{ВН}} = 0$
<p>Основной (индивидуальный) резонанс</p> $I_{2\text{max}} = \frac{E_0 \cdot X_0}{r_1 r_2 + X_0^2}$	<p>При неизменном сопротивлении связи $X_0 = \omega M = \text{const}$ максимум тока во втором контуре достигается последовательно:</p> <p>сначала изменением реактивного сопротивления первого контура до $X_1 = 0$, $Z_{11} = r_1$ и $I_1 = I_{1\text{max}}$, затем изменением реактивного сопротивления второго контура до $X_2 = 0$, $Z_{22} = r_2$ и $I_2 = I_{2\text{max}}$. Процесс настройки повторяется (т. е. возвращаются к настройке первого контура, потом второго контура и т. д.) до получения максимально возможного тока во втором контуре.</p> <p>Условия основного (индивидуального) резонанса:</p> $X_{1\text{экв}} = X_1 + X_{1\text{ВН}} = 0,$ $X_{2\text{экв}} = X_2 + X_{2\text{ВН}} = 0$
Сложный резонанс	
Сложный резонанс	<p>Максимум тока во втором контуре достигается последовательным изменением реактивного сопротив-</p>

	<p>ления одного из контуров и сопротивления связи между контурами</p>
<p>Первый способ получения сложного резонанса</p> $I_{2max\ max} = \frac{E}{2\sqrt{r_1 r_2}}$ $X_{0opt1} = Z_{22} \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$ $M_{0opt1} = \frac{Z_{22}}{\omega} \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$	<p>Максимально возможный ток во втором контуре достигается последовательно: вначале первый контур настраивается в первый частный резонанс путем изменения реактивного сопротивления X_1 (при $X_0 = min$), затем изменяется сопротивление связи X_0, снова первый контур настраивается в первый частный резонанс, и опять изменяем сопротивление связи X_0 и т. д. до получения $I_{2max\ max}$.</p> <p>Условия первого способа получения сложного резонанса:</p> $X_{1экв} = X_1 + X_{1вн} = 0$ $X_0 = X_{0opt1}$
<p>Второй способ получения сложного резонанса</p> $I_{2max\ max} = \frac{E}{2\sqrt{r_1 r_2}}$ $X_{0opt2} = z_{11} \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$ $M_{0opt2} = \frac{z_{11}}{\omega} \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$	<p>Максимально возможный ток во втором контуре достигается последовательно: вначале второй контур настраивается во второй частный резонанс путем изменения реактивного сопротивления X_2 (при $X_0 = min$), затем изменяется сопротивление связи X_0, снова второй контур настраивается во второй частный резонанс, и опять изменяется сопротивление связи X_0 и т. д. до получения $I_{2max\ max}$.</p> <p>Условия второго способа получения сложного резонанса:</p> $X_{2экв} = X_2 + X_{2вн} = 0$ $X_0 = X_{0opt2}$

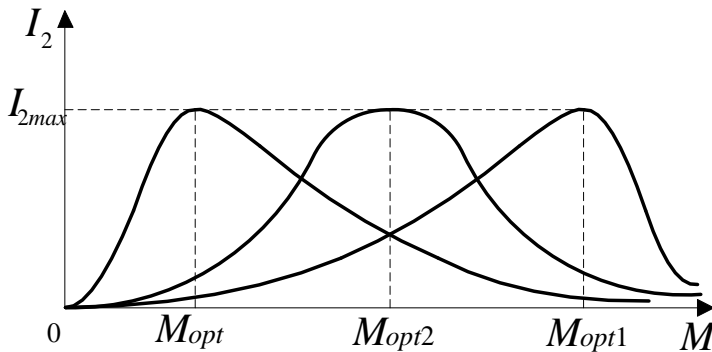
Полный резонанс

$$I_{2maxmax} = \frac{E}{2\sqrt{r_1 r_2}}$$

$$X_{0opt} = \sqrt{r_1 r_2}$$

$$M_{0opt} = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\omega}$$

$$k_{opt} = \frac{1}{Q} = d$$



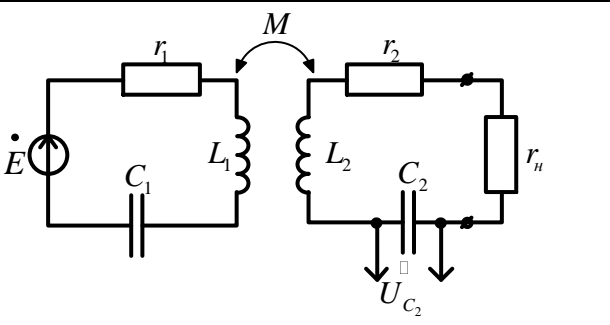
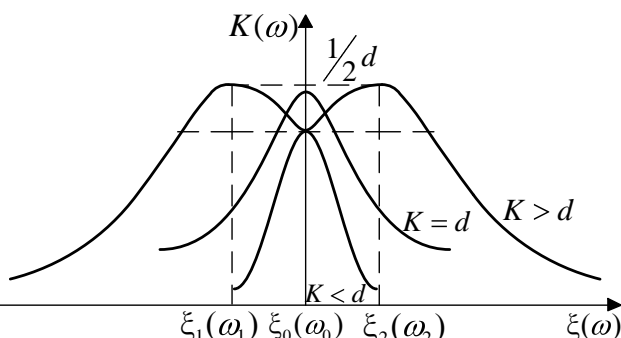
Максимум тока во втором контуре достигается последовательным изменением реактивных сопротивлений контуров и сопротивления связи между контурами: при $X_0 = \min$ изменением реактивных сопротивлений контуров получают первый и второй частные резонансы, затем X_0 изменяется до увеличения тока I_2 , и снова контуры настраивают в первый и второй частные резонансы и т. д. до получения $I_{2maxmax}$

Условия получения полного резонанса:

$$X_{1ЭКВ} = 0, X_{2ЭКВ} = 0,$$

$$X_{0opt} = X_{0opt}$$

3.8. Частотные характеристики индуктивно связанных контуров

	<p>Комплексная передаточная функция по напряжению на емкости</p> $K_U(j\omega) = \frac{U_{C2}}{E} = \frac{I_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{E},$ <p>где $I_2 = \frac{E \cdot Z_0}{Z_{11} \cdot Z_{22} - Z_0^2}$.</p>
<p>При $r_1 = r_2 = r$, $L_1 = L_2 = L$, $C_1 = C_2 = C$</p> $Z_{11} = Z_{22} = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \quad Z_0 = j\omega M,$ <p>$k = \frac{M}{L}$, $d = \frac{r}{\omega_0 L}$ и вблизи резонансной частоты $\omega L \approx \omega_0 L \approx \rho$</p> $K_U(j\omega) = \frac{k}{(d + j\xi)^2 + k^2} = \frac{k^2}{k^2 + d^2 - \xi^2 + j2d\xi}$	
<p>Амплитудно-частотная характеристика</p> $K_U(\omega) = \frac{k}{\sqrt{k^2 + d^2 - \xi^2 + 4d^2\xi^2}} = \frac{k}{\sqrt{\xi^4 + 2(d^2 - k^2)\xi^2 + (d^2 + k^2)^2}}$ <p>Фазочастотная характеристика</p> $\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2d\xi}{k^2 + d^2 - \xi^2};$ <p>при $k < d$ $K(\omega) = \frac{k}{k^2 + d^2}$;</p> <p>при $k = d$ $K(\omega) = \frac{1}{2d}$;</p> <p>при $k > d$ $K(\omega)$ имеет два экстремума (первый – <i>min</i> и второй – <i>max</i>), т.е. АЧХ – «двугорбая»</p>	<p>$\xi_0 = 0$ – соответствует резонансной частоте контура,</p> <p>$\xi_1 = \sqrt{k^2 - d^2}$ $\xi_2 = -\sqrt{k^2 - d^2}$ } – соответствуют резонансным частотам связи:</p> $\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \sqrt{k^2 - d^2}}},$ $\omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \sqrt{k^2 - d^2}}}$

Полоса пропускания индуктивно связанных контуров

$$\hat{K}(\omega) = \frac{K(\omega)}{K_{max}(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{\xi^4 + 2(d^2 - k^2)\xi^2 + (d^2 + k^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Биквадратное уравнение:

$$\xi_{гр}^4 + 2\xi_{гр}^2(d^2 - k^2) + (d^2 + k^2)^2 - 8k^2d^2 = 0.$$

Корни биквадратного уравнения:

$$\xi_{гр1,2} = \pm \sqrt{k^2 - d^2 \pm 2kd} = \pm d \sqrt{\frac{k^2}{d^2} - 1 \pm \frac{2k}{d}} ..$$

При $k = d$ $\xi_{гр1,2} = \pm d\sqrt{2}$.

При $k > d$ ($k_{гр} \approx 2,41d$) $\xi_{гр1,2} \approx 3,1d$

Связь расстройки ξ с полосой пропускания

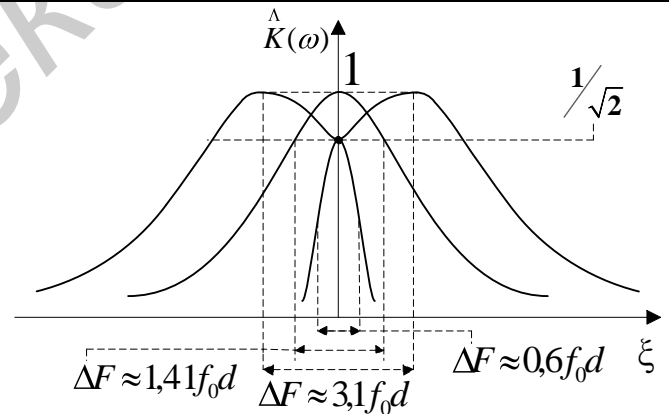
$$\xi_{гр} \approx \frac{\Delta\Omega}{\omega_0} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} \Delta\Omega &= \xi_{гр}\omega_0, \\ \Delta F &= \xi_{гр}f_0. \end{aligned}$$

При $k < d$ – очень слабая связь.

При $k = d$ – слабая связь.

При $k > d$ – сильная связь

При $k < d$
 $\Delta\Omega \approx 0,6\omega_0d,$
 $\Delta F \approx 0,6f_0d.$
 При $k = d$
 $\Delta\Omega \approx 1,41\omega_0d,$
 $\Delta F \approx 1,41f_0d.$
 При $k > d$
 $\Delta\Omega \approx 3,1\omega_0d,$
 $\Delta F \approx 3,1f_0d$



Литература

1. Атабеков, Г. И. Основы теории цепей / Г. И. Атабеков. – СПб., 2006.
2. Батура, М. П. Теория электрических цепей / М. П. Батура, А. П. Кузнецов, А. П. Курулев; под общ. ред. А. П. Курулева. – Минск, 2007.
3. Белецкий, А. Ф. Теория линейных электрических цепей / А. Ф. Белецкий. – М., 1986.
4. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи / Л. А. Бессонов. – М., 2006.
5. Основы теории цепей / Г. В. Зевеке [и др.]. – М., 1989.
6. Мурзен, Ю. М. Электротехника / Ю. М. Мурзен, Ю. И. Волков. – СПб., 2007.
7. Попов, В. П. Основы теории цепей / В. П. Попов. – М., 1985.
8. Теоретические основы электротехники. В 3 т. Т 2 / К. С. Демирчан [и др.]. – СПб., 2006.
9. Шебес, М. Р. Задачник по теории электрических цепей / М. Р. Шебес, Н. В. Каблукова. – М., 1991.
10. Электротехника / Н. В. Бараш [и др.]; под общ. ред. И. А. Федоровой. – Минск, 1990.

Содержание:

Предисловие	1
1. Линейные электрические цепи постоянного тока.....	4
1.1. Основные понятия и определения теории электрических цепей	4
1.2. Законы Ома и Кирхгофа в цепях постоянного тока	11
1.3. Эквивалентные преобразования электрических цепей	14
1.4. Методы расчёта электрических цепей постоянного тока	19
1.5. Теорема компенсации и принцип взаимности	24
2. Электрические цепи синусоидального тока	25
2.1. Основные характеристики синусоидального тока.....	25
2.2. Представление синусоидального тока проекциями вращающегося вектора и комплексными величинами	28
2.3. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме.....	31
2.4. Элементы R, L и C в цепи синусоидального тока.....	33
2.5. Мощность в цепи синусоидального тока.....	41
2.6. Цепи трёхфазного тока	44
2.7. Цепи с индуктивной связью	49
2.8. Трансформатор	52
3. Избирательные электрические цепи.....	55
3.1. Комплексные функции и частотные характеристики электрических цепей (ЭЦ)	55
3.2. Дифференцирующая цепь	59
3.3. Интегрирующая цепь	62
3.4. Последовательный колебательный контур.....	64
3.5. Простой параллельный колебательный контур	71

3.6. Сложные параллельные колебательные контуры.....	76
3.7. Связанные колебательные контуры	80
3.8. Частотные характеристики индуктивно связанных контуров	86
Литература.....	88

Библиотека БГУИР

Учебное издание

Курулев Александр Петрович

Теория электрических цепей

Справочник

В 3-х частях

Часть 1

Электрические цепи постоянного и переменного тока

Учебно-методическое пособие

Редактор *И. П. Острикова*

Корректор *И. П. Острикова*

Компьютерная верстка *Ю. Ч. Ключевич*

Подписано в печать 20.02.2012. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.

Гарнитура «Таймс». Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л.

Уч.-изд. л. 4,6. Тираж 100 экз. Заказ 449.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.

220013, Минск, П. Бровки, 6