$u(x,t) = \sum_{j=0}^{N} a_j(t)\,(x/s)^j$ и его подстановки в полученные тождества, например, в последовательность (6), исходная задача(1)—(5) сводится к дифференциальному уравнению порядка $N-1$ относительно $s(t)$.

В тестовых задачах, допускающих точные решения (например, при условии Неймана $u_x = -\exp(t)$ и $Ste = 1$ имеем: $u_x = -\exp(t-x) - 1$, $s(t) = t$) полином пятой степени дает для функции $s(t)$ при $t = 1$ ошибку $\varepsilon_s = |s/s^* - 1| \cdot 100\% = 1{,}8 \cdot 10^{-7}\%$, что на несколько порядков меньше, чем в численных методах [3, 4]. Нормы ошибки $\|\varepsilon_u\|_1$ и $\|\varepsilon_u\|_2$ для полиномиальных решений меньше норм для численных решений примерно на два порядка и имеют одинаковый порядок ошибки $\|\varepsilon_T\|_2 \simeq 10^{-6}$ для численной схемы Кранка-Николсона [4].

Литература

1. Gupta S. R. The Classic Stefan Problem. Basic Concepts, Modelling and Analysis. Amsterdam: Elsevier, 2003.

2. Alexiades V., Solomon A. D. Mathematical Modelling of Melting and Freezing Processes. Washington: Taylor and Francis, 1993.

3. Kutluay B., Bahadir A. R., Ozdes A. The numerical solution of one-phase classical Stefan problem // J. Comp. Appl. Math., 1997. Vol. 81. no. 1. P. 135—144.

4. Mitchell S. L., Vynnycky M. Finite-difference methods with increased accuracy and correct initialization for one-dimensional Stefan problems // Appl. Math. Comp., 2009. Vol. 215. no. 4. P. 1609—1621.

5. Кот V. A. Integral Method of Boundary Characteristics: The Dirichlet Condition. Principles // Heat Trans. Res., 2016. Vol. 47. no. 10. P. 927—944.

РЕШЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ НА ОСНОВЕ ЭЛАСТИЧНОЙ СЕТИ

О. В. Кот, М. П. Ревотюк (Минск, Беларусь)

Квадратичная задача о назначениях (КЗН) — одна из фундаментальных NP-полных задач комбинаторной оптимизации или исследования операций [1]. Ее математическая формулировка имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} b_{ij}c_{kl}x_{ik}x_{jl} \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1,2,\ldots,n), \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1,2,\ldots,n), \quad x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j = (1,2,\ldots,n),$$

где b_{ij} и c_{ij} — заданные скалярные величины. Данная задача была нами решена на основе метода эластичной сети [2, 3] путем введения в рассмотрение т.н. функции энергии E, которая была модифицирована и представлена в виде

$$E = -\alpha K \sum_i \ln \sum_j \varphi\left(|X_i - Y_j|, K\right) + \beta \sum_j \sum_k c_{jk}\,|Y_j - Y_k|.$$

Здесь c_{jk} — поток из нейрона j в нейрон k. Для закона движения нейронов достаточно определить частные производные:

$$Y_j = -K\,\frac{\partial E}{\partial Y_j} = \alpha \sum_i \frac{\varphi\left(|X_i - Y_j|, K\right)}{\sum\limits_k \varphi\left(|X_i - Y_k|, K\right)}(X_y - Y_j) + \beta K \sum_k \frac{c_{jk}}{\sum\limits_j \sum\limits_k c_{jk}}(Y_j - Y_k),$$

где $\varphi(|X_i - Y_j|, K) = e^{-|X_i - Y_j|^2/2K^2}$ — функция Гаусса.

Для сравнения полученных решений (согласно разработанному вычислительному алгоритму) использовался метод Монте-Карло [4]. Сравнительный анализ дал среднюю погрешность вычислений 5% и до 2% — при последующем применении метода восхождения на вершину [5]. Полученные результаты однозначно показали, что эластичную сеть с эвклидовой нормой и соответствующими частными производными от модифицированной функции энергии $\partial E/\partial Y_j$ можно успешно адаптировать для решений не только КЗН, но и целого ряда других комбинаторных и оптимизационных задач.

Литература

1. Sahni S., Gonzalez T. *P-complete approximation problems* // JACM, 1976. Vol. 23, no. 3. P. 555–565.

2. Durbin R., Willshaw D. *An analogue approach to the travelling salesman problem using an elastic net method* // Nature, 1987. Vol. 326. P. 689–691.

3. Durbin R., Szeliski R. and Yuille A. *An Analysis of the Elastic Net Approach to the Traveling Salesman Problem* // Neural Computation, 1989. Vol. 1. P. 348–358.

4. Cochrane E. M. and Beasley J. E. *The co-adaptive neural network approach to the Euclidean Travelling Salesman Problem* // Neural Networks, 2003. Vol. 16. P. 1499–1525.

5. Russell S. *Artificial Intelligence: A modern approach*, Russell, S. Norvig, P. – Egnlewood Cliffs: Prentice-Hall, 1995. P. 1125.

КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ПОИСКА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ОСНОВЕ ЭЛАСТИЧНОЙ СЕТИ

О. В. Кот, М. П. Ревотюк (Минск, Беларусь)

В последние годы интерес к использованию метаэвристик для решения комбинаторных задач значительно возрос, так как даже при современном уровне развития компьютерных технологий точные методы пока не показывают приемлемых результатов для больших постановок [1]. Метод эластичной сети (МЭС) в настоящее время обобщен как поиск апостериорного максимума модели Гауссовой смеси [2]. В работе представлены результаты проверки гипотезы о возможной комбинации МЭС и методов локального поиска. В виде модельной рассмотрена задача коммивояжера с рядом дополнительных логических ограничений, а также дополнительных условий и фильтров (запрет перемещения из города в город, требование последовательного соединения нескольких альтернативных подмножеств городов и т.д.).

В основе МЭС лежит задание функции энергии E и ее частных производных $\partial E/\partial Y_j$, где Y_j — координаты нейронов эластичной сети. По сути, здесь мы имеем дело с системой из N нелинейных дифференциальных уравнений относительно Y_j. Заметим, что функция энергии E может быть отнесена к распределению вероятности аналогично распределению Больцмана в статистической смеси, а именно [3]:

$$L\left(\{Y_j\},K\right) = \frac{\exp\left(-E/\alpha K\right)}{(2\pi)^N K^{2N} M^N} = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{M} \left\{ \sum_{j=1}^{M} \frac{e^{-|X_i - Y_j|^2/2K^2}}{2\pi K^2} \right\} \prod_{j=1}^{M} e^{-\frac{\beta}{\alpha K}|Y_j - Y_{j+1}|^2}.$$

Тогда минимизация функции энергии E по отношению Y_j должна соответствовать максимизации L по отношению Y_j. Здесь важно подчеркнуть, что указанное распределение плотности вероятностей – также есть функция экспоненциально изменяющегося параметра K.

Популяции допустимых решений синтезировались на некоторых итерациях согласно вероятностям $P(Y_j|X_i) \sim e^{-|X_i-Y_j|^2/2K^2} / \sum_k e^{-|X_i-Y_k|^2/2K^2}$. Для поиска оптимального решения к каждому решению применен метод имитации отжига, а также метод восхождения на вершину, улучшающие текущее решение.

В упорядоченном (по возрастанию стоимостей) множестве улучшенных решений $\{A_n\}_{n=1}^{m}$ его первый элемент A_1 принимался как искомое решение поставленной задачи. Проведенные нами расчеты при $N = 50$ достоверно подтвердили правомочность выдвинутой гипотезы о возможном синтезе МЭС и методов пост-оптимизации для решении задачи коммивояжера с ограничениями, что нашло подтверждение в получении лучших решений, чем в случае пост-оптимизации конечных решений МЭС.

Литература

1. Baghel, M., Agrawal, S., and Silakari, S. *Survey of metaheuristic algorithms for combinatorial optimization* // International Journal of Computer Applications, 2012. Vol. 58, no. 19. P. 21–31.