УДК 531.1:531.221.2:539.121.4

ДИНАМИКА ТОЧКИ С ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ И ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ

А.Н. ТАРАКАНОВ

Институт информационных технологий
Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники
ул. Козлова, 28, Минск, 220037, Беларусь

Поступила в редакцию 15 октября 2012

Получено нерелятивистское уравнение движения материальной точки с внутренними степенями свободы в скалярном потенциальном поле, зависящем от времени и относительных координат, скорости и ускорений точки. Следствием уравнения движения является уравнение баланса энергии, сохраняющейся, если потенциальная функция не зависит от времени и ускорений. Рассматривается применение полученных уравнений к движению электрона, спин которого интерпретируется с точки зрения классической механики.

Ключевые слова: классическая механика, внутренние степени свободы, уравнения движения, сохранение энергии, электрон.

В настоящее время не исчерпан интерес к классическому описанию квнтовых систем. В связи с этим в данной работе отмечены некоторые следствия второго закона Ньютона. В частности, следствием второго закона Ньютона для консервативных систем

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} \tag{1}$$

является выражение силы, действующей на материальную точку, через потенциальную энергию $\mathbf{F} = -\nabla U = -\partial U / \partial \mathbf{R}$, где $U = U(\mathbf{R})$ – функция только от координат точки. В результате, из уравнения движения и определения элементарной работы

$$dA = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}) = (\frac{d\mathbf{P}}{dt} \cdot d\mathbf{R}) = (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{P}), \tag{2}$$

где $\mathbf{R}$ и $\mathbf{V} = d\mathbf{R}/dt$ – соответственно радиус-вектор и скорость материальной точки относительно начала системы координат, связанной с абсолютной (покоящейся) системой отсчета (СО), получаем закон сохранения полной механической энергии

$$E = \frac{m\mathbf{V}^2}{2} + U(\mathbf{R}). \tag{3}$$

Если абсолютная СО связана с каким-то физическим объектом, то движение материальной точки происходит в поле, создаваемом этим объектом и характеризуемом потенциальной функцией $U(\mathbf{R})$. В общем случае движение материальной точки в поле некоторого объекта должно определяться потенциальной функцией, зависящей не только от относительных координат $\mathbf{R}$, но и от относительной скорости $\mathbf{V}$ и ускорений, а также от времени, так что $U = U(t, \mathbf{R}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \dot{\mathbf{W}}, ..., \mathbf{W}^{(N)})$, где $\mathbf{W}^{(k)} = d^k\mathbf{W} / dt^k$, причем зависимость от времени задается внутренней динамикой создающего это поле объекта, с которым связывается абсолютная СО. Кроме того, функция U должна зависеть от свойств среды, через которую осуществляется силовое воздействие на материальную точку. Попытка построить общую теорию сил, зависящих от производных от координат высшего порядка, была предпринята еще М.А. Остроградским [1], а В. Вебер впоследствии объяснял электрические явления, как результат электрического взаимодействия элементарных частиц (так называемых электрических атомов), зависящего как от их относительного расположения $\mathbf{R}$, так и от их скорости $\mathbf{V}$ и ускорения $\mathbf{W} = d\mathbf{V}/dt$ [2–5].

Если указанная зависимость потенциальной функции имеет место, то следствия $\mathbf{F} = -\nabla U$ и (3) из уравнения движения (1) должны измениться, так как полный дифференциал функции U равен

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t}dt + (\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} \cdot d\mathbf{R}) + (\frac{\partial U}{\partial \mathbf{V}} \cdot d\mathbf{V}) + \sum_{k=0}^{N}(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{W}^{(k)}} \cdot d\mathbf{W}^{(k)}) . \quad (4)$$

Действительно, из определения элементарной работы силы (2) следует более общее выражение для силы

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} + [\mathbf{C} \times \mathbf{V}] , \quad (5)$$

где $\mathbf{C}$ – некоторый псевдовектор, связанный с материальной точкой, а дополнительное слагаемое $[\mathbf{C} \times \mathbf{V}]$ имеет смысл гироскопической силы. На формулу (5) указано еще Гельмгольцем [6, 7]. Кроме того, в случае взаимодействия вектор импульса $\mathbf{P}$, имеющий смысл динамического импульса, может быть записан в виде суммы кинематического импульса $m\mathbf{V}$ и некоторой добавки $\mathbf{A}$ (которая в электродинамике называется векторным потенциалом), связанной как с внутренней структурой точки, так и с взаимодействием

$$\mathbf{P} = m\mathbf{V} + \mathbf{A} . \quad (6)$$

Тогда из (2) и (6) получим следующее выражение для $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{V}} + [\mathbf{S} \times \mathbf{W}] , \quad (7)$$

где $\mathbf{S}$ – некоторый псевдовектор, связанный как со структурой материальной точки, так и с ее взаимодействием с внешними полями, $\mathbf{W}$ – ускорение точки.

Таким образом, динамический импульс (6) равен

$$\mathbf{P} = m\mathbf{V} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{V}} + [\mathbf{S} \times \mathbf{W}] , \quad (8)$$

а вместо сохранения энергии (3) получаем уравнение баланса

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{k=0}^{N}(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{W}^{(k)}} \cdot \mathbf{W}^{(k+1)}) , \quad (9)$$

где величина

$$E = \frac{m\mathbf{V}^2}{2} + (\mathbf{V} \cdot [\mathbf{S} \times \mathbf{W}]) - (\mathbf{V} \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{V}}) + U(t, \mathbf{R}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, ...) \quad (10)$$

обобщает выражение (3) для полной механической энергии. Таким образом, помимо кинетической и потенциальной энергий появляется дополнительная энергия, обусловленная как внутренними степенями свободы, так и зависимостью потенциальной энергии от относительной скорости.

Если выполняется условие

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{k=0}^{N}(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{W}^{(k)}} \cdot \mathbf{W}^{(k+1)}) = 0 , \quad (11)$$

то энергия (10) становится интегралом движения. Условие $dE/dt>0$ соответствует поглощению энергии материальной точкой, а $dE/dt<0$ – излучению энергии. Поглощение и излучение энергии происходит вследствие энергетического обмена материальной точки со своим окружением.

С учетом вышеизложенного, уравнение движения (1) запишется в виде

$$\frac{d}{dt}\left(m\mathbf{V}+[\mathbf{S}\times\mathbf{W}]\right)-[\mathbf{C}\times\mathbf{V}]=\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial\mathbf{V}}-\frac{\partial U}{\partial\mathbf{R}}. \tag{12}$$

Заметим, что производные потенциальной функции по ускорениям высших порядков $\mathbf{W}^{(k)}$ в уравнение движения не входят. Поэтому можно ограничиться зависимостью потенциальной функции только от ускорения первого порядка $\mathbf{W}$: $U=U(t,\mathbf{R},\mathbf{V},\mathbf{W})$.

Из уравнения (12) получаем ряд частных случаев.

1. Первый закон Ньютона ($U(t,\mathbf{R},\mathbf{V},\mathbf{W})=0$, $\mathbf{V}=\mathbf{const}$) имеет место, если выполняется соотношение

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{S}\times\mathbf{W}]=[\mathbf{C}\times\mathbf{V}], \tag{13}$$

включающее также и тривиальное отсутствие внутренней структуры $\mathbf{C}=\mathbf{0}$, $\mathbf{S}=\mathbf{0}$.

2. Если сила (5), действующая на точку, обращается в нуль, т.е. выполняется соотношение

$$\frac{\partial U}{\partial\mathbf{R}}=[\mathbf{C}\times\mathbf{V}], \tag{14}$$

то динамический импульс (8) является сохраняющимся вектором. Заметим, что в случае, когда точка движется в постоянных электрическом и магнитном полях, соотношение (14) выражает равенство напряженности электрического поля $\mathbf{E}=-\partial U/\partial\mathbf{R}$ и магнитной силы Лоренца (в системе единиц, в которой заряд точки $e=1$), если псевдовектор $\mathbf{C}$ интерпретировать как магнитную индукцию ($\mathbf{C}=\mathbf{B}$).

Если кроме того выполняется соотношение

$$\frac{\partial U}{\partial\mathbf{V}}=[\mathbf{S}\times\mathbf{W}], \tag{15}$$

то динамический импульс совпадает с кинематическим импульсом и имеет место равномерное и прямолинейное движение.

Для свободной материальной точки, когда взаимодействием можно пренебречь, $U(t,\mathbf{R},\mathbf{V},\mathbf{W})=0$, закон сохранения динамического импульса соблюдается, только если $[\mathbf{C}\times\mathbf{V}]=\mathbf{0}$, а равномерное и прямолинейное движение – если дополнительно $[\mathbf{S}\times\mathbf{W}]=\mathbf{0}$.

3. Если $\partial U/\partial\mathbf{R}=\mathbf{0}$, то

$$[\mathbf{C}\times\left([\mathbf{S}\times\mathbf{W}]-\frac{\partial U}{\partial\mathbf{V}}\right)]=\mathbf{0} \tag{16}$$

и уравнение движения (12) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(m\mathbf{V}+[\mathbf{S}\times\mathbf{W}]-\frac{\partial U}{\partial\mathbf{V}}\right)-\frac{1}{m}[\mathbf{C}\times\left(m\mathbf{V}+[\mathbf{S}\times\mathbf{W}]-\frac{\partial U}{\partial\mathbf{V}}\right)]=\mathbf{0}, \tag{17}$$

откуда следует, что динамический импульс (8) прецессирует вокруг направления псевдовектора $\mathbf{C}$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{C}/m$.

В общем случае соотношение (13), или соотношения (14) и (15), необходимые для выполнения первого закона Ньютона, могут не выполняться. Поэтому для материальных точек с внутренними степенями свободы закон инерции в той форме, в которой он был сформулирован Галилеем и Ньютоном, не имеет места и не может быть принят в качестве первого принципа, лежащего в основе механики. Его можно обобщить следующим образом: материальная точка (тело) с внутренними степенями свободы, предоставленная самой себе, движется в соответствии с уравнением (12), в котором $U(t,\mathbf{R},\mathbf{V},\mathbf{W})=0$.

Для описания динамики физической системы уравнения (12) недостаточно. Необходимо еще уравнение моментов, которое для обычной материальной точки имеет вид $d\mathbf{L}/dt=\mathbf{M}$, где $\mathbf{L}=[\mathbf{R}\times\mathbf{P}]=m[\mathbf{R}\times\mathbf{V}]$ – момент импульса, $\mathbf{M}=[\mathbf{R}\times\mathbf{F}]$ – суммарный момент внешних сил, действующих на систему. Для одной материальной точки уравнение моментов является следствием уравнения движения (1).

Для материальной точки с внутренними степенями свободы, описываемой уравнением движения, в котором сила и импульс задаются уравнениями (5) и (8), соответственно, уравнение моментов принимает вид

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{M}+\mathbf{T}, \tag{18}$$

где

$$\mathbf{L}=[\mathbf{R}\times\mathbf{P}]=m[\mathbf{R}\times\mathbf{V}]-[\mathbf{R}\times\frac{\partial U}{\partial\mathbf{V}}]+[\mathbf{R}\times[\mathbf{S}\times\mathbf{W}]] \tag{19}$$

– момент динамического импульса (угловой момент, angular momentum),

$$\mathbf{M}=[\mathbf{R}\times\mathbf{F}]=-[\mathbf{R}\times\frac{\partial U}{\partial\mathbf{R}}]+[\mathbf{R}\times[\mathbf{C}\times\mathbf{V}]] \tag{20}$$

– момент силы, действующей на точку,

$$\mathbf{T}=[\mathbf{V}\times\mathbf{P}]=-[\mathbf{V}\times\frac{\partial U}{\partial\mathbf{V}}]+[\mathbf{V}\times[\mathbf{S}\times\mathbf{W}]], \tag{21}$$

– дополнительный закручивающий момент (torque).[1]

Отметим, что в случае точки с внутренними степенями свободы уравнение (18) также является следствием уравнения (12), (т.е. уравнения (1), в котором **F** и **P** задаются уравнениями (5) и (8), соответственно).

Решение уравнения движения (12) в принципе может быть найдено, если известны потенциальная функция $U(t,\mathbf{R},\mathbf{V},\mathbf{W})$ и зависимость от времени псевдовекторов **S** и **C**, которые связаны с внутренней структурой точки. Как известно, одной из внутренних характеристик частиц является спин, который классически ассоциируется с собственным моментом импульса частицы. В связи с этим существует ошибочное мнение о взаимосвязи псевдовекторов **S** и **C** со спином. Однако, имея только уравнение (19) для момента импульса, невозможно определить понятие собственного момента. Поэтому псевдовекторы **S** и **C** и уравнения движения для них здесь должны быть введены искусственно (постулироваться), либо исходя из дополнительных соображений.

В работах [8–10] показано, что в случае отсутствия внешних полей из уравнения движения (12) следует сохранение вектора

$$\mathbf{P}_C=m_0\mathbf{V}+[\mathbf{S}_0\times\mathbf{W}]-[\mathbf{R}\times\mathbf{C}_0]=m\mathbf{V}_C, \tag{22}$$

который уместно назвать кинетическим импульсом, ассоциированным с точкой M, тогда как $m_0\mathbf{V}$ есть кинетический импульс самой точки М, являющейся центром масс, а m – эффективная масса.

Здесь псевдовекторы $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{C}_0$ связаны исключительно со структурой точки и удовлетворяют уравнениям движения

[1] В английской литературе в стандартной механике понятие «torque» применяется к моменту силы (20). Здесь мы различаем момент силы (20) и закручивающий момент (torque) (21).

$$\frac{d\mathbf{S}_0}{dt} = [\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{S}_0], \ \frac{d\mathbf{C}_0}{dt} = [\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{C}_0], \tag{23}$$

где

$$\mathbf{\Omega}_0 = \sigma \mathbf{V}_C = \Omega_0 \mathbf{e}_Z, \tag{24}$$

$\mathbf{\Omega}_0$ – угловая скорость прецессии, σ – постоянная, имеющая размерность обратной длины, $\mathbf{V}_C = d\mathbf{R}_C / dt = V_C \mathbf{e}_Z$ – скорость некоторой точки *С* с радиус-вектором

$$\mathbf{R}_C(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_C t, \tag{25}$$

где $\mathbf{R}_0$ – радиус-вектор начального положения точки *С*. Согласно (25) точка *С* движется инерциально со скоростью $\mathbf{V}_C$. Следовательно, она является центром инерции, который, вообще говоря, не совпадает с центром масс М, конец радиус-вектора которого $\mathbf{R}$ описывает некоторую траекторию вокруг направления $\mathbf{V}_C$. Все такие траектории найдены в [9–10], где показано, что движение по этим траекториям можно интерпретировать как дрожательное движение *(*Zitterbewegung) с некоторой частотой (24), до сих пор приписываемое квантовой природе электрона.

Если теперь определить момент импульса центра масс относительно центра инерции

$$\mathbf{L}_0 = m_0[\mathbf{r} \times \mathbf{v}] + [\mathbf{r} \times [\mathbf{S}_0 \times \mathbf{w}]] - [\mathbf{r} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{C}_0]], \tag{26}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_C$, $\mathbf{v} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_C$, $\mathbf{w} = \mathbf{W}$, то момент импульса (19) (при $U = 0$) относительно начала координат примет вид

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_C + \mathbf{L}_{0C} + \mathbf{L}_0, \tag{27}$$

где $\mathbf{L}_C = m_0[\mathbf{R}_C \times \mathbf{V}_C] - [\mathbf{R}_C \times [\mathbf{R}_C \times \mathbf{C}_0]]$, (28)

– момент импульса центра инерции *С* относительно начала *О*, как если бы вся масса покоя m_0 находилась в центре инерции *С*,

$$\mathbf{L}_{0C} = m_0[\mathbf{r} \times \mathbf{V}_C] + m_0[\mathbf{R}_C \times \mathbf{v}] + [\mathbf{R}_C \times [\mathbf{S}_0 \times \mathbf{w}]] - [\mathbf{R}_C \times [\mathbf{r} \times \mathbf{C}_0]] - [\mathbf{r} \times [\mathbf{R}_C \times \mathbf{C}_0]], \tag{29}$$

– момент импульса центра масс *М* относительно начала *О*, связанный как с его движением относительно центра инерции *С*, так и с движением последнего в абсолютной системе отсчета.

В системе центра инерции, в которой $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0$, момент импульса (26) интерпретируется как спин, однако в силу уравнения движения (22) $\mathbf{L}_0$ также обращается в нуль. С другой стороны, в системе центра масс $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, следовательно, и $\mathbf{L}_0 = \mathbf{0}$. Поэтому $\mathbf{L}_0$ не может претендовать на роль собственного момента импульса (спина) точки *М*, с которым мы хотим связать псевдовекторы $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{C}_0$, для определения физического смысла которых нужны дополнительные соображения. В частности, можно идти тем же путем, как в механике рассматривается твердое тело как система материальных точек. Тогда понятие частицы с внутренними степенями свободы можно определить как систему таких же материальных точек, собственный момент импульса которой определяется относительно центра масс частицы.

Точку *М* с внутренними степенями свободы следует рассматривать как неинерциальный протяженный объект, вращающийся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$ и обладающий спином

$$\mathbf{s} = j_0 \boldsymbol{\omega}_0, \tag{30}$$

где j_0 – собственный момент инерции точки *М* относительно оси вращения.

Тогда вместо момента импульса (27) следует ввести полный момент импульса (см., например, [11])

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s} = \mathbf{L}_C + \mathbf{L}_{0C} + \mathbf{L}_0 + \mathbf{s}, \tag{31}$$

который в системе центра масс определяется как спин **s**, а в системе центра инерции равен

$$\mathbf{J}_0 = \mathbf{L}_0 + \mathbf{s} = m_0 r_0^2 \mathbf{\Omega}_0 + j_0 \boldsymbol{\omega}_0 = I_\Omega \mathbf{\Omega}_0, \tag{32}$$

где I_Ω – момент инерции точки *M* относительно направления $\mathbf{V}_C$, r_0 – радиус Zitterbewegung.

Применяя выражение (30) к электрону, грубо представляемому в виде твердой сферы радиуса ρ_0, состоящей из бесструктурных материальных точек, имеем $j_0 = 2m_e\rho_0^2/5$, $s = \hbar/2$, откуда

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{s}{j_0} = \frac{5\hbar}{4m_e\rho_0^2}. \tag{33}$$

Подставляя сюда значение радиуса электрона $\rho \sim 10^{-22}$, полученное Демельтом 12, получим оценку

$$\nu_0 = \frac{5\hbar}{8\pi m_e \rho_0^2} \simeq 2{,}3\cdot 10^{39}\ \text{Гц}, \tag{34}$$

т.е. частота собственного вращения электрона, по крайней мере, на 19 порядков превышает частоту Zitterbewegung $\nu_Z = m_e c^2/h \approx 1{,}24\cdot 10^{20}$ Гц, а скорость на поверхности электрона в экваториальной плоскости составляет $v = \nu_0\rho_0 \approx 2{,}3\cdot 10^{17}$ м/с, что на 9 порядков выше скорости света.

При высокой частоте собственного вращения электрона в его объеме должны возникать огромные центробежные силы инерции, стремящиеся переместить внутреннее вещество электрона на периферию. С другой стороны, стабильность электрона означает, что центробежные силы инерции должны уравновешиваться внутренними силами, так чтобы равновесная форма электрона представляла собой что-то вроде тороида или кольца с твердой поверхностью. Это согласуется с ранней идеей Парсона-Комптона [13, 14], и с тороидальной или кольцевой моделью (см., напр., 15, 16). Кольцо характеризуется, по крайней мере, двумя размерами – его радиусом и толщиной. Поэтому трудно сказать к чему относится значение Демельта $\rho_0 \sim 10^{-22}$ м. Даже если в качестве ρ_0 взять классический радиус электрона $r_e = \alpha\lambda\!\!\!^{-}_C \approx 2{,}9\cdot 10^{-15}$ м, вместо (34) получим оценку для частоты вращения $\nu_0 \approx 2{,}7\cdot 10^{24}$ Гц и для скорости $v = \nu_0 r_e \approx 7{,}8\cdot 10^9$ м/с, что также больше скорости света. В свое время Лоренц отказался от идеи протяженного электрона из-за того, что скорость поверхности вращающегося электрона на экваторе оказалась выше скорости света. Однако пока мы находимся в рамках классической механики, у нас нет никакого ограничения на скорость.

Введение спина (30) позволяет представить псевдовекторы $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{C}_0$ в виде

$$\mathbf{S}_0 = -\frac{1}{c^2}\mathbf{s} = -\frac{m_0}{2\Omega_0}\mathbf{e}_Z,\ \mathbf{C}_0 = -\Omega_0^2\mathbf{S}_0, \tag{35}$$

где $\mathbf{e}_Z$ – единичный вектор вдоль направления скорости центра инерции $\mathbf{V}_C$. Спиральность, т. е. проекция спина на направление движения центра инерции, определяет два типа движения, которые можно связать с движением свободных частиц и античастиц [9, 10].

В заключение отметим, что данная работа связана с проблемой движения частицы со спином во внешних полях, которая включает как описание движения спина, так и его влияние на траекторию движения (см., например, [17]). Решение нерелятивистской задачи о движении точки с внутренними степенями свободы и прменение ее к свободному электрону приводит к новой интерпретации заряда элементарных частиц, знак которого определяется спиральностью. Правая спиральность соответствует свободным античастицам (позитронам), заряженным положительно, а левая спиральность соответсвует свободным частицам (электронам), заряженным отрицательно.

DYNAMICS OF THE MASS POINT WITH INTERNAL DEGREES OF FREEDOM AND ELECTRON MOTION

A.N. TARAKANOV

Abstract

Nonrelativistic equation of motion of the mass point with internal degrees of freedom in scalar potential *U* depending on time and relative coordinates, and velocity and accelerations is obtained. Equations of motion lead to equation of balance of energy, whose conservation takes place when potential function does not depend on time and accelerations. The equations obtained are applicable to a motion of the electron, spin of which is interpreted from the viewpoint of classical mechanics.

Список литературы

1. *Остроградский М.А.* Избранные труды. М., 1958.
2. *Weber W.* // Abh. bei Begründung der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. 1846. S. 211–378.
3. *Weber W.* // Poggendorf's Ann. 1848. B. LXXIII. H. 2. S. 193–240.
4. *Weber W.* // Sci. Memoirs. 1852. 5. Part XX. P. 489–529.
5. *Weber W.* // Abh. d. Math.-Phys. Cl. d. Kön. sächs. Ges. d. Wiss. 1871. B. 10, H. 1. S. 1–61.
6. *Helmholtz H.* Ueber die Erhaltung der Kraft. Berlin, 1847.
7. *Гельмгольц Г.* О сохранении силы. М.-Л., 1934.
8. *Тараканов А.Н.* // Сб. науч. тр. «Ковариантные методы в теоретической физике. Физ. элем. частиц и теория относит». 2011. Вып. 7. С. 156–164.
9. *Tarakanov A.N.* Zitterbewegung as purely classical phenomenon. // http://www.arXiv.org/physics.class-ph/1201.4965v4 .
10. *Tarakanov A.N.* // J. Theor. Phys. 2012. Vol. 1. № 2. P. 76–98.
11. *Corben H.C.* Classical and Quantum Theories of Spinning Particles. San Francisco, 1968.
12. *Демельт Х.* // УФН. 1990. Т. 160, вып. 12. С. 129–139.
13. *Parson A.L.* // Smithsonian Misc. Coll. 1915. Vol. 65. № 11. Pub. № 2371.
14. *Compton A.H.* // J. Franklin Inst. 1921. Vol. 192, № 2. P. 145–155.
15. *Bergman D.L., Wesley J.P.* // Galilean Electrodynamics. 1990. Vol. 1. № 5. P. 63–67.
16. *Матора И.М.* Реальный электрон. Дубна, 2006.
17. *Померанский А.А., Сеньков Р.А., Хриплович И.Б.* // УФН. 2000. Т. 170., вып. 10. С. 1129–1141.