УДК 517.977

ОСЛАБЛЕННОЕ УСЛОВИЕ РЕГУЛЯРНОСТИ МАНГАСАРЯНА-ФРОМОВИЦА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

С.В. АКТАНОРОВИЧ, С.А. БОГДАНОВ, А.Е. ЛЕЩЕВ, Л.И. МИНЧЕНКО

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 9 ноября 2012

Условия регулярности играют важную роль в задачах математического программирования поскольку гарантируют выполнение необходимых условий оптимальности Куна-Таккера и построение на их основе двойственных алгоритмов для вычисления оптимальных решений. В то же время условия регулярности различаются между собой общностью, сравнительной простотой проверки и условиями применения. Наряду с классическими условиями регулярности (в первую очередь это известное условие Мангасаряна-Фромовица), в последнее время вызывают значительный интерес более слабые условия регулярности, применимые в задачах, для которых не имеют места классические условия. Целью данной работы является исследование ослабленного условия регулярности Мангасаряна-Фромовица и его связи с другими условиями регулярности.

Ключевые слова: математическое программирование, оптимальность, условия регулярности, ослабленные условия.

Введение

Пусть h_i $i = 1,\dots, p$ – непрерывно дифференцируемые функции из $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}$. Введем непустое множество допустимых точек

$$C = \left\{ y \in \mathbf{R}^m \mid h_i(y) \le 0 \;\; i \in I,\; h_i(y) = 0 \;\; i \in I_0 \right\},$$

где $I = \{ 1, \dots, s \}$, $I_0 = \{ s+1,\dots, p \}$ или $I_0 = \varnothing$,
и рассмотрим задачу (P) минимизации непрерывно дифференцируемой целевой функции $f(y)$ на множестве C.

Пусть $I(y) = \{ i \in I \mid h_i(y) = 0 \}$ – множество индексов, активных в точке $y \in C$ ограничений-неравенств. Для задачи (P) определим в точке $y \in C$ множество множителей Лагранжа:

$$\Lambda(y) = \left\{ \lambda \in \mathbf{R}^p \mid \nabla f(y) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y) = 0,\; \lambda_i \ge 0 \;\; i \in I(y),\; \lambda_i = 0 \;\; i \in I \setminus I(y) \right\}$$

и множество

$$\Gamma_C(y) = \left\{ \bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle \le 0 \;\; i \in I(y),\; \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0,\; i \in I_0 \right\},$$

которое будем называть линеаризованным касательным конусом к множеству C в точке $y \in C$. Известно, что широко применяемое условие регулярности Мангасаряна-Фромовица (MFCQ) [1] требует, чтобы в точке $y \in C$ система векторов $\nabla h_i(y)$ $i \in I_0$ была линейно независимой и существовал вектор $\bar{y}_0$ такой, что $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle = 0,\; i \in I_0,\; \dots \dots \; \langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle < 0,\; i \in I(y)$.

В литературе известны условия регулярности, независимые от MFCQ. Наиболее известные из них условия постоянного ранга CRCQ Р. Жанена [2] и ослабленное условие постоянного ранга RCRCQ [3,4] (более простое для проверки и одновременно более общее, чем CRCQ).

Говорят, что множество C удовлетворяет в точке $y_0 \in C$ ослабленному условию постоянного ранга (RCRCQ), если для любого множества индексов $J = K \cup I_0$, где $K \subset I(y_0)$, система векторов $\{ \nabla h_i (y), i \in J \}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки y_0.

Существует также ряд прямых обобщений MFCQ (условия псевдонормальности и квазинормальности [5], условие R-регулярности [3,4,6-9]), условие CPLD [10,11] обобщает одновременно MFCQ и CRCQ. Наконец, в недавно опубликованной работе [12] предложено условие RCPLD, обобщающее MFCQ и RCRCQ. Взаимосвязи различных условий регулярности посвящены работы [13–15].

В статье [16] было введено ослабленное условие регулярности Мангасаряна-Фромовица, ослабляющее и RCRCQ, и целый ряд других условий регулярности, включая классическое условие Мангасаряна-Фромовица. Несколько позже в работе [17] было предложено достаточно общее условие регулярности CRSC. В данной заметке показывается, что CRSC не является новым условием регулярности, а представляет собой другую форму записи ослабленного условия регулярности Мангасаряна-Фромовица. Дополнительно доказывается, что утверждение [17] о том, что выполнение условия CRSC влечет выполнение условия R-регулярности (часто именуемого в литературе «error bound property»), справедливо при менее жестких предположениях об ограничениях задачи, чем в [17].

Ослабленное условие регулярности Мангасаряна-Фромовица

Пусть $y \in C$. Представим множество индексов $I(y)$ активных ограничений в виде $I(y) = I^a(y) \cup I^-(y)$, где $I^a(y) = \left\{ i \in I(y) \,|\, \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0 \;\; \forall \bar{y} \in \Gamma_C(y) \right\}$, $I^-(y) = I(y) \setminus I^a(y)$.

Определение 1 [13]. Говорят, что в точке $y \in C$ выполняется ослабленное условие регулярности Мангасаряна-Фромовица, если система векторов $\{ \nabla h_i \; i \in I_0 \cup I^a(y) \}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности этой точки и существует вектор $\bar{y}_0$ такой, что

$$\langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle = 0 \quad i \in I_0 \cup I^a(y), \quad \langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle < 0 \quad i \in I^-(y).$$

Лемма 1. Пусть $y \in C$. Следующие утверждения равносильны:

а) система векторов $\{ \nabla h_i \; i \in I_0 \cup I^a(y) \}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки y и существует вектор $\bar{y}_0$ такой, что

$$\langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle = 0 \quad i \in I_0 \cup I^a(y), \quad \langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle < 0 \quad i \in I^-(y);$$

б) система векторов $\{ \nabla h_i \; i \in I_0 \cup I^a(y) \}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки y.

Доказательство. Очевидно, что из утверждения (а) вытекает утверждение (б).

Обратно, пусть выполнено (б). Тогда система векторов $\{ \nabla h_i \; i \in I_0 \cup I^a(y) \}$ имеет постоянный ранг в окрестности точки y и первое условие утверждения (а) выполнено. Проверим выполнение второго условия из утверждения (а). В случае, если $I^-(y) = \varnothing$, оно будет выполнено тривиально. Пусть $I^-(y) = \varnothing$. Возьмем любой индекс $i \in I^-(y)$. Тогда $\langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle \le 0$ для всех $\bar{y} \in \Gamma_C(y)$, но индекс $i \notin I^a(y)$, то есть найдется вектор $\bar{y}^i \in \Gamma_C(y)$ такой, что $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^i \rangle < 0$. Построим вектор $\bar{y}^0 = \sum t_k \bar{y}^k$,где все $t_k > 0$. Тогда $\bar{y}^0 \in \Gamma_C(y)$ и для любого $i \in I^-(y)$ получим

$$\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^0 \rangle = \sum_{k \in I^-} t_k \langle \nabla h_i(y), \bar{y}^k \rangle = \sum_{k \in I^- \setminus i} t_k \langle \nabla h_i(y), \bar{y}^k \rangle + t_i \langle \nabla h(y), \bar{y}^i \rangle < 0.$$

Следовательно, и в этом случае второе условие из утверждения (а) выполнено.

Таким образом, определению условия RMFCQ можно придать следующий вид.

Определение 2. Будем говорить, что в точке $y \in C$ выполнено условие регулярности RMFCQ, если система векторов $\{ \nabla h_i \;\; i \in I_0 \cup I^a(y) \}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности этой точки.

Под таким определением в работе [3] введено условие регулярности, коротко называемое CRSC. Лемма 1 показывает, что условие CRSC является другой формой записи условия RMFCQ.

Условие RMFCQ очевидно выполняется при выполнении условия ослабленного постоянного ранга RCRCQ (а, следовательно, и CRCQ). Частным случаем условия RMFCQ являются условие регулярности Мангасаряна-Фромовица (MFCQ), а также его легкая модификация (обозначим ее EMFCQ), которая сводится к требованиям:

1) система векторов $\{ \nabla h_i \; i \in I_0 \}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки y;

2) существует вектор $\bar{y}_0$ такой, что $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle = 0 \;\; i \in I_0$, $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle < 0 \;\; i \in I(y)$.

Из результатов [3] следует, что ослабленное условие Мангасаряна-Фромовица является также более слабым условием регулярности по сравнению с условиями CPLD и RCPLD [1, 2].

Следуя [12], будем называть условие регулярности в точке $y \in C$ хорошо обусловленным, если из его выполнения в точке y следует выполнение в любой точке из некоторой окрестности y.

Следующее важное утверждение доказано в [3] (лемма 5.3).

Утверждение 1. Пусть в точке $y_0 \in C$ выполнено условие RMFCQ. Тогда существует окрестность $V(y_0)$ точки y_0 такая, что $I^a(y) = I^a(y_0)$ для всех $y \in C \cap V(y_0)$.

Непосредственно из данного утверждения вытекает

Следствие 1. Условие RMFCQ является хорошо обусловленным в любой точке, в которой оно выполняется.

Ослабленное условие Мангасаряна-Фромовица и *R*-регулярность

Пусть $|y|$ – евклидова норма вектора $y, d(x,C) = \inf|x-y|$. При исследовании задач оптимизации важную роль играет следующее условие, являющееся само по себе достаточно общим условием регулярности и связывающее расстояние до множества C с точностью выполнения ограничений задачи.

Будем говорить, что в точке $y_0 \in C$ выполняется условие *R*-регулярности (имеет место «error bound property»), если найдутся число $\alpha > 0$ и окрестность $V(y_0)$ точки y_0 такие, что $d(y,C) \le \alpha \max \{ 0, h_i(y) \; i \in I, |h_i(y)| \; i \in I_0 \}$ для всех $y \in V(y_0)$.

В [3] при дополнительном условии дважды дифференцируемости функций h_i, $i = 1,..., p$ доказано, что из выполнения в точке $y_0 \in C$ условия CRSC (то есть RMFCQ) следует наличие условия *R*-регулярности в этой точке. Используя утверждения, доказанные в [3], и двойственное описание *R*-регулярности, полученное в [11], можно улучшить данный результат.

Пусть $v \in R^m$, $v \notin C$. Обозначим $\Pi_C(v)$ множество точек из C ближайших к точке v. Очевидно, эти точки являются решениями задачи нелинейного программирования $f_v(y) \to \min$, $y \in C$, где $f_v(y) = |y - v|$.

Отметим, что функция $f_v(y)$ дифференцируема по y во всех точках, отличных от $y = v$.

Пусть fr C – граница множества C,

$$\Lambda_v(y) = \left\{ \lambda \in \mathbf{R}^p \mid \nabla f_v(y) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y) = 0, \;\; \lambda_i \ge 0 \;\; i \in I(y), \;\; \lambda_i = 0 \;\; i \in I \setminus I(y) \right\},$$

$$* \; \Lambda_v^M(y) = \left\{ \lambda \in \Lambda_v(y) \mid \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| \le M \right\}.$$

Лемма 2 ([11]). Пусть градиенты $\nabla h_i(y)$ локально липшицевы в окрестности точки $y_0 \in$ fr C и существуют число $M > 0$ и окрестность $V(y_0)$ точки y_0 такие, что при всех $v \in V(y_0)$, не лежащих в C, справедливо условие $\Lambda_v^M(y) \ne \varnothing$ для любой точки $y = y(v) \in \Pi_c(v)$. Тогда в точке y_0 выполняется условие *R*-регулярности.

Теорема 1. Пусть градиенты ∇h_i (i) локально липшицевы в окрестности точки $y_0 \in C$, в которой выполняется условие RMFCQ. Тогда в этой точке выполняется условие R-регулярности.

Доказательство. Отметим вначале, что при $y_0 \in \operatorname{int} C$ для всех y из некоторой окрестности y_0 справедливо равенство $\rho(y,C) = 0$ и, следовательно, имеет место R-регулярность.

Пусть $y_0 \in \operatorname{fr} C$. Будем рассуждать от противного и предположим, что множество C не удовлетворяет условию R-регулярности. Тогда в силу леммы 2 и следствия 1 для любой последовательности $v_k \to y_0$ такой, что $v_k \notin C$, расстояние $d(0, \Lambda_{v_k}(y_k)) \to \infty$ для $y_k = y(v_k) \in \Pi_C(v_k)$. При этом $y_k = y(v_k) \to y_0$, поскольку $|v_k\text{-}y_k| \le |v_k\text{-}y_0|$. Не ограничивая общности, можно считать, что $I(y_k) = I^*$, где I^* не зависит от y_k. Тогда

$$\Lambda_{v_k}(y_k) \ne \varnothing, \ldots h_i(y_k) = 0 \;\; i \in I_0 \cup I^*, \;\; h_i(y_k) < 0 \;\; i \notin (I_0 \cup I^*), \text{ где } k = 1,2,\ldots .$$

Отсюда $h_i(y_k) = 0$ $i \in I^*$, $h_i(y_k) = 0$ $i \in (I \backslash I^*)$. Поскольку в силу *утверждения* 1, не ограничивая общности, можно считать, что $I^a(y_k) = I^a(y_0)$ и не зависит от $k = 1,2, \ldots$, то положим $I^a(y_k) = I^a(y_0) = I^a \subset I^*$. Отметим, что для любого y_k существует $i \in (I_0 \cup I^*)$, для которого $\nabla h_i(y_k) \ne 0$, иначе из определения $\Lambda_{v_k}(y_k)$ следовало бы $\nabla f_{v_k}(y_k) = 0$, что невозможно. В системе $\{ \nabla h_i(y_0)\; i \in I_0 \}$ (если $i_0 \ne \varnothing$ и существует индекс $i \in I_0$, для которого $\nabla h_i(y_0) \ne 0$) выберем максимальную линейно независимую подсистему $\{ \nabla h_i(y_0)\; i \in I_{00} \}$, где $I_{00} \subset I_0$, и дополним ее до максимальной линейно-независимой подсистемы $\{ \nabla h_i(y_0)\; i \in I_{00} \cup I^{a0} \}$ в системе $\{ \nabla h_i(y_0)\; i \in I_0 \cup I^a \}$, где $I^{a0} \subset I^a$. В силу RMFCQ можно, не ограничивая общности, считать, что система векторов $\{ \nabla h_i(y_k)\; i \in I_{00} \cup I^a \}$ будет максимальной линейно-независимой подсистемой в системе $\{ \nabla h_i(y_k)\; i \in I_0 \cup I^a \}$. Также не ограничивая общности, можно дополнить систему векторов $\{ \nabla h_i(y_k)\; i \in I_{00} \cup I^{a0} \}$ до $\{ \nabla h_i(y_k)\; i \in I_{00} \cup I^{a0} \cup I^{-0} \}$, где $I^{-0} \subset (I^* \backslash I^a)$, которая будет максимальной линейно-независимой подсистемой в системе векторов $\{ \nabla h_i(y_k)\; i \in I_0 \cup I^* \}$.

Тогда найдется вектор $\lambda^k \in \Lambda_{v_k}(y_k)$ такой, что $\lambda^k \to \infty$ и

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k \nabla h_i(y_k) + \nabla f_{v_k}(y_k) = 0, \;\; \lambda_i^k \ge 0 \;\; i \in I, \;\; \lambda_i^k \ge 0 \;\; i \notin (I_{00} \cup I^{a0} \cup I^{-0}) . \tag{1}$$

Не ограничивая общности, можно предположить, что $\lambda^k |\lambda^k|^{-1} \to \lambda$. Тогда, поскольку $\lambda^k \in \Lambda_{v_k}(y_k)$ и $\lambda^k \to \infty$, из (1) следует

$$\sum_{i \in I_{00} \cup I^{a0}} \lambda_i \nabla h_i(y_0) + \sum_{i \in I^{-0}} \lambda_i \nabla h_i(y_0) = 0, \;\; \lambda_i \ge 0 \;\; i \in I^{a0} \cup I^{-0} , \tag{2}$$

где $|\lambda| = 1$ и $\lambda_i = 0$ для $i \notin (I_{00} \cup I^{a0} \cup I^{-0})$.

Покажем, что $\lambda_i = 0$ также для всех $i \in I^{-0}$. Действительно, допустим противное: найдется $\lambda_i > 0$ при $i \in I^{-0}$. Тогда в силу *леммы* 1 существует вектор $\bar{y}_0$ такой, что

$$\langle \nabla h_i(y_0), \bar{y}_0 \rangle = 0 \;\; i \in I_0 \cup I^a(y_0), \; \langle \nabla h_i(y_0), \bar{y}_0 \rangle < 0 \;\; i \in I^-(y_0),$$

и, следовательно, из равенства (2) следует

$$\sum_{i \in I_{00} \cup I^{a0}} \lambda_i \langle \nabla h_i(y_0), \bar{y}_0 \rangle + \sum_{i \in I^{-0}} \lambda_i \langle \nabla h_i(y_0), \bar{y}_0 \rangle = 0 ,$$

откуда

$$\sum_{i \in I^{-0}} \lambda_i \langle \nabla h_i(y_0), \bar{y}_0 \rangle = 0 ,$$

что невозможно.

Таким образом, все $\lambda_i = 0$ для $i \in I^{-0}$ и равенство (2) принимает вид:

$$\sum_{i\in I_{00}\cup I^{a0}} \lambda\nabla h_i(y_0)=0,\quad \lambda_i\ge 0\quad i\in I^{a0},$$

где среди множителей λ_i есть ненулевые. Последнее противоречит линейной независимости системы векторов $\{\nabla h_i(y_0)\ i\in I_{00}\cup I^{a0}\}$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы.

Заключение

В статье показано, что введенные недавно Андреани, Хезером, Шувердт и Силва условие регулярности CRSC не является новым и представляет собой другую форму записи ослабленного условия регулярности Мангасаряна-Фромовица, опубликованного в 2010 году Л.И. Минченко и С.М. Стаховским. Дополнительно доказывается, что ослабленное условие регулярности Мангасаряна-Фромовица обеспечивает R-регулярность задачи оптимизации при нежестких дополнительных предположениях об ограничениях.

RELAXED MANGASARIAN-FROMOVITZ CONSTRAINT QUALIFICATION AND ITS APPLICATIONS

S.V. AKTANAROVICH, S.A. BOGDANOV, A.E. LESCHOV, L.I. MINCHENKO

Abstract

Nonlinear programming problems are considered under the relaxed Mangasarian-Fromovitz constraint qualification. It was established that a new constraint qualification CRSC is another form of relaxed Mangasarian-Fromovitz constraint qualification and proved that the relaxed Mangasarian-Fromovitz constraint qualification implies the local error bound property under not essential additional assumptions.

Список литературы

1. *Mangasarian, O.L., Fromovitz, S.* // Mathematical Analysis and Appl. 1967. №17. P. 37–47.
2. *Janin R.* // Mathematical Programming Study. 1984. № 21. P. 110–126.
3. *Minchenko L., Stakhovski S.* // Optimization. 2011. № 60 (4). P. 429–440.
4. *Minchenko L., Stakhovski S.* // SIAM Journal on Optimization. 2011. № 21 (1). P. 314–332.
5. *Bertsekas D.P.* Convex analysis and optimization. Athens, 2003.
6. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М., 1979.
7. *Ioffe A.D.* Regular points of Lipschitz functions. // Transactions of American Mathematical Society.
8. *Luderer B., Minchenko L., Satsura T.* Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Dordrecht/Boston/London, 2002.
9. *Minchenko L., Tarakanov A.* // Optimization Theory and Appl. 2011. № 148. P. 571–579.
10. *Andreani R., Martinez J.M., Schverdt M.L.* // Optimization Theory and Appl. 2005. №125. P.473–485.
11. *Qi L., Wei A.* // SIAM Journal on Optimization. 2000. № 10 (4). P. 963–981.
12. *Andreani R., Haeser G., Schuverdt M.L., et. al.* // Mathematical Programming, Ser. A 135. 2012. P. 255–273.
13. *Shu Lu.* // Mathematical Programming. 2009. №126 (2). P. 365–392.
14. *Shu Lu.* Relation between the constant rank and the relaxed constant rank constraint qualifications // Optimization, 2010. DOI:10.1080/02331934.2010.527972.
15. *Solodov M.V.* Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science, chapter Constraint Qualifications. NJ, USA, 2011.
16. *Минченко Л.И., Стаховский С.М.* // Докл. БГУИР. 2010. №8. С. 104–109.
17. *R.Andreani, G. Haeser, M.L.Schuverdt, et. al.* Two new weak constraint qualifications and applications // Optimization Online Preprint, 2011-07-3105.