УДК 621.396.96

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ПЛОТНОСТЕЙ ВЕРОЯТНОСТИ

А.В. ПАРАХНЕВИЧ, А.С. СОЛОНАР, С.А. ГОРШКОВ

Военная академия Республики Беларусь
Минск–57, 220057, Беларусь

Поступила в редакцию 22 декабря 2011

Рассмотрен метод численного интегрирования Монте-Карло применительно к аппроксимации набором случайных точек (частиц) произвольных плотностей вероятности и, как частный случай, апостериорных плотностей вероятности фильтруемых дискретно изменяющихся марковских случайных векторных параметров.

Ключевые слова: нелинейная фильтрация, метод Монте-Карло, плотность вероятности, значимая выборка (Importance sampling), частицы (Particles).

Введение

Технологии квазилинейной (Калмановской) фильтрации дискретно изменяющихся Марковских параметров оказались плодотворными при решении многих задач навигации, связи и локации целей, как неманеврирующих, так и, в меньшей степени, маневрирующих [1].

Тем не менее, упрощающие положения не всегда оправдываются. Линейные аппроксимации неслучайных функций уступают нелинейным, особенно при редком получении данных измерений в процессе маневра целей. Гауссовы законы распределения уступают имеющим место негауссовым.

С тех пор и скорость выполнения операций, и объемы памяти экспоненциально возросли по закону Мура [2]. Наряду с этим снизились стоимостные и массогабаритные характеристики вычислительных устройств. Это позволило перейти от дискретной квазилинейной к дискретно-непрерывной фильтрации, а также к различным приближенным решениям задач оптимальной нелинейной фильтрации.

Реализация таких подходов была невозможна в шестидесятые годы прошлого столетия, когда на многоцелевую обработку давило «проклятие размерности» [3, стр. 59]. Однако для многоцелевых ситуаций, например, вхождения головки баллистической ракеты и «облака» сопровождающих ее объектов в плотные слои атмосферы, «проклятие размерности» в настоящее время снято лишь частично. То же самое можно сказать и о наметившемся переходе от раздельного решения задач обнаружения, измерения и распознавания к вариантам их совместного решения: обнаружения-измерения и обнаружения-измерения-распознавания. Даже в новейших системах еще безоговорочно не переходят на алгоритмы нелинейной фильтрации. Это удается при ограниченных размерностях векторов состояния, разреженности корреляционных матриц, малой степени нелинейности задач и т.п. [4–6].

Увеличение возможностей вычислительных средств за последние десятилетия привело к возрастанию популярности численных методов. К таким методам относится и метод Монте-Карло, который путем моделирования случайных величин, позволяет вычислять многомерные интегралы [7] и относительно легко реализуется на современных ЭВМ.

Данная работа является первой в запланированном цикле статей, посвященных применению метода Монте-Карло в задачах нелинейной дискретной Байесовской фильтрации. Необходимость написания статей обусловлена отсутствием русскоязычных публикаций по данной теме в научных журналах СНГ. Возможно, единственными публикациями являются [1] и [8]. В [1] проблематика изложена в постановочном плане, а [8] не дает детального описания метода Монте-Карло и использования его для аппроксимации плотностей вероятности.

Постановка задачи

Задачей дискретной нелинейной фильтрации является вычисление апостериорной плотности вероятности $n_{\boldsymbol{\alpha}}$-мерного вектора состояния цели $\boldsymbol{\alpha}$ при наличии $n_{\boldsymbol{\theta}}$-мерного вектора наблюдаемых параметров $\boldsymbol{\theta}$.

Введем следующие обозначения. Под $\mathbf{A}_k = \{\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\alpha}_{k-1}, ..., \boldsymbol{\alpha}_1\}$ будем понимать обобщенный вектор состояния объекта в момент времени t_k с учетом последовательности всех состояний объекта $\boldsymbol{\alpha}_j$ до момента времени k $\left(j = \overline{1,k}\right)$. Совокупность векторов наблюдаемых параметров за k шагов наблюдения будем обозначать как $\boldsymbol{\Theta}_k = \{\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\theta}_{k-1}, ..., \boldsymbol{\theta}_1\}$.

Задача: получить выражение для аппроксимации апостериорной ПВ $p(\boldsymbol{\alpha}_k \mid \boldsymbol{\Theta}_k)$ вектора состояния $\boldsymbol{\alpha}_k$ на текущем шаге k при условии наблюдения $\boldsymbol{\Theta}_k$ численным методом интегрирования Монте-Карло.

Для решения поставленной задачи последовательно рассмотрим численный метод интегрирования Монте-Карло, аппроксимацию произвольной плотности вероятности методом Монте-Карло и в итоге получим рекуррентное выражение для аппроксимации апостериорной плотности вероятности марковского дискретно изменяющегося векторного параметра $\boldsymbol{\alpha}$ методом Монте-Карло.

Численный метод интегрирования Монте-Карло

Метод Монте-Карло является универсальным методом приближенного вычисления интегралов I высокой кратности [7, 9,10] от некоторой неслучайной многомерной функции $g(\boldsymbol{\alpha})$ [2, 7, 9, 10]:

$$I = \int\limits_{R^{n_\alpha}} g(\boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha}. \tag{1}$$

Для вычисления интеграла необходимо: 1) получить N независимых случайных значений $\boldsymbol{\alpha}^i$, где i – номер сгенерированного датчиком случайных чисел случайного аргумента $(i = \overline{1:N}, N >> 1)$, одинаково распределенных в области R^{n_α} с некоторой плотностью распределения $q(\boldsymbol{\alpha})$ (где n_α-мерность вектора $\boldsymbol{\alpha}$); 2) определить в точках $\boldsymbol{\alpha}^i$ значения функции $g(\boldsymbol{\alpha}^i)$ и плотности вероятности $q(\boldsymbol{\alpha}^i)$; 3) найти численное значение интеграла по формуле [10, стр. 301]:

$$I_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{g(\boldsymbol{\alpha}^i)}{q(\boldsymbol{\alpha}^i)} \tag{2}$$

Для независимых отсчетов $\boldsymbol{\alpha}^i$ оценка I_N является несмещенной и, в соответствии с законом больших чисел, сходящейся по вероятности к истинному значению I. Дисперсия ошибки оценки интеграла (1) в этом случае определяется выражением [7, стр. 303]:

$$D_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{g(\boldsymbol{\alpha}^i)}{q(\boldsymbol{\alpha}^i)} - I_N \right)^2. \tag{3}$$

Из формулы (3) видно, что порядок оценки ошибки сходимости метода Монте-Карло пропорционален отношению $1/\sqrt{N}$. Необходимо отметить, что требуемый объем выборки в данном случае растет с увеличением мерности n_α значительно медленнее, чем при использовании метода с фиксированным шагом интегрирования (grid-based метод) [2, стр. 9–10].

Выражение (2)(2) содержит в качестве свободного параметра плотность вероятности $q(\boldsymbol{\alpha})$ случайных отсчетов $\boldsymbol{\alpha}^i$. Ее выбор диктуется требованием минимизации дисперсии (3) путем уменьшения разброса значений отношения $g(\boldsymbol{\alpha})/q(\boldsymbol{\alpha})$ [10, стр. 304].

Правило выбора плотности $q(\boldsymbol{\alpha})$ было предложено Г. Каном [7, стр. 110]. Он доказал, что $q(\boldsymbol{\alpha})$ считается допустимой по отношению к функции $g(\boldsymbol{\alpha})$, если выполняется условие:

$q(\boldsymbol{\alpha}) > 0$ для всех $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{R}^{n_\alpha}$, в которых $|q(\boldsymbol{\alpha})| > 0$. (4)

Область разброса случайных значений плотности $q(\boldsymbol{\alpha})$ должна перекрывать область всех возможных значений интегрируемой функции $g(\boldsymbol{\alpha})$. Причем, желательно выбирать плотность $q(\boldsymbol{\alpha})$ по возможности пропорциональной $|g(\boldsymbol{\alpha})|$ [7, стр. 110]:

$$q(\boldsymbol{\alpha}) \propto |g(\boldsymbol{\alpha})|. \tag{5}$$

Дисперсия ошибки интегрирования будет минимальна в том случае, когда $q(\boldsymbol{\alpha}) = |g(\boldsymbol{\alpha})|$. Минимизация дисперсии (3) (3) поясняется следующим образом: когда выполняются условия (4) и (5), области с б***о***льшим значением функции $|g(\boldsymbol{\alpha})|$ будут являться наиболее вероятными для появления случайных отсчетов при их генерации. Эти отсчеты будут вносить более существенных вклад в оценку I_N по сравнению с остальными, для которых $|g(\boldsymbol{\alpha})|$ незначительна.

Совокупность случайных отсчетов, распределенных в соответствии с плотностью $q(\boldsymbol{\alpha})$, для которых выполняются условия (4) и (5), называют значимой выборкой (Importance Sampling), а саму плотность вероятности – значимой плотностью вероятности (Importance Density) [7, 11–13].

Аппроксимация произвольной плотности вероятности методом Монте-Карло

Пусть неслучайную функцию $g(\boldsymbol{\alpha})$ можно представить в виде произведения некоторой заранее заданной функции $f(\boldsymbol{\alpha})$ и плотности вероятности $p(\boldsymbol{\alpha})$ положительно определенной на области R^{n_α}:

$$g(\boldsymbol{\alpha}) = f(\boldsymbol{\alpha})p(\boldsymbol{\alpha}). \tag{6}$$

При условии ограниченности сверху отношения $p(\boldsymbol{\alpha})/q(\boldsymbol{\alpha})$, выражение (2) запишется в виде:

$$I_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\boldsymbol{\alpha}^i)\frac{p(\boldsymbol{\alpha}^i)}{q(\boldsymbol{\alpha}^i)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\boldsymbol{\alpha}^i)\tilde{w}^i, \tag{7}$$

где $\tilde{w}^i$ – ненормированные веса, определяемые выражением:

$$\tilde{w}^i = \frac{p(\boldsymbol{\alpha}^i)}{q(\boldsymbol{\alpha}^i)}. \tag{8}$$

От использования ненормированных весов переходят к нормированным [3, стр. 37]:

$$w^i = \frac{\tilde{w}^i}{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\tilde{w}^j}, \quad \sum_{i=1}^{N} w^i = 1. \tag{9}$$

Выражение (7) с учетом (9) запишется в виде:

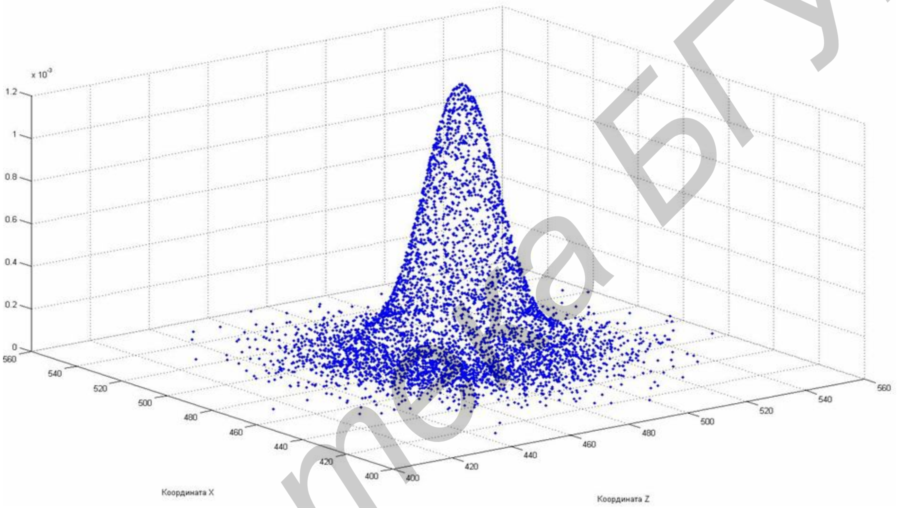
$$I_N = \sum_{i=1}^{N} f(\boldsymbol{\alpha}^i) \frac{\widetilde{w}^i}{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \widetilde{w}^j} = \sum_{i=1}^{N} f(\boldsymbol{\alpha}^i) w^i \ . \quad (10)$$

При использовании дельта функции $\delta(\boldsymbol{\alpha})$ вместо $f(\boldsymbol{\alpha})$, плотность вероятности $p(\boldsymbol{\alpha})$ можно аппроксимировать взвешенной суммой [3, стр. 38]:

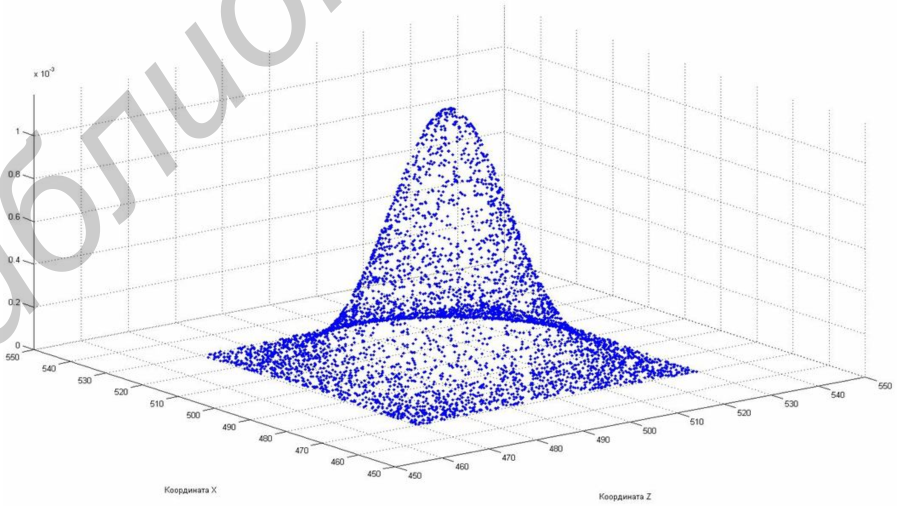
$$p(\boldsymbol{\alpha}) \approx \sum_{i=1}^{N} w^i \delta(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^i). \quad (11)$$

Минимальная дисперсия ошибки аппроксимации $p(\boldsymbol{\alpha})$ будет наблюдаться при выполнении равенства $q(\boldsymbol{\alpha}) = p(\boldsymbol{\alpha})$. В зарубежных источниках по нелинейной байесовской фильтрации пары $\{\boldsymbol{\alpha}^i, w^i\}_{i=1}^{N}$ называют частицами (Particles) [2, 14–16]. Здесь $\boldsymbol{\alpha}^i$ – координата *i*-ой частицы, а w^i – ее вес.

Примеры аппроксимации двумерной Гауссовой ПВ методом Монте-Карло для *N*=5000 представлены на рис. 1.



а



б

Рис. 1. Пример аппроксимации двумерной Гауссовой ПВ методом Монте-Карло для N=5000:
а) при нормальном законе распределения случайных частиц;
б) при равномерном законе распределения случайных частиц.

Для рассматриваемых законов распределения частиц $q(\boldsymbol{\alpha})$ на рисунке отчетливо наблюдается воспроизведение формы Гауссовой ПВ. При нормальном законе распределения случайных частиц (рис. 1,*а*) число частиц, находящихся в области высокой вероятности больше, чем при равномерном законе распределения (рис. 1,*б*).

Аппроксимация апостериорной плотности вероятности методом Монте-Карло

Для дальнейших рассуждений будем считать, что на (k-1)-м шаге наблюдения ($t = t_{k-1}$) получена выборка частиц, образующая аппроксимацию вида (11) апостериорной плотности $p(\boldsymbol{\alpha}_{k-1} | \boldsymbol{\Theta}_{k-1})$. С получением оценки вектора наблюдения $\boldsymbol{\theta}_k$ в момент времени $t = t_k$ необходимо аппроксимировать плотность $p(\boldsymbol{\alpha}_k | \boldsymbol{\Theta}_k)$ новым набором частиц [3,12] в соответствии с выражением (11).

Данная задача сводится к вычислению нормированных весов w_k^i и отсчетов $\boldsymbol{\alpha}_{k-1}^i$ на k-м шаге. С учетом условий (4) и (5), i-й ненормированный вес $\tilde{w}_k^i$ на k-м шаге может быть вычислен в соответствии с (12) по совокупности наблюдений $\boldsymbol{\Theta}_k$ за k шагов и апостериорной плотности обобщенного вектора состояния $\mathbf{A}_k$:

$$\tilde{w}_k^i \propto \frac{p(\mathbf{A}_k^i | \boldsymbol{\Theta}_k)}{q(\mathbf{A}_k^i | \boldsymbol{\Theta}_k)}. \qquad (12)$$

Значимую плотность вероятности $q(\mathbf{A}_k | \boldsymbol{\Theta}_k)$, которая используется для вычисления знаменателя выражения (12) (12), с учетом марковости параметра $\boldsymbol{\alpha}$ можно представить в следующем виде:

$$q(\mathbf{A}_k | \boldsymbol{\Theta}_k) = q(\boldsymbol{\alpha}_k, \mathbf{A}_{k-1} | \boldsymbol{\Theta}_k) = q(\boldsymbol{\alpha}_k | \mathbf{A}_{k-1}, \boldsymbol{\Theta}_k)\, q(\mathbf{A}_{k-1} | \boldsymbol{\Theta}_{k-1}) =$$
$$= q(\boldsymbol{\alpha}_k | \boldsymbol{\alpha}_{k-1}, \boldsymbol{\theta}_k)\, q(\mathbf{A}_{k-1} | \boldsymbol{\Theta}_{k-1}). \qquad (13)$$

Таким образом, вычисление координаты i-го случайного отсчета $\boldsymbol{\alpha}_k^i$ с плотностью вероятности $q(\boldsymbol{\alpha}_k | \boldsymbol{\alpha}_{k-1}^i, \boldsymbol{\theta}_k)\, q(\mathbf{A}_{k-1}^i | \boldsymbol{\Theta}_{k-1})$ сводится к переходу отсчета $\boldsymbol{\alpha}_{k-1}^i$ с (k–1)-го на k-й шаг со значимой переходной ПВ $q(\boldsymbol{\alpha}_k | \boldsymbol{\alpha}_{k-1}^i, \boldsymbol{\theta}_k)$ и весом, равным значению плотности вероятности $q(\mathbf{A}_{k-1} | \boldsymbol{\Theta}_{k-1})$ в точке $\mathbf{A}_{k-1}^i$. Плотность вероятности $q(\boldsymbol{\alpha}_k | \boldsymbol{\alpha}_{k-1}^i, \boldsymbol{\theta}_k)$ определяет случайную и неслучайную составляющие перехода отсчета $\boldsymbol{\alpha}_{k-1}^i$ в $\boldsymbol{\alpha}_k^i$ при условии наблюдения $\boldsymbol{\theta}_k$. Апостериорную плотность вероятности $p(\mathbf{A}_k | \boldsymbol{\Theta}_k)$ можно записать:

$$p(\mathbf{A}_k | \boldsymbol{\Theta}_k) = \frac{p(\boldsymbol{\theta}_k | \mathbf{A}_k, \boldsymbol{\Theta}_{k-1}) p(\mathbf{A}_k | \boldsymbol{\Theta}_{k-1})}{p(\boldsymbol{\theta}_k | \boldsymbol{\Theta}_{k-1})} =$$
$$= c_\theta\, p(\boldsymbol{\theta}_k | \mathbf{A}_k, \boldsymbol{\Theta}_{k-1}) p(\boldsymbol{\alpha}_k | \mathbf{A}_{k-1}, \boldsymbol{\Theta}_{k-1}) p(\mathbf{A}_{k-1} | \boldsymbol{\Theta}_{k-1}), \qquad (14)$$

где $1\big/ p(\boldsymbol{\theta}_k | \boldsymbol{\Theta}_{k-1}) = 1\Big/ \int_{\mathbf{A}_k} p(\boldsymbol{\theta}_k | \mathbf{A}_k, \boldsymbol{\Theta}_{k-1}) p(\mathbf{A}_k | \boldsymbol{\Theta}_{k-1}) d\mathbf{A}_k = c_\theta$ – нормирующий множитель.

Учитывая, что функция правдоподобия $p(\boldsymbol{\theta}_k | \mathbf{A}_k, \boldsymbol{\Theta}_{k-1})$ зависит только от вектора состояния на текущем шаге $\boldsymbol{\alpha}_k$, а переходная плотность $p(\boldsymbol{\alpha}_k | \mathbf{A}_{k-1}, \boldsymbol{\Theta}_{k-1})$ только от предыдущего значения вектора $\boldsymbol{\alpha}_{k-1}$, выражение (14) примет вид:

$$p(\mathbf{A}_k | \boldsymbol{\Theta}_k) = c_\theta\, p(\boldsymbol{\theta}_k | \boldsymbol{\alpha}_k) p(\boldsymbol{\alpha}_k | \boldsymbol{\alpha}_{k-1}) p(\mathbf{A}_{k-1} | \boldsymbol{\Theta}_{k-1}) \qquad (15)$$

Подставляя значения плотностей (13) и (15) в точках $\boldsymbol{\alpha}^i{}_k$ и $\boldsymbol{\alpha}^i{}_{k-1}$ в выражение (12) (12), и учитывая, что отношение $p(\mathbf{A}_{k-1}^i | \boldsymbol{\Theta}_{k-1}) \big/ q(\mathbf{A}_{k-1}^i | \boldsymbol{\Theta}_{k-1})$ пропорционально ненормированному весу $\tilde{w}_{k-1}^i$, получим:

$$\widetilde{w}_k^i \propto \frac{c_\theta \; p(\boldsymbol{\theta}_k \,|\, \boldsymbol{\alpha}^i{}_k)\, p(\boldsymbol{\alpha}_k^i \,|\, \boldsymbol{\alpha}_{k-1}^i)\, p(\mathbf{A}_{k-1}^i \,|\, \boldsymbol{\Theta}_{k-1})}{q(\boldsymbol{\alpha}_k^i \,|\, \boldsymbol{\alpha}_{k-1}^i, \boldsymbol{\theta}_k)\, q(\mathbf{A}_{k-1}^i \,|\, \boldsymbol{\Theta}_{k-1})} = \frac{c_\theta \; p(\boldsymbol{\theta}_k \,|\, \boldsymbol{\alpha}^i{}_k)\, p(\boldsymbol{\alpha}_k^i \,|\, \boldsymbol{\alpha}_{k-1}^i)}{q(\boldsymbol{\alpha}_k^i \,|\, \boldsymbol{\alpha}_{k-1}^i, \boldsymbol{\theta}_k)} \widetilde{w}_{k-1}^i . \tag{16}$$

Переходя с учетом последующей нормировки весов на k-м шаге к использованию нормированных весов с (k–1)-го шага и пренебрегая из тех же соображений постоянным коэффициентом c_θ, получим окончательное выражение для рекуррентного расчета ненормированных весов, используемых для получения искомой аппроксимации (16):

$$\widetilde{w}_k^i \propto \frac{p(\boldsymbol{\theta}_k \,|\, \boldsymbol{\alpha}^i{}_k)}{q(\boldsymbol{\alpha}_k^i \,|\, \boldsymbol{\alpha}_{k-1}^i, \boldsymbol{\theta}_k)}\, p(\boldsymbol{\alpha}_k^i \,|\, \boldsymbol{\alpha}_{k-1}^i) \cdot w_{k-1}^i . \tag{17}$$

Апостериорная плотность вероятности $p(\boldsymbol{\alpha}_k \,|\, \boldsymbol{\Theta}_k)$ вектора состояния на текущий момент времени, при условии выполнения нормировки весов $\widetilde{w}_k^i$ в соответствии с (9) и использования отсчетов $\boldsymbol{\alpha}_{k-1}^i$ с плотностью вероятности вида (13), может быть аппроксимирована выражением:

$$\mathrm{p}(\boldsymbol{\alpha}_\mathrm{k} \,|\, \boldsymbol{\Theta}_\mathrm{k}) \approx \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{w}_\mathrm{k}^\mathrm{i} \delta(\boldsymbol{\alpha}_\mathrm{k} - \boldsymbol{\alpha}_\mathrm{k}^\mathrm{i}). \tag{18}$$

В [2] показано, что аппроксимация плотности (18) неограниченно приближается к истинной апостериорной плотности вероятности $p(\boldsymbol{\alpha}_k \,|\, \boldsymbol{\Theta}_k)$ при числе частиц $N \to \infty$.

Заключение

В основе нелинейной Байесовской фильтрации численным способом лежит возможность аппроксимации плотности вероятности методом Монте-Карло, которая базируется на численном методе интегрирования некоторой многомерной функции.

Порядок оценки ошибки сходимости метода Монте-Карло пропорционален отношению $1/\sqrt{N}$ и не зависит от размерности интеграла. Это является существенным достоинством метода Монте-Карло по сравнению с другими численными методами интегрирования. Однако скорость сходимости метода значительно ухудшается с ростом размерности интеграла R^{n_α}, что требует одновременного увеличения числа отсчетов N.

Минимизация дисперсии ошибки аппроксимации достигается при условии пропорциональности плотности случайных отсчетов $q(\boldsymbol{\alpha})$ аппроксимируемой плотности $p(\boldsymbol{\alpha})$. Минимальная ошибка достигается при $q(\boldsymbol{\alpha}) = p(\boldsymbol{\alpha})$.

Аппроксимация плотности вероятности $p(\boldsymbol{\alpha})$ методом Монте-Карло может быть представлена как взвешенная сумма дискретных отсчетов (11) (11). В основе аппроксимации апостериорной ПВ методом Монте-Карло лежит рекуррентное определение значений координат случайных отсчетов $\boldsymbol{\alpha}_k^i$ и вычисление их весов w_k^i.

APPLICATION OF THE MONTE CARLO NUMERICAL INTEGRATION METHOD FOR APPROXIMATION OF PROBABILITY DENSITY

A.V. PARAKHNEVICH, A.S. SOLONAR, S.A. GORSHKOV

Abstract

Monte Carlo numerical integration method is considered, methods of approximation as random probability density as well as a posteriori probability density of changing markovian discrete filtered parametres with add particles.

Список литературы

1. *Ширман Я.Д., Багдасарян С.Т., Маляренко А.С.и др.* Радиоэлектронные системы: Основы построения и теория. Минск, 2007.
2. *Shaller R.R.* // IEEE Spectrum. 1997. №6. P. 38–51.
3. *Ristic B., Arulampalam S., Gordon N.* // Beyond the Kalman Filter. Particle filters for tracking applications. London, 2004.
4. *Daum F.* // IEEE A&E Systems Magazine. 2005. Vol. 20, №20. P. 57–68.
5. *Meanvielle P.* // IEEE A&E Systems Magazine. 2005. №8, Part 1. P. 89–95.
6. *Metropolis N., Ulam S.M.* // J. American Statistical Association. 1949. №247. P. 335–341.
7. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. М., 1973.
8. *Микаэльян С.В.* // МГТУ им. Н.Э. Баумана, электронное научно-техническое издание. 77-30569/238271. 2011. №10. С.25.
9. *Hammersley J.M., Morton K.W.* // Journal of the Royal Statistical Society B. 1954. Vol. 16, P. 23–38.
10. *Бахвалов Н.С.* Численные методы: анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1975.
10. *Gordon N.J., Salmond D.J., Smith A.F.M.* // IEEE PROCEEDINGS-F. 1993. Vol. 140. №2. P. 107–113.
11. *Doucet A., Godsill S., Andrieu C.* // Statistics and Computing. 2000. Vol. 10, №3. P. 197–208.
12. *Doucet A., De Freitas N., Gordon N.J.* Sequential Monte Carlo Methods in Practice. New York, 2001.
13. *Chen Z.* // IEEE A&E Systems Magazine. 2011. №4. P. 69.
14. *Bar-Shalom Y., Tse E.* // Automatica, Pergamon Press. 1975. Vol. 11, P. 451–460.
15. *Singer R.A, Sea R.G., Housewright K.B.* // IEEE Transactions on Information Theory. 1974. Vol. IT-20, №4. P. 423–432.