

УДК 519.2:005

## ИНТЕРВАЛЬНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

А.В. ОВСЯННИКОВ

Белорусский государственный университет  
Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь

Поступила в редакцию 14 ноября 2012

Рассмотрена задача интервального прогнозирования нестационарных процессов, описываемых моделями стохастических дифференциальных уравнений с переменными параметрами. Получены алгоритмы интервального прогнозирования в дискретном и непрерывном времени. Проанализированы вопросы достижения границ и временной адекватности прогнозностической модели.

*Ключевые слова:* нестационарный процесс, стохастическое дифференциальное уравнение, интервальный прогноз, алгоритм, достижение границ, временная адекватность.

### Введение

Задача прогнозирования стохастических процессов представляет значительный теоретический интерес и имеет прикладной характер во многих областях научных исследований, в частности, в теории управления, статистической радиотехнике, оценке надежности технических систем, финансово-экономической сфере и т.д. В классической (труды А.М. Яглома, Т. Андерсона, Э. Парзена, Р. Брауна и др.) и обширной современной литературе, посвященной этому вопросу, представлены результаты точечного и интервального прогнозирования (ИП), полученные в предположении гауссовской, стационарной «шумовой» компоненты прогнозируемого процесса. В тоже время во многих практических задачах шумы имеют негауссовский и нестационарный характер. Применение приближений нестационарного процесса совокупностью стационарных участков [1,2] обеспечивает получение краткосрочных прогнозов на относительно небольших временных интервалах и не позволяет строить качественные, с различным уровнем горизонта, точечные и интервальные прогнозы.

В работе [3] предложен метод ИП нестационарных процессов с произвольным распределением шума и независимыми временными отсчетами. ИП в этом случае оказывается эффективнее классических методов [4], в том смысле, что гарантирует прогноз в заданном доверительном интервале на произвольный временной отрезок. Представляется целесообразным, в развитие работы [3], рассмотреть задачу ИП с учетом «тонкой» структуры шумового процесса, модель формирования которого может быть задана стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ). В этом случае структура алгоритмов ИП позволяет учитывать нестационарность «шумовой» компоненты прогнозируемого процесса и обеспечивает распространение предлагаемой методики на широкий класс процессов, описываемых СДУ с переменными параметрами.

Цель статьи – разработать общий, теоретически обоснованный метод и алгоритмы ИП нестационарных процессов, описываемых СДУ с переменными параметрами с учетом различных сведений о его структуре, оценить эффективность ИП и временную адекватность прогнозностической модели.

## Постановка задачи интервального прогнозирования

Рассмотрим задачу прогнозирования на  $P$  шагов в условиях регулярного статистического эксперимента. Пусть имеется наблюдаемая последовательность  $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_k]^T$ , принадлежащая нестационарной плотности (НП)  $P_\xi = P(\xi | X, t)$ , где  $X$  – набор параметров НП. В непрерывном времени модель процесса представляется СДУ

$$\dot{\xi}(t) + a(t, \xi) = g(t)\zeta(t), \quad (1)$$

где  $a(t, \xi)$ ,  $g(t)$  – известные детерминированные функции, удовлетворяющие условию Липшица,  $\zeta(t)$  – нормальный белый шум с нулевым средним  $\langle \zeta(t) \rangle = 0$  и дельтаобразной корреляционной функцией  $\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = N\delta(t'-t)/2$ ,  $N$  – односторонняя спектральная плотность. Оптимальная разностная схема, при понимании СДУ (1) в форме Ито, имеет вид

$$\xi_i = \xi_{i-1} - \Delta a_{i-1} + \Delta g_i \zeta_i, \quad (2)$$

где  $\Delta = t_i - t_{i-1}$  малый интервал времени, на котором слева и справа интегрируется СДУ (1),  $a_{i-1} = a(t_{i-1}, \xi_{i-1})$ ,  $\zeta_i = (1/\Delta) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \zeta(t) dt$ ,  $M_{\xi_i} = \xi_{i-1} - \Delta a_{i-1}$  – математическое ожидание,  $D_{\xi_i} = B(t_i)\Delta$  – дисперсия,  $B(t_i) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} (N/2\Delta) \int_{t_{i-1}}^{t_i} g^2(x) dx$  – коэффициент диффузии (в случае  $g = \text{const}$  этот коэффициент  $B = Ng^2/2$ ). Глобальная среднеквадратическая погрешность разностной схемы (2) определяется величиной [5]  $\sigma \leq \Delta \left( \int_0^T M \left[ (a'_\xi g(t))^2 \right] dt \right)^{1/2}$ ,  $T = k\Delta$ . В дальнейшем, там где это не вызывает сомнений, зависимости функций от аргументов опускается.

При фиксированном объеме ряда  $\{\xi_i\}$  выборочным пространством является  $k$ -мерное пространство  $R^k$ , на котором задана плотность  $P_\xi$  (здесь и далее под плотностью понимается плотность распределения вероятностей). Верхний  $\alpha_p^+$  и нижний  $\alpha_p^-$  доверительный предел для момента времени  $t_p > t_k$  ( $p = k + P$ ) определяются из условия  $P(\alpha_p^- - M_{\xi_p} < u \leq \alpha_p^+ - M_{\xi_p}) = \gamma$ , где  $u = \xi - M_{\xi_p}$ ,  $M_{\xi_p}$  – систематическая составляющая последовательности  $\{\xi_i\}$ ,  $\gamma$  – заданная доверительная вероятность. Следовательно, выражения для верхнего и нижнего доверительного предела  $\alpha_p^\pm = M_{\xi_p} \pm F_p^{-1} [F_p(0) \pm \gamma/2]$ , которое при симметричной НП преобразуется к виду

$$\alpha_p^\pm = M_{\xi_p} \pm F_p^{-1}(\gamma/2), \quad (3)$$

где  $F_p^{-1}$  – функция, обратная функции распределения  $F_p(\alpha_p^\pm - M_{\xi_p}) = \gamma/2$ . Ширина интервала прогноза –  $\Delta_{\text{пр}} = 2F_p^{-1}[\gamma/2]$ . Таким образом, если известна НП, определяющая однозначное интегральное преобразование  $F_p^{-1}$ , решение задачи прогнозирования сводится к вычислению (3) в моменты времени  $t_p > t_k$ .

### Алгоритмы интервального прогнозирования в дискретном и непрерывном времени

Функцию  $F^{-1}$  аналитически можно найти в ограниченном ряде случаев. Поэтому можно воспользоваться тем, что одношаговая плотность перехода (ОПП) марковского процесса (2) имеет вид

$$P(\xi_i | \xi_{i-1}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2D_{\xi_i}} [\xi_i - M_{\xi_i}]^2 \right\} / \sqrt{2\pi D_{\xi_i}}. \quad (4)$$

Функция распределения, соответствующая (4) и доверительному интервалу  $\Delta_{\gamma p}$ , имеет вид  $F(\alpha_i^\pm - M_{\xi_i}) = \pm(1/2)\text{Erf}\left[(\alpha_i^\pm - M_{\xi_i})/\sqrt{2D_{\xi_i}}\right]$ , где Erf – функция интеграла вероятности и, следовательно, алгоритм ИП (3) принимает вид

$$\alpha_i^\pm = M_{\xi_i} \pm \sqrt{2D_{\xi_i}}\text{Erf}^{-1}(\gamma). \quad (5)$$

Уравнение (4) позволяет получить текущую оценку верхнего и нижнего доверительного интервального предела на интервале  $i = \overline{1, k}$ . Уравнение для следующих  $P$  шагов имеет вид (5) с учетом замены переменных  $M_{\xi_i}$  и  $D_{\xi_i}$  на их оценки по результатам  $k$  наблюдений.

Рассмотрим СДУ

$$\dot{\xi}(t) + a(t, \xi) = g\sqrt{t}\zeta(t) \quad (6)$$

и его разностную схему  $\xi_i = \xi_{i-1} - \Delta a_{i-1} + g\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{t}\zeta(t)dt$ , для которой определим параметры сноса  $A = -a_{i-1}$ , диффузии  $B(t_i) = Bt_i$ ,  $t_i = (t_i + t_{i-1})/2$ , среднего значения  $M_{\xi_i} = \xi_{i-1} - \Delta a_{i-1}$  и дисперсии  $D_{\xi_i} = Dt_i$ ,  $D = B\Delta$ . Таким образом, видно, что приведенное СДУ соответствует ОПП (4) и для него применим алгоритм ИП (5).

Используя метод максимального правдоподобия, величину параметра масштаба  $D$  можно найти из уравнения  $-\sum_{i=1}^k \partial \ln P(\xi_i | \xi_{i-1}) / \partial D = 0$ . Выполняя преобразования, получим

$$D_k^* = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{(\xi_i - M_{\xi_i})^2}{t_i}, \quad (7)$$

и, следовательно, алгоритм ИП (5) принимает вид

$$\alpha_p^\pm = \langle M_{\xi_p}^* \rangle \pm \sqrt{2D_k^* t_p} \text{Erf}^{-1}(\gamma). \quad (8)$$

Здесь величина  $\langle M_{\xi_p}^* \rangle$  представляет собой функцию, описывающую поведение среднего значения процесса. С учетом разложения в ряд функции  $a(\xi_{i-1})$  по степеням  $\xi_{i-1}$  до второй включительно, получим выражение  $\langle M_{\xi_p}^* \rangle = \xi_0 [r^{-p} - \xi_0 (T_\xi / T_{1\xi})(1 - r^{-p})]^{-1}$ , где  $T_\xi = \langle a'_\xi \rangle^{-1}$ ,  $T_{1\xi} = \langle a''_\xi / 2 \rangle^{-1}$  – постоянные времени СДУ,  $r = \exp(-\Delta / T_\xi)$ . Заметим, что если принять  $\langle a''_\xi \rangle = 0$ , то  $\langle M_{\xi_p}^* \rangle = \xi_0 r^p$ , что соответствует приближению стохастического процесса экспоненциально-коррелированным.

Рассматривая уравнения (8) относительно  $\alpha_p^\pm$  для двух последовательных моментов времени  $t_p$ ,  $t_{p-1}$  и переходя к пределу при  $\Delta \rightarrow 0$ , получаем обобщенные уравнения оценки верхнего и нижнего доверительного предела в непрерывной форме:

$$\alpha^\pm(t) = m_\xi^*(t) \pm \sqrt{2D_T^*(1-r^2)t} \text{Erf}^{-1}(\gamma), \quad t > t_k = T \quad (9)$$

В приведенном выражении величина  $m_\xi(t) = \langle \xi(t) \rangle$  представляет собой среднее процесса описываемого СДУ (1),  $D_T^* = \frac{T_\xi}{2T} \int_0^T [\xi^2 + a^2] t^{-1} dt$ ,  $T = k\Delta$ . В табл. 1 представлены параметры дискретного и непрерывного алгоритма ИП гауссовского экспоненциально-коррелированного процесса. Анализ алгоритмов (8), (9) позволяет сделать вывод о том, что в отличие от ИП процесса с независимыми отсчетами, в случае его описания моделями СДУ, становится существенным наличие среднего значения. Если имеет место процесс с

$\lim_{t \rightarrow \infty} m_{\xi}(t) = 0$ , то при малых постоянных времени влияние  $m_{\xi}^*(t)$  на результат работы алгоритма ИП практически незначительно. В то же время эта величина может оказаться существенно значимой при больших постоянных времени СДУ или в случае нестационарности самого процесса  $\xi(t)$  относительно среднего, т.е.  $\lim_{t \rightarrow \infty} m_{\xi}(t) \neq 0$ .

В табл. 2, приведены характеристики экспоненциально-коррелированных стохастических процессов, описываемых СДУ  $\dot{\xi}(t) + \mu(t)\xi(t) = g\sqrt{t}\zeta(t)$ , для которых существует точный алгоритм ИП в виде

$$\alpha^{\pm}(t) = m_{\xi}(t) \pm \sqrt{2D_{\xi}(t)} \text{Erf}^{-1}(\gamma). \quad (10)$$

Решение СДУ имеет вид  $\xi(t) = \varphi(t_0, t) + g \int_{t_0}^t \varphi(x, t) \sqrt{x} \zeta(x) dx$ , где  $\varphi(t_0, t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t \mu(x) dx\right)$ ,  $\varphi(x, t) = \varphi(t_0, t)\varphi(x, t_0)$ . Коэффициенты сноса и диффузии СДУ равны  $A(t, \xi) = -\mu(t)\xi(t)$ ,  $B(t) = Bt$ . Автокорреляционная функция (АКФ) процесса  $K(t', t) = B\varphi(t_0, t')\varphi(t_0, t) \int_{t_0}^t x\varphi(x, t_0)^2 dx$ . В табл. 2 приведены среднее значение процесса  $m_{\xi}(t)$ , дисперсия  $D_{\xi}(t)$  и АКФ  $K(t, \tau)$ .

Таблица 1. Параметры дискретного и непрерывного алгоритма ИП СДУ (6)  $a(\xi) = \mu\xi$

Алгоритм	Дискретный	Непрерывный
Параметр $\mu$	$\mu = b / 2D_k^*$	$\mu = b / 2D_T^*$
Среднее значение	$\langle M_{\xi p}^* \rangle = \xi_0 \exp(-\mu p \Delta)$	$m_{\xi}(t) = \xi(t_0) \exp(-\mu t)$
Параметр масштаба	$D_k^* = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{(\xi_i - (1 - \mu \Delta)\xi_{i-1})^2}{t_i}$	$D_T^* = \frac{1}{2\mu T} \int_0^T [\xi^2 + (\mu\xi)^2] t^{-1} dt$

Таблица 2. Характеристики СДУ (6) с  $a(t, \xi) = \mu(t)\xi(t)$  и параметры алгоритма ИП

СДУ	Пример 1	Пример 2
Параметр $\mu(t)$	$\mu$	$\mu(t+c)^{-1}$ , $c = \text{const}$
Среднее значение $m_{\xi}(t)$	$\xi(t_0) \exp(-\mu t)$	$\xi(t_0) c^{\mu} (t+c)^{-\mu}$
Дисперсия $D_{\xi}(t)$	$D_{\mu} (2\mu t + e^{-2\mu t} - 1)$ , $D_{\mu} = B / 4\mu^2$	$D_{\mu} [(c^2 \eta(t)^2 + (t+c)(2t\mu + t - c))]$ $D_{\mu} = B / 2(2\mu^2 + 3\mu + 1)$ , $\eta(t) = c^{\mu} (t+c)^{-\mu}$
АКФ, $\tau = t' - t$	$D_{\xi}(t) e^{-\mu \tau}$	$D_{\xi}(t) e^{-\mu(t)\tau}$

Рассмотрим важный для практики случай, когда функция  $a(t, \xi)$  ограничена некоторой константой  $|a(t, \xi)| \leq C$ . Тогда дисперсия процесса  $\xi(t)$ , заданного СДУ (1), также ограничена

$D_{\xi}(t) \leq D_{\max}(t) = (N/2) \int_0^t g^2(x) dx$ . Таким образом, уравнения для теоретических границ верхнего и нижнего доверительного предела (10) принимают вид  $\alpha^{\pm}(t) \leq \alpha_{\max}^{\pm}(t) = m_{\xi}(t) \pm \sqrt{2D_{\max}(t)} \text{Erf}^{-1}(\gamma)$ . Например, пусть задано СДУ

$\dot{y}(t) + \nu \tanh(uy) = g\sqrt{t}\zeta(t)$ . Заменой переменных  $\xi = uy$ ,  $C = \nu v$ ,  $K = ug$  преобразуем его к виду  $\dot{\xi}(t) + C \tanh(\xi(t)) = K\sqrt{t}\zeta(t)$ . При кусочно-линейной аппроксимации функции  $a(\xi) = \{C\xi, |\xi| \leq \delta; C, |\xi| > \delta\}$ , где  $\delta$  – фиксированный интервал, получаем систему СДУ для различных участков

$$\dot{\xi}_1 + C\xi_1 = K\sqrt{t}\zeta(t), \quad |\xi| \leq \delta, \quad (11)$$

$$\dot{\xi}_2 + C \text{sign}(\xi_2) = K\sqrt{t}\zeta(t), \quad |\xi| > \delta. \quad (12)$$

Дисперсия процесса при этом ограничена функциями  $D_{\max}(t) = D_{\xi_1}(t) \leq D_{\xi}(t) \leq D_{\xi_2}(t) = D_{\max}(t)$ , где величина  $D_{\xi_1}(t)$ , с учетом результатов примера 1 приведенного в табл. 2 имеет вид  $D_{\xi_1}(t) = (B/4v^2)(2uvt + e^{-2vvt} - 1)$ ,  $D_{\xi_2}(t) = (NK^2/2)t^2/2 = u^2Bt^2/2$ .

### Интервальное прогнозирование процессов с систематической составляющей

Рассмотрим задачу ИП на  $P$  шагов в следующей постановке. Модель наблюдаемого дискретного временного ряда имеет вид  $y_i = f_i + \xi_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ . В этой модели последовательность  $\{y_i\}$  рассматривается как сумма детерминированной  $\{f_i = f(t_i, \Lambda)\}$ , где  $\Lambda = [\lambda_1 \dots \lambda_q]^T$  – вектор параметров тренда, и случайной последовательности  $\{\xi_i\}$  – “шума” наблюдения, описываемого в непрерывной форме моделью СДУ (1).

В этом случае верхний  $\alpha_p^+$  и нижний  $\alpha_p^-$  доверительный предел определяются из условия  $P(\alpha_p^- - \varphi_p < u \leq \alpha_p^+ - \varphi_p) = \gamma$ , где величины  $u = y - \varphi_p$ ,  $\varphi_p = \varphi(f_p, \xi_p) = f_p + \langle M_{\xi_p} \rangle$  – систематическая составляющая последовательности  $\{y_i\}$ . Следовательно, выражения для верхнего и нижнего доверительного предела (8), (9), с учетом того, что  $\xi_i = y_i - f_i$ , преобразуются к виду

$$\alpha_p^{\pm} = f_p^* + \langle M_{\xi_p}^* \rangle \pm \sqrt{2D_k^* t_p} \operatorname{Erf}^{-1}(\gamma), \quad (13)$$

$$\alpha^{\pm}(t) = f^*(t) + m_{\xi}(t_{zp}) \pm \sqrt{2D_T^*(1-r^2)t} \operatorname{Erf}^{-1}(\gamma), \quad t > t_k = T, \quad (14)$$

где  $f_p^* = f(t_p, \Lambda_k^*)$ ,  $f^*(t) = f(t, \Lambda_T^*)$  – функции тренда с оценкой ее параметров  $\{\Lambda_k^*, \Lambda_T^*\}$  по результатам  $k$  наблюдений временного ряда  $\{y_i\}$ . Система уравнений последовательной оценки  $\Lambda_i^*$  приведена ниже для последнего данного наблюдения  $y_k$

$$\Lambda_k^* = \Lambda_k^0 + \mathbf{K}_k Z_k \nabla f_k^0, \quad \mathbf{K}_k^{-1} = \mathbf{K}_{k-1}^{-1} + (\nabla f_k^0)(\nabla f_k^0)^T \nabla Z_k - (\nabla^2 f_k^0) Z_k,$$

где  $Z_k = -\partial \ln P(\xi_k | \xi_{k-1}) / \partial \xi_k = (\xi_k^0 - M_{\xi_k}^*) D_{\xi_k}^{-1}$ ,  $\xi_k^0 = y_k - f_k^0$ ,  $M_{\xi_k}^* = \xi_{k-1}^* - \Delta a_{k-1}^*$ ,  $\xi_{k-1}^* = y_{k-1} - f_{k-1}^*$ ,  $f_k^0 = f(t_k, \Lambda_k^0)$ ,  $f_{k-1}^* = f(t_{k-1}, \Lambda_{k-1}^*)$ ,  $\nabla f_k^0 = \partial f_k^0 / \partial \Lambda$ ,  $\nabla Z_k = \partial Z_k / \partial \xi_k$ ,  $\mathbf{K}_k$  – матрица коэффициентов усиления,  $\Lambda_k^0$  – найденное одним из известных способов предварительное значение оценки.

### Достижение границ и временная адекватность прогностической модели

Рассматриваемый метод позволяет решать практически важные задачи, связанные с достижением заданных границ  $G^{\pm} = [G^-, G^+]$  прогнозируемыми процессами, и соответственно, найти прогнозируемое время их достижения  $t_{\text{ip}} = \min(t_{\text{ip}}^-, t_{\text{ip}}^+)$ . В общей постановке решение задачи достижения границ можно определить как задачу с плавающими границами  $G^{\pm} = G^{\pm}(t)$ , например,  $G^{\pm}(t) = g_0^{\pm} + g_1^{\pm} t$ . Заметим, что из практических соображений такая постановка является более реалистичной. Время достижения ближайшей интервальной границы определяется решением нелинейного уравнения (13), (14). В частности, для непрерывной формы имеем  $G^{\pm}(t_{\text{ip}}) = f^*(t_{\text{ip}}) + m_{\xi}^*(t_{\text{ip}}) \pm \sqrt{2D_T^*(1-r^2)t_{\text{ip}}} \operatorname{Erf}^{-1}(\gamma)$ .

Так, например, в простейшем случае модели тренда  $f^*(t) = \lambda_0^* + \lambda_1^* t$ ,  $G^{\pm}(t) = G^{\pm}$  и  $m_{\xi}^*(t_{\text{ip}})$  получаем  $t_{\text{ip}}^{(\pm)} = \left( \theta_T^* \pm \sqrt{\theta_T^{*2} + 4(G^{\pm} - \lambda_0^*)\lambda_1^*} \right) / 4\lambda_1^{*2}$ ,  $\theta_T^* = \sqrt{2D_T^*(1-r^2)} \operatorname{Erf}^{-1}(\gamma)$ . В случае стационарности процесса  $\xi(t)$  относительно среднего и малых постоянных времени СДУ влияние величины  $m_{\xi}^*(t_{\text{ip}})$  на решение несущественно и эту составляющую уравнения можно не

учитывать.

Рассмотрим отношение  $\varepsilon = t_{\text{тр}} / t_p$ . Очевидно, что при  $\varepsilon < 1$  используемая в (15) модель  $f^*$  утрачивает эффективность и становится неадекватной с точки зрения прогноза на время  $t_p$ . В этом случае необходимо либо уменьшить величину  $t_p$  либо модифицировать модель тренда  $f$ . Таким образом, вычисляя предварительно время достижения интервальной границы  $t_{\text{тр}}$  можно определить эффективное время прогнозирования  $t_p^3 = t_{\text{тр}}$  выбранной модели  $f^*$ . Поскольку величина  $t_{\text{тр}}$  является функцией доверительной вероятности  $t_{\text{тр}}(\gamma)$ , то можно говорить об эффективном времени прогнозирования с заданной доверительной вероятностью  $t_p^3 = t_p^3(\gamma)$ .

### Моделирование алгоритмов интервального прогнозирования

Результаты моделирования алгоритмов ИП нестационарных процессов описываемых СДУ с переменными параметрами (табл. 2) и коэффициентом  $\gamma = 0,9$  приведены на рис. 1, 2. ИП велось от середины временного интервала моделирования. На рис. 1 приведены результаты работы алгоритма ИП детерминированной функции  $f(t) = 100 + 0,05t$  на фоне стохастического процесса  $\dot{\xi}(t) + 0,2\xi(t) = \sqrt{t}\zeta(t)$  с начальным значением  $\xi(0) = 100$  и  $B = 2$ . На рис. 1 представлены: процесс  $\xi(t)$ , результат работы точного алгоритма ИП (10) – 1, результат работы алгоритма ИП (14) с  $r = 0,5$  – 2. В случае  $r = 0$  поведение зависимостей  $\alpha^\pm(t)$  ИП практически совпадает с зависимостью 1.

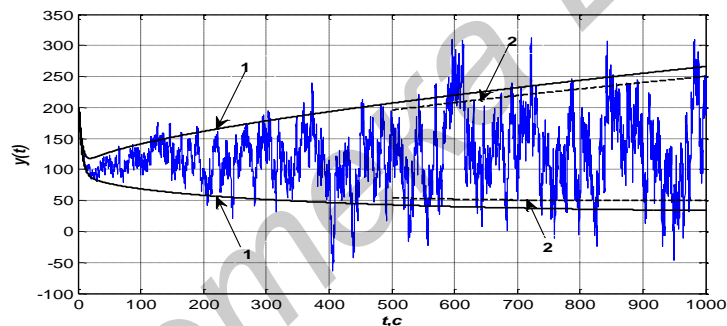


Рис.1. ИП линейного СДУ примера 1 (табл. 2)

На рис. 2 приведены результаты работы алгоритма ИП детерминированной функции  $f(t) = 10 + 0,1t$  на фоне стохастического процесса  $\dot{\xi}(t) + 2(t+1)^{-1}\xi(t) = \sqrt{t}\zeta(t)$  с начальным значением  $\xi(0) = 100$ ,  $B = 2$  и средним значением  $m_\xi(t) = 10(t+1)^{-2}$ . На рис. 2 представлены: процесс  $\xi(t)$ , результат работы точного алгоритма ИП (10) – 1, результат работы алгоритма ИП (14) с  $r = 0 \dots 2$ , результат алгоритма ИП (14) с  $r = 0,5 \dots 3$ .

На рис.3 и рис.4 приведены результаты моделирование алгоритма ИП функции  $f(t) = 10 + 0,1t$  на фоне стохастического процесса  $\dot{\xi}(t) + v \tanh(u\xi) = g\sqrt{t}\zeta(t)$  с начальным значением  $\xi(0) = 10$  и  $B = 2$ . Среднее значение процесса  $m_\xi(t) = \text{asinh}(e^{-uvt} \sinh(u\xi_0)) / u$ . Моделирование алгоритма ИП проводилось для различных значений параметра  $u$  и  $v = 2$ . На рис.3 представлены: процесс  $\xi(t)$  с  $u = 0,1$ , результат работы алгоритма ИП (11) с  $u = 0,1 \dots 1$ , результат работы алгоритма ИП (12) с соответствующей величиной  $D_{\text{max}}(t)$ . На рис. 4 представлены: процесс  $\xi(t)$  при  $u = 10$  и результат работы алгоритма ИП с соответствующей величиной  $D_{\text{max}}(t)$ .

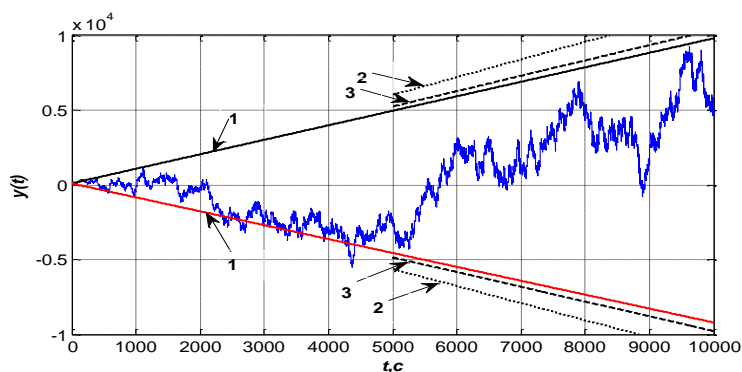


Рис. 2. ИП линейного СДУ примера 2 (таблица 2)

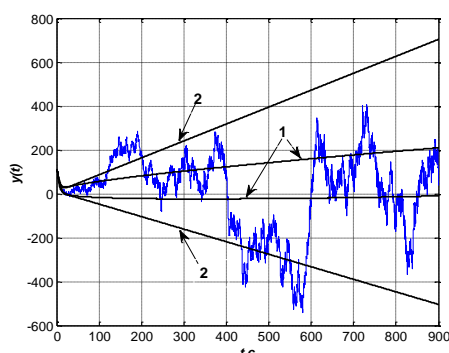


Рис. 3. ИП нелинейного СДУ с параметром  $u = 0,1$

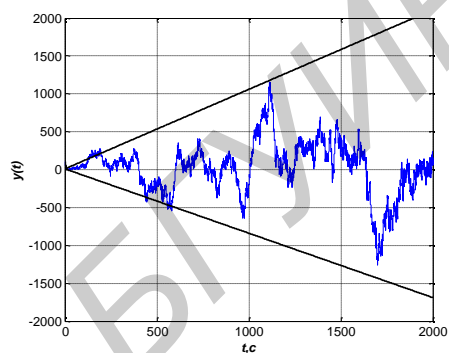


Рис. 4. ИП нелинейного СДУ с параметром  $u = 10$

### Заключение

Рассматриваемый подход к ИП обобщает результаты полученные в [3] на случай описания стохастических процессов моделями СДУ с переменными параметрами. В работе получены дискретные и непрерывные алгоритмы ИП с учетом нестационарности шумовой компоненты прогнозируемого процесса. Решение задачи ИП позволяет решать и сопутствующие задачи, связанные с достижением заданных границ прогнозируемыми процессами и оценкой временной адекватности прогностической модели. На аналитических примерах и результатах моделирования показана эффективность применения разработанных алгоритмов.

## INTERVAL PREDICTION OF NON-STATIONARY PROCESSES, DESCRIBED BY STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE PARAMETERS

### Abstract

A.V. AUSIANNIKAU

The task of interval prediction of non-stationary processes of stochastic differential equations described by models with variable parameters is considered. Algorithms of interval prediction in the discrete and continuous time are received. Questions of achievement of boundaries and temporal adequacy of prognostic model are analyzed.

### Список литературы

1. Орлов Ю.Н., Осминин К.П. Нестационарные временные ряды: Методы прогнозирования с примерами анализа финансовых и сырьевых рынков. М., 2011.
2. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. М., 2003.
3. Овсянников А.В. // Изв. НА НБ. Сер. физ.-мат. наук. 2010. № 4. С.21–28.
4. Грешило А.А., Стакун В.А., Стакун А.А. Математические методы построения прогнозов. М., 1997.
5. Никитин Н.Н., Разевиг В.Д. // Жур. Выч. Матем. и матем. физики. 1978. Т 18, № 1. С.106–117.