УДК 517.925

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.Э. ЖАВНЕРЧИК

*Институт информационных технологий
Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники
Козлова, 28, Минск, 220037, Беларусь*

Поступила в редакцию 14 ноября 2011

Получены достаточные условия существования нескольких изолированных периодических решений уравнения $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$.

Ключевые слова: изолированное периодическое решение, предельный цикл, фазовая плоскость, простая замкнутая кривая.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0 \tag{1}$$

в предположении, что функции $f(x, \dot{x})$ и $g(x)$ непрерывны и удовлетворяют условиям, гарантирующим для (1) единственность решения задачи Коши. Этим уравнением можно описать различные динамические системы, имеющие существенно нелинейный характер.

Уравнение (1) и его частные случаи исследовались многими авторами, [1, 2].

Заменим уравнение (1) эквивалентной системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -f(x, y)y - g(x). \end{cases} \tag{2}$$

В данной работе получены достаточные условия существования нескольких предельных циклов системы (2) и указана область их месторасположения. При этом для отыскания предельных циклов системы (2), соответствующих изолированным периодическим решениям уравнения (1), используется теорема Пуанкаре-Бендиксона [1].

Введем обозначения:

$$r_{ij}(x) = (-1)^j \lambda_j (a_{ij} - x), \quad l_j = \lambda_j (a_{2j} - a_{1j}),$$

$$R_{ij}(x) = (-1)^j \lambda_j - f\left(x, r_{ij}(x)\right),$$

$$D_j = \left\{(x; y) \middle| a_{1j} \le x \le a_{2j}, \lambda_j (a_{1j} - x) \le (-1)^j y \le \lambda_j (a_{2j} - x)\right\},$$

где λ_j, a_{ij} – действительные числа; i, j – натуральные числа.

Лемма. *Пусть существуют числа* $\lambda_j > 0$ *и* $a_{1j} < a_{2j}$ *такие, что при* $j = 1$ *или* $j = 2$ *выполняются условия*:

1) $g(a_{1j}) < 0, \; g(a_{2j}) > 0$;

2) $r_{2j}(x) R_{2j}(x) \le g(x) \le r_{1j}(x) R_{1j}(x)$ *при* $x \in [a_{1j}, a_{2j}]$.

Тогда в фазовой плоскости существует простая замкнутая кривая, которую (при возрастании t) пересекают траектории системы (2): при $j=1$ выходят из конечной области, ограниченной этой кривой, а при $j=2$ входят в указанную область.

Для доказательства леммы рассмотрим на фазовой плоскости xOy область D_j – параллелограмм $P_jQ_jR_jS_j$ с вершинами в точках $P_j(a_{1j};0)$, $Q_j(a_{2j};(-1)^{j+1}l_j)$, $R_j(a_{2j};0)$, $S_j(a_{1j};(-1)^j l_j)$ и со сторонами, определяемыми уравнениями:

$$\overset{\frown}{P_jQ_j}: y=r_{1j}(x);\quad \overset{\frown}{Q_jR_j}:\ x=a_{2j};\quad \overset{\frown}{R_jS_j}:\ y=r_{2j}(x);\quad \overset{\frown}{S_jP_j}:\ x=a_{1j}.$$

Из условия 1) следует, что на границе параллелограмма $P_jQ_jR_jS_j$ не содержится особых точек системы (2). Вычислим полную производную функций $u_j(x,y)\equiv y+(-1)^j\lambda_j x=C$ и $u(x)\equiv x=C$ по времени t в силу системы (2) в точках границы ∂D_j параллелограмма $P_jQ_jR_jS_j$. С учетом условия 2) заключаем, что фазовые траектории системы при возрастании t пересекают границу параллелограмма $P_jQ_jR_jS_j$: при $j=1$ выходят из параллелограмма, а при $j=2$ входят в указанный параллелограмм.

Теорема 1. *Пусть существуют числа* $\lambda_j>0$, a_{ij} $(i=1,2;\ j=\overline{1,m+1})$ *такие, что*:

1) $a_{11}<0<a_{21}$, $(-1)^i a_{ij}<(-1)^i a_{i\,j+1}$, $i=1,2;\ j=\overline{1,m}$;

2) $xg(x)>0$ *при* $x\in[a_{1\,m+1},a_{2\,m+1}]\setminus\{0\}$;

3) $r_{2j}(x)R_{2j}(x)\le g(x)\le r_{1j}(x)R_{1j}(x)$ *при* $x\in[a_{1j},a_{2j}]$, $j=\overline{1,m+1}$.

Тогда система (2) имеет по крайней мере m предельных циклов, причем в каждом параллелограмме D_j $(j=\overline{2,m+1})$ *на плоскости* xOy *расположено не менее* $j-1$ *предельных циклов, из которых* $[j/2]$ *устойчивы и* $[(j-1)/2]$ *неустойчивы.*

Действительно, из приведенной выше леммы вытекает существование в фазовой плоскости xOy простой замкнутой кривой ∂D_j $(j=\overline{1,m+1})$, которую пересекают траектории системы (2): при j нечетном выходят из параллелограмма D_j, а при j четном входят в указанный параллелограмм. Из условия 1) теоремы следует, что параллелограмм D_j содержится внутри параллелограмма D_{j+1} $(j=\overline{1,m})$. Следовательно, между кривыми ∂D_j и ∂D_{j+1} при j нечетном находится по крайней мере один устойчивый предельный цикл и при j четном – неустойчивый.

Теорема 2. *Пусть существуют числа* $\lambda_j>0$, a_{ij} $(i=1,2;\ j=\overline{2,m+1})$ *такие, что*:

1) $a_{12}<0<a_{22}$, $(-1)^i a_{ij}<(-1)^i a_{i\,j+1}$, $i=1,2;\ j=\overline{2,m}$;

2) $xg(x)>0$ *при* $x\in[a_{1\,m+1},a_{2\,m+1}]\setminus\{0\}$;

3) $r_{2j}(x)R_{2j}(x)\le g(x)\le r_{1j}(x)R_{1j}(x)$ *при* $x\in[a_{1j},a_{2j}]$, $j=\overline{2,m+1}$;

4) $f(0,0)<0$.

Тогда система (2) имеет по крайней мере m предельных циклов, причем в каждом параллелограмме D_j $(j=\overline{2,m+1})$ *на плоскости* xOy *расположено не менее* $j-1$ *предельных циклов, из которых* $[j/2]$ *устойчивы и* $[(j-1)/2]$ *неустойчивы.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Отметим лишь, что в качестве внутренней границы искомой кольцевой области с внешней границей ∂D_2 можно взять лежащую в окрестности начала координат плоскости xOy одну из кривых однопараметрического семейства кривых

$$\lambda(x, y) \equiv \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(s)ds = C.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\dot{x}^{k+1} + g(x) = 0,$$

которое эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sum_{k=0}^{n} f_k(x) y^{k+1} - g(x), \end{cases} \tag{3}$$

где $n \in \mathbf{N}$; функции $f_k(x)$ $(k = \overline{0, n})$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:

$$f_{2i}(-x) = f_{2i}(x), \quad i = 0, 1, ..., [n/2];$$

$$f_{2i+1}(-x) = -f_{2i+1}(x), \quad i = 0, 1, ..., [(n-1)/2];$$

$$g(-x) = -g(x).$$

Обозначим:

$$r_j(x) = (-1)^j \lambda_j (a_j - x), \quad R_j(x) = (-1)^j \lambda_j - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) r_j^k(x),$$

$$D_j = \left\{(x;\, y) \big| |x| \le a_j,\, \left|y + (-1)^j x\right| \le \lambda_j a_j \right\},$$

где $\lambda_j, a_j \in \mathbf{R}$; $j \in \mathbf{N}$.

Из теоремы 1 вытекает утверждение.

Следствие 1. *Пусть существуют числа* $\lambda_j > 0$, a_j $(j = \overline{1, m+1})$ *такие, что*:

1) $0 < a_1 < a_2 < ... < a_{m+1}$;

2) $g(x) > 0$ *при* $x \in (0, a_{m+1}]$;

3) $r_j(x) R_j(x) \le g(x)$ *при* $|x| \le a_j$, $j = \overline{1, m+1}$.

Тогда система (3) имеет по крайней мере m предельных циклов, причем в каждом параллелограмме D_j $(j = \overline{2, m+1})$ *на плоскости* xOy *расположено не менее* $j-1$ *предельных циклов, из которых* $[j/2]$ *устойчивы и* $[(j-1)/2]$ *неустойчивы.*

Из теоремы 2 вытекает утверждение.

Следствие 2. *Пусть существуют числа* $\lambda_j > 0$, a_j $(j = \overline{2, m+1})$ *такие, что*:

1) $0 < a_2 < a_3 < ... < a_{m+1}$;

2) $g(x) > 0$ *при* $x \in (0, a_{m+1}]$;

3) $r_j(x)R_j(x) \le g(x)$ *при* $|x| \le a_j$, $j = \overline{2, m+1}$;

4) $f_0(0) < 0$.

Тогда система (3) имеет по крайней мере m предельных циклов, причем в каждом параллелограмме D_j $(j = \overline{2, m+1})$ *на плоскости* xOy *расположено не менее* $j-1$ *предельных циклов, из которых* $[j/2]$ *устойчивы и* $[(j-1)/2]$ *неустойчивы.*

ON PERIODIC SOLUTIONS OF THE SECOND ORDER EQUATION

V.E. ZHAVNERCHIK

Abstract

The sufficient conditions for the existence of several isolated periodic solutions of the equation $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$ are obtained.

Список литературы

1. *Рейссиг Р*., *Сансоне Г*., *Конти Р*. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М., 1974.
2. *Амелькин В.В*., *Жавнерчик В.Э*. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №2. С. 36–41.