

УДК 681.3.519.241.2

ОБОБЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОГРАММНО-УПРАВЛЯЕМОГО ВЕРОЯТНОСТНОГО ЭЛЕМЕНТА

Э.А. БАКАНОВИЧ, Т.М. КРИВОНОСОВА

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 14 ноября 2011

Приводится математическое описание программно-управляемого вероятностного элемента (вероятностного конъюнктора) в достаточно общем предположении относительно свойств и числовых характеристик потоков случайных и детерминированных сигналов, поступающих на входы конъюнктора. Обобщенная математическая модель позволяет осуществлять программное управление вероятностью наступления случайного события при использовании элементов с различным числом импульсных и потенциальных входов, а также выполнять параллельное и последовательное соединения вероятностных элементов при организации стохастических сетей.

Ключевые слова: стохастическое устройство, математическая модель, вероятностный элемент, поток случайных событий, распределение Пуассона, поток Пальма, функции Пальма – Хинчина.

Введение

Возможность организации программного управления параметром пуассоновского потока сигналов [1] является предпосылкой расширения функциональных возможностей цифровых структур, используемых для генерирования потоков случайных событий с управляемыми вероятностными и временными характеристиками. В частности, появляется возможность автоматически выбирать вид оператора преобразования первичных случайных и детерминированных потоков и адаптировать параметры генераторов потоков случайных событий к характеру решаемых задач. Однако это требует обобщения и уточнения математических моделей, описывающих работу управляемых вероятностных конъюнкторов [2, 3].

Обобщенная математическая модель

Пусть на схему совпадения поступают поток бесконечно коротких импульсов $\varphi_S(z)$, интервалы между которыми ϑ имеют плотность распределения вероятностей $f(\vartheta)$, и поток $Y_{\Pi}(t)$ прямоугольных сигналов, длительности которых τ являются случайными величинами с плотностью распределения вероятностей $f(\tau)$. Интервалы между моментами появления последовательных прямоугольных сигналов также случайны, а их функция распределения определяется способом включения конъюнктора – рис. 1. Будем интерпретировать работу конъюнктора как процесс «набрасывания» случайного временного интервала τ на импульсный поток $\varphi_S(z)$; начало набрасываемого интервала τ может оказаться внутри любой паузы потока бесконечно коротких импульсов $\varphi_S(z)$. Нас интересует вероятность появления на выходе конъюнктора по крайней мере одного сигнала потока $\varphi_S(z)$ при осуществлении случайного испытания, т.е. в течение времени, когда конъюнктор открыт по потенциальному входу.

Прежде чем приступить к выводу соотношений, описывающих поведение рассматриваемого вероятностного конъюнктора, приведем некоторые положения теории случайных им-

пульсных потоков [4, 5], которые при построении обобщенной модели конъюнктора будут играть важную роль.

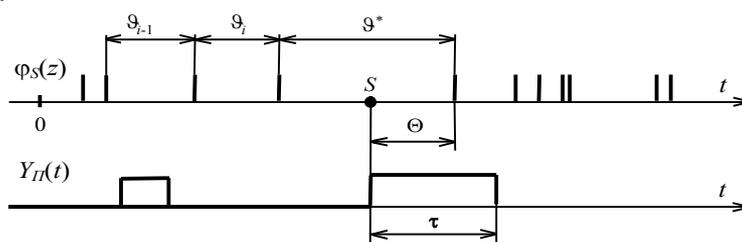


Рис. 1. Временная диаграмма работы управляемого вероятностного элемента; иллюстрация к построению обобщенной математической модели

Для стационарного и ординарного потока Пальма $\varphi_S(z)$ бесконечно коротких импульсов с плотностью распределения интервалов ϑ между соседними сигналами $f(\vartheta)$ плотность распределения $f(\vartheta^*)$ интервала ϑ^* , на который случайным образом падает точка (точка S на рис. 1), т.е. начало осуществления случайного испытания, определяется выражением

$$f(\vartheta^*) = \begin{cases} \vartheta \cdot f(\vartheta) / m\vartheta, & \vartheta > 0, \\ 0, & \vartheta < 0, \end{cases} \quad (1)$$

а плотность распределения остатка времени θ от момента падения точки S , случайно брошенной на поток $\varphi_S(z)$, до момента поступления первого после этого импульса потока $\varphi_S(z)$ определяется выражением

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{m_\vartheta} \cdot \int_\theta^\infty f(\vartheta) d\vartheta, & \theta > 0, \\ 0, & \theta < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Доказательства справедливости (1) и (2) приводятся в [5].

Теорема, устанавливающая связь между требуемой вероятностью появления по крайней мере одного сигнала на выходе вероятностного конъюнктора и характеристиками входных потоков $\varphi_S(z)$ и $Y_{II}(t)$, может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 1. Для стационарного и ординарного потока Пальма $\varphi_S(z)$ бесконечно коротких сигналов с плотностью распределения вероятностей интервалов ϑ между соседними импульсами $f(\vartheta)$, вероятность попадания по крайней мере одного сигнала в независимый от $\varphi_S(z)$ случайный интервал τ , подчиняющийся распределению $f(\tau)$, определяется выражением

$$P_{\geq 1}[f(\vartheta); f(\tau); \tau] = \int_0^\tau \int_0^\tau [1/m_\vartheta \cdot \int_\vartheta^\infty f(\vartheta) d\vartheta] \cdot f(\tau) d\vartheta d\tau. \quad (3)$$

Для доказательства этой теоремы вновь обратимся к рис. 1. Искомая вероятность, очевидно, соответствует вероятности выполнения условия $\theta < \tau$:

$$P(\theta < \tau) = \int_0^\tau f(\theta) d\theta. \quad (4)$$

При заданном законе распределения случайной величины τ вероятность $P_{\geq 1}[f(\vartheta); f(\tau); \tau]$ можно определить как математическое ожидание функции, закон распределения аргумента которой известен:

$$P_{\geq 1}[f(\vartheta); f(\tau); \tau] = \int_0^\infty P(\theta < \tau) \cdot f(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Подставляя (2) в (4) и (4) в (5) приходим к выражению (3).

Из этой теоремы вытекает ряд следствий.

Следствие 1. Для стационарного и ординарного потока Пальма $\varphi_S(z)$ бесконечно коротких сигналов с плотностью распределения $f(\vartheta)$ длин интервалов ϑ между соседними импульсами вероятность попадания по крайней мере одного сигнала в набрасываемый в случайный момент времени на этот поток интервал фиксированной длины τ определяется выражением

$$P_{\geq 1}[f(\vartheta); \tau] = 1/m_{\vartheta} \cdot \int_0^{\tau} \int_0^{\infty} f(\vartheta) d\vartheta dt. \quad (6)$$

Справедливость (6) непосредственно следует из (4), если учесть (2). Выражение (6) может быть получено и с использованием функций Пальма-Хинчина [6]. В частном случае, когда поток $\varphi_S(z)$ является пуассоновским потоком с интенсивностью λ из (6) получаем $r = P_{\geq 1}(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$, что соответствует частному случаю, рассмотренному в [2].

Следствие 2. Вероятность попадания по крайней мере одного сигнала регулярного потока $X_R(t)$ с периодом следования импульсов T в случайный временной интервал τ (поток $Y_{II}(t)$), подчиняющийся распределению $f(\tau)$ и набрасываемый на регулярный поток в случайный момент времени, не зависящий от $X_R(t)$ (рис. 2), определяется выражением

$$P_{\geq 1}[f(\tau); T] = 1/T \cdot \int_0^T \tau \cdot f(\tau) d\tau + \int_T^{\infty} f(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Плотность распределения длин интервалов в регулярном потоке $X_R(t)$ может быть представлена в виде δ -функции $f(T) = \delta(t - T)$. При набрасывании случайного интервала τ на регулярный поток $X_R(t)$ условие $\theta < \tau$ (рис. 2) может быть выполнено при $\tau < T$ с вероятностью

$$P(\theta < \tau) = \int_0^{\tau} \left\{ \left[1 - \int_0^{\tau-t} \delta(t - T) dt \right] / T \right\} d\tau = \tau / T, \text{ а при } \tau > T \text{ } P(\theta < \tau) = 1.$$

Таким образом,

$$P(\theta < \tau) = \begin{cases} \tau / T, & \tau < T, \\ 0, & \tau > T. \end{cases} \quad (8)$$

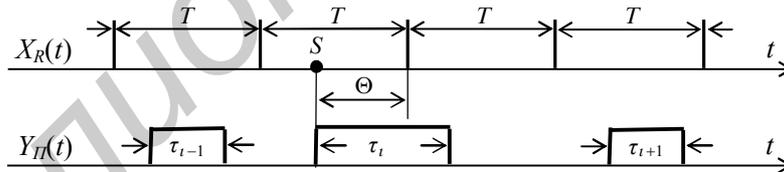


Рис. 2. Временная диаграмма работы управляемого вероятностного элемента; частный случай: регулярный импульсный поток $X_R(t)$ с управляемой частотой и случайный поток прямоугольных сигналов $Y_{II}(t)$ (стробов) с заданной плотностью распределения вероятностей длительностей $f(\tau)$

Подставляя (8) в (5), получаем (7). В частном случае, когда длина набрасываемого интервала τ распределена по показательному закону с параметром λ , из (7) непосредственно по-

$$\text{лучаем } P(A) = \int_T^{\infty} f_1(\tau + \vartheta) dt = (1 - e^{-\lambda T}) / \lambda T.$$

Следствие 3. Вероятность попадания по крайней мере одного сигнала стационарного пуассоновского потока бесконечно коротких импульсов $\varphi_S(z)$ с интенсивностью λ в набрасываемый в случайный момент времени случайный интервал τ , подчиняющийся показательному распределению с параметром μ , определяется выражением

$$p = P_{\geq 1}(\lambda; \mu) = \lambda / (\lambda + \mu). \quad (9)$$

В этом случае $f(\vartheta) = \lambda e^{-\lambda\vartheta}$ и $f(\tau) = \mu e^{-\mu\tau}$. Поэтому $P(\theta < \tau) = 1 - e^{-\lambda\theta}$;

$$p = P_{\geq 1}(\lambda; \mu) = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda\vartheta}) \cdot \mu e^{-\mu\tau} d\tau = \lambda / (\lambda + \mu).$$

Следствие 4. Вероятность попадания по крайней мере одного сигнала регулярного импульсного потока $X_R(t)$ с периодом между импульсами T в набрасываемый на $X_R(t)$ в случайный момент времени интервал фиксированной длины τ определяется выражением

$$P_{\geq 1}(T, \tau) = \begin{cases} \tau/T, & \tau < T, \\ 1, & \tau > T. \end{cases} \quad (10)$$

Доказательство справедливости (10) может быть осуществлено на основе методики, которая использовалась для вывода (7).

На рис. 3 приведены характеристики управляемого вероятностного конъюнктора для частного случая, когда $\varphi_S(z)$ является стационарным пуассоновским потоком с параметром λ , а набрасываемый интервал подчиняется показательному распределению с параметром μ – формула (9).

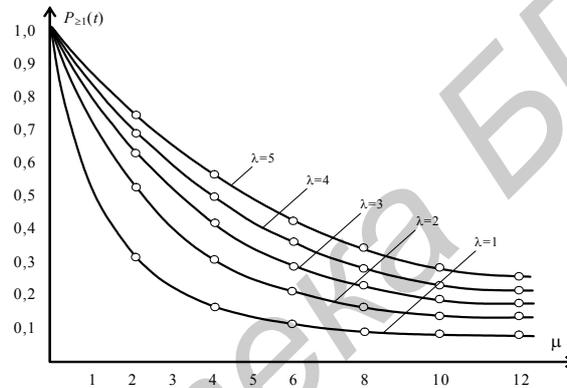


Рис. 3. Характеристики управляемого вероятностного элемента

В заключение рассмотрим часто встречающийся на практике случай, когда интервал времени, в течение которого конъюнктор открыт по потенциальному входу, ограничен неслучайной величиной T_0 – рис. 4.

Теорема 2. Для стационарного и ординарного потока Пальма $\varphi_S(z)$ бесконечно коротких импульсов с плотностью распределения вероятностей длин интервалов ϑ между соседними сигналами $f(\vartheta)$, вероятность попадания по крайней мере одного сигнала в независимый от $\varphi_S(z)$ интервал длиной τ с плотностью распределения вероятностей $f(\tau)$ (причем $\tau < T_0$, T_0 – некоторая неслучайная величина) равна

$$P_{\geq 1}[f(\vartheta); f(\tau); T_0] = \int_0^{T_0} f(\tau) \cdot \int_0^{\tau} f(\theta) d\theta d\tau + \int_{T_0}^{\infty} f(\tau) \cdot \int_0^{T_0} f(\theta) d\theta d\tau, \quad (11)$$

где $f(\theta)$ определяется в соответствии с (2).

Обратимся к рис. 4, который иллюстрирует тот факт, что сигнал на выходе конъюнктора появляется тогда, когда $\tau < T_0$, $\theta < \tau$ или при $\tau > T_0$, $\theta < T_0$. Далее для доказательства справедливости (11) может быть использована методика, применявшаяся для вывода (3).

Следствие 1. Для управляемого вероятностного конъюнктора, рассмотренного в [3], в соответствии с (11) получим выражение

$$P_{\geq 1}[f(\vartheta); T; T_0] = \begin{cases} (1 - e^{-\mu T}) / \mu T, & T < T_0, \\ (1 - e^{-\mu T_0}) / \mu T, & T > T_0. \end{cases} \quad (12)$$

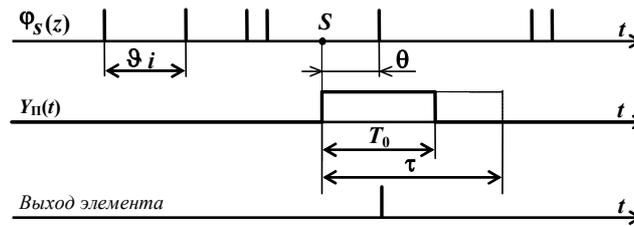


Рис. 4. Временная диаграмма работы управляемого вероятностного элемента; частный случай: длительности случайных прямоугольных сигналов потока $Y_{\Pi}(t)$ ограничены неслучайной величиной T_0

Следствие 2. Для управляемого вероятностного конъюнктора в соответствии с (11) выражение (9) принимает вид

$$P_{\geq 1}[\lambda; \mu; T_0] = \lambda \cdot e^{-(\lambda+\mu)T_0} / (\lambda + \mu). \quad (13)$$

Заключение

Рассмотренная математическая модель обобщает результаты, приведенные в ряде статей авторов, посвященных различным способам построения управляемых вероятностных элементов при создании более сложных стохастических устройств – управляемых вероятностных и корреляционных преобразователей, генераторов многомерных случайных величин и т. п. Обобщенная модель позволяет проводить исследования и оценивать точность работы стохастических устройств при различных вероятностных свойствах используемых потоков сигналов; модель включена в состав программно-математического обеспечения автоматизированной системы управления научными исследованиями, моделированием и испытаниями радиотехнических систем.

GENERALIZED MATHEMATICAL MODEL OF THE PROGRAM-CONTROLLED PROBABILISTIC ELEMENT

E.A. BAKANOVICH, T.M. KRIVONOSOVA

Abstract

The paper represents the mathematical description of the program-controlled probabilistic element (probabilistic AND circuit) in a rather general assumption regarding the properties and numeric characteristics of the flows of random and determined signals, arriving at the inputs of the AND circuit. The generalized mathematical model allows a program-driven control of the random event probability when using the elements with different number of pulsed and potential inputs, as well as a parallel or serial connection of probabilistic elements when arranging stochastic networks.

Список литературы

1. Баканович Э.А., Кривоносова Т.М. // Докл. БГУИР. 2010, №4 (50). С. 77–83.
2. Баканович Э.А., Кривоносова Т.М. // Докл. БГУИР. 2010, №8 (54). С. 64–71.
3. Баканович Э.А., Кривоносова Т.М., Четыркина З.Н. // Докл. БГУИР. 2011. №4 (58). 5–11.
4. Седакин Н.М. Элементы теории случайных импульсных потоков. – М., изд. «Сов.радио», 1965.
5. Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. М., 1969.
6. Хинчин А.Я. // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 1955. Т. 49.