

УДК 629.7+531.383

## ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ФИЛЬТРОВ КАЛМАНА-БЬЮСИ В КОМПЛЕКСАХ ОРИЕНТАЦИИ И НАВИГАЦИИ

А.С. БЕНКАФО, А.А. ЛОБАТЫЙ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
П.Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 1 марта 2013

На основе теории оптимальной фильтрации проводится анализ методических ошибок, которые возможны при применении алгоритма оптимальной оценки фазовых координат стохастической системы. Проводится исследование этих ошибок путем моделирования конкретного примера.

*Ключевые слова:* процесс, измеритель, оценка, алгоритм фильтрации.

### Введение

Существует широкий класс систем, подверженных случайным воздействиям, параметры которых необходимо оценить на основе измерений. К таким системам относятся комплексы ориентации и навигации (КОН) движущихся в пространстве объектов. В связи с интенсивным развитием беспилотных авиационных комплексов (БАК) актуальной является задача оценивания навигационных параметров беспилотного летательного аппарата (БЛА) в процессе полета [1]. Необходимо определить вектор  $X = [x_1, \dots, x_n] = X(t)$ , характеризующий положение БЛА в пространстве (линейное, угловое положение, а также соответствующие линейные и угловые скорости и ускорения). Составляющие вектора  $X(t)$  измеряются бортовыми датчиками, показания которых представляют собой вектор  $Z = [z_1, \dots, z_m] = Z(t)$ ,  $m \leq n$ .

В классической постановке задачи математическая модель оцениваемого процесса и измерителя записываются в виде [2]

$$\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t) + U(t) + B(t)\xi(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

$$Z(t) = C(t) \cdot X(t) + H(t) \cdot \zeta(t), \quad (2)$$

где  $X(t)$  –  $n$ -мерный вектор фазовых координат системы,  $X_0$  – случайный вектор начального состояния,  $U(t)$  – детерминированный вектор управлений (внешних воздействий),  $Z(t)$  –  $m$ -мерный вектор измерений,  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ ,  $H(t)$  – матрицы коэффициентов,  $\xi(t)$ ,  $\zeta(t)$  – векторы некоррелированных белых гауссовых шумов с нулевыми математическими ожиданиями и матрицами интенсивностей  $G(t)$  и  $N(t)$ , соответственно.

Заметим, что здесь мы рассматриваем линейную постановку задачи. Все остальные постановки задачи (нелинейная модель, при небелых шумах, при инерционном измерителе и т. п.) как правило, различными способами сводятся к рассмотренной выше модели (1), (2).

### Алгоритм оптимальной фильтрации

Для моделей процесса и измерителя (1), (2) справедлив алгоритм оптимального оценивания – фильтр Калмана-Бьюси (ФКБ) в виде апостериорного уравнения [3]

$$\dot{\hat{X}} = A \cdot \hat{X} + K(Z - C\hat{X}), \quad \hat{X}(t_0) = \hat{X}_0, \quad (3)$$

где  $\hat{X}$  – апостериорная оптимальная оценка процесса  $X$  при наличии измерений  $Z$  и известных математических моделях процесса и измерителя. Здесь аргумент  $t$  для упрощения записи опущен. В выражении (3) второе слагаемое представляет собой апостериорную модель шума процесса (1)  $K \cdot \eta$ , где  $\eta = (Z - C\hat{X})$  – так называемая функция «невязки», характеризующая разность показаний измерителя  $Z$  и его апостериорной математической модели  $C\hat{X}$ .  $K$  – коэффициент усиления «невязки», вычисляемый по формуле

$$K = RC^T Q^{-1}, \quad (4)$$

где  $R$  – матрица апостериорных корреляционных моментов вида  $R = M[(X - \hat{X})(X - \hat{X})^T]$ .  $M[\dots]$  – символ операции математического ожидания.

Для вычисления матрицы  $R$  необходимо решить векторно-матричное уравнение Риккати вида

$$\dot{R} = AR + RA^T - RC^T Q^{-1} CR + BGB^T, \quad R(0) = R_0. \quad (5)$$

На рисунке представлена структура реализации ФКБ.



Рис. 1. Структура реализации ФКБ

Существуют различные способы получения алгоритма оптимальной фильтрации (3)–(5): на основе дифференциального уравнения Стратоновича-Кушнера, интегрального уравнения Винера-Хопфа и т.д. При этом вид алгоритма ФКБ при канонической постановке задачи остается неизменным. Заметим, что в системах управления современных технических систем, к которым относятся БЛА, обработка информации производится в цифровом виде. Следовательно, и ФКБ в таких системах должен представлять собой дискретный алгоритм. Дискретные ФКБ и особенности их реализации подробно исследованы в соответствующих источниках [2–4].

Рассмотрим, что представляют собой процессы  $X(t)$  и  $Z(t)$  на примере КОН БЛА. При математической формализации практически невозможно составить абсолютно точную математическую модель наблюдаемого процесса  $X(t)$  и технически создать абсолютно точный измеритель  $Z(t)$ . Следовательно, случайные процессы  $\xi(t)$  и  $\zeta(t)$  представляют собой математическое представление неопределенностей (отсутствие знаний) о соответствующем объекте. Вероятностные характеристики процесса  $X(t)$  под влиянием  $\xi(t)$  определяются уравнениями для моментов [5]:

$$\begin{aligned} \dot{m}_x &= A \cdot m_x + U, \quad m_x(t_0) = m_{x0}, \\ \dot{\Theta}_x &= A\Theta_x + \Theta_x A^T + BGB^T, \quad \Theta_x(0) = \Theta_{x0}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $m_x = m_x(t)$  и  $\Theta_x = \Theta_x(t)$  – соответственно, вектор математических ожиданий и матрица корреляционных моментов вектора  $X(t)$ . Матрица дисперсий компонент вектора  $X(t)$  имеет вид  $D_x = \text{diag}[\Theta_x]$ .

Для определения корреляционной матрицы  $\Theta_x$  в установившемся режиме, который зависит от матрицы динамических свойств  $A$ , в уравнении (7) следует левую часть приравнять нулю ( $\dot{\Theta}_x = 0$ ). Тогда искомые характеристики точности системы (1) определяются из

алгебраических уравнений

$$\sum_{l=1}^n (a_{il}\theta_{jl} + a_{jl}\theta_{il}) = -b_{ij}^2 G_{ij}, \quad (i, j=1, \dots, n).$$

При  $i=j$  получим алгебраические уравнения для дисперсий компонент вектора  $X(t)$ . Дисперсия сигнала измерителя  $Z(t)$  в соответствии с выражение (2) определяется дисперсией шума  $\zeta(t)$  и дисперсией процесса  $X(t)$ . При некоррелированности шумов  $\xi(t)$  и  $\zeta(t)$

$$D_z = CD_x C^T + HD_\zeta H^T.$$

По определению, и как видно из выражений (3)–(5), ФКБ дает оптимальное приближение оценки  $\hat{X}(t)$  не к теоретическому (опорному) процессу  $X_T(t)$ , который описывается уравнением

$$\dot{X}_T(t) = A(t) \cdot X_T(t) + U(t), \quad X_T(t_0) = X_{T0},$$

а к случайному процессу  $X(t)$ , минимизируя влияние на оценку процесса шумов измерителя  $\zeta(t)$ . При отсутствии в процессе  $X(t)$  систематических ошибок (неопределенностей)  $X_T(t) = m_x(t)$ . Иначе говоря, результат получается путем математического моделирования процесса  $X(t)$  с учетом моделей неопределенностей  $\xi(t)$  и  $\zeta(t)$ . На рис. 2 представлены графики изменения  $X_T(t)$ ,  $X(t)$ ,  $\hat{X}(t)$ . Для наглядности рассматривались математические модели процесса и измерителя первого порядка в гипотетических условиях, демонстрирующих качественную сторону рассматриваемых процессов.

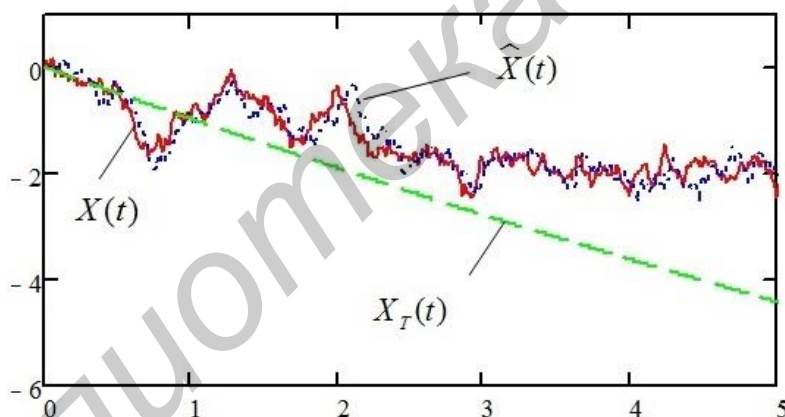


Рис. 2. Графики процессов  $X(t)$ ,  $\hat{X}(t)$ ,  $X_T(t)$

Из рис. 2 наглядно видно, что в данном случае оптимальная оценка  $\hat{X}(t)$  представляет собой случайный процесс, близкий к случайному процессу  $X(t)$ , и значительно расходящийся с опорной траекторией  $X_T(t)$ . Это обусловлено постановкой задачи, при которой ФКБ представляет собой апостериорную математическую модель случайного процесса  $X(t)$ , который может существенно отличаться от теоретического значения  $X_T(t)$ .

### Комплексирование измерителей с помощью ФКБ

Рассмотрим применение ФКБ для комплексирования различных измерителей навигационных параметров БЛА. Основой системы управления БЛА является КОН, основными поставщиками информации которого являются: БИНС – бесплатформенная инерциальная навигационная система; СНС – спутниковая навигационная система; СВС – система воздушных сигналов; РВ – радиовысотомер; БВ – барометрический высотомер. В общем случае все они работают с погрешностями различной физической природы, которые,

как показано в [1], можно представить в виде суммы случайных постоянных (систематических ошибок), белых шумов и «цветных» шумов (случайных процессов с известными корреляционными функциями).

Как показано на простом примере выше, сам по себе ФКБ не позволяет оценить процесс изменения параметров ориентации и навигации БЛА при наличии неопределенностей. Возникает вопрос – нужен ли он? Дело в том, что ФКБ удобно использовать для комплексирования различных измерителей. При этом одним из измерителей КОН является БИНС, представляющая собой математическую модель движения БЛА в пространстве. В этом случае  $X(t) = X_{\text{БИНС}}(t)$ ,  $\xi(t) = \xi_{\text{БИНС}}(t)$ .  $X_{\text{БИНС}} = [x_{1Б}, \dots, x_{nБ}]^T$ , где  $x_{iА}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) –  $i$ -й выходной параметр БИНС (линейный или угловой). В качестве вектора  $\xi_{\text{БИНС}} = [\xi_{1Б}, \dots, \xi_{nБ}]^T$  рассматриваются математические модели инструментальных погрешностей БИНС, приведенные к белым шумам в пределах соответствующих полос пропускания.

В качестве вектора  $Z = [z_1, \dots, z_m]^T$  в данном случае выступают показания дополнительных измерителей, например СНС. При этом модели погрешности измерений также сводятся к белым шумам в пределах заданных диапазонов. На рис. 3 представлена структурная схема комплексирования БИНС и СВС.

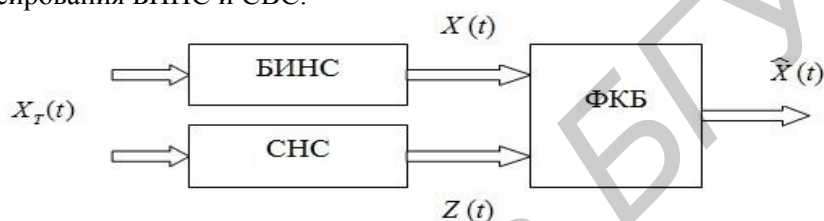


Рис. 3. Структура комплексирования измерителей КОН

В результате мы получаем оценку навигационных параметров БЛА, вычисленных в БИНС  $X(t)$  и скорректированных с помощью ФКБ на основе информации с дополнительных измерителей  $Z(t)$ :  $Z(t) = C(t) \cdot X_T(t) + H(t) \cdot \zeta(t)$ .

На рис. 4 и рис. 5 представлены графики изменения процессов  $X(t)$ ,  $Z(t)$ ,  $\hat{X}(t)$ ,  $X_T(t)$  для случая, когда входными параметрами измерителей являются параметры вектора  $X_T(t)$ . При моделировании задавались гипотетические условия применения, при которых наглядно демонстрируются свойства ФКБ.

На рис. 4 видно, что процесс  $X(t)$  (выходной сигнал БИНС) существенно отклоняется от опорной (теоретической) траектории  $X_T(t)$ . В то же время сигнал измерителя  $Z(t)$  сильно зашумлен. На рис. 5 наглядно показано, что оптимальная оценка  $\hat{X}(t)$  незначительно отклоняется от траектории опорного процесса  $X_T(t)$ .

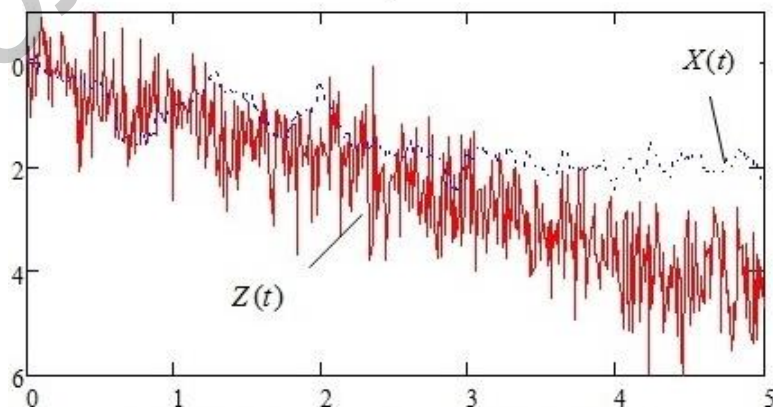


Рис. 4. Графики процессов  $Z(t)$  и  $X(t)$

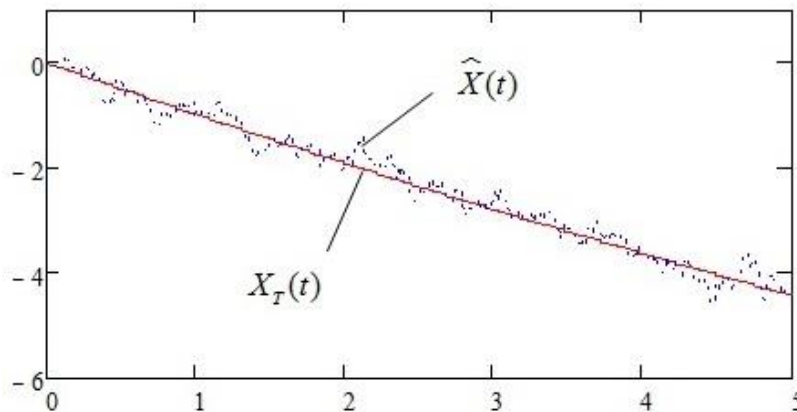


Рис. 5. Графики процессов  $X_T(t)$  и  $\hat{X}(t)$

Таким образом, в результате комплексирования измерителей мы получили компенсацию систематических ошибок, входящих в процесс  $X(t)$  (выходной сигнал БИНС), за счет использования дополнительных измерений  $Z(t)$  (выходной сигнал СНС), а также частичное сглаживание шумов входных шумов измерителей  $\xi(t)$  и  $\zeta(t)$ .

## FEATURES OF APPLICATION OF FILTERS KALMAN-BJUSI IN ORIENTATION AND NAVIGATION COMPLEXES

A.S. BENKAFO, A.A. LOBATY

### Abstract

On the basis of an optimum filtration theory the analysis of methodical errors which are possible at application an optimum estimation algorithm of stochastic system phase co-ordinates is carried out. Research of these errors by modelling of a concrete example is carried out.

### Список литературы

1. Управление и наведение беспилотных маневренных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий / Под ред. Красильщикова М.Н., Серебрякова Г.Г. М., 2005.
2. Ориентация и навигация подвижных объектов: современные информационные технологии / Под ред. Б.С. Алешина, К.К. Веремеенко, А.И. Черноморского. М., 2006.
3. Балакришнан А. Теория фильтрации Калмана. М., 1988.
4. Синицин И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. М., 2006.
5. Казаков И.Е., Мальчиков С.В. Анализ стохастических систем в пространстве состояний. М., 1983.