УДК 004.942:539.371

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ С НЕСЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

К.С. КУРОЧКА, О.В. РОГОВЦОВА

Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого
пр. Октября 48, Гомель, 246746, Беларусь

Поступила в редакцию 19 апреля 2013

Представлена математическая модель на основе метода конечных элементов напряженно-деформированного состояния трехслойного стержня с несжимаемым заполнителем под действием вертикальной нагрузки. Приведены результаты верификации данной модели.

Ключевые слова: математическое моделирование, метод конечных элементов, трехслойный стержень.

Введение

В настоящее время все большее применение находят трехслойные элементы конструкций. Совместное использование материалов с существенно различающимися термомеханическими характеристиками позволяет получать в рамках конструкции новые полезные свойства, не достижимые при использовании однородных элементов. Прочные и жесткие несущие слои обеспечивают необходимые значения деформаций, а внутренние слои, перераспределяя усилия между несущими слоями, могут также выполнять и ряд других функций. Например, тепло- и звукоизоляцию, демпфирование и снижение вибраций и т.п.

Одним из распространенных трехслойных элементов конструкций является стержень, используемый, как правило, совместно с другими подобными элементами. Сложность всей конструкции в целом и необходимость комплексного рассмотрения накладывает определенные требования к процессу компьютерного моделирования и расчета отдельных ее элементов. Особенно важными из требований являются ресурсоемкость и время нахождения единичного решения. Это можно обеспечить только разработкой новых математических моделей и алгоритмов исследования поведения трехслойных стержней под действием различных видов и типов нагрузок.

Теоретический анализ

При расчете трехслойного стержня с несжимаемым заполнителем выделяются задачи обеспечения нормативных значений прогиба и деформаций.

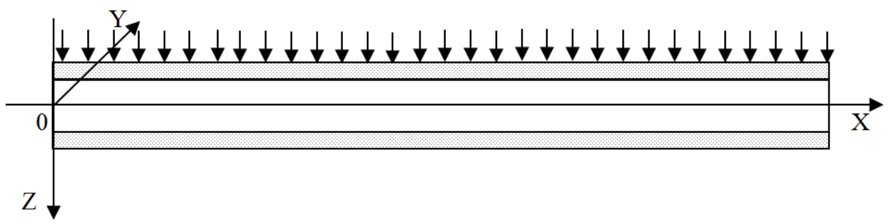

Рис. 1. Трехслойный стержень под действием вертикальной поперечной нагрузки

Одним из методов компьютерного исследования данных задач является метод конечных элементов [1–3]. В данной работе рассматривается задача определения прогиба трехслойного стержня под действием вертикальной поперечной нагрузки (рис. 1). При этом принимаются следующие гипотезы.

1. О малости деформаций: деформации малы по сравнению с размерами тела, т.е. изменение размеров стержня и его слоев вследствие деформации можно не учитывать, а длина стержня значительно больше его толщины и ширины (рис. 1), т.е. перемещениями вдоль оси OY можно пренебречь [4]:

$$\vartheta = 0. \tag{1}$$

2. Справедлив закон Гука [3, 4]:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \tag{2}$$

где $\{\sigma\}$ – вектор напряжений; $\{\varepsilon\}$ – вектор деформаций; $[D]$ – матрица жесткости элемента материала.

3. Материалы слоев несжимаемы в поперечных направлениях [4]:

$$\varepsilon_z = 0;\ \varepsilon_y = 0. \tag{3}$$

4. Для несущих слоев справедлива гипотеза плоских сечений Бернулли [4], на основании которой имеем отсутствие нормальной компоненты деформации вдоль оси *OZ* и тангенциальных компонент деформаций в плоскостях *XOZ* и *YOZ*:

$$\gamma_{yz} = 0;\ \gamma_{zx} = 0. \tag{4}$$

5. Для внутреннего слоя справедлива гипотеза о прямолинейности деформированной нормали заполнителя [4], из которой следует, с учетом (1), что срединная плоскость заполнителя не деформируется, т.е.

$$u_0 = 0, \tag{5}$$

где u_0 – перемещения точек серединной плоскости вдоль оси *OX*.

Воспользуемся уравнениями Коши [3, 4]:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x};\quad \varepsilon_y = \frac{\partial \vartheta}{\partial y};\quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};\\ &\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x};\ \gamma_{yz} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y};\quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned} \tag{6}$$

из гипотез (1), (3) и (4) получим:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0;\ \gamma_{yz} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

следовательно, прогибы не зависят от координат *y* и *z*, таким образом

$$w = w(x). \tag{7}$$

Из гипотезы (4) получаем:

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Интегрируя по *z* последнее тождество, имеем: $u = -z\dfrac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y)$.

Так как последнее выражение справедливо для всего стержня, то для срединной плоскости будем иметь: $u_0 = -z\dfrac{\partial w}{\partial x} + f_1(x,y)$.

Подставляя (5) в предыдущее тождество при $z = 0$, получим $u_0 = f_1(x,y) = 0$, откуда:

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{8}$$

Рассмотрим несущие слои стержня. Согласно принятых гипотез, с учетом уравнений Коши (6) и формулы (8), в векторах напряжений и деформаций останется по одной ненулевой компоненте:

$\{\varepsilon^i\} = \{\varepsilon^i{}_x\}$ и $\{\sigma^i\} = \{\sigma^i{}_x\}$,

а закон Гука (2) примет вид:

$$\{\sigma^i{}_x\} = [D^i]\{\varepsilon^i{}_x\}, \tag{9}$$

где $[D^i] = E^i$, E^i – модуль упругости i-го слоя; i – номер слоя, $i = \overline{1,2}$.

Для внутреннего слоя появятся касательные деформации и напряжения в плоскости XOZ:

$\{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^0{}_x \\ \gamma^0{}_{zx} \end{Bmatrix}$ и $\{\sigma^0\} = \begin{Bmatrix} \sigma^0{}_x \\ \tau^0_{zx} \end{Bmatrix}$,

закон Гука (2) примет вид:

$$\{\sigma^0\} = [D^0]\{\varepsilon^0\}, \tag{10}$$

где индекс 0 означает внутренний слой-заполнитель;

$$[D^0] = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix};$$

K – модуль объемной деформации материала; G – сдвиговый модуль упругости.

Методика построения математической модели

Анализируя выражения (1) и (8), с учетом (6), приходим к возможности выбрать в качестве искомой величины прогиб: $w = w(x)$. При этом в силу (8) и (6) необходимо существование второй производной искомой функции $w(x)$ [5]. Следуя вышеизложенному, для моделирования прогибов трехслойного стержня воспользуемся одномерными конечными элементами с двумя узлами по две степени свободы в каждом (рис. 2) $\{\delta\}^T = \{w \quad \theta_x\}$, где $\{\delta\}$ – вектор узловых степеней свободы конечного элемента; $\theta_x = \dfrac{\partial w}{\partial x}$.

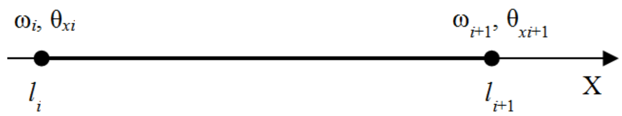

Рис. 2. Одномерный конечный элемент для моделирования прогибов трехслойного стержня

Будем аппроксимировать значения искомой функции $w(x)$ и ее первой производной θ_x следующими полиномами, обеспечивающими существование функционала вариационной задачи [1, 5]:

$$w(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3; \tag{11}$$

$$\theta_x(x) = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2. \tag{12}$$

Так как соотношения (11) и (12) справедливы для всех точек конечного элемента, то для его узлов будем иметь: $\{\delta_0\} = [A]\{a\}$, где $\{a\}^T = \{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4\}$; $\{\delta_0\}^T = \{w_1 \quad \theta_{x_1} \quad w_2 \quad \theta_{x_2}\}$; $w_j, \theta_{x\,j}$ – соответственно перемещения *j*-го узла и угол поворота;

$[A] = \begin{bmatrix} 1 & l_1 & l_1^2 & l_1^3 \\ 0 & 1 & 2l_1 & 3l_1^2 \\ 1 & l_2 & l_2^2 & l_2^3 \\ 0 & 1 & 2l_2 & 3l_2^2 \end{bmatrix}$, где l_j – координата *j*-го узла, $j = \overline{1,2}$, откуда

$$\{a\} = [A]^{-1}\{\delta_0\}. \tag{13}$$

Воспользовавшись формулами Коши (6), соотношениями (11) и (12), продифференцировав, получим: $\{\varepsilon^i\} = -z[C^i]\{a\}$.

Подставим (13) в последнее выражение, тогда деформации для каждого слоя будут выражены через перемещения:

$$\{\varepsilon^i\} = [Q^i]\{\delta_0\},\ i = \overline{0,2}, \tag{14}$$

где

$$[Q^i] = \begin{bmatrix} \dfrac{6(l_1 + l_2 - 2x)}{(l_1 - l_2)^3} & -\dfrac{2(l_1 + 2l_2 - 3x)}{(l_1 - l_2)^2} & -\dfrac{6(l_1 + l_2 - 2x)}{(l_1 - l_2)^3} & -\dfrac{2(2l_1 + l_2 - 3x)}{(l_1 - l_2)^2} \end{bmatrix},\ i = \overline{1,2};$$

$$[Q^0] = \begin{bmatrix} \dfrac{6(l_1 + l_2 - 2x)}{(l_1 - l_2)^3} & -\dfrac{2(l_1 + 2l_2 - 3x)}{(l_1 - l_2)^2} & -\dfrac{6(l_1 + l_2 - 2x)}{(l_1 - l_2)^3} & -\dfrac{2(2l_1 + l_2 - 3x)}{(l_1 - l_2)^2} \\ -\dfrac{6(l_1 - x)(l_2 - x)}{(l_1 - l_2)^3} & \dfrac{(l_2 - x)(2l_1 + l_2 - 3x)}{(l_1 - l_2)^2} & \dfrac{6(l_1 - x)(l_2 - x)}{(l_1 - l_2)^3} & \dfrac{(l_1 - x)(l_1 + 2l_2 - 3x)}{(l_1 - l_2)^2} \end{bmatrix}.$$

Подставляя (14) в (9) и (10), получим:

$$\{\sigma^i\} = [D^i][Q^i]\{\delta_0\},\ i = \overline{0,2}. \tag{15}$$

Для построения математической модели воспользуемся принципом возможных перемещений [1, 3, 4], который в случае трехслойного стержня его можно переписать в виде:

$$\left\{\bar{\delta}_0\right\}^T \{R_0\} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{l_j}^{l_{j+1}} \int_{\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}+h_1} \left\{\bar{\varepsilon}^1\right\}^T \{\sigma^1\} dz dx dy + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{l_j}^{l_{j+1}} \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \left\{\bar{\varepsilon}^0\right\}^T \{\sigma^0\} dz dx dy + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{l_j}^{l_{j+1}} \int_{-\frac{h_0}{2}-h_2}^{-\frac{h_0}{2}} \left\{\bar{\varepsilon}^2\right\}^T \{\sigma^2\} dz dx dy, \tag{16}$$

где $\{R_0\}$ – вектор узловых сил конечного элемента; h_i – толщина $i^{\text{го}}$ слоя стержня, $i = \overline{0,2}$; причем h_0 – толщина заполнителя; b – ширина стержня; черта над переменной означает вариацию признака.

Подставим в (16) выражения (14) и (15), учитывая, что $\{\delta_0\}$ не зависит от координат, интегрируя по *z* и *y*, получим:

$$\{R_0\} = [k^1]\{\delta_0\} + [k^0]\{\delta_0\} + [k^2]\{\delta_0\} = [k]\{\delta_0\}, \tag{17}$$

где

$$[k] = \sum_{i=0}^{2} [k^i]; \tag{18}$$

$$[k^i] = bE\frac{(h_0 + 2h_i)^3 - h_0^3}{24}\left[\int_{l_1}^{l_2} [Q^i]^T [Q^i] dx\right],\ i = \overline{1,2};\ [k^0] = b\frac{h_0^{\ 3}}{12}\left[\int_{l_1}^{l_2} [Q^0]^T [D^0][Q^0] dx\right]. \tag{19}$$

Система линейных алгебраических уравнений (17) – основное уравнение метода конечных элементов, (18) – локальная матрица жесткости для одномерного конечного элемента при изгибе трехслойного стержня с жестким заполнителем.

Интегралы в (19) можно вычислить точно:

$$\left[k^i\right] = bE\frac{(h_0+2h_i)^3-h_0^3}{24}\begin{bmatrix} -\frac{12}{(l_1-l_2)^3} & \frac{6}{(l_1-l_2)^2} & \frac{12}{(l_1-l_2)^3} & \frac{6}{(l_1-l_2)^2} \\ \frac{6}{(l_1-l_2)^2} & -\frac{4}{l_1-l_2} & -\frac{6}{(l_1-l_2)^2} & -\frac{2}{l_1-l_2} \\ \frac{12}{(l_1-l_2)^3} & -\frac{6}{(l_1-l_2)^2} & -\frac{12}{(l_1-l_2)^3} & -\frac{6}{(l_1-l_2)^2} \\ \frac{6}{(l_1-l_2)^2} & -\frac{2}{l_1-l_2} & -\frac{6}{(l_1-l_2)^2} & -\frac{4}{l_1-l_2} \end{bmatrix},\ i=\overline{1,2};$$

$$\left[k^0\right] = b\frac{h_0^3}{12}\begin{bmatrix} -\frac{6G}{5(l_1-l_2)}-\frac{16G+12K}{(l_1-l_2)^3} & \frac{G}{10}+\frac{8G+6K}{(l_1-l_2)^2} & \frac{6G}{5(l_1-l_2)}+\frac{16G+12K}{(l_1-l_2)^3} & \frac{G}{10}+\frac{8G+6K}{(l_1-l_2)^2} \\ \frac{G}{10}+\frac{8G+6K}{(l_1-l_2)^2} & \frac{2G(l_2-l_1)}{15}-\frac{16G+12K}{3(l_1-l_2)} & -\frac{G}{10}-\frac{8G+6K}{(l_1-l_2)^2} & \frac{G(l_1-l_2)}{30}-\frac{8G+6K}{3(l_1-l_2)} \\ \frac{6G}{5(l_1-l_2)}+\frac{16G+12K}{(l_1-l_2)^3} & -\frac{G}{10}-\frac{8G+6K}{(l_1-l_2)^2} & -\frac{6G}{5(l_1-l_2)}-\frac{16G+12K}{(l_1-l_2)^3} & -\frac{G}{10}-\frac{8G+6K}{(l_1-l_2)^2} \\ \frac{G}{10}+\frac{8G+6K}{(l_1-l_2)^2} & \frac{G(l_1-l_2)}{30}-\frac{8G+6K}{3(l_1-l_2)} & -\frac{G}{10}-\frac{8G+6K}{(l_1-l_2)^2} & \frac{2G(l_2-l_1)}{15}-\frac{16G+12K}{3(l_1-l_2)} \end{bmatrix}.$$

После вычисления локальных матриц жесткости осуществлялось построение глобальной матрицы жесткости по следующей формуле:

$$\left\lfloor K_{2j,2j}\right\rfloor = \left\lfloor K_{2j,2j}\right\rfloor + \left\lfloor k_j\right\rfloor,\ j=\overline{1,N}, \qquad (20)$$

где $\left\lfloor K_{2j,2j}\right\rfloor$ – подматрица глобальной матрицы жесткости; $\left\lfloor k_j\right\rfloor$ – локальная матрица жесткости j-го конечного элемента, вычисляемая по формулам (18) и (19); N – количество конечных элементов, дискретизирующих трехслойный стержень.

После построения глобальной матрицы жесткости формируется вектор узловых усилий $\{R\}$, учитываются граничные условия и решается система линейных алгебраических уравнений вида (17).

Результаты и их обсуждение

Для верификации предложенной математической модели рассмотрим задачу определения прогибов защемленного трехслойного стержня длиной 1 м под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности 2 МПа [4]. Физические характеристики слоев стержня приведены в таблице.

Физические характеристики слоев стержня

Номер слоя	Материал слоя	Толщина слоя, м	Модуль упругости E, МПа	Модуль объемной деформации материала K, МПа	Сдвиговый модуль упругости G, МПа
1	алюминиевый сплав Д16Т	0,02	115600	80000	26700
0	политетрафторэтилен	0,09	4820	4700	90
2	алюминиевый сплав Д16Т	0,02	115600	80000	26700

Стержень дискретизировался 10 конечными элементами. Затем по формулам (18) и (19) вычислялись локальные матрицы жесткости, по формуле (20) осуществлялось построение глобальной матрицы жесткости, учитывались граничные условия, формировался вектор узловых усилий и решалась система линейных алгебраических уравнений. В результате были найдены прогибы и углы поворота вдоль оси OX. Для нахождения напряжений и деформаций можно воспользоваться соотношениями (14) и (15).

В результате исследования математической модели было получено, что максимальное отличие найденных значений прогиба от решения на основе [4] не превышало 5 % (рис. 3).

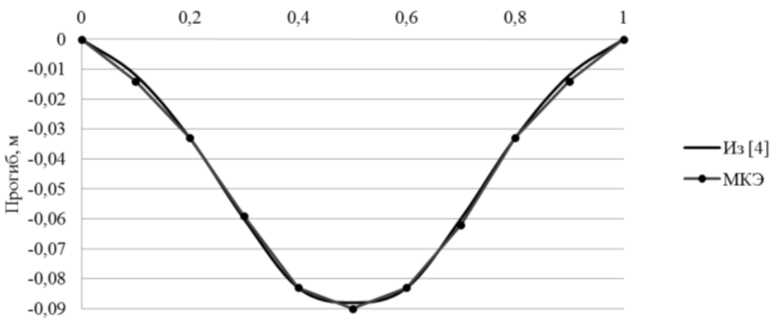

Рис. 3. Прогиб трехслойного стержня под действием равномерно распределенной нагрузки

Заключение

Построена математическая модель и разработан простой и эффективный алгоритм конечноэлементного моделирования прогибов трехслойного стержня с несжимаемым заполнителем. Вычислены точные значения локальных матриц жесткости для одномерного конечного элемента, создано соответствующее программное обеспечение и проведена его верификация, показавшая возможность применения данного алгоритма и математической модели для исследования напряженно-деформированного состояния тонкого трехслойного стержня с жестким заполнителем под действием поперечной нагрузки.

MATHEMATICAL MODELING OF STRESS-STRAINED STATE OF THREE-LAYER ROD WITH INCOMPRESSIBLE FILLER

K.S. KURACHKA, V.V. RAHAUTSOVA

Abstract

The mathematical model based on the finite element method of the stress-strain state of a three-layer rod with incompressible filler under the vertical load is described. The results of the verification of the model are presented.

Список литературы

1. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М., 1975.
2. *Сабоннадьер Ж.-К*, *Кулон Ж.-Л.* Метод конечных элементов и САПР М., 1989.
3. *Быховцев В.Е., Бондарева В.В.* Компьютерное моделирование систем нелинейной механики грунтов. Гомель, 2002.
4. *Старовойтов Э.И. Яровая А.В., Леоненко Д.В*. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании. М., 2006.
5. *Курочка К.С.* // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. 2003. № 1. С. 39–47.