УДК 681.518

АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.А. ЛОБАТЫЙ, Ю.Ф. ИКУАС, Ж.М. САИД

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 7 февраля 2011

Решается задача вероятностного анализа сложной стохастической системы при случайном, скачкообразном характере изменения ее состояний. Получено векторно-матричное дифференциальное уравнение для вектора вероятностей состояний подсистем, отличающееся учетом взаимосвязей подсистем между собой. Приводится пример, иллюстрирующий работоспособность предложенных теоретических положений.

Ключевые слова: сложная стохастическая система, векторно-матричное уравнение, вероятность перехода.

Введение

Исследование надежности сложных технических систем путем математического моделирования имеет важное значение для анализа и прогноза их технического состояния. При этом в большинстве случаев исходной информацией является полученная экспериментально или аналитически информация о надежности (состоянии) подсистем сложной системы. Представляет интерес задача использования этой информации для вероятностной оценки влияния подсистем друг на друга и на систему в целом.

При исследовании сложной динамической стохастической системы со случайным изменением структуры [1] в общем случае необходимо учитывать как топологические свойства системы (взаимное влияние подсистем), так и динамические свойства отдельных подсистем. Следовательно, математическая модель такой системы должна включать в себя совокупность топологических уравнений, составленных на основе теории графов [2] и совокупность компонентных уравнений подсистем, в качестве которых обычно используются дифференциальные уравнения разрывного типа в векторно-матричной форме. При этом вектор фазовых координат сложной системы является блочным, состоящим из векторов фазовых координат подсистем.

Математическая модель сложной системы

Каждый из i-х элементов (подсистем) сложной стохастической непрерывной системы случайной структуры может быть описан векторно-матричным стохастическим уравнением вида

$$\dot{X}^{(s)}(t) = D(t)\phi^{(s)}(X,t) + W^{(s)}(X,t)U(t) + H^{(s)}(X,t)\xi(t), X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

где $\dot{X}^{(s)}(t)$ – в общем случае n-мерный случайный вектор (матрица-столбец); $D(t)$ – матрица порядка $n\times n$ детерминированных параметров с компонентами d_{kr}; $\phi^{(s)}(X,t)$ – векторная; $W^{(s)}(X,t)$, $H^{(s)}(X,t)$ – матричные нелинейные функции; $U(t)$ – r-мерная ($r<n$) векторная функция управления; ξ – n-мерный вектор центрированного гауссова белого шума с положи-

тельно-определенной матрицей интенсивностей $G(t)$ и матрицей корреляционных функций $K_\xi(t,t') = G(t)\delta(t-t')$, $\delta(t)$ – дельта функция Дирака. $S(t)=\{s,\ t\}$ – индекс структуры системы.

Марковскому процессу, описываемому уравнением (1), соответствует обобщенное уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова относительно плотности вероятности $\omega_i^{(s)}(X_i,t)$ не поглощенных реализаций s-й структуры [1].

$$\frac{\partial\omega^{(s)}(X,t)}{\partial t} = -\mathrm{div}\pi^{(s)}(X_i,t) - \beta(X,s,t) + \gamma(X,s,t), \qquad (2)$$

где $\pi^{(s)}(X,t)$ – вектор плотности потока вероятности, $\omega^{(s)}(X,t_0) = \omega_0^{(s)}(X_0)$.

Функции поглощения и восстановления реализаций s-й структуры $\beta^{(sr)}, \gamma^{(rs)}$ могут иметь различный вид в зависимости от физической природы процесса (процессы с распределенными или с сосредоточенными переходами).

Для решения задач вероятностного анализа сложной динамической системы необходимо знать вероятности состояний (структур) входящих в данную систему подсистем. Определение этих вероятностей – важнейшая задача вероятностного анализа сложной системы.

Топологические уравнения для вероятностей состояний

Введем в рассмотрение вектор (матрицу-столбец), состоящий из вероятностей $P_i^{(s)}$ ($i=\overline{1,nv}, s=\overline{1,ns}$) нахождения i-х подсистем в s-м состоянии, считая, что все подсистемы имеют одинаковое число структур ns.

$P^{(s)T}(t) \overset{\Delta}{=} \left[P_1^{(s)}(t),...,P_i^{(s)}(t),...,P_{nv}{}^{(s)}(t)\right]$, где в соответствии с условием нормировки $\sum\limits_{s=1}^{ns} P_i^{(s)} = 1$.

Вероятность существования реализаций s-го состояния в каждый текущий момент времени представляет собой интеграл по всей бесконечной открытой области от ненормированной плотности вероятностей не поглощенных реализаций $\omega_i^{(s)}(X,t)$ фазовых координат подсистемы при фиксированном s. Для i-й подсистемы справедливо выражение

$$\dot{P}_i^{(s)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{\omega}_i{}^{(s)}(X,t)dt\,. \qquad (3)$$

Подставив в подынтегральную часть выражения (3) правую часть уравнения (2) и выполнив интегрирование, получим уравнение для вероятностей состояний i-й подсистемы

$$\dot{P}_i^{(s)}(t) = \sum_{r=1}^{ns} F_i^{(sr)}(t) + \sum_{r=1}^{ns} R_i^{(sr)}(t),\ P_i^{(s)}(t_0) = P_{i0}{}^{(s)}, \qquad (4)$$

где $F_i^{(sr)}(t), R_i^{(sr)}(t)$ – соответственно потоки поглощения и восстановления реализаций, зависящие от вида процесса смены структуры.

При решении практических задач вероятностного анализа реальных технических систем, в том числе и при исследовании характеристик надежности, потоком восстановления реализаций $R_i^{(sr)}(t)$ в большинстве случаев можно пренебречь. Это обусловлено тем, что вероятность возврата подсистемы в прежнее состояние (например, из неработоспособного в работоспособное) за ограниченное время выполнения системой своей задачи близка к нулю.

Рассмотрим эволюцию сложной системы на элементарном (бесконечно малом) интервале времени $[t_1, t_2]$, $t_2 = t_1 + \Delta t$. Величину Δt выберем таким образом, чтобы вероятность перехода i-й подсистемы из состояния s в состояние r за время Δt была

$P_i^{(sr)}(t) = P_i(S(t_2) = r \,|\, X_i(t_1), S(t_1) = s) = \nu_i{}^{(sr)}(X,t)\Delta t + 0(\Delta t)$, где $\nu_1^{(sr)}(X,t)$ – интенсивность переходов, зависящая от изменения вектора $X^{(s)}(t)$ в s-м состоянии. $0(\Delta t)$ – величина высшего порядка малости, чем Δt, в соответствии с определением непрерывного марковского процесса.

Вероятность того, что на интервале $[t_1, t_2]$ состояние системы останется неизменным, определяется выражением

$$P_i^{(ss)}(t) = P_i(S(t_2) = r \big| X_i(t_1), S(t_1) = s) = 1 - \Delta t \sum_{r=1(r\neq s)}^{ns} \nu_i^{(sr)}(X,t) + 0(\Delta t). \quad (5)$$

Предположим, что i-я подсистема переходит в r-е состояние, если в это состояние переходит любая из связанных (смежных) с ней подсистем или каналов связи, а так же – под действием своих внутренних факторов (шумов). Данное предположение основано на том, что для реальной технической системы такие переходы являются следствием отказов или неисправностей элементов системы. Принимая во внимание, что число входов подсистем (вершин графа системы) всегда ограничено, необходимо отметить следующее.

На элементарном интервале времени Δt процесс изменения состояния i-й $(i=\overline{1,nv})$ подсистемы представляет собой условную марковскую цепь, для которой вероятность нескольких скачков на интервале Δt – исчезающе малая величина порядка $0\Delta t$. Следовательно, события одновременной смены структуры смежных подсистем на интервале Δt подразумеваются несовместными. Для физической системы это означает, что вероятность того, что за малый интервал времени Δt две и более подсистемы одновременно перейдут в другое состояние (например, в неисправное), бесконечно мала. Исходя из этого

$$P_i^{(sr)} = P_{i0}{}^{(sr)} + \sum_{k=1}^{ni} P_{kcn}{}^{(sr)} + \sum_{k=1}^{ni} P_{kkc}{}^{(sr)} + 0(\Delta t), \quad (6)$$

где ni – количество входов i-й подсистемы – значения диагональных элементов a_{ii} матрицы соседства вершин $B=AA^T$, где A – матрица инцидентности, характеризующая граф системы [2]; $P_{i0}{}^{(sr)}$ – вероятность перехода i-й подсистемы в r-е состояние под действием своих внутренних факторов; $P_{kcc}{}^{(sr)}$ – вероятность перехода в r-е состояние смежной с i-й k-й подсистемы; $P_{kkk}{}^{(sr)}$ – вероятность перехода в r-е состояние k-го канала связи, инцидентного i-й подсистеме.

По аналогии с выражением (4) входящие в (5) вероятности вычисляются следующим образом:

$$P_{i0}{}^{(sr)} = \nu_i{}^{(sr)}\Delta t + 0(\Delta t), \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{ni} P_{kcn}{}^{(sr)} = \sum_{k=1}^{ni} \nu_{kcn}{}^{(sr)}\Delta t + 0(\Delta t), \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^{ni} P_{kkc}{}^{(sr)} = \sum_{k=1}^{ni} \mu_{kkc}{}^{(sr)}\Delta t + 0(\Delta t) \cdot \quad (9)$$

Подставляя (7), (8), (9) в (6), получим векторное выражение для вероятностей перехода подсистем из s-го в r-е состояние за время Δt с учетом топологии системы:

$$P^{(sr)} = [\nu_0{}^{(sr)} + V^T \nu^{(sr)} - \tilde{A}\mu^{(sr)}]\Delta t + 0(\Delta t), \quad (10)$$

где $P^{(sr)T}(t) \overset{\Delta}{=} \left[P_1^{(sr)}(t), \ldots, P_i^{(sr)}(t), \ldots, P_{nv}{}^{(sr)}(t) \right]$ – вектор (матрица-столбец) вероятностей переходов i-х $(i=\overline{1,nv})$ подсистем из s-го состояние в r-е.

$$\nu_0{}^{(sr)T} = \nu_0{}^{(sr)T}(t) \overset{\Delta}{=} \left[\nu_{10}{}^{(sr)}(t), \ldots, \nu_{i0}{}^{(sr)}(t), \ldots, \nu_{nv0}{}^{(sr)}(t) \right],$$

$$\nu^{(sr)T} = \nu^{(sr)T}(t) \overset{\Delta}{=} \left[\nu_1{}^{(sr)}(t), \ldots, \nu_i{}^{(sr)}(t), \ldots, \nu_{nv}{}^{(sr)}(t) \right],$$

$$\mu^{(sr)T} = \mu^{(sr)T}(t) \stackrel{\Delta}{=} \left[\mu_1{}^{(sr)}(t), ..., \mu_j{}^{(sr)}(t), ..., \mu_{n\mu}{}^{(sr)}(t) \right],$$

где $\nu_0{}^{(sr)}$, $\nu^{(sr)}$, $\mu^{(sr)}$ – соответственно векторы интенсивностей переходов. V^T – транспонированная матрица смежности системы размерности $nv \times nv$ (рассматривается ориентированный граф системы), $\tilde{A}$ – приведенная матрица инцидентности (получается из матрицы инцидентности системы заменой всех положительных элементов нулями [3]); $\stackrel{\Delta}{=}$ – означает равенство по определению.

Вероятности нахождения подсистемы в s-м состоянии в два бесконечно близких момента времени t_1 и t_2 связаны между собой соотношением

$$P_i^{(s)}(t_2) = P_i^{(s)}(t_1)[1 - \sum_{r=1(r \neq s)}^{ns} P_i^{(sr)}(\Delta t)] + 0(\Delta t), \text{ иначе}$$

$$P_i^{(s)}(t_2) - P_i^{(s)}(t_1) = -P_i^{(s)}(t_1) \sum_{r=1(r \neq s)}^{ns} P_i^{(sr)}(\Delta t) + 0(\Delta t). \tag{11}$$

Подставив в правую часть (11) выражения (5)–(9), разделив обе части на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение для вероятности состояния подсистемы.

$$\dot{P}_i^{(s)}(t) = -P_i^{(s)}(t) \sum_{r=1(r \neq s)}^{ns} [\nu_{i0}{}^{(sr)} + \sum_{k=1}^{ni} (\nu_{kcn}{}^{(sr)} + \mu_{kkc}{}^{(sr)})], \tag{12}$$

$$P_i^{(s)}(t_0) = P_{i0}(s).$$

Обозначим

$$f_i^{(sr)} = \sum_{r=1(r \neq s)}^{ns} [\nu_{i0}{}^{(sr)} + \sum_{k=1}^{ni} (\nu_{kcn}{}^{(sr)} + \mu_{kkc}{}^{(sr)})], \tag{13}$$

где $f_i^{(sr)} = f_i^{(sr)}(t)$ – нормированный поток поглощения реализаций i-й подсистемы; $f_i^{(sr)}(t) = F_i^{(sr)}(t) / P_i^{(s)}(t)$; $F_i^{(sr)}(t)$ входит в выражение (4).

Из анализа выражений (5), (10), (12), (13) легко видеть, что вероятности состояний подсистем зависят от нормированных потоков поглощения реализаций, связанных между собой топологическим векторно-матричным уравнением

$$\dot{P}^{(s)}(t) = -P^{(s)}(t) f^{(sr)}(t),$$

где $f^{(sr)} = \sum_{r=1(r \neq s)}^{ns} \left[\nu_0{}^{(sr)} + V^T \nu^{(sr)}(t) - \tilde{A} \mu^{(sr)}(t) \right],$

или $\dot{P}^{(s)}(t) = -P^{(s)}(t) \left\{ \sum_{r=1(r \neq s)}^{ns} \left[\nu_0{}^{(sr)}(t) + V^T \nu^{(sr)}(t) - \tilde{A} \mu^{(sr)}(t) \right] \right\}^T,$

$$f^{(sr)T}(t) \stackrel{\Delta}{=} \left[f_1^{(sr)}(t), ..., f_i^{(sr)}(t), ..., f_{nv}{}^{(sr)}(t) \right].$$

Пример

В качестве примера рассмотрим простейшую модель беспилотного авиационного комплекса, представленную структурной схемой на рис. 1.

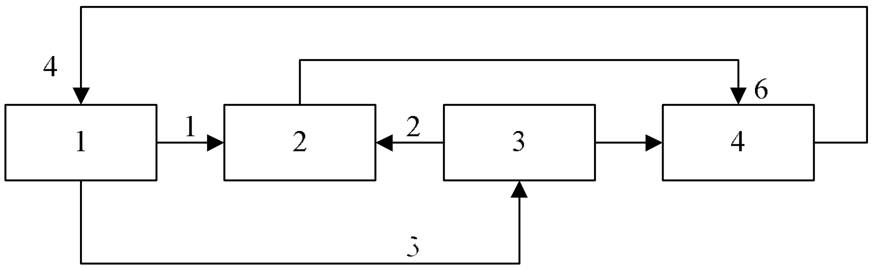

Рис. 1. Структурная схема беспилотного авиационного комплекса: 1 – информационно вычислительная система; 2 – система автоматического управления; 3 – автопилот; 4 – самолет; 1–6 номера связей

Матрицы V и $\tilde{A}$ для данного примера имеют вид

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Рассматривается два состояния системы: работоспособное и неработоспособное. На рис. 2 представлены графики изменения вероятностей работоспособных состояний подсистем авиационного комплекса (номер параметра соответствует номеру подсистемы). При этом на одних графиках изображены значения вероятностей без учета топологии системы и с ее учетом (с индексом «*t*»). Значения интенсивностей переходов задавались следующие: $\nu_{10} = 0{,}05$, $\nu_{20} = 0{,}02$, $\nu_{30} = 0{,}015$, $\nu_{40} = 0{,}005$. Остальные интенсивности приняты нулевыми.

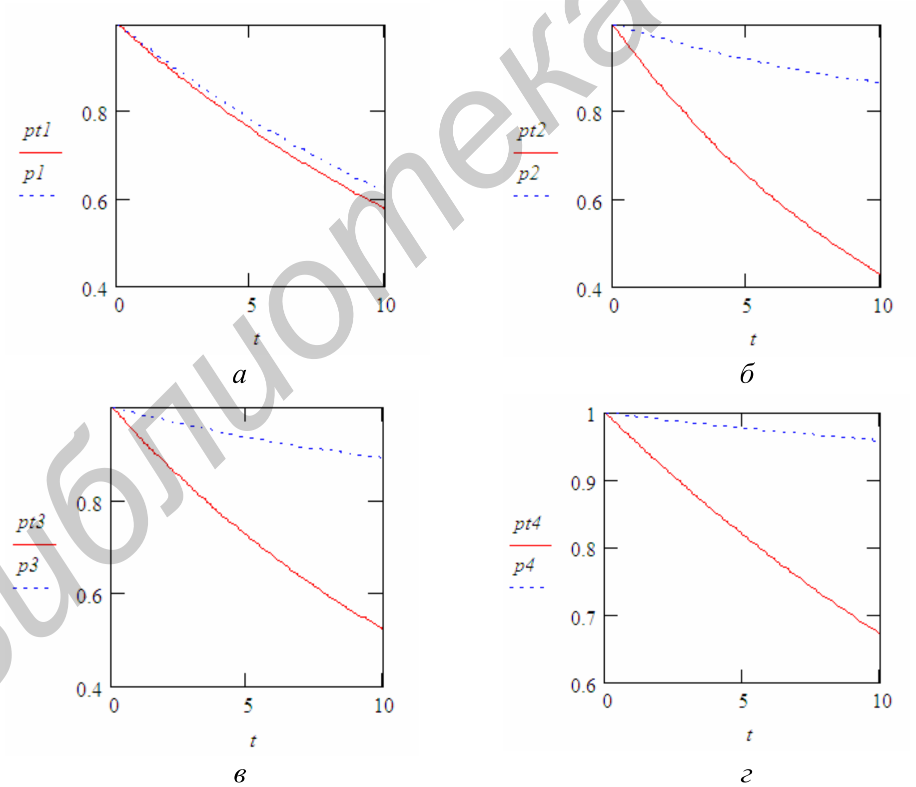

Рис. 2. Вероятности работоспособных состояний подсистем

Заключение

Результаты исследований показывают, что чем выше иерархический уровень подсистемы, тем более она подвержена влиянию других подсистем.

Данный подход, основанный на использовании векторно-матричного аппарата, удобен при математическом моделировании сложных систем с большим числом элементов.

ANALYSIS OF THE RELIABILITY OF COMPLEX SYSTEMS WITH TOPOLOGICAL EQUATIONS

A.A. LOBATY, J.F. IKWAS, G.M. SAID

Abstract

The problem of probabilistic analysis of complex stochastic systems with a random, discontinuous nature of the change of its states is solved. Vector-matrix differential equation for the vector of state probabilities of the subsystems, differing view of the interactions between the subsystems themselves, is obtained. An example demonstrating the efficiency of the proposed theoretical positions is given.

Литература

1. *Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А.* Анализ систем случайной структуры. М., 1993.
2. *Татт У.* Теория графов. М. 1988.
3. *Лобатый А.А., Антонов А.И.* // Вести НАН Беларуси. 2004. № 2. С. 97–101.