УДК 517.925

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.Э. ЖАВНЕРЧИК

Институт информационных технологий
Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники
Козлова, 28, Минск, 220037, Беларусь

Поступила в редакцию 18 ноября 2010

Получены достаточные условия существования нескольких предельных циклов у автономной системы дифференциальных уравнений второго порядка и указана область их месторасположения.

Ключевые слова: автономная система дифференциальных уравнений, фазовая плоскость, простая замкнутая кривая, предельный цикл.

В работе устанавливаются достаточные условия существования нескольких предельных циклов у автономной системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \tag{1}$$

и указывается область их месторасположения. Для выявления областей существования изолированных замкнутых траекторий системы (1) используется теорема Пуанкаре – Бендиксона [1].

Будем предполагать, что условия, накладываемые на правые части системы (1), гарантируют единственность решения задачи Коши.

Л е м м а 1. *Пусть выполняются условия*:

1) $P(0, 0) = 0,\ \ Q(0, 0) = 0;$

2) $yP(0, y) > 0$ *при* $0 < |y| < \varepsilon_1,$

$xQ(x, 0) < 0$ *при* $0 < |x| < \varepsilon_2,$

где ε_1 и ε_2 – достаточно малые числа;

3) $P'_x(0, 0) > 0,\ \ Q'_y(0, 0) > 0.$

Тогда в фазовой плоскости существует простая замкнутая кривая, содержащая начало координат и лежащая в его окрестности, которую (при возрастании t) пересекают траектории системы (1), *выходя из конечной области, ограниченной этой кривой.*

Действительно, применяя теорему о среднем в некоторой достаточно малой окрестности начала координат [2], запишем систему (1) в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = xP'_x(\tilde{x}, y) + P(0, y), \\ \dot{y} = yQ'_y(x, \tilde{y}) + Q(x, 0), \end{cases}$$

где $0 \le \tilde{x} \le x,\ \ 0 \le \tilde{y} \le y.$

Рассмотрим однопараметрическое семейство кривых

$$\lambda(x, y) \equiv \int_0^y P(0, v)dv - \int_0^x Q(u, 0)du = C. \tag{2}$$

Из условий 1) и 2) леммы 1 следует, что (2) – семейство вложенных одна в другую простых замкнутых кривых в окрестности начала координат, содержащих внутри начало координат и таких, что при переходе от внутренних кривых к внешним параметр C увеличивается.

Дифференцируя соотношение (2) в силу системы (1), получим

$$\frac{d\lambda}{dt} = yP(0, y)Q'_y(x, \tilde{y}) - xQ(x, 0)P'_x(\tilde{x}, y).$$

Используя условия 2) и 3) леммы 1, заключаем, что $\frac{d\lambda}{dt} \geq 0$ на кривых семейства (2), соответствующих достаточно малым значениям C. Искомая замкнутая кривая – суть одна из кривых семейства (2), где C – достаточно малое число, и на которой $\frac{d\lambda}{dt} \geq 0.$

Введем обозначение:

$$G_j = \left\{(x, y) \middle| a_{1j} \leq x \leq a_{2j}, b_{1j} \leq y \leq b_{2j}\right\},$$

где a_{ij}, b_{ij} – действительные числа; i, j – натуральные числа.

Лемма 2. *Пусть существуют числа* $a_{1j} < 0 < a_{2j}$, $b_{1j} < 0 < b_{2j}$ *такие, что при* $j = 1$ *или* $j = 2$ *выполняются условия*:

1) $P(0, 0) = 0,\ Q(0, 0) = 0,$

$P^2(x, y) + Q^2(x, y) > 0$ *при* $(x, y) \in G_j \setminus O(0; 0);$

2) $(-1)^{i+j} P(a_{ij}, y) \leq 0$ *при* $y \in [b_{1j}, b_{2j}];$

3) $(-1)^{i+j} Q(x, b_{ij}) \leq 0$ *при* $x \in [a_{1j}, a_{2j}].$

Тогда в фазовой плоскости существует простая замкнутая кривая, которую (при возрастании t) пересекают траектории системы (1): *при* $j = 1$ *– выходя из конечной области, ограниченной этой кривой, а при* $j = 2$ *– входя в указанную область.*

Для доказательства рассмотрим на фазовой плоскости xOy область G_j – прямоугольник $A_jB_jC_jD_j$ с вершинами в точках $A_j(a_{1j}; b_{2j})$, $B_j(a_{1j}; b_{1j})$, $C_j(a_{2j}; b_{1j})$, $D_j(a_{2j}; b_{2j})$. Согласно условию 1) леммы 2, в области G_j содержится единственная особая точка системы (1).

Вычисляем полную производную по времени t в силу системы (1) в точках границы ∂G_j прямоугольника $A_jB_jC_jD_j$. Используя условия 2) и 3) леммы 2, заключаем, что фазовые траектории системы при возрастании t пересекают границу прямоугольника $A_jB_jC_jD_j$: при $j = 1,$ выходя из прямоугольника, а при $j = 2,$ входя в указанный прямоугольник.

Теорема 1. *Пусть существуют числа* a_{ij}, b_{ij} $(i = 1, 2;\ j = \overline{1, m+1})$ *такие, что*:

1) $a_{11} < 0 < a_{21},\ b_{11} < 0 < b_{21},$

$(-1)^i a_{ij} < (-1)^i a_{ij+1},\ (-1)^i b_{ij} < (-1)^i b_{ij+1},\ i = 1, 2;\ j = \overline{1, m};$

2) $P(0, 0) = 0,\ Q(0, 0) = 0,$

$P^2(x, y) + Q^2(x, y) > 0$ *при* $(x, y) \in G_{m+1} \setminus O(0; 0)$;

3) $(-1)^{i+j} P(a_{ij}, y) \le 0$ *при* $y \in [b_{1j}, b_{2j}]$, $i = 1, 2$; $j = \overline{1, m+1}$;

4) $(-1)^{i+j} Q(x, b_{ij}) \le 0$ *при* $x \in [a_{1j}, a_{2j}]$, $i = 1, 2$; $j = \overline{1, m+1}$.

Тогда система (1) *имеет по крайней мере* m *предельных циклов, причем в каждом прямоугольнике* G_j $(j = \overline{2, m+1})$ *на плоскости* xOy *расположено не менее* $j-1$ *предельных циклов, из которых* $[j/2]$ *устойчивы и* $[(j-1)/2]$ *неустойчивы.*

Действительно, из леммы 2 вытекает существование в фазовой плоскости xOy простой замкнутой кривой ∂G_j $(j = \overline{1, m+1})$, которую пересекают траектории системы (1): при j нечетном – выходя из прямоугольника G_j, а при j четном – входя в указанный прямоугольник. Из условия 1) теоремы следует, что прямоугольник G_j содержится внутри прямоугольника G_{j+1} $(j = \overline{1, m})$. Следовательно, между кривыми ∂G_j и ∂G_{j+1} при j нечетном находится по крайней мере один устойчивый предельный цикл и при j четном – неустойчивый.

Теорема 2. *Пусть существуют числа* a_{ij}, b_{ij} $(i = 1, 2; j = \overline{2, m+1})$ *такие, что*:

1) $a_{12} < 0 < a_{22}$, $b_{12} < 0 < b_{22}$,

$(-1)^i a_{ij} < (-1)^i a_{ij+1}$, $(-1)^i b_{ij} < (-1)^i b_{ij+1}$, $i = 1, 2$; $j = \overline{2, m}$;

2) $P(0, 0) = 0$, $Q(0, 0) = 0$,

$P^2(x, y) + Q^2(x, y) > 0$ *при* $(x, y) \in G_{m+1} \setminus O(0; 0)$;

3) $yP(0, y) > 0$ *при* $0 < |y| < \varepsilon_1$,

$xQ(x, 0) < 0$ *при* $0 < |x| < \varepsilon_2$,

где ε_1 *и* ε_2 *– достаточно малые числа*;

4) $P'_x(0, 0) > 0$, $Q'_y(0, 0) > 0$;

5) $(-1)^{i+j} P(a_{ij}, y) \le 0$ *при* $y \in [b_{1j}, b_{2j}]$, $i = 1, 2$; $j = \overline{2, m+1}$;

6) $(-1)^{i+j} Q(x, b_{ij}) \le 0$ *при* $x \in [a_{1j}, a_{2j}]$, $i = 1, 2$; $j = \overline{2, m+1}$.

Тогда система (1) *имеет по крайней мере* m *предельных циклов, причем в каждом прямоугольнике* G_j $(j = \overline{2, m+1})$ *на плоскости* xOy *расположено не менее* $j-1$ *предельных циклов, из которых* $[j/2]$ *устойчивы и* $[(j-1)/2]$ *неустойчивы.*

Доказательство теоремы опирается на приведенные выше леммы 1, 2 и аналогично доказательству теоремы 1.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^k, \\ \dot{y} = \sum_{k=0}^{n} q_k(x) y^k, \end{cases} \tag{3}$$

где $n \in \mathbf{N}$; функции $p_k(x)$, $q_k(x)$ $(q = 0, 1, ..., n)$ удовлетворяют следующим условиям:

$p_{2i}(-x) = -p_{2i}(x), \;\; q_{2i}(-x) = -q_{2i}(x), \quad i = 0, 1, ..., [n/2];$

$p_{2i+1}(-x) = p_{2i+1}(x), \;\; q_{2i+1}(-x) = q_{2i+1}(x), \quad i = 0, 1, ..., [(n-1)/2].$

Введем обозначение:

$G(a) = \{(x, y) \| x| \le a, |y| \le a, a > 0\}.$

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть существуют числа* a_j $(j = \overline{1, m+1})$ *такие, что*:

1) $0 < a_1 < a_2 < ... < a_{m+1};$

2) $\left(\sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^k\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{n} q_k(x) y^k\right)^2 > 0$ *при* $(x, y) \in G(a_{m+1}) \setminus O(0; 0);$

3) $(-1)^j \sum_{k=0}^{n} p_k(a_j) y^k \le 0$ *при* $|y| \le a_j, \;\; j = \overline{1, m+1};$

4) $(-1)^j \sum_{k=0}^{n} q_k(x) a_j^k \le 0$ *при* $|x| \le a_j, \;\; j = \overline{1, m+1}.$

Тогда система (3) *имеет по крайней мере* m *предельных циклов, причем в каждом квадрате* $G(a_j)$ $(j = \overline{2, m+1})$ *на плоскости* xOy *расположено не менее* $j-1$ *предельных циклов, из которых* $[j/2]$ *устойчивы и* $[(j-1)/2]$ *неустойчивы*.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *Пусть существуют числа* a_j $(j = \overline{2, m+1})$ *такие, что*:

1) $0 < a_2 < a_3 < ... < a_{m+1};$

2) $\left(\sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^k\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{n} q_k(x) y^k\right)^2 > 0$ *при* $(x, y) \in G(a_{m+1}) \setminus O(0; 0);$

3) $p_0'(0) > 0;$

4) $q_0(x) < 0$ *при* $x \in (0, \varepsilon),$

где ε *– достаточно малое число*;

5) $p_1(0) > 0, \;\; q_1(0) > 0;$

6) $(-1)^j \sum_{k=0}^{n} p_k(a_j) y^k \le 0$ *при* $|y| \le a_j, \;\; j = \overline{2, m+1};$

7) $(-1)^j \sum_{k=0}^{n} q_k(x) a_j^k \le 0$ *при* $|x| \le a_j, \;\; j = \overline{2, m+1}.$

Тогда система (3) *имеет по крайней мере* m *предельных циклов, причем в каждом квадрате* $G(a_j)$ $(j = \overline{2, m+1})$ *на плоскости* xOy *расположено не менее* $j-1$ *предельных циклов, из которых* $[j/2]$ *устойчивы и* $[(j-1)/2]$ *неустойчивы*.

ABOUT LIMIT CYCLES OF SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

V.E. ZHAVNERCHIK

Abstract

The sufficient conditions for the existence of several limit cycles in autonomous system of differential equations of second order and the limits of their location are obtained.

Литература

1. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М., 1974.
2. *Шварц Л.* Анализ: в 2 т. Т. 1. М., 1972.