

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УДАРНОЙ НАГРУЗКИ

К.С. Курочка, Д.Н. Трубенюк
 Кафедра информационных технологий,
 Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого
 Гомель, Республика Беларусь
 E-mail: trubenok_denis@gstu.by, kurochka@gstu.by

Представлена конечно-элементная модель собственных колебаний прямоугольной пластины от действия ударной нагрузки. Разработано соответствующее программное обеспечение и проведена его верификация.

ВВЕДЕНИЕ

Воздействие ударных нагрузок в ряде случаев может привести к возникновению собственных колебаний, вызывающих изменение напряженно-деформированного состояния и разрушение исследуемого объекта. Моделирование собственных колебаний прямоугольной пластины от действия ударной нагрузки будем осуществлять методом конечных элементов [1, 2].

I. ИССЛЕДУЕМАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для решения задачи о собственных колебаниях в прямоугольной пластине применяется физическая модель, показанная на рис. 1. Она представляет собой пластину, которая жестко закреплена со всех сторон. Перпендикулярно к ее поверхности приложена ударная нагрузка.

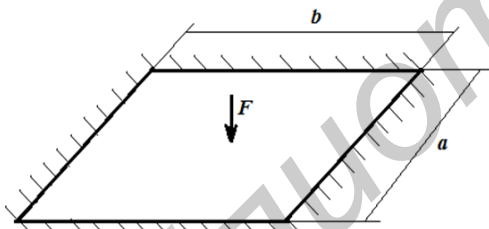


Рис. 1 – Воздействие ударной нагрузки на жестко закрепленную прямоугольную пластину

Для описания поведения физической модели, представленной выше, воспользуемся уравнением [1, 3]:

$$[K] \{\sigma\} + [C] \frac{\partial \{\sigma\}}{\partial t} + [M] \frac{\partial^2 \{\sigma\}}{\partial t^2} + \{F\} = 0, \quad (1)$$

где $[K]$ - матрица жесткости, $[C]$ - матрица демпфирования, $[M]$ - матрица масс, $\{\sigma\}$ - вектор узловых перемещений, $\{F\}$ - вектор нагрузки.

Перед нахождением граничных условий введем обозначение:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad (2)$$

где E - модуль упругости, h - толщина пластины, μ - коэффициент Пуассона.

Условия закрепления пластины, или граничные условия, задаются с учетом прогибов и углов поворота нормалей:

$$\begin{aligned} \omega(x, y); \quad \theta_x(x, y) &= \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x}; \\ \theta_y(x, y) &= \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

При статическом нахождении граничных условий задаются величины усилий. При изгибе прямоугольной пластины – это изгибающие и крутящие моменты, а также поперечные силы:

$$S_x(x, y) = -D \left[\frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial y^2} \right]; \quad (4)$$

$$S_y(x, y) = -D \left[\frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x^2} \right];$$

$$H_x(x, y) = -H_y(x, y) = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x \partial y}; \quad (5)$$

$$V_x(x, y) = -D \left[\frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial x \partial y^2} \right]; \quad (6)$$

$$V_y(x, y) = -D \left[\frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial x^2 \partial y} \right].$$

Приведенные поперечные силы:

$$Q_x = -D \left[\frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial x \partial y^2} \right]; \quad (7)$$

$$Q_y = -D \left[\frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial x^2 \partial y} \right].$$

На защемленном краю отсутствуют прогибы и углы поворота нормали к срединной плоскости в направлении, перпендикулярном к краю. В рассматриваемой физической модели защемлены все края, поэтому:

$$\omega = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \quad (8)$$

II. ВЫВЕДЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Предположим, что существует решение уравнения (1) и оно является комплексным числом, то есть выглядит следующим образом:

$$\{\sigma(t)\} = \{\sigma_0\} \exp^{\alpha t}, \quad (9)$$

затем произведена подстановка комплексного выражения (9) в уравнение (1):

$$([K] + \alpha[C] + \alpha^2[M])\{\sigma_0\} + \{F\} = 0, \quad (10)$$

α - мнимая величина, то есть имеет вид:

$$\alpha = i\omega, \quad (11)$$

тогда

$$\exp^{\alpha t} = \exp^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t. \quad (12)$$

В общем случае вектор $\{\sigma_0\}$ является комплексным, следовательно:

$$\{\sigma_0\} = \{\sigma_x\} + i\{\sigma_y\}, \quad (13)$$

тогда уравнение (10) можно записать в виде:

$$\begin{bmatrix} [K] - \omega^2[M] & -\omega[C] \\ -\omega[C] & [K] - \omega^2[M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

где $\{\sigma_x\}$ - вещественная и $\{\sigma_y\}$ - мнимая части вектора узловых перемещений, ω - период колебаний.

Для нахождения собственных колебаний в начальный момент времени необходимо подставить результаты, полученные после решения системы линейных уравнений (14), в выражение:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x\} \cos \theta + \{\sigma_y\} \sin \theta. \quad (15)$$

Узловые перемещения $\{\sigma\}$ из уравнения (15) используются для нахождения форм собственных колебаний [3]:

$$U_{ji} = \frac{\sigma_{ji}}{\omega} \sum_{r=1}^m \epsilon \left(\frac{\tau\omega}{2\pi} \right) \sigma_{jr} S_r, \quad (j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, n). \quad (16)$$

Для нахождения значений перемещений (u_j), затухающих с течением времени, нужно подставить найденные формы собственных колебаний (U_{ji}) в уравнение:

$$u_j = \sum_{i=1}^n U_{ji} \exp^{-\frac{\tau}{2}\omega t} \sin \omega t, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (17)$$

III. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Для проверки правильности вычислений, разработанного программного продукта использовались результаты расчетов по формулам [3, с. 516].

Рассматривалась стальная жестко закрепленная со всех сторон тонкая пластина длиной 1 м, шириной – 1 м и толщиной 0,1 м. К пластине была приложена ударная нагрузка величиной 10 000 Н.

На рис. 2 представлены амплитуды колебаний полученные в программе, с разбиением на 100 конечных элементов, и согласно расчетам из [3].

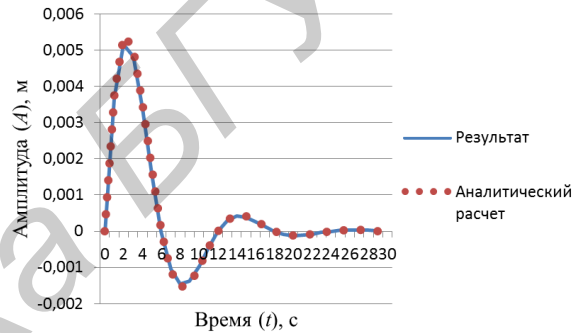


Рис. 2 – Изменение амплитуды колебаний в прямоугольной пластине с течением времени

Расхождение результатов моделирования с решением из [3] не превышало 11%, таким образом, предлагаемый алгоритм и программное обеспечение могут быть использованы для исследования собственных колебаний в прямоугольной пластине. Результаты исследований данного физического процесса могут применяться при проектировании конструкций подверженных воздействию ударных нагрузок.

1. Зенкевич, О. С. Метод конечных элементов в технике / О. С. Зенкевич – учебник: МОСКВА, «МИР». – 1975. – 541 с.
2. Zienkiewicz, O. C. The finite element method for solid and structural mechanics. Sixth edition / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. – Oxford : Elsevier. – 2005. – 631 p.
3. Перельмутер, А. В. Расчётные модели сооружений и возможность их анализа: учебник / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер – Киев: Сталь. – 2002. – 596 с.