# ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО СРАВНЕНИЮ ПРЯМОГО ОПОРНОГО МЕТОДА С МЕТОДАМИ СОПРЯЖЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Ракецкий В. М., Мокин А. А., Бруцкий В. Р.
Факультет электронно-информационных систем, Брестский государственный технический университет
Брест, Республика Беларусь
E-mail: rvm@bstu.by

*В работе приведено описание одного из алгоритмов прямого опорного метода для решения задач выпуклого программирования и результаты численного эксперимента, в котором предложенный алгоритм сравнивается с известными методами выпуклого программирования. Результаты эксперимента свидетельствуют о высоком потенциале прямого опорного метода.*

## Введение

Целью настоящей работы является экспериментальное исследование прямого опорного метода для минимизации выпуклых функций [1] и его сравнение с другими известными методами. В качестве объекта для проведения численного эксперимента рассматривается задача безусловной оптимизации

$$f(x) \to min, x \in R^n, \tag{1}$$

где $f(x)$ – дважды дифференцируемая сильно выпуклая функция, т.е. в задаче (1) всегда существует единственное решение $x^*$, которое удовлетворяет необходимым и достаточным условиям оптимальности

$$\Delta_j(x) = \frac{d}{dx_j} f(x) = 0, j = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Для выяснения эффективности прямого опорного метода и получения данных для анализа и сравнения в эксперименте использовались:

а) Метод сопряженных градиентов Флетчера-Ривса [2]. Выбор этого известного метода в качестве одного из эталонов для сравнения обусловлен его алгоритмической простотой и низкой трудоемкостью итерации, что обеспечивает высокую эффективность метода на задачах невысокой размерности. Его недостатком является чувствительность к вычислительным погрешностям.

б) Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла [2]. Этот метод относится к группе квазиньютоноских методов, которые для организации итерационных вычислений используют специальную вспомогательную матрицу, в которой накапливается информация о структуре минимизируемой функции. Итерация квазиньютоновских методов отличается большей трудоёмкостью в сравнении с методом сопряженных градиентов, однако они более устойчивы к вычислительным погрешностям и показали высокую эффективность для задач вида (1). Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла отличается наиболее высокими характеристиками.

## I. Алгоритм прямого опорного метода

Пусть $\{x, J_{оц}\}$ опорный план [1] задачи (1), известный к началу итерации, $\varepsilon$ – заданная точность выполнения условий оптимальности (2). Предположим, что опора целевой функции $J_{оц}$ состоит из индексов $\{i_1, i_2, ..., i_m\}$, множество неопорных индексов $J_н$ состоит из индексов $\{j_1, j_2, ..., j_{n-m}\}$, $j_k$ – неопорный индекс, для которого предстоит проверить условия оптимальности на текущей итерации, $J_н^0$ – множество индексов из $J_н$, для которых на предыдущих итерациях был установлен факт выполнения условий оптимальности с заданной точностью, т. е. $\mid \Delta_j \mid \leq \varepsilon, j \in J_н^0$, и опорный план $\{x, J_{оц}\}$ не менялся.

1) Проверим, выполняются ли условия оптимальности (2) на индексе $j_k$:

$$\mid \Delta_{j_k} \mid \leq \varepsilon \tag{3}$$

Если условие (3) не выполняется, то перейдем к п. 3. В противном случае положим $J_н^0 = J_н^0 \cup \{j_k\}$. Возможны 2 случая.

а) $J_н^0 = J_н$, т. е. все неопорные индексы удовлетворяют с заданной точностью условиям оптимальности. В этом случае перейдем к проверке согласованности опорного плана.

б) $J_н^0 \subset J_н$, т. е. возможно, что среди неопорных индексов есть такие, для которых условия оптимальности не выполняются с заданной точностью. В этом случае положим $k = (k+1) mod(n-m)$ и снова проверим условие (3) для нового индекса (повторим пункт 1).

2) Проверим условия согласования опорного плана

$$\mid \Delta_j(x) \mid \leq \varepsilon, \ j \in J_{оц} \tag{4}$$

Если условия согласования (4) выполняются, то решение задачи (1) окончено. В противном случае полагаем $J_{оц} = \oslash$ и переходим к п. 1. В качестве индекса $j_k$ используем первый из индексов опорного плана, для которого не выполнены условия согласования (4).

3) Построим направление для улучшения опорного плана $\{x, J_{\text{оц}}\}$

$$\begin{array}{l} l_{j_k} = -sign\Delta_{j_k},\ l_j = 0,\ j \in J_{\text{н}} \setminus \{j_k\}, \\ l_{\text{оц}} = G_{\text{оц}} p_{\text{оц}} sign\Delta_{j_k} \end{array} \qquad (5)$$

где $p_{\text{оц}} = \{p_j, j \in J_{\text{оц}}\},\ p_j = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_{j_k}}$.

4) Вычислим шаг $\theta$ вдоль направления $l$:

$$\theta = \begin{cases} \mid \Delta_{j_k} \mid /\alpha, & \text{если } \alpha > 0, \\ \infty, & \text{если } \alpha \leq 0, \end{cases},$$

$\alpha = d_{j_k j_k} - l'_{\text{оц}} p_{\text{оц}} sign\Delta_{j_k},\ d_{j_k j_k} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_{j_k} \partial x_{j_k}}$ Если $\theta = \infty$, то перейдем к п. 6.

5) Проверим условие

$$f(x + \theta l) < f(x) - \eta. \qquad (6)$$

Возможны 2 варианта.

а) условие (6) выполняется. В этом случае построим новый опорный план $\{x, j_{\text{оц}}\}$, где $x = x + \theta l, J_{\text{оц}} = J_{\text{оц}} \cup \{j_k\}$, и пересчитаем матрицу $G_{\text{оц}}$:

$$G_{\text{оц}} = \begin{pmatrix} G_{\text{оц}} + \frac{l_{\text{оц}} l'_{\text{оц}}}{\alpha} & -\frac{l_{\text{оц}}}{\alpha} sign\Delta_{j_k} \\ -\frac{l_{\text{оц}}}{\alpha} sign\Delta_{j_k} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$$

Если $J_{\text{оц}} = n$, то $J_{\text{н}} = \oslash$. Поэтому следующую итерацию начнем сразу с п. 2) – проверки условий согласования опорного плана $\{x, J_{\text{оц}}\}$. Если же $\mid J_{\text{оц}} \mid < n$ то перейдем к п. 1. При этом проверку условий оптимальности начнем с индекса $j_{k+1}$ (следующего по порядку после $j_k$ в множестве $J_{\text{н}}$), приняв, что $J^0_{\text{н}} = \oslash$ (если $j_k$ – последний из индексов множества $J_{\text{н}}$, т. е. $k = n - m$, то проверку условий оптимальности начнем с индекса $j_1$ – первого индекса в множестве $J_{\text{н}}$).

б) условие (6) не выполняется. Продолжим итерацию, для чего перейдем к п. 6.

6) Найдем шаг $\theta$ вдоль направления $l$ методом одномерной оптимизации (например, метода «золотого» сечения) и проверим условие

$$f(x + \theta l) < f(x) - \eta/8 \qquad (7)$$

Возможны 2 исхода.

а) условие (7) выполняется. В этом случае уточним значение параметра $\eta = (f(x) - f(x + \theta l))/2$ и перейдем к следующей итерации по правилам пункта 5-а), приняв в качестве значения $\alpha$ величину $\alpha = \mid \Delta_{j_0} \mid /\theta$.

б) условие (7) не выполняется. В этом случае перейдем к п. 2.

## II. Эксперимент

В эксперименте целевая функция (1) имела вид

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T D x + c^T x + \sum_{i=1}^{m} e^{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}, \qquad (8)$$

где $D$ – симметричная положительно определенная $(n * n)$-матрица, $c$ – $n$-вектор, $a_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ – известные величины. Для автоматизации процесса тестирования был разработан генератор задач вида (8). В ходе эксперимента генерировались задачи одного размера сериями по 10 штук. Каждая задача из серии по очереди решалась тремя выше описанными алгоритмами. Сравнение алгоритмов проводилось времени решения и количеству итераций. В качестве результатов эксперимента принимались средние результаты по серии, из которых отбрасывалось одно наибольшее и одно наименьшее значение.

Результаты эксперимента (таблица 1) подтверждают известные выводы о численной неустойчивости метода сопряженных градиентов и высокой эффективности метода Давидона-Флетчера-Пауэла. Метод сопряженных градиентов плохо решал или не решал вовсе с заданной точностью задачи с количеством переменных больше 10.

Проведенный численный эксперимент свидетельствует о высокой эффективности прямого опорного метода: хотя прямой опорный метод уступает методу Давидона-Флетчера-Пауэла по количеству итераций, однако существенно превосходит его по скорости решения.

1. Ракецкий В.М. К минимизации выпуклых функций с простыми ограничениями // Вестник Брестского государственного технического университета. – 2011. – № 5(71): Физика, математика, информатика. – С. 108–110.
2. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.

Таблица 1 – Результаты эксперимента
(ПМ – прямой метод, СГ– метод сопряженных градиентов, ДФП – метод Давидона-Флетчера-Пауэлла)

| Количество переменных | Количество итераций | | | Время решения (мс) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ПМ | СГ | ДФП | ПМ | СГ | ДФП |
| 3 | 10.0 | 7.8 | 5.5 | 2.4 | 3.4 | 12.6 |
| 4 | 12.0 | 11 | 5.9 | 4.8 | 9.4 | 25.0 |
| 5 | 14.1 | 17.3 | 5.5 | 3.8 | 15.1 | 31.6 |
| 10 | 34.8 | 131.9 | 10.8 | 48.5 | 436.3 | 238.4 |
| 15 | 70.4 | - | 15.8 | 343.8 | - | 784.6 |
| 20 | 96.0 | - | 22.5 | 1042.6 | - | 4515.3 |