

УДК 517.968.4

АНАЛИЗ УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Е.А. БАРКОВА

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 5 июня 2012

Дана задача Коши для дифференциальных уравнений дробных порядков с производной Капуто. Приведены новые методы исследования областей существования решений таких уравнений. На примерах проведен анализ изменения этих областей при изменении параметров правой и левой частей уравнения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, производная Капуто, дробные порядки.

Введение

В настоящей работе рассматриваются дифференциальные уравнения дробных порядков с производными Капуто. Различные результаты разрешимости таких уравнений приведены в работах [1,2]. Опираясь на них, в работе [3] были получены локальные теоремы существования решения $x = x(t)$ при $|t - t_0| \leq h$, где h – некоторое конечное число, и нелокальные теоремы о существовании интегральных кривых, определенных на бесконечном интервале с производной Капуто порядка $\alpha \geq 1$. Получить аналогичные условия для дифференциальных уравнений с $0 < \alpha < 1$ оказалось затруднительным. В данной работе приводятся некоторые рассуждения, с помощью которых можно графически находить промежутки существования решений таких уравнений. После чего на примерах показано, как меняется гарантированная область существования решения при увеличении и уменьшении параметров уравнения.

Теоретический анализ

Рассмотрим задачу Коши

$$D^\alpha x(t) = f(t, x), \quad (1)$$

$$x(0) = r, \quad (2)$$

с дробной производной Капуто и непрерывной скалярной функцией $f(t, x(t))$, заданной на конечном или бесконечном интервале действительной оси и удовлетворяющей условию

$$|f(t, x)| \leq b(t)L(|x|),$$

где $L(x)$ – монотонная функция, $b(t) > 0$. В работе [1] было установлено, что задача Коши (1), (2) имеет по крайней мере одно решение, определенное на интервале $0 \leq t \leq T$, если существует определенная на $[0, T]$ функция $\omega(t)$, для которой справедливо неравенство

$$r + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} b(s) L(\omega(s)) ds \leq \omega(t), \quad (0 \leq t \leq T); \quad (3)$$

при этом, решение $x(t)$ удовлетворяет условию $|x(t)| \leq \omega(t)$ на всем промежутке $[0; T]$.

Перейдем от неравенства (3) при помощи замены $s = t\sigma$ к равносильному неравенству

$$r + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - \sigma)^{\alpha-1} b(t\sigma) L(\omega(t\sigma)) d\sigma \leq \omega(t) \quad (0 \leq t \leq T).$$

Обозначим интегральный оператор $\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - \sigma)^{\alpha-1} b(t\sigma) L(\omega(t\sigma)) d\sigma$ через $A(\omega(t))$.

Тогда последнее неравенство имеет вид

$$r + A(\omega(t)) \leq \omega(t), \quad (0 \leq t \leq T). \quad (4)$$

Очевидно, что для всех значений t , для которых неравенство (4) справедливо, решение задачи Коши (1), (2) существует.

Далее на примерах покажем, как определять промежутки существования решений и рассмотрим, как они меняются при изменении параметров.

Пусть $0 < \alpha < 1$. В качестве первого примера рассмотрим функции $\omega(t) = e^t$, $b(t) = t$, $L(u) = 1 + u^\theta$. Для задачи Коши (1), (2) в случае $\alpha = 1/2$ интегральный оператор $A(\omega(t))$, зависящий от выбираемого θ , будет вычисляться по формуле

$$A_\theta(\omega(t)) = \frac{t^{3/2}}{\Gamma(1/2)} \int_0^1 (1 - \sigma)^{-1/2} (1 + e^{t\sigma^\theta}) d\sigma.$$

Построим графики функций $\omega(t) = e^t$ и $r + A_1(\omega(t)) = 1 + \frac{t^{3/2}}{\Gamma(1/2)} \int_0^1 (1 - \sigma)^{-1/2} (1 + e^{t\sigma}) d\sigma$ правой и левой частей неравенства (4) для $r = 1$, $\theta = 1$ (рис. 1).

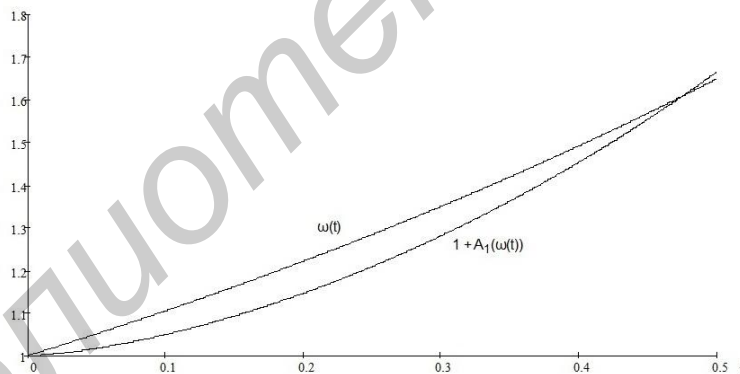


Рис.1. Графики функций

Понятно, что неравенство $r + A_1(\omega(t)) \leq \omega(t)$ выполняется для всех t , для которых график функции $r + A_1(\omega(t))$ расположен под графиком $\omega(t)$. По (рис.1) видно, что решение существует для всех t на промежутке $[0; 0,485]$.

Посмотрим далее, как будет зависеть область существования решения от изменения степени θ .

По графику легко определить, что с ростом значений θ для функции $L(u) = 1 + u^\theta$ промежуток значений t , на котором существует решение, уменьшается.

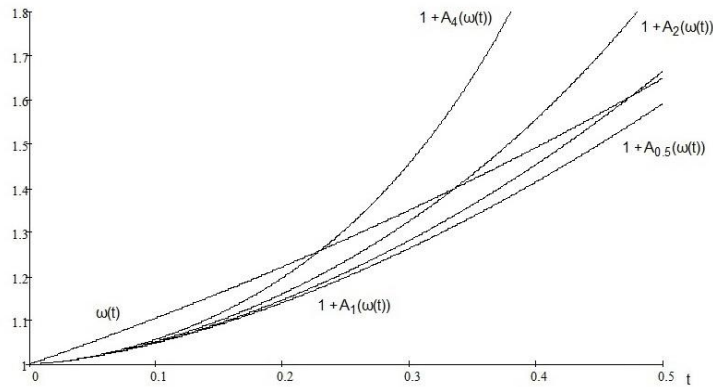


Рис. 2. Графики функций $\omega(t) = e^t$, $r + A_4(\omega(t))$, $r + A_2(\omega(t))$, $r + A_1(\omega(t))$, $r + A_{0,5}(\omega(t))$ для соответствующих $\theta = 4; 2; 1; 0,5$.

В качестве второго примера рассмотрим задачу Коши

$$D^\alpha x(t) = 1 + x^2(t),$$

$$x(0) = r.$$

Покажем, как область существования решения данной задачи Коши меняется при изменении параметра α . Зная, что решение при $\alpha = 1$ определяется функцией $x(t) = \operatorname{tg}(t + \pi / 4)$, выберем в качестве $\omega(t)$ функцию $\omega(t) = \frac{1}{\pi / 4 - t}$, где $0 \leq t \leq \pi / 4$. В этом случае интегральный оператор $A(\omega(t))$, зависящий от выбора α , для функций $L(u) = 1 + u^2$ и $b(t) = 1$ будет выглядеть следующим образом:

$$A_\alpha(\omega(t)) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - \sigma)^{\alpha-1} \left(1 + \frac{1}{(\pi / 4 - t\sigma)^2} \right) d\sigma.$$

Рассмотрим графики функций

$$\omega(t) = \frac{1}{\pi / 4 - t}, \quad r + A_\alpha(\omega(t)) = 1 + t \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{(\pi / 4 - t\sigma)^2} \right) d\sigma \quad \text{для } \alpha = 1, r = 1 \text{ (рис. 3).}$$

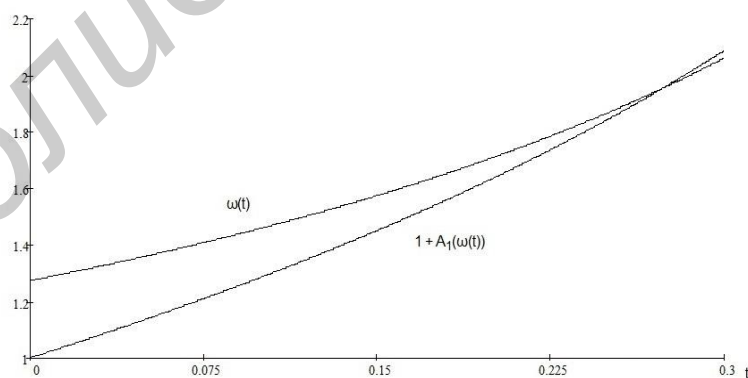


Рис. 3. Графики функций

По рисунку определяем, что для выбранного $\omega(t)$ решение существует, по крайней мере, для всех t на интервале $[0; 0,28]$.

Найдем области существования решений для различных значений α . Для этого рассмотрим графики функций $\omega(t) = \frac{1}{\pi / 4 - t}$, $r + A_\alpha(\omega(t)) = 1 + t \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{(\pi / 4 - t\sigma)^2} \right) d\sigma$ для $\alpha = 1 / 4; 1 / 2; 1; 3 / 2$, $r = 1$ (см. рис. 4).

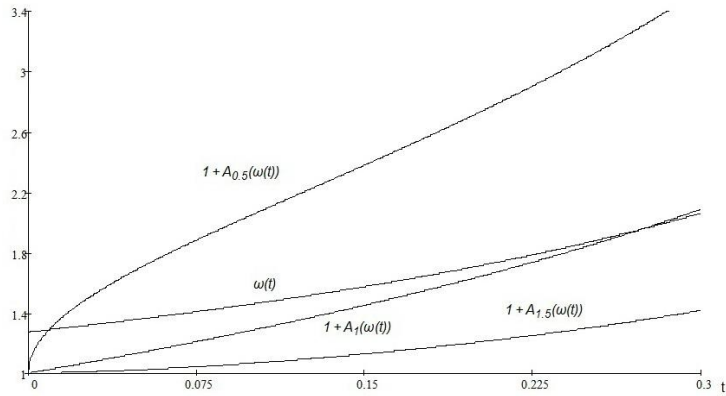


Рис. 4. Графики функций для $\alpha = 1/4; 1/2; 1; 3/2, r = 1$

Как видим на графиках, для всех значений $\alpha \geq 1$ решение существует для всех t на интервале $[0; 0,28]$. Для $\alpha < 1$ решение существует только на очень маленьком интервале.

Приведем более грубую схему исследования условий существования решения задачи Коши (1), (2). Для монотонных функций $\omega(t)$ можно выбрать $\omega_0(t) = \max_{0 \leq \sigma \leq t} \omega(\sigma)$. Тогда, в силу монотонности функции $L(\omega(t))$, левая часть неравенства (3) легко просчитывается, и найденное $\omega(t)$ решает неравенство

$$r + \frac{b(t)L(\omega_0(t))t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \leq \omega(t), \quad (0 \leq t \leq T) \quad (5)$$

для всех $r < \omega(0)$.

Ниже рассмотрены несколько простых примеров выбора функции $\omega(t)$, на которых видно как для произвольного $r < \omega(0)$ каждый раз определяется промежуток значений $[0, T]$, на котором задача Коши (1), (2) имеет по крайней мере одно определенное решение $x(t)$, которое удовлетворяет условию $|x(t)| \leq \omega(t)$ на всем промежутке $[0, T]$.

В первом рассмотренном примере для функций $\omega(t) = e^t$, $b(t) = t$, $L(u) = 1 + u^\theta$ неравенство (5) будет выглядеть так:

$$r \leq e^t - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 1)}(1 + e^{t^\theta}), \quad (0 \leq t \leq T).$$

Обозначим $B_0(\omega(t)) = \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 1)}(1 + e^{t^\theta})$ и построим графики функций $\omega(t) = e^t$ и

$$B_1(\omega(t)) = 1 + \frac{t^{3/2}}{\Gamma(3/2)}(1 + e^t) \quad \text{для } \alpha = 1/2, r = 1, \theta = 1.$$

По графику определяем, что для выбранного $\omega(t) = e^t$ решение существует для всех t на интервале $[0; 0,195]$. Как видим, при такой грубой схеме исследования область существования решения значительно уменьшилась по сравнению с областью, полученной методом исследования, предложенным вначале.

Аналогично и для функций $L(u) = 1 + u^\theta$ при $\theta = 4; 2; 0,5$ (см. рис. 6) легко увидеть соответствующие промежутки существования решений и установить, что они стали меньше.

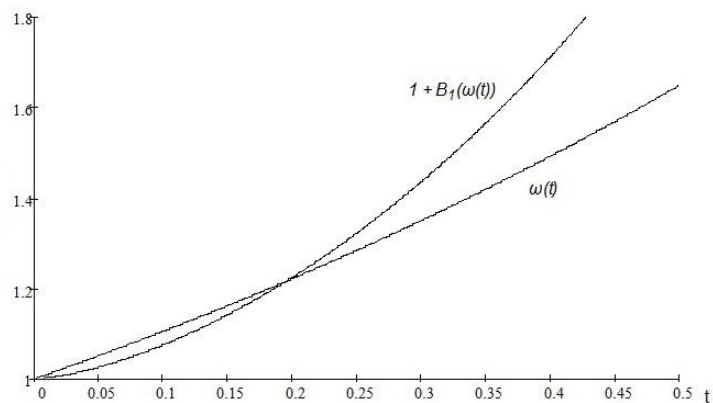


Рис. 5. Графики функций

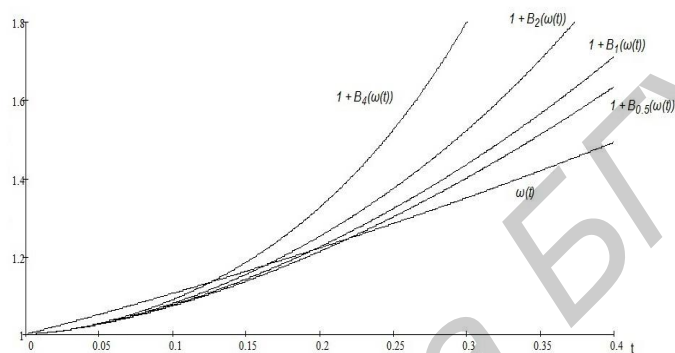


Рис. 6. Графики функций $L(u) = 1 + u^\theta$ при $\theta = 4; 2; 0,5$

Заключение

Таким образом, в работе были приведены несколько схем исследования дифференциальных уравнений дробных порядков с производными Капуто и проанализированы изменения промежутков существования решений при изменении параметров уравнений для каждой из них.

ANALYSIS OF EXISTENCE OF SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL DERIVATIVES

E.A. BARKOVA

Abstract

The Cauchy problem for differential equations with Caputo fractional derivatives is given. New methods for studying the regions of existence of solutions of these equations are presented. Analysis of changes in these areas was done by changing the settings right and left sides of the equation.

Список литературы

1. Kilbas A.A., Trujillo J.J. // *Applicable Analysis*. 2001. №1. P. 153–192.
2. Kilbas A.A., Rivero M., Trujillo J.J. // *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2003. Vol 6, № 4. P. 363–399.
3. Забрэйко П.П., Баркова Е.А // Докл. Национ. академии наук Беларусі. 2010. №2. С. 1–6.