УДК 621.391.14

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОШИБОК БЧХ-КОДАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОСНОВНЫХ И ДОПОЛНЯЮЩИХ НОРМ СИНДРОМОВ

В.К. КОНОПЕЛЬКО, З.Н. ХОАНГ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 4 октября 2012

Рассматривается сложность норменного декодирования. Приведены результаты вычислительных экспериментов норменного декодирования для БЧХ-кодов. Анализ результатов показывает, что можно использовать только часть норм для идентификации многократных ошибок. Выявлены свойства норм синдромов для БЧХ-кодов. Предлагается идентификация на основе совместного использования основных и дополняющих норм, используемых при значении первой компоненты синдрома равной нулю.

Ключевые слова: синдром *S*, норма синдрома *N*, основные $N_{\text{о}}$, зависимые $N_{\text{з}}$, дополняющие $N_{\text{Д}}$ нормы, кратность ошибок *t*, длина кода *n*, образующие вектора ошибок.

Введение

Известно, что при коррекции многократных ошибок БЧХ-кодами с синдромным алгоритмом декодирования возникает, так называемая «проблема селектора» [1,2]. Для уменьшения сложности построения селектора, определяющего по вычисленному синдрому вектор ошибок, в [3,4] предложено норменное декодирование БЧХ-кодов. Норменное декодирование состоит из двух основных процедур: классификации ошибок, когда вводятся образующие вектора ошибок, объединяющие в множества циклические сдвиги этих векторов и вычисления норм синдромов, одинаковых для каждого множества векторов ошибок. Благодаря этому обеспечивается возможность различать (идентифицировать) вектора ошибок разной кратности.

Основные и дополняющие нормы синдромов

При норменном декодировании БЧХ-кодов, задаваемых проверочными матрицами вида $H = \left[\alpha_1^{i}, \alpha_2^{3i}, \alpha_3^{5i}, \alpha_4^{7i}, \ldots, \alpha_t^{m}\right]^T$, m – нечетное, в зависимости от кратности ошибок необходимо вычислять синдромы $S = S_1, S_2, S_3, \ldots, S_t{}^T = \alpha^i, \alpha^j, \alpha^z, \ldots{}^T$, по которым находятся нормы синдромов N_i. В табл. 1 приведены выражения для вычисления норм N_i, разбитые на два множества – основных $N_{\text{о}}$ и зависимых $N_{\text{з}}$ норм (в вычислении которых не участвует первая компонента S_1 синдрома S), а также суммарное число синдромов S_{Σ}, основных и зависимых норм N_i, их суммарное число $N_{\Sigma} = N_{\text{о}} + N_{\text{з}}$.

Анализ данных табл. 1 показывает, что уже при кратности ошибок $t \geq 4$ происходит рост числа норм N_{Σ}, определяемых в основном зависимыми нормами $N_{\text{з}}$. Это приводит вновь к «проблеме селектора», но уже с декодированием норм синдромов; и следовательно, вновь необходимо использовать для построения селектора синдромы, суммарное число которых существенно меньше числа норм N_{Σ}, что позволяет уменьшить число входов и элементов в селекторе, реализуемых в быстродействующих селекторах: как правило, на СБИС, ПЛИС, элементах И, ИЛИ или ПЗУ [4].

Таблица 1. **Зависимость числа синдромов S_i и норм N_i от кратности ошибок t .**

Крат-ность ошибок t	Синдром S_i	Нормы синдромов N		Суммар-ное число синдромов S_{Σ}	Суммарное число основных и зависи-мых норм		
		Основные $N_о$	Зависимые $N_з$		$N_о$	$N_з$	N_{Σ}
2	$S = S_1,S_2\ ^T =$ $= \alpha^i,\alpha^j\ ^T$	$N_1 = j-3i$		2	1	0	1
3	$S = S_1,S_2,S_3\ ^T =$ $= \alpha^i,\alpha^j,\alpha^z\ ^T$	$N_1 = j-3i$, $N_2 = z-5i$	$N_2 = 3z-5j$	3	2	1	3
4	$S = S_1,S_2,S_3,S_4\ ^T =$ $= \alpha^i,\alpha^j,\alpha^z,\alpha^m\ ^T$	$N_1 = j-3i$, $N_2 = z-5i$, $N_3 = m-7i$	$N_4 = 3z-5j$ $N_5 = 3m-7j$ $N_6 = 5m-7z$	4	3	3	6
5	$S = S_1,S_2,...,S_5\ ^T =$ $= \alpha^i,\alpha^j,...,\alpha^u\ ^T$	$N_1 = j-3i$, $N_2 = z-5i$, $N_3 = m-7i$ $N_4 = u-9i$	$N_5 = 3z-5j$ $N_6 = 3m-7i$ $\dots$ $N_{10} = 7u-9m$	5	4	6	10
6	$S = S_1,S_2,...,S_6\ ^T$	$N_1 = j-3i$, $N_2 = z-5i$, $N_3 = m-7i$, $N_4 = u-9i$ $N_5 = v-11i$	$N_6 = 3z-5j$ $N_7 = 3m-7j$ $\dots$ $N_{15} = 9v-11u$	6	5	10	15
7	$S = S_1,S_2,...,S_7\ ^T$	$N_1 = j-3i$, $N_2 = z-5i$, $N_3 = m-7i$, $N_5 = u-9i$ $N_6 = v-11i$ $N_7 = p-13i$	$N_8 = 3z-5j$ $N_9 = 3m-7j$ $N_{10} = 3m-7j$ $\dots$ $N_{21} = 11p-13v$	7	6	15	21

Анализ суммарного числа норм N_{Σ} показывает, что их число избыточно для идентификации образующих векторов ошибок, так как для их идентификации требуется значительно меньшее число норм. Число этих норм определяется из суммарного количества образующих векторов ошибок. В табл. 2 приведена зависимость достаточного числа норм $N_д$ от кратности ошибок t для кода длины $n=31$ с разрядностью синдрома $r=5$ ($\rceil\circ\lceil$ – округление в большую сторону) без учета норм для коррекции ошибок меньшей кратности.

Сравнение числа основных $N_о$, зависимых $N_з$ и достаточных $N_д$ норм показывает, что для идентификации образующих векторов ошибок достаточно использование основных норм $N_о$. Однако, как правило, при идентификации векторов ошибок кратности $t \geq 3$ некоторые компоненты S_i синдрома S равны нулю ($S_i = 0$). Поэтому некоторые основные нормы $N_о$ не вычисляются, а оставшихся норм недостаточно для идентификации, что приводит к необходимости использовать зависимые нормы $N_з$ наряду с основными $N_о$, что требует больших затрат на реализацию селектора. Ниже приведены результаты экспериментальных исследований по поиску идентификационных параметров из числа норм $N_о$ и дополняющих норм

$N_д$ из множества $N_з$ при значениях некоторых синдромов $S_i = 0$, позволяющих идентифицировать соответствующие образующие вектора ошибок.

Таблица 2. **Зависимость достаточного числа норм $N_д$ от кратности ошибок t**

Кратность ошибок t	2	3	4	5
Число образующих векторов ошибок, L	$\frac{n-1}{2!} = 15$	$\frac{n-1 \quad n-2}{3!} = 145$	$\frac{n-1 \quad n-2 \quad n-3}{4!} = 1015$	$\frac{n-1 \quad n-2 \quad n-3 \quad n-4)}{5!} = 5481$
Суммарное число синдромных разрядов	10	15	20	25
Достаточное число норм с разрядностью, $N_д = \frac{\lvert\log L\rvert}{r}$, $r = 5$	1	2	2	3

Анализ норм синдромов и «хорошие» коды

Вычислительный эксперимент состоял в вычислении синдромов S, норм $N_о$, $N_з$, выделении из норм $N_з$ дополняющих норм $N_д$ для всех образующих векторов ошибок кратности $3 \le t \le 7$ для длины кода $n = 31$ на предмет их различия, что позволит идентифицировать эти вектора.

Анализ синдромов БЧХ-кодов, корректирующих ошибки кратности $t = 3$ показал, что имеется 145 образующих векторов (табл. 2). Эти вектора можно разделить на две группы: $S_i \ne 0$ и $S_i = 0$. Для 130 векторов с $S_i \ne 0$ в качестве идентификационных норм можно использовать множество основных норм $\{N_1; N_2\}$. Для 15 векторов с $S_i = 0$, которые можно разделить на три подгруппы по 5 векторов в каждой, достаточно применить дополняющие нормы $N_д$ при $S_1 = 0$, и нормы N_2 и N_1 при $S_2 = 0$ $S_3 = 0$ соответственно.

При коррекции четырехкратных ошибок число образующих векторов равно 1015. Как и в предыдущем случае, при $S_i \ne 0$ для идентификации ошибок кратности $t = 2,3,4$ (их сумма равна 15+130+875=1020) требуется уже три основные нормы $\{N_1; N_2; N_3\}$, а для идентификации 140 векторов с $S_i = 0$ (разбитых на 4 подгруппы по 35 векторов) можно использовать дополняющие нормы $N_д = \{N_4; N_5\}$ при $S_1 = 0$ и основные нормы $N_д = \{N_2; N_3\}$, $\{N_1; N_3\}$, $\{N_1; N_2\}$. Таким образом, из результатов эксперимента следует, что для идентификации достаточно использовать 5 норм (причем для идентификации нет необходимости одновременного их использования, а достаточно трех или двух норм) по сравнению с числом норм равным $N_\Sigma = 6$, предложенным в [3, 4].

При коррекции ошибок кратности $t = 5$ число образующих векторов равно 5481. В этом случае имеются не только $S_i \ne 0$ и $S_i = 0$, но множества, когда две и даже три компоненты синдрома равны нулю $\{S_i; S_j\} = 0$, $\{S_i; S_j; S_z\} = 0$. При $S_i \ne 0$ число образующих векторов ошибок равно 4845; при $S_1 = S_2 = S_4 = 0$ – по 150 векторов и 151 вектор, когда $S_3 = 0$. Кроме того, имеется по 6 векторов для $\{S_1; S_2\} = \{S_1; S_3\} = \{S_1; S_4\} = \{S_2; S_4\} = 0$ и 5 векторов при $\{S_2; S_3\} = \{S_3; S_4\} = 0$. В этих случаях для идентификации достаточно использовать соответственно множество основных и дополняющих норм $\{N_1; N_2; N_3\}$ при $S \ne 0$, $\{N_4; N_5\}$, $\{N_1; N_2\}$,

{ $N_1; N_3$ } при $S_i = 0$, а также N_6, N_5, N_4, N_2, N_3, N_1 при $\{S_i; S_j\} = 0$. При $S_2 = S_3 = S_4 = 0$ имеется один вектор, который идентифицируется по состоянию синдрома $S_i \neq 0$ и $S_2 = S_3 = S_4 = 0$. Это приводит к существенному уменьшению числа используемых норм для идентификации до $1 \div 3$ вместо $N_\Sigma = 10$ (табл.1).

Важным является и то, что при такой идентификации пятикратных ошибок достаточно использовать БЧХ-коды, задаваемые проверочной матрицей для коррекции ошибок кратности $t = 4$, т.е. $H = \left[\alpha^i, \alpha^{3i}, \alpha^{5i}, \alpha^{7i}\right]^T$; при этом в матрице H исключается подматрица с α^{9i}, что приводит к «хорошему» коду $n; r; d = 31;11;11$ с малой избыточностью [2].

Результаты вычислительного эксперимента для БЧХ-кодов, корректирующих ошибки кратности $t = 6; 7$ на длине $n = 31$ показывают, что для идентификации шестикратных и семикратных ошибок можно воспользоваться множеством из 4-х основных норм { $N_1; N_2; N_3; N_4$ } при $S_i \neq 0$, а при $S_i = 0$ – использовать наряду с основными нормами $N_1; N_2; N_3; N_4$ три дополняющие нормы $N_5; N_6; N_7$. При этом в матрице H следует исключить две подматрицы с α^{9i} и α^{13i}, что приводит к «хорошим» кодам с параметрами $n; r; d = 31;6;15$. Следует отметить, что по сравнению с кодом максимальной длины с параметрами $31;5;15$ предложенные коды имеют на один информационный символ больше. Результаты проведенных экспериментов по идентификации векторов ошибок кратности $t = 3 \div 7$ с использованием основных и дополняющих норм на длине кода $n = 31$ приведены в табл. 3–5.

Анализ данных табл. 3–5 показывает, что если отказаться от декодирования образующих векторов ошибок, для которых синдром $S_1 = 0$ (в этом случае для идентификации ошибок используются только основные нормы $N_о$), то число отказов от декодирования ошибок кратности $t = 3; 4; 5; 6; 7$ равно 3,4%, 3,4%, 3,07%, 3,06%, 3,1% соответственно. Это позволяет уменьшить сложность селектора при небольшом числе отказов от декодирования. Следует отметить, что с увеличением кратности идентифицируемых ошибок число не используемых норм растет. Например, для $t = 3$ число не используемых норм равно 770 (при задействованных 130), а для $t = 4$ – 25995 (1005). Эти не задействованные нормы можно использовать для идентификации ошибок кратности $t > t = \frac{d_{\min} - 1}{2}$) [2,4].

Таблица 3. **Зависимость числа образующих векторов ошибок и основных $N_о$, дополняющих $N_д$ норм достаточных для идентификации, от кратности ошибок при одной компоненте $S_j = 0$**

Синдром S_i / Кратность t	Число образующих векторов ошибок (1) / Идентификационные параметры (2)	$S_i \neq 0$	$S_1 = 0$	$S_2 = 0$	$S_3 = 0$	$S_4 = 0$	$S_5 = 0$
3	(1)	130	5	5	5		
	(2)	N_1, N_2	N_3	N_2	N_1		
4	(1)	875	35	35	35	35	
	(2)	N_1, N_2, N_3	N_4, N_5	N_2, N_3	N_1, N_3	N_1, N_2	
5	(1)	4845	150	150	151	150	
	(2)	N_1, N_2, N_3	N_4, N_5	N_2, N_3	N_1, N_3	N_1, N_2	
6	(1)	20370	625	625	625	625	625
	(2)	N_1, N_2, N_3, N_4	N_5, N_6, N_7	N_2, N_3, N_4	N_1, N_3, N_4	N_1, N_2, N_4	N_1, N_2, N_3
7	(1)	72310	2345	2345	2345	2345	2345
	(2)	N_1, N_2, N_3, N_4	N_5, N_6, N_7	N_2, N_3, N_4	N_1, N_3, N_4	N_1, N_2, N_4	N_1, N_2, N_3

Таблица 4. **Зависимость числа образующих векторов ошибок и основных $N_о$, дополняющих $N_д$ норм достаточных для идентификации, от кратности ошибок при двух компонентах** $S_i, S_j = 0$

Синдром $S_{i,j} = 0$ / Крат-ность t	Число образующих векторов ошибок (1) / Идентификационные параметры (2)	$S_1 = 0$ $S_2 = 0$	$S_1 = 0$ $S_3 = 0$	$S_1 = 0$ $S_4 = 0$	$S_1 = 0$ $S_5 = 0$	$S_2 = 0$ $S_3 = 0$	$S_2 = 0$ $S_4 = 0$	$S_2 = 0$ $S_5 = 0$	$S_3 = 0$ $S_4 = 0$	$S_3 = 0$ $S_5 = 0$	$S_4 = 0$ $S_5 = 0$
5	(1)	6	6	6		5	6		5		
	(2)	N_6	N_5	N_4		N_3	N_2		N_1		
6	(1)	25	26	25	26	25	26	25	25	25	25
	(2)	N_8, N_9	N_6, N_7	N_5, N_7	N_5, N_6	N_3, N_4	N_2, N_4	N_2, N_3	N_1, N_4	N_1, N_3	N_1, N_2
7	(1)	75	75	75	75	80	75	80	80	75	80
	(2)	N_8, N_9	N_6, N_7	N_5, N_7	N_5, N_6	N_3, N_4	N_2, N_4	N_2, N_3	N_1, N_4	N_1, N_3	N_1, N_2

Таблица 5. **Зависимость числа образующих векторов ошибок и основных $N_о$, дополняющих $N_д$ норм достаточных для идентификации, от кратности ошибок при трех компонентах** $S_i, S_j, S_z = 0$

Синдром $S_{i,j,z} = 0$ / Крат-ность t	Число образующих векторов ошибок (1) / Идентификационные параметры (2)	$S_1 = 0$ $S_2 = 0$ $S_3 = 0$	$S_1 = 0$ $S_2 = 0$ $S_4 = 0$	$S_1 = 0$ $S_2 = 0$ $S_5 = 0$	$S_1 = 0$ $S_3 = 0$ $S_4 = 0$	$S_1 = 0$ $S_4 = 0$ $S_5 = 0$	$S_2 = 0$ $S_3 = 0$ $S_4 = 0$	$S_2 = 0$ $S_3 = 0$ $S_5 = 0$	$S_3 = 0$ $S_4 = 0$ $S_5 = 0$
5	(1)						1		
	(2)								
6	(1)		1					1	1
	(2)		N_9					N_3	N_1
7	(1)	5		5	5	5			
	(2)	N_{10}		N_8	N_7	N_5			

Заключение

Проведенный анализ и вычислительный эксперимент по определению достаточного числа норм при норменном декодировании БЧХ-кодов показал, что для идентификации всех образующих векторов ошибок следует все множество норм разбить на два подмножества основных и зависимых норм, вычленив из последних дополняющие к основным нормы, для которых отдельные компоненты синдрома равны нулю. Установлено, что это приводит к более чем пятикратному уменьшению числа норм, анализируемых селектором при коррекции семикратных ошибок БЧХ-кодами, а также к получению и «хороших» БЧХ-кодов с малой избыточностью.

IDENTIFICATION OF ERRORS WITH BCH CODES USING BASICS AND COMPLEMENTARY NORMS OF SYNDROMES

V.K. KONOPELKO, D.N. HOANG

Abstract

The complexity of the norm decoding is exanimated. The results of computational experiments in the norm decoding for BCH codes are presented. Analysis of the results shows that part of the norm instead the whole norm of the syndrome can be used for the identification of multiple errors patterns. Properties of norms of syndrome for BCH codes are identified. Identification based on the combined use of main and supplementary norms if the value of the first component of the syndrome is zero are proposed.

Список литературы

1. *Колесник. В.Д, Мирончиков Е.Т.* Декодирование циклических кодов. М.,1968.
2. *Питерсон У., Уэлдон Э.* Коды, исправляющие ошибки. М., 1976.
3. *Конопелько В.К., Липницкий В.А.* Теория норм синдромов и перестановочное декодирование помехоустойчивых кодов. Минск, 2004.
4. *Липницкий В.А., Конопелько В.К.* Норменное декодирование помехоустойчивых кодов и алгебраические уравнения. Минск, 2007.