Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет доуниверситетской подготовки и профессиональной ориентации

Подготовительное отделение

И. М. Бурлуцкая

МАТЕМАТИКА

Пособие для иностранных слушателей
подготовительного отделения

В 2-х частях

Часть 2

Минск БГУИР 2008

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1 я73
Б 91

Р е ц е н з е н т
доц. кафедры высшей математики БГУИР,
канд. физ.-мат. наук О. Ф. Борисенко

Бурлуцкая, И. М.

Б 91 Математика : пособие для иностранных слушателей подготовительного отделения. В 2 ч. Ч 2 / И. М. Бурлуцкая. – Минск : БГУИР, 2008. – 56 с. : ил.

ISBN 978-985-488-331-1 (ч. 2)

Пособие рассчитано на иностранных слушателей подготовительного отделения. Язык пособия адаптирован к уровню владения слушателями русским языком.

Каждый раздел включает теоретический материал и примеры применения теоретических знаний, а также упражнения для самостоятельного выполнения и ответы к ним.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1 я73

Часть 1 издана в БГУИР в 2007 г.

ISBN 978-985-488-331-1 (ч. 2)
ISBN 978-985-488-211-6

ЗАНЯТИЕ 1

Одночлен, многочлен. Действия над многочленами. Формулы сокращенного умножения

1. Одночлен, многочлен

Определение. Одночленом называется произведение числа, переменных, которые обозначаются маленькими латинскими буквами (a, b, c, d ...), и степеней переменных с натуральными показателями.

Пример. $8a^2b$, $-2x^3yz^2$, $\frac{1}{2}bc$.

Одночлены, которые равны или отличаются только числовым множителем, называются **подобными одночленами**.

Числовой множитель одночлена называется **коэффициентом**.

Определение. Алгебраическая сумма одночленов называется **многочленом**.

2. Действия над многочленами

1. Сложение многочленов

Пример.

Найти сумму многочленов $5a^3-3a^2+a-3$ и $3a^3+5a^2+5$. Запишем все члены обоих многочленов с их знаками: $5a^3-3a^2+a-3+3a^3+5a^2+5$. Одночлены $5a^3$ и $3a^3$, $-3a^2$ и $5a^2$, -3 и $+5$ – подобные.

Привести подобные – это значит сложить коэффициенты подобных одночленов, при этом неизвестные и их степени не изменяются.

Результат сложения многочленов равен $8a^3+2a^2+a+2$.

2. Вычитание многочленов

Чтобы вычесть многочлены, нужно прибавить к первому многочлену многочлен, противоположный вычитаемому.

Пример.

$$\left(2x^3+2x^2-x+5\right)-\left(3x^3-6x^2-8\right)=2x^3+2x^2-x+5-3x^3+6x^2+8=$$
$$=-x^3+8x^2-x+13.$$

3. Умножение многочленов

Чтобы умножить многочлены, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

Пример.

$$\left(5x^2y+3xy-2y^2\right)\left(x^2+2x-y\right)=5x^2y\cdot x^2+10x^2y\cdot x-5x^2y\cdot y+3xy\cdot x^2+$$
$$+6xy\cdot x-3xy\cdot y-2y^2\cdot x^2-4y^2\cdot x+2y^2\cdot y.$$

Одночлены, которые мы получили, записаны не в стандартном виде, так как переменные в них встречаются не один раз. Чтобы привести одночлен к стандартному виду, нужно перемножить степени с одинаковым основанием.

Получим следующую алгебраическую сумму:

$$5x^4y+10x^3y-5x^2y^2+3x^3y+6x^2y-3xy^2-2x^2y^2-4xy^2+2y^3.$$

Приведем подобные и получим многочлен стандартного вида:

$$5x^4y+13x^3y-7x^2y^2+6x^2y-7xy^2+2y^3.$$

3. Формулы сокращенного умножения

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ – это квадрат двучлена, или полный квадрат суммы. Читаем формулу так: квадрат суммы двух переменных равен квадрату первого слагаемого плюс удвоенное произведение первого на второе, плюс квадрат второго слагаемого.

2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ – это полный квадрат разности (или квадрат разности).

3) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ – разность квадратов. Читаем так: произведение суммы двух переменных на их разность равно разности квадратов этих выражений.

4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ – это куб суммы двух переменных. Читаем так: куб суммы двух переменных равен кубу первого слагаемого плюс утроенное произведение квадрата первого на второе, плюс утроенное произведение первого на квадрат второго, плюс куб второго слагаемого.

5) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ – куб разности двух переменных.

6) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ – сумма кубов двух переменных. Читаем так: сумма кубов двух переменных равна произведению суммы этих переменных на неполный квадрат их разности. Выражение $a^2 - ab + b^2$ – это неполный квадрат разности.

7) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ – это разность кубов двух переменных. Читаем так: разность кубов двух выражений равна произведению разности этих переменных на неполный квадрат их суммы ($a^2 + ab + b^2$ – неполный квадрат суммы).

Чтобы возвести в степень $n \geq 2$ двучлен, можно использовать треугольник Паскаля (рис. 1). Каждая строка треугольника образуется по следующему правилу: по краям каждой строки стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух стоящих над ним чисел предыдущей строки. Именно в такой форме треугольник Паскаля приведен в «Трактате об арифметическом треугольнике», опубликованном в 1665 г.

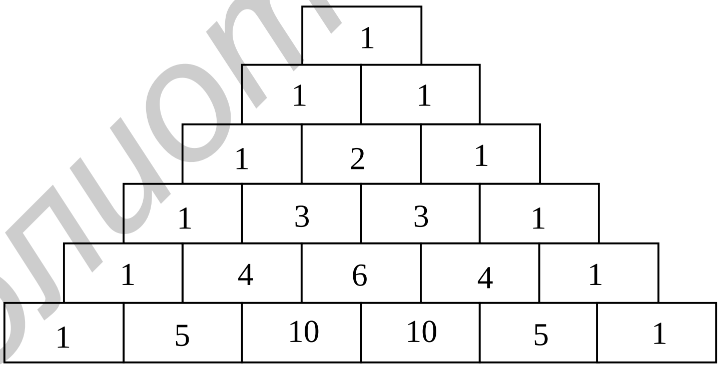


Рис. 1. Треугольник Паскаля

4. Разложение многочленов на множители

1) Рассмотрим многочлен $15x^2y - 3xy^2 - 9xy$. Его одночлены имеют одинаковые множители, которые называются общими множителями. Общий множитель для данных одночленов $3xy$. Вынесем общий множитель за скобки, а

каждый одночлен разделим на $3xy$: $15x^2y - 3xy^2 - 9xy = 3xy(5x - y - 3)$. Таким образом, многочлен записан в виде произведения, т.е. разложен на множители.

2) $16a^2 - 25 = (4a)^2 - 5^2 = (4a - 5)(4a + 5)$. Данный многочлен разложили на множители с помощью формулы разности квадратов: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

3) $27x^3 - 8 = (3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$. При разложении этого многочлена использовали формулу разности кубов: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

4) $9x^2 + 12x + 4 = (3x + 2)^2$. При разложении применили формулу: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

При разложении многочленов на множители используются формулы сокращенного умножения.

5) $ax - 3a + bx - 3b$ – для многочлена данного вида используем способ группировки: $(ax - 3a) + (bx - 3b) = a(x - 3) + b(x - 3) = (a + b)(x - 3)$.

Чтобы разложить многочлен на множители, используем:

- вынесение общего множителя за скобки;
- формулы сокращенного умножения;
- способ группировки.

Упражнения

1. Привести подобные:

а) $2a^3b^2 - 3a^2b - a^3b^2 + 5ab^2 + a^2b$;

б) $x^2y^2 - 15xy + 8 - 3x^2y^2 + xy$.

2. Запишите многочлен в стандартном виде:

а) $b^2 \cdot b - 2b + 3b \cdot b^2 - 3 + 1$;

б) $1 + 2x \cdot x^2 - 3 - 2x + x \cdot x \cdot x$.

3. Выполните действия:

а) $(6x^3 + 2x^2y - 8y^3) + (7x^2y - 3xy^2 + 2y^2) - (4x^3 - x^2y - 5xy^2 + y^3)$;

б) $(2a^3b + 6ab^3) - (9a^3b + 3ab^3 - 4a^3b)$;

в) $(1{,}6a^3c^2+2{,}4a^2-8c^2)(-5a^2c^3)$;

г) $(3x-2y)(4-x^2)$;

д) $(y^3-3y^2-3y+1)(y^2-2y-1)$;

е) $(2n-3)(4-n)+(2n-5)(n-3)$.

4. Разложить на множители многочлены:

а) a^2x-a^5x;

б) $a^2+ab-ac+a$;

в) $6a^3b^3-18a^4b^3$;

г) $ax-2b-a+2bx$;

д) $3c^2+15ac-2c-10a$;

е) $9x^2-30xy+25y^2$;

ж) $8m^6+1$;

з) $0{,}49-a^2x^4$;

и) x^2-y^2+x+y;

к) $c^2-4c+4-9x^2$;

л) $3x^3-81y^3$;

м) $4+0{,}25x^2-2x$;

н) c^4+4;

о) x^4+x^2+1.

5. Представить в виде многочлена:

а) $(\sqrt{6}+y)(y-\sqrt{6})$;

б) $(c+2)(c^2-2c+4)$;

в) $(a^2+5b^2)^3$;

г) $(5+3x^2)^2$;

д) $\left(\frac{2}{3}ab^3-\frac{3}{4}c\right)^2$;

е) $(1{,}6x^2-0{,}2a^3)(1{,}6x^2+0{,}2a^3)$;

ж) $(5x^2y-3z^4)(5x^2y+3z^4)+(5x^2y+3z^4)^2$.

Ответы

1. а) $a^3b^2-2a^2b+5ab^2$; б) $-2x^2y^2-14xy+8$.

2. а) $4b^3-2b-2$; б) $3x^3-2x-2$.

3. а) $2x^3+10x^2y+2xy^2-9y^3+2y^2$;

б) $-3a^3b+3ab^3$;

в) $-8a^5c^5-12a^4c^3+40a^2c^5$;

г) $2x^2y-3x^3-8y+12x$;

д) $y^5-5y^4+2y^3+10y^2+y-1$;

е) 3.

4. а) $a^2x(1-a)(1+a+a^2)$; е) $(3x-5y)^2$; л) $3(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$;

б) $a(a+b+1-c)$; ж) $(2m^2+1)(4m^4-2m^2+1)$; м) $(0{,}5x-2)^2$;

в) $6a^3b^3(1-3a)$; з) $(0{,}7-ax^2)(0{,}7+ax^2)$; н) $(c^2-2c+2)(c^2+2c+2)$;

г) $(x-1)(a+2b)$; и) $(x+y)(x-y+1)$; о) $(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

д) $(c+5a)(3c-2)$; к) $(c-2-3x)(c-2+3x)$;

5. а) y^2-6; д) $\frac{4}{9}a^2b^6-ab^3c+\frac{9}{16}c^2$;

б) c^3+8; е) $2{,}56x^4-0{,}04a^6$;

в) $a^6+15a^4b^2+75a^2b^4+125b^6$; ж) $50x^4y^2+30x^2yz^4$.

г) $25+30x^2+9x^4$;

ЗАНЯТИЕ 2

Многочлен от одной переменной. Деление многочленов от одной переменной. Теорема Безу. Преобразование алгебраических выражений

1. Многочлен от одной переменной

Рассмотрим многочлен $5x^3-3x^2+x-8$ – это многочлен от одной переменной x.

Определение. Многочленом от одной переменной x степени n называют выражение вида $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, где a_n, a_{n-1} … a_1, a_0 – любые числа, которые называются коэффициентами многочлена. a_n – натуральное число, его называют старшим коэффициентом многочлена $P_n(x)$. Многочлен со старшим коэффициентом, равным 1 ($a_n=1$), называют приведенным многочленом.

2. Деление многочленов от одной переменной

Определение. Чтобы разделить многочлен $P_n(x)$ на многочлен $M_k(x)$, нужно найти такие многочлены $Q_m(x)$ и $R_s(x)$, чтобы выполнялось равенство $P_n(x)=M_k(x)\cdot Q_m(x)+R_s(x)$.

$P_n(x)$ – многочлен делимое, $M_k(x)$ – многочлен делитель, $Q_m(x)$ – многочлен частное, $R_s(x)$ – многочлен остаток.

Для любых двух многочленов $P_n(x)$ и $M_k(x)$ существует одно единственное равенство $P_n(x)=M_k(x)\cdot Q_m(x)+R_s(x)$.

Если вместо x подставить значение b, то получим число $P_n(b)$, которое называют значением многочлена $P_n(x)$ при $x=b$, т.е. $P_n(b)=a_nb^n+$ $+a_{n-1}b^{n-1}+\ldots+a_1b+a_0$.

Число b называют корнем многочлена, если $P_n(b)=0$.

3. Теорема Безу

Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $(x-b)$ равен значению многочлена при $x=b$, то есть $R=P_n(b)$.

Следствие. Если при делении $P_n(x)$ на двучлен $(x-b)$ остаток $R=0$, то число b – корень многочлена $P_n(x)$.

Теорема. Если многочлен $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ с целыми коэффициентами имеет рациональные корни, то их можно найти среди чисел вида $\frac{m}{k}$, где m – целые делители a_0, k – натуральные делители a_n.

Пример.

Найдите корни многочлена $P_4(x)=2x^4-x^3-6x^2+7x-2$.

$m=\pm1;\ \pm2$, $k=\pm1;\ \pm2$. Значит, рациональные корни многочлена могут быть среди чисел ±1, ±2, $\pm\frac{1}{2}$. Пусть $x=-1$, тогда $P_4(-1)=-12\neq0$, $x=-1$ – не является корнем уравнения. Пусть $x=1$, $P_4(1)=0$, значит $x=1$ – корень уравнения. Разделим многочлен $P_4(x)$ на $(x-1)$. Деление выполняется «под уголок»:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} 2x^4-x^3-6x^2+7x-2 \\ 2x^4-2x^3 \end{array} & \begin{array}{l} x-1 \\ \hline 2x^3+x^2-5x+2 \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{r} x^3-6x^2+7x-2 \\ x^3-x^2 \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{r} -5x^2+7x-2 \\ -5x^2+5x \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{r} 2x-2 \\ 2x-2 \end{array} & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Остальные корни многочлена будем искать как корни $P_3(x)=2x^3+x^2-5x+2$. Корнями этого многочлена могут быть числа ± 2, $\pm\frac{1}{2}$, 1. Пусть $x=1$, $P_3(1)=0$, т.е. $x=1$ – корень многочлена $P_3(x)$. Разделим $P_3(x)$ на $(x-1)$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} 2x^3+x^2-5x+2 \\ 2x^3-2x^2 \end{array} & \begin{array}{l} x-1 \\ \hline 2x^2+3x-2 \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{r} 3x^2-5x+2 \\ 3x^2-3x \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{r} -2x+2 \\ -2x+2 \end{array} & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Многочлен $P_2(x)=2x^2+3x-2$ – это квадратный трехчлен. Корни $P_2(x)$ можно найти по известной формуле или так же, как и корни многочленов $P_4(x)$, $P_3(x)$. Корнями многочлена $P_2(x)$ являются числа -2 и $\frac{1}{2}$.

После нахождения корней можно разложить многочлен на множители.

$P_n(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

Для многочлена, который рассмотрен в примере, разложение будет таким: $P_4(x)=(x-1)^2(x+2)(2x-1)$. $x=1$ для многочлена $P_4(x)$ – это корень второй кратности.

4. Деление многочленов

Деление многочлена на многочлен выполняется «под уголок», если степень многочлена делимого не меньше (больше или равна) степени многочлена делителя.

Пример.

Выполнить деление $\left(3a^3b^2-9a^2b^3+2a^2b^2-11ab^3+15b^4\right):\left(3a^2b+2ab-5b^2\right)$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} 3a^3b^2-9a^2b^3+2a^2b^2-11ab^3+15b^4 \\ 3a^3b^2+2a^2b^2-5ab^3 \end{array} & \underline{3a^2b+2ab-5b^2} \\
\cline{1-1}
-\begin{array}{r} -9a^2b^3-6ab^3+15b^4 \\ -9a^2b^3-6ab^3+15b^4 \end{array} & ab-3b^2 \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

5. Преобразование алгебраических выражений

● <u>Найти сумму дробей</u>: $\dfrac{a^2}{(a-b)^2}+\dfrac{b^2-2ab}{(a-b)^2}=\dfrac{a^2+b^2-2ab}{(a-b)^2}=\dfrac{(a-b)^2}{(a-b)^2}=1.$

Чтобы сложить (вычесть) алгебраические дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить (вычесть) числители дробей, а знаменатель оставить прежним.

● <u>Найти сумму дробей</u>: $\dfrac{9}{x^3-9x}+\dfrac{1}{x+3}$.

Для того чтобы найти сумму (разность) дробей с разными знаменателями, надо: 1) разложить знаменатели на множители; 2) найти общий знаменатель, который равен произведению всех множителей из разложений знаменателей без повторений; 3) найти дополнительный множитель к каждой из дробей и умножить на него числитель и знаменатель; 4) сложить (вычесть) дроби с общим знаменателем.

Выполним сложение: $\frac{9}{x^3-9x}+\frac{1}{x+3}=\frac{9}{x(x^2-9)}+\frac{1}{x+3}=\frac{9}{x(x+3)(x-3)}+$

$+\frac{1}{x+3}=\frac{9}{x(x+3)(x-3)}+\frac{1\cdot x(x-3)}{x(x+3)(x-3)}=\frac{9+x^2-3x}{x^3-9x}.$

● <u>Умножить дроби</u>: $\frac{x^2-5x}{y}\cdot\frac{y^2}{x^2-25}$.

При умножении алгебраических дробей числитель умножаем на числитель и записываем результат действия в числитель произведения; знаменатель – на знаменатель и результат будет знаменателем произведения. При умножении дроби сокращаем. Для этого раскладываем выражения, которые записаны в числителях и знаменателях сомножителей, на множители.

Выполним умножение: $\frac{x^2-5x}{y}\cdot\frac{y^2}{x^2-25}=\frac{x(x-5)}{y}\cdot\frac{y^2}{(x-5)(x+5)}=\frac{xy}{x+5}$.

● <u>Чтобы разделить алгебраические дроби, нужно делимое умножить на дробь, обратную делителю.</u>

Пример.

$$\frac{m^2}{m^2-49}:\frac{m-2}{m^2+7m}=\frac{m^2}{m^2-49}\cdot\frac{m^2+7m}{m-2}=\frac{m^2}{(m-7)(m+7)}\cdot\frac{m(m+7)}{m-2}=\frac{m^3}{(m-7)(m-2)}=$$
$$=\frac{m^3}{m^2-9m+14}.$$

Упражнения

1. Найти частное и остаток от деления $P_4(x)=5x^4-2x^3+3x^2-x+1$ на $Q_2(x)=x^2-2x+5$.

2. Найти остаток от деления многочлена $3x^4-2x^2+4$ на двучлен: а) $x-2$; б) $x+1$.

3. При каком значении a многочлен $P_3(x)=2x^3-3x^2+ax+7$ разделится без остатка (нацело) на двучлен $x+1$?

4. Разложить на множители многочлен $P_3(x)=2x^3-3x^2-8x-3$.

5. Упростить выражения:

а) $\dfrac{2}{a-b}-\dfrac{2}{a+b}-\dfrac{4}{b^2-a^2}$;

б) $\dfrac{m^2-n^2}{m^2}:\left(m^2+mn\right)$;

в) $\dfrac{2x^2-2y^2}{x}\cdot\dfrac{4x}{x-y}-\dfrac{16xy}{x+y}$;

г) $\left(m+n-\dfrac{4mn}{m+n}\right):\left(\dfrac{m}{m+n}-\dfrac{n}{n-m}-\dfrac{2mn}{m^2-n^2}\right)$;

д) $\dfrac{a^3+b^3}{a+b}:\left(a^2-b^2\right)+\dfrac{2b}{a+b}-\dfrac{ab}{a^2-b^2}$;

е) $\dfrac{\dfrac{a-b}{2a-b}-\dfrac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{\left(4b^4+4ab^2+a^2\right):\left(2b^2+a\right)}\cdot\left(b^2+b+ab+a\right)$;

ж) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$;

з) $\left(2-x+4x^2+\dfrac{5x^2-6x+3}{x-1}\right)\left(2x+1+\dfrac{2x}{x-1}\right)$;

и) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}\right)^2+\left(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}\right)^2}{2(m-n)}:\dfrac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-3\sqrt{mn}$.

6. Упростить выражения и найти их значения:

а) $\left(\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}\right):\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}\right)\right):\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$, где $a=1\dfrac{33}{40}$; $b=0{,}625$; $c=3{,}2$.

б) $\left(x^2+2x-\dfrac{11x-2}{3x+1}\right):\left(x+1-\dfrac{2x^2+x+2}{3x+1}\right)$, где $x=7,(3)$.

Ответы

1. $5x^2+8x-6$, $-53x+31$. *2.* а) 44; б) 5. *3.* 2. *4.* $(2x+1)(x+1)(x-3)$.

5. а) $\dfrac{4(b+1)}{a^2-b^2}$; б) $\dfrac{m-n}{m^3}$; в) $\dfrac{8\left(x^2+y^2\right)}{x+y}$; г) $m-n$; д) 1; е) $\dfrac{b+1}{b-2a}$;

ж) 1;   з) $2x-1$;   и) $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^2$.

6. а) 1;   б) 20.

ЗАНЯТИЕ 3

Сложные радикалы. Иррациональность в знаменателе

1. Сложные радикалы

Радикалы вида $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$, $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$, $\sqrt[3]{5+\sqrt{2}}$ называются **сложными радикалами**.

Рассмотрим выражение $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$. Под квадратным корнем сумма $4+2\sqrt{3}$, которая является квадратом суммы чисел $\sqrt{3}$ и 1, т.е. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=$ $=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}=\left|\sqrt{3}+1\right|=\sqrt{3}+1$.

Пример.

Найти значение выражения $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$.

Обозначим сумму буквой x, т.е. $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$. Возведем в куб данное выражение с помощью формулы $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

$9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}+3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)=x^3$;

$18+3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\cdot x=x^3$;

$18+3x=x^3$;

$x^3-3x-18=0$.

Найдем корень данного уравнения среди чисел ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18. $x=3$, $27-9-18=0$. Значение выражения равно 3.

2. Иррациональность в знаменателе

● Знаменатель дроби $\frac{2}{\sqrt{5}-2}$ имеет иррациональность (т.е. иррациональное число $\sqrt{5}$). Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{5}+2$, которое является сопряженным выражению $\sqrt{5}-2$.

$$\frac{2\left(\sqrt{5}+2\right)}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}=\frac{2\left(\sqrt{5}+2\right)}{5-4}=2\sqrt{5}+4.$$

Эта операция называется освобождением от иррациональности в знаменателе.

● Рассмотрим несколько примеров, в которых нужно освободится от иррациональности в знаменателе:

1) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}=\frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5^2}}=\frac{3\sqrt[3]{25}}{5}.$

2) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}-1}=\frac{4\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1\right)}=\frac{4\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1\right)}{2-1}=4\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right).$

В этом примере использовалась формула разности кубов $\left(a^3-b^3\right)$.

3) $\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}{\left(3-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=$

$$=\frac{9+2+3+6\sqrt{2}+6\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{9-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}=\frac{14+6\sqrt{2}+6\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{9-2-2\sqrt{6}-3}=$$

$$=\frac{14+6\sqrt{2}+6\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{4-2\sqrt{6}}=\frac{2\left(7+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)}{2\left(2-\sqrt{6}\right)}=$$

$$=\frac{\left(7+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\left(2+\sqrt{6}\right)}{\left(2-\sqrt{6}\right)\left(2+\sqrt{6}\right)}=\frac{14+6\sqrt{2}+6\sqrt{3}+2\sqrt{6}+7\sqrt{6}+3\sqrt{12}+3\sqrt{18}+6}{-2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(20+9\sqrt{6}+6\sqrt{2}+6\sqrt{3}+6\sqrt{3}+9\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(20+9\sqrt{6}+15\sqrt{2}+12\sqrt{3}\right).$$

Упражнения

1. Найти значения выражений:

а) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$;

б) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;

в) $\sqrt{67-42\sqrt{2}}+\sqrt{19-6\sqrt{12}}$;

г) $\sqrt{\left|20\sqrt{7}-53\right|}-\sqrt{\left|20\sqrt{7}+53\right|}$;

д) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$;

е) $\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{8-\sqrt{48}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$;

ж) $\dfrac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$;

з) $\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}$.

2. Освободиться от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{13}-\sqrt[4]{9}}$;

б) $\dfrac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

3. Выполнить действия:

а) $\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$;

б) $\dfrac{4+\sqrt{5}}{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}$;

в) $\left(\dfrac{15}{\sqrt{6}+1}+\dfrac{4}{\sqrt{6}-2}-\dfrac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{6}+11\right)$;

г) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}-4\sqrt{5}+a}$.

4. Упростить выражения:

а) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}\right):\left(1+\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}\right)$;

б) $\dfrac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}$.

5. Найти a^3, если $a=\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2......}}}}$.

6. Найти значение выражения $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....}}}$.

Ответы

1. а) 2; б) $2+\sqrt{2}$; в) 6; г) -10; д) 1; е) 2; ж) $-\sqrt{2}$; з)2.

2. а) $\left(\sqrt[4]{13}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{13}+3\right)$; б) $\dfrac{\left(2\sqrt{6}+1\right)\left(3-4\sqrt{2}\right)}{23}$.

3. а) 0; б) 1; в) -115; г) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{a}}$.

4. а) $\sqrt{a-1}$; б) $\frac{1}{\sqrt{b+2}}$. *5.* 18. *6.* 2.

ЗАНЯТИЕ 4

Понятие функции. Способы задания функции. Схема исследования функции

1. Понятие функции

Пусть X и Y – некоторые множества.

Определение. Функцией называется соответствие f между множествами X и Y, при котором каждому $x \in X$ (соответствует) единственный элемент $y \in Y$.

Записываем так: $y = f(x)$.

Множество X называют областью определения функции и обозначают $D(f)$. Множество Y – областью, или множеством значений функции и обозначают $E(f)$. Переменную $x \in D(f)$ называют независимой переменной, или аргументом. Переменную $y \in E(f)$ называют зависимой переменной, или функцией.

2. Способы задания функции

1. Аналитический способ

Пусть $y = 3x^2 + 2$ – эта функция задана формулой.

Если функция задана формулой, то она задана аналитическим способом. Областью определения функции, которая задана формулой, является множество всех действительных чисел, при которых существуют действительные значения функции $f(x)$.

Пример.

Найти $D(f)$ функции $y = \dfrac{5x-2}{x+3}$.

Область определения этой функции – все действительные числа, кроме $x = -3$, т.е. $D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

2. Табличный способ

Рассмотрим таблицу, в которую записывали температуру воздуха в течение дня (табл. 1).

Таблица 1

Время суток	6:00	10:00	14:00	18:00	22:00	24:00
Температура	$-5°$	$-3°$	$-1°$	$-2°$	$-6°$	$-8°$

Эта таблица – пример табличного задания функции.

3. Графический способ задания функции – это график, т.е. изображение функции на координатной плоскости. **Система координат** – это две взаимно перпендикулярные прямые OX (ось абсцисс) и OY (ось ординат), у которых указаны положительное направление (с помощью стрелок), начало отсчета и единичные отрезки на осях. Задание единичных отрезков называют также заданием масштаба.

Координатная плоскость, которая задается таким образом, является прямоугольной декартовой системой координат (рис. 2).

Определение. Графиком функции называется множество точек координатной плоскости.

Каждая точка имеет две координаты. Обозначаем так: $(x; y)$ или $(x; f(x))$.

Примеры рассмотрим на рис. 3 и 4.

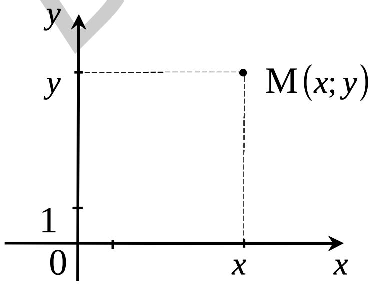


Рис. 2

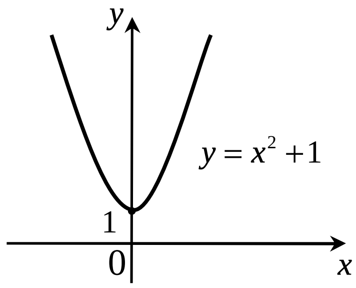


Рис. 3

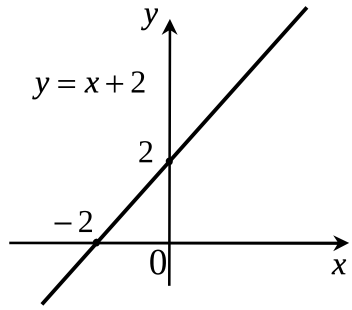


Рис. 4

Прочитайте текст

Рене Декарт (1596 – 1650) – знаменитый математик, физик, биолог. Цель его научных исследований – аналитический метод познания мира. Особое внимание Декарт уделял математике. Главное достижение Декарта как ученого – построение аналитической геометрии, в которой геометрические задачи переводились на язык алгебры при помощи метода координат.

Немалой заслугой Декарта было введение обозначений с помощью латинских букв x, y, z – для неизвестных, a, b, c – для коэффициентов, x^2, y^5, b^7 – для степеней.

Декарт сформулировал основную теорему алгебры: «число корней алгебраического уравнения равно его степени», которая была доказана только в конце XVIII в. К. Ф. Гауссом.

3. Схема исследования функции

1. Ограниченность функции

Определение. Функция $f(x)$ называется ограниченной, если для любого $x \in D(f)$ выполняется неравенство $m \leq f(x) \leq M$.

Можно сказать, что график функции находится в полосе между параллельными прямыми $y = m$ и $y = M$.

Например $y = \sin x$ (рис. 5).

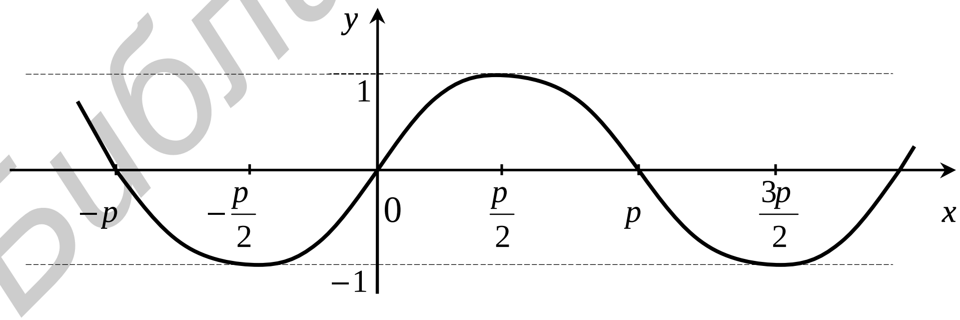


Рис. 5

Рассмотрим функцию $y = -x^2 + 2$. Ее график изображен на рис. 6.

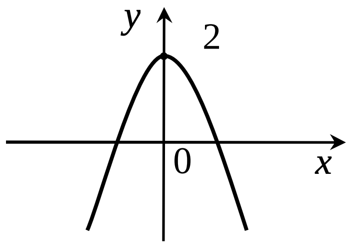


Рис. 6.

Эта функция **ограничена сверху**.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ограниченной сверху, если существует число M такое, что для любого $x \in D(f)$ выполняется неравенство $f(x) \leq M$.

Рассмотрим еще одну функцию: $y = |x|$. График функции на рис. 7.

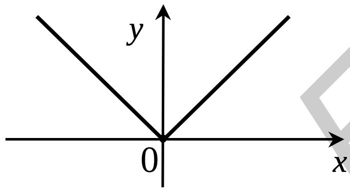


Рис. 7

Эта функция **ограничена снизу**.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ограниченной снизу, если существует число m такое, что для любого $x \in D(f)$ выполняется неравенство $f(x) \geq m$.

2. <u>Монотонность функции</u>

Определение. Функцию $f(x)$ называют возрастающей на числовом промежутке $(a;b)$, если для любых x_1, x_2 $\in (a;b)$, где $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

График возрастающей функции изображен на рис. 8.

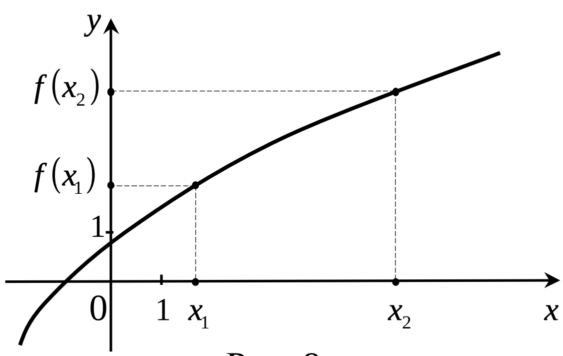


Рис. 8

Определение. Функцию $f(x)$ называют убывающей на числовом промежутке $(a;b)$, если для любых x_1, $x_2 \in (a;b)$, где $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

График убывающей функции изображен на рис. 9.

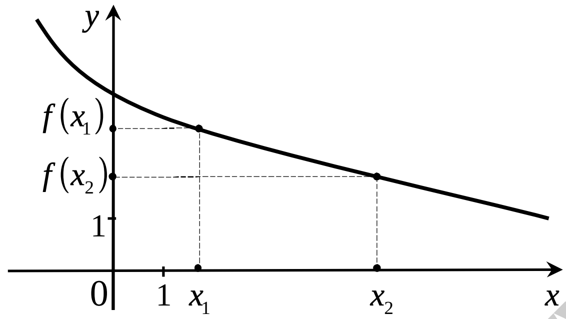


Рис. 9

Функцию, возрастающую или убывающую на всей области определения (на $D(f)$), называют **монотонной**.

3. Четность, нечетность функции

Расмотрим функцию $y = \dfrac{2}{x^2+3}$. Область определения этой функции – любое значение $x \in R$, т.е. $D(f) = R$.

Для функции $y = \sqrt{x^2-4}$ область определения $D(f) = (-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$. $D(f)$ этих функций симметрична точки $O(0;0)$.

Область определения называется симметричной относительно точки $O(0;0)$, если $x \in D(f)$ и $-x \in D(f)$.

Функция $f(x)$ называется четной, если:

а) область ее определения симметрична точке $O(0;0)$;

б) для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат (OY).

Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если:

а) область ее определения симметрична точке $O(0;0)$;

б) для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно точки $O(0;0)$ – начала координат.

Примеры.

1. $y = \dfrac{2}{x+3}$, $D(f) = (-\infty;-3) \cup (-3;+\infty)$. Область определения этой функции несимметрична относительно точки $O(0;0)$. Функция не может быть ни четной, ни нечетной. Такая функция называется функцией общего вида.

2. $y = x^2 + 1$, $D(f) = R$, $y(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1$. Эта функция четная. График ее изображен на рис. 10.

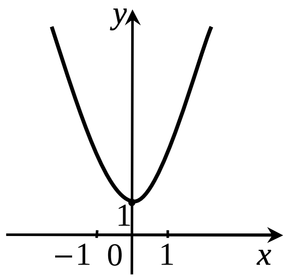


Рис.10

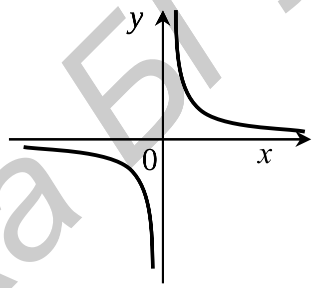


Рис. 11

3. $y = \dfrac{2}{x}$, $D(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, $y(-x) = \dfrac{2}{-x} = -\dfrac{2}{x}$. Функция нечетная, ее график изображен на рис. 11.

4. <u>Периодичность функции</u>

Определение. Функция $y = f(x)$ называется периодичной, если ее область определения симметрична относительно $O(0;0)$ и существует число $T > 0$ такое, что если $x \in D(f)$, то и $(x \pm T) \in D(f)$, и выполняется равенство $f(x) = f(x \pm T)$.

T называют периодом функции $y = f(x)$. Если T – период, то KT, где $K \in Z$ и $K \neq 0$, также период функции.

Наименьший из положительных периодов называют **основным периодом**.

Примером периодической функции является функция $y = \cos x$. Ее основной период $T = 2p$ (рис. 12).

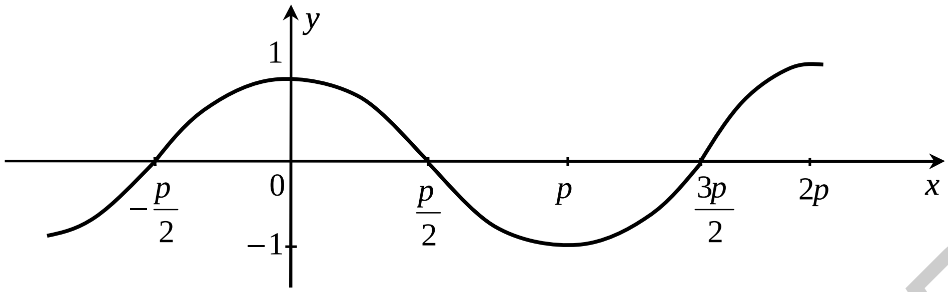


Рис. 12

Определение. Целой частью числа x называют наибольшее целое число, которое не больше (меньше или равно) самого числа x. Обозначение: $[x]$.

Пример.

$[7{,}2] = 7$, $[0{,}7] = 0$, $[-5{,}2] = -6$.

Функцию $y = [x]$ называют функцией целой части числа x, где $x \in R$. $D(y) = R$, $E(y) = Z$. График этой функции изображен на рис. 13.

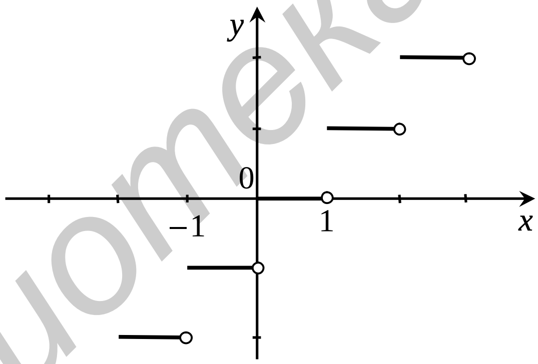


Рис. 13

Определение. Дробной частью числа x называют разность $x - [x]$ и обозначают $\{x\}$. Функция $y = \{x\}$ – функция дробной части числа x, $D(f) = R$, $E(y) = [0;1)$. Эта функция периодична, ее график изображен на рис. 14.

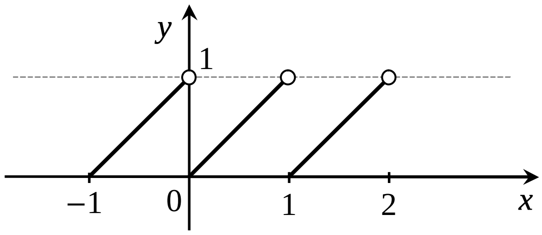


Рис. 14

5. Характерные точки графика функции. Нули функции

Определение. Характерными точками графика функции $y = f(x)$ называют точки пересечения графика функции с осями координат.

Чтобы найти точки пересечения графика с осью абсцисс (с осью OX), надо решить уравнение $f(x) = 0$. Точки вида $(x_i;0)$, где $i = 1,\ 2,\ 3\ldots$, называются нулями функции $y = f(x)$. x_i – корни уравнения.

Чтобы найти точку пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью ординат (с осью OY), надо найти значение $y = f(0)$. Точка $(0; f(0))$ – точка пересечения с OY.

Пример.

Найдем характерные точки для функции $y = x^2 - 4x + 3$. Найдем нули функции: $x^2 - 4x + 3 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Точки пересечения графика с осью OX: $(3;0)$ и $(1;0)$. Пусть $x = 0$, тогда $f(0) = 3$. Точка пересечения графика с осью OY: $(0;3)$. График этой функции изображен на рис.15.

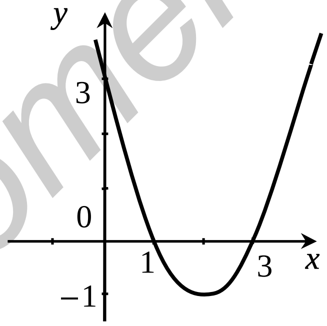


Рис. 15

6. Схема исследования функции

1. $D(f)$.

2. $E(f)$.

3. Характерные точки.

4. Четность, нечетность.

5. Монотонность (возрастание, убывание).

6. Периодичность.

7. График функции.

Упражнения

1. Найти область определения функций:

а) $y=\dfrac{1}{x^4+5}$; в) $y=\sqrt{x+12}-\sqrt{x^2-9}$; д) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$;

б) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x-2}}$; г) $y=\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}}$; е) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$.

2. Исследовать функции на четность:

а) $y=\dfrac{1}{x^3+8}$; г) $y=\dfrac{|x|}{x}+|x|$;

б) $y=\dfrac{2}{x^2-144}$; д) $y=\dfrac{tgx}{|x|}$;

в) $y=\sqrt{4-x}+\sqrt{x+4}$; е) $y=\dfrac{4}{x+8}$.

3. Какие из отношений, изображенных на рис. 16 и 17, являются функциями?

а)

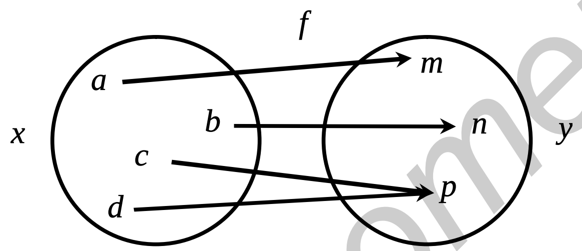


Рис. 16

б)

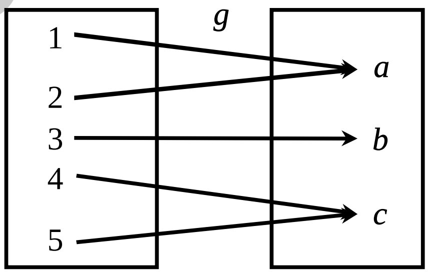


Рис. 17

4. Функции заданы графически, укажите $D(f)$ и $E(f)$ (рис. 18 и 19).

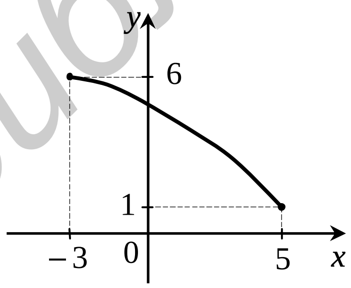


Рис. 18

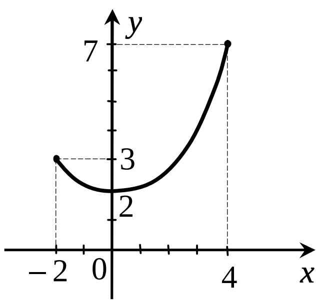


Рис. 19

5. Найти для каждого из чисел целую и дробную части:

а) $-8{,}3$; б) $0{,}2$; в) $4{,}71$; г) $-9{,}1$.

6. Укажите характерные точки для функций:

а) $y = x^2 - 6x + 8$; б) $y = \dfrac{3}{x+1} - 1$.

7. Укажите основной период функции, заданной графически (рис. 20).

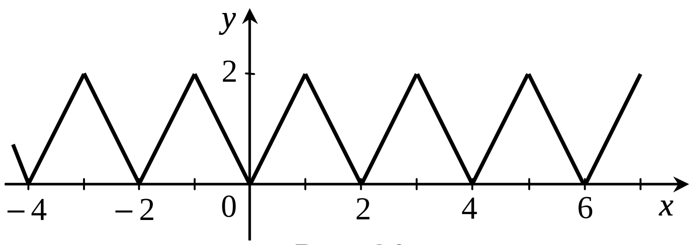


Рис. 20

Ответы

1. а) R; б) $(2;+\infty)$; в) $[-12;-3]\cup[3;+\infty]$; г) $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$; д) $(-\infty;-3)\cup[1;+\infty)$; е) $[1;+\infty)$.

2. а) общего вида; б) четная; в) четная; г) общего вида; д) нечетная; е) общего вида.

3. а) f – не функция; б) g – функция.

4. а) $D(f)=[-3;5]$, $E(f)=[1;6]$; б) $D(f)=[-2;4]$, $E(f)=[2;7]$.

5. а) $[-8{,}3]=-9$, $\{-8{,}3\}=0{,}7$; б) $[0{,}2]=0$, $\{0{,}2\}=0{,}2$; в) $[4{,}71]=4$, $\{4{,}71\}=0{,}71$; г) $[-9{,}1]=-10$, $\{-9{,}1\}=0{,}9$.

6. а) $(4;0)$, $(2;0)$, $(0;8)$; б) $(2;0)$, $(0;2)$.

7. $T=2$.

ЗАНЯТИЕ 5

Прямая пропорциональная зависимость. Линейная функция, ее свойства и график. Обратно пропорциональная зависимость. Функция обратной пропорциональности. Дробно-линейная функция

1. Прямая пропорциональная зависимость

Рассмотрим задачу: два покупателя в магазине приобрели одни и те же конфеты. Первый – 300 граммов, второй – 600 граммов. Во сколько раз больше заплатил второй?

Второй покупатель заплатил в два раза больше. Эта задача – пример прямо пропорциональной зависимости двух величин, веса и стоимости, т.е. во сколько раз больше вес товара, во столько раз больше стоимость покупки.

Прямая пропорциональная зависимость может быть выражена с помощью функции.

Определение. Прямой пропорциональной зависимостью называется функция вида $y = kx$, где $k \neq 0$. Число k называется коэффициентом пропорциональности.

Графиком прямой пропорциональности $y = kx$ является прямая, проходящая через точку $O(0;0)$ – начало координат.

На рис. 21 и 22 изображены графики функции $y = kx$.

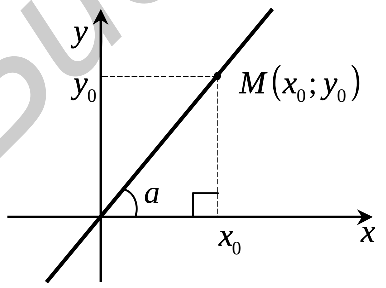


Рис. 21

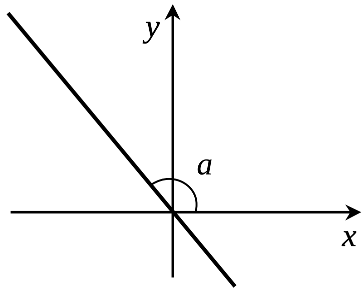


Рис. 22

$y = kx_0$, т.к. $M(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $k = \dfrac{y_0}{x_0} = \mathrm{tg}a$. Если $k > 0$, то $\mathrm{tg}a > 0$, a – острый угол (см. рис. 21). Если $k < 0$, то $\mathrm{tg}a < 0$, a – тупой угол (см. рис. 22).

Коэффициент k называют угловым коэффициентом.

2. Линейная функция, ее свойства и график

Определение. Функция $y = kx + b$, где x и y – переменные, $k, b \in R$, называется линейной.

Построим график функции $y = 2x + 3$. График этой функции – прямая. Чтобы построить прямую, нужно найти координаты двух точек, принадлежащих прямой (через две точки можно провести единственную прямую).

Пусть $x = 0$ (x – независимая переменная, поэтому можно взять любое значение $x \in D(f)$, а $D(f) = R$). $y(0) = 3$. Если $x = -1$, то $y(-1) = 1$.

На координатной плоскости построим точки $A(0;3)$, $B(-1;1)$ и прямую AB, которая является графиком функции $y = 2x + 3$ (рис. 23).

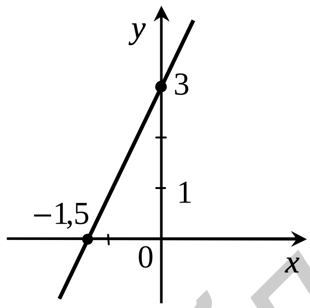


Рис. 23

Исследуем функцию по схеме:

1) $D(f) = R$; 2) $E(f) = R$; 3) характерные точки $(-1{,}5;0)$, $(0;3)$; 4) Функция общего вида; 5) функция возрастающая.

Для данной функции $k = 2$, значит $\mathrm{tg}a = 2$, где a – острый угол.

Если $k < 0$, то график функции будет таким, как на рис. 24. Такая функция – убывающая.

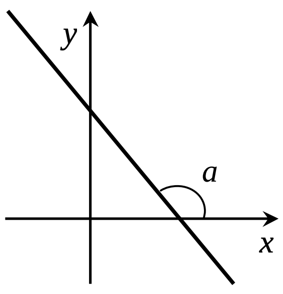


Рис. 24

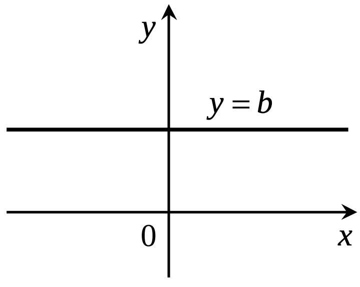


Рис. 25

Рассмотрим функцию $y = kx + b$, при $k = 0$, то есть $y = b$ (рис. 25). Эта функция четная (график симметричен оси OY).

Свойства линейной функции:

1) $D(y) = R$;

2) $E(y) = R$;

3) функция является нечетной, если $b = 0$. Общего вида, если $k \neq 0$, $b \neq 0$. Четной, если $k = 0$;

4) функция возрастает, если $k > 0$. Убывает, если $k < 0$. Постоянна (не возрастает, не убывает), если $k = 0$.

Рассмотрим расположение двух графиков на координатной плоскости, оно зависит от k и b:

а) если даны две функции $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$, где $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$, то графики функций совпадают (рис. 26);

б) если $k_1 = k_2$, а $b_1 \neq b_2$, то графики параллельны (не пересекаются) (рис. 27);

в) если $k_1 \neq k_2$ и $b_1 \neq b_2$, то графики пересекаются (рис. 28).

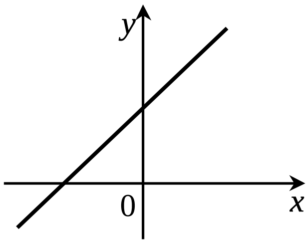


Рис. 26

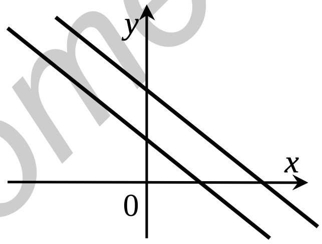


Рис. 27

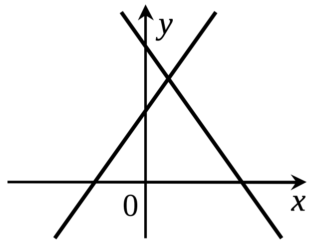


Рис. 28

3. Обратно пропорциональная зависимость

Рассмотрим задачу: Из города А в город В выехал автомобиль со скоростью 80 $^{км}/_{ч}$ и велосипедист, скорость которого 20 $^{км}/_{ч}$. Во сколько раз меньше времени затратит на путь автомобиль?

Автомобиль приедет в город В быстрее, время в пути в четыре раза меньше.

Эта задача показывает обратную зависимость скорости и времени в пути, т.е. во сколько раз больше скорость, во столько раз меньше времени займет путь.

Определение. Функция $y=\frac{k}{x}$, где x и y – переменные, $k\in R$, $k\neq 0$, называется функцией обратной пропорциональности.

Основные свойства функции:

1) $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;

2) $E(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;

3) функция нечетная, график функции симметричен точке $O(0;0)$;

4) если $k>0$ – функция убывающая, если $k<0$ – функция возрастающая;

5) график функции не пересекает оси координат. Прямые $y=0$ (ось OX) и $x=0$ (ось OY) являются асимптотами.

Асимптотами называются прямые, которые не пересекают график функции.

График функции $y=\frac{k}{x}$ называется **гиперболой.** График функции $y=\frac{k}{x}$ для $k>0$ изображен на рис. 29, для $k<0$ – на рис. 30.

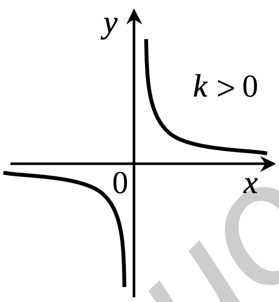


Рис. 29

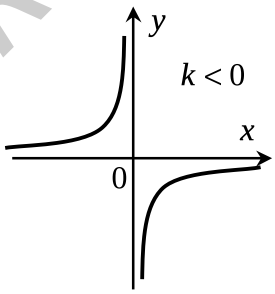


Рис. 30

4. Дробно-линейная функция

Дана функция $y=\frac{3}{x+1}-2$. Область определения этой функции $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$. Область значений $E(y)=(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$. Значит, эта функция не пересекает прямые $x=-1$ (прямая, параллельная оси OY, проходящая через точку $(-1;0)$) и прямую $y=-2$. Эти прямые – асимптоты графика функции $y=\dfrac{3}{x+1}-2$. Графиком функции является гипербола, которая расположена так же, как гипербола $y=\dfrac{k}{x}$, где $k>0$ (рис. 31).

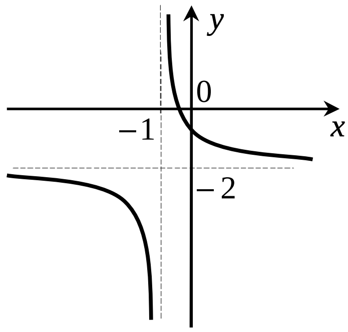


Рис. 31

Функция $y=\dfrac{3}{x+1}-2$ может быть записана так: $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}$. Функция такого вида называется дробно-линейной.

Функцию вида $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $c\neq 0$, $ad-bc\neq 0$, называют **дробно-линейной функцией**.

Преобразуем функцию $y=\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}}=\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{\left(x+\frac{d}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right)}{x+\frac{d}{c}}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$.

Свойства функции:

1) $D(y)=\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)\cup\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$; 2) $E(y)=\left(-\infty;\dfrac{a}{c}\right)\cup\left(\dfrac{a}{c};+\infty\right)$; 3) функция не ограничена; 4) характерные точки $\left(0;\dfrac{b}{d}\right)$, $\left(-\dfrac{b}{a};0\right)$; 5) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ – функция общего вида; если $a=d=0$, то функция нечетная; 6) если $\dfrac{bc-ad}{c^2}>0$, то функция убывающая на $D(y)$. Если $\dfrac{bc-ad}{c^2}<0$, то функция возрастающая на $D(y)$; 7) функция непериодична; 8) график функции – гипербола с асимптотами $y=\dfrac{a}{c}$; $x=-\dfrac{d}{c}$.

Пример.

Построить график функции $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$.

$y=\dfrac{2(x+2)-4+3}{x+2}\Leftrightarrow y=\dfrac{2(x+2)}{x+2}-\dfrac{1}{x+2}=2-\dfrac{1}{x+2}$. Асимптоты для графика $y=2-\dfrac{1}{x+2}$ – прямые $x=-2$ и $y=2$. Расположение гиперболы такое же, как для графика функции $y=-\dfrac{1}{x}$. График функции изображен на рис. 32.

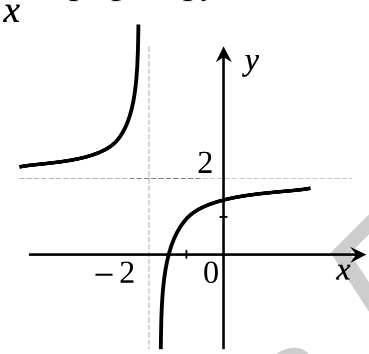


Рис. 32

Упражнения

1. Найдите $\mathrm{tg}\,a$, где a – угол наклона графиков функций:

а) $2x-y=5$; б) $4y-3x+1=0$.

2. Найдите $\mathrm{tg}\,a$ для функций, изображенных на рис. 33 и 34.

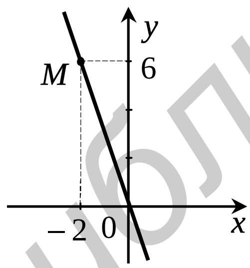
а) 

Рис. 33

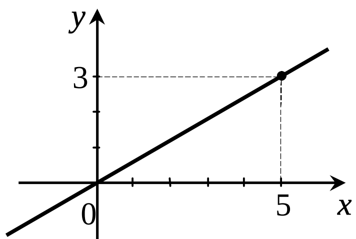
б) 

Рис. 34

3. Принадлежат ли точки $A(-2;-3)$, $B(2;7)$, $C(3;12)$ графику функции $y=5x-3$?

4. Дана функция $y=1-4x$. Найдите:

а) $f(2)$; б) $f(-1)$; в) $f(x+2)-f(x-1)$.

5. Как расположены графики функций $3y-9x=5$ и $6x-2y+1=0$?

6. Найти $D(y)$ и $E(y)$ для функций:

а) $y=\dfrac{3x-1}{x-2}$; б) $y=\dfrac{5-x}{x+5}$; в) $y=\dfrac{x+1}{2x-3}$.

7. Построить и исследовать функции:

а) $y=\dfrac{4x+9}{x+3}$; б) $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$.

8. Для функции $f(x)$, $f(x-1)=2x-1$, $f(g(x))=4x-3$ найти функцию $g(x)$.

9. Для функции $f(x)$, $f(x+1)=3-2x$, $f(g(x))=6x-3$ функцию $g(x)$.

Ответы

1. а) -2; б) $\dfrac{3}{4}$. *2.* а) -3; б) $\dfrac{3}{5}$. *3.* A – не принадлежит, B, C – принадлежат графику. *4.* а) -7; б) 5; в) -12. *5.* Графики параллельны.

6. а) $D(y)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$, $E(y)=(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$;

б) $D(y)=(-\infty;-5)\cup(-5;+\infty)$, $E(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$;

в) $D(y)=(-\infty;1{,}5)\cup(1{,}5;+\infty)$, $E(y)=(-\infty;0{,}5)\cup(0{,}5;+\infty)$.

7. а) см. рис. 35; б) см. рис. 36. *8.* $g(x)=2x-2$. *9.* $g(x)=4-3x$.

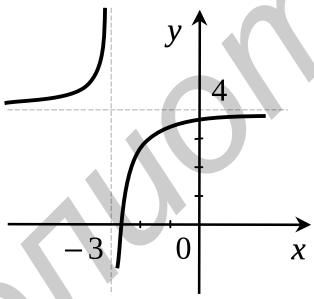


Рис. 35

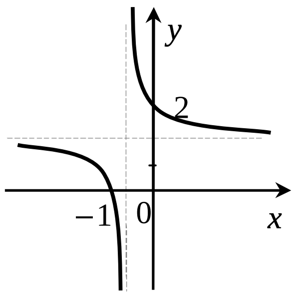


Рис. 36

ЗАНЯТИЕ 6

Квадратная функция

Определение. Функция вида $y=ax^2$, где x и y – переменные, $a\in R$, $a\neq 0$, называется квадратной функцией.

Свойства функции $y = x^2 \quad (a = 1)$:

1) $D(y) = R$;
2) $E(y) = [0;+\infty)$;
3) $(0;0)$ – характерная точка;
4) функция четная, так как $(-x)^2 = x^2$;
5) функция возрастает при $x \in [0;+\infty)$, функция убывает при $x \in (-\infty;0]$;
6) функция не периодическая;
7) функция ограничена снизу, так как: $x^2 \geq 0$;
8) график функции называется параболой (рис. 37).

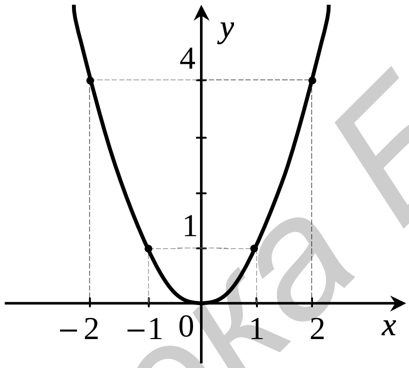


Рис. 37

ЗАНЯТИЕ 7

Степенная функция с натуральным показателем. Функция корня, арифметического корня. Преобразования графиков

1. Степенная функция с натуральным показателем

Функция вида $y = ax^n$, где $a \in R$, $a \neq 0$, $n \in N$, называется **степенной**.

Рассмотрим график функции $y = ax^{2n}$ на примере функции $y = x^4$.

График этой функции называется параболой (рис. 38).

Свойства этой функции сформулируйте самостоятельно!

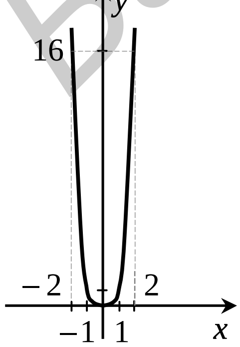


Рис. 38

Построим график $y = x^3$.

График этой функции называется кубической параболой (рис. 39).

Свойства этой функции сформулируйте самостоятельно!

График и свойства функции $y = ax^{2n+1}$ такие же, как для функции $y = x^3$.

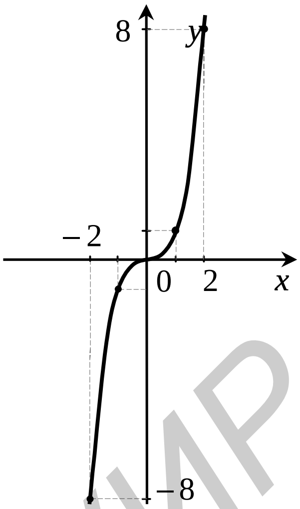


Рис. 39

2. Функции корня, арифметического корня

Рассмотрим графики и свойства функций $y = \sqrt[2n]{x}$ и $y = \sqrt[2n+1]{x}$ на примере функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[3]{x}$. График функции $y = \sqrt{x}$ изображен на рис. 40, а график функции $y = \sqrt[3]{x}$ – на рис. 41.

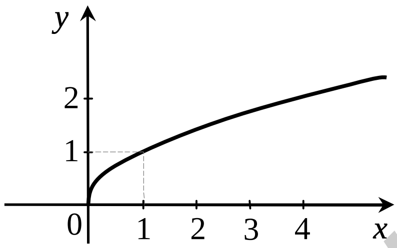


Рис. 40

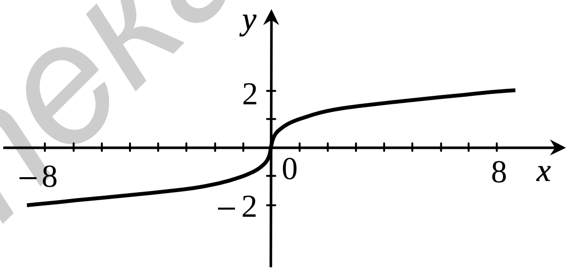


Рис. 41

Свойства функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[3]{x}$ сформулируйте самостоятельно!

3. Преобразования графиков

Дана функция $y = f(x)$. С помощью преобразований графика этой функции можно построить графики других функций.

1) Чтобы построить график $y = f(x) + A$, нужно график $y = f(x)$ перенести параллельно OY на A единиц вверх, если $A > 0$, или на A единиц вниз, если $A < 0$.

Пример.

$y = x^2 + 2$ (см. рис. 42);

2) график функции $y=-f(x)$ получается симметричным отображением $y=f(x)$ относительно OX;

Пример.

$y=-x^2$ (рис. 43);

3) график функции $y=Af(x)$, $(A\neq 0)$ получается растяжением графика $y=f(x)$ вдоль OY в A раз при $|A|>1$ и сжатием вдоль OY в $\frac{1}{|A|}$ раз при $|A|<1$.

Пример.

$y=2\sin x$ и $y=\frac{1}{2}\cos x$ (рис. 44 и 45);

4) чтобы построить график функции $y=f(-x)$, нужно отобразить график $y=f(x)$ симметрично относительно оси OY.

Пример.

$y=\sqrt{-x}$ (рис. 46);

5) график функции $y=f(kx)$ получается сжатием графика функции $y=f(x)$ вдоль оси OX в $|k|$ раз при $|k|>1$ или растяжением вдоль оси OX в $\frac{1}{|k|}$ раз при $|k|<1$.

Пример.

$y=\sin 2x$ (рис. 47);

6) построение графика $y=f(k+b)$ получается переносом графика $y=f(x)$ вдоль OX на $|b|$ при $b<0$ в положительном направлении и при $b>0$ в отрицательном направлении.

Пример.

$y=(x-1)^2$ (рис. 48);

7) график функции $y=|f(x)|$ получается из графика $y=f(x)$ так: часть графика, ниже оси OX, отображаем симметрично относительно OX, а часть графика, выше оси OX, остается без изменений.

Пример.

$y=\left|x^2-6x+8\right|$ (рис. 49);

8) график функции $y=f(|x|)$ получается из графика $y=f(x)$ так: часть графика, слева от оси OY, убираем и отображаем часть графика для $x\geq 0$ симметрично оси OY, часть графика, справа от OY, остается без изменений.

Пример.

$y=x^2-6|x|+8$ (рис. 50).

Рисунки к разделу «Преобразования графиков».

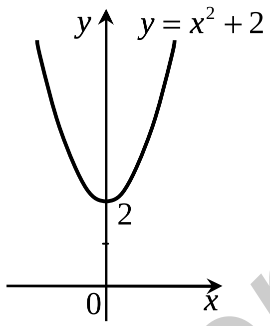


Рис. 42

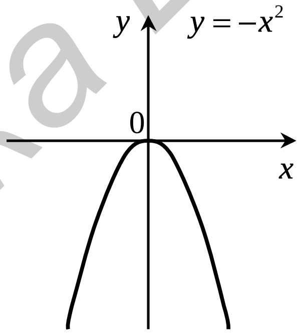


Рис. 43

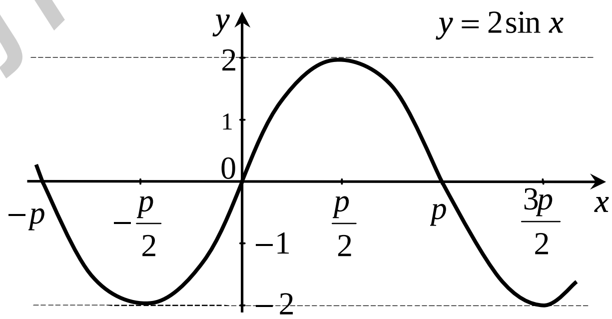


Рис. 44

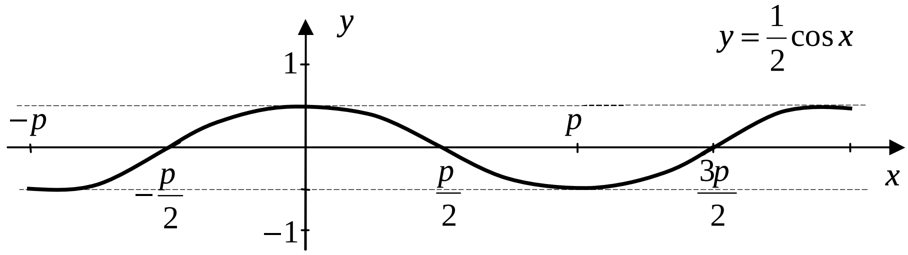


Рис. 45

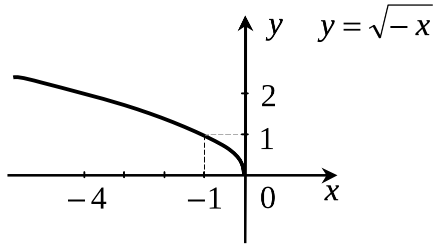


Рис. 46

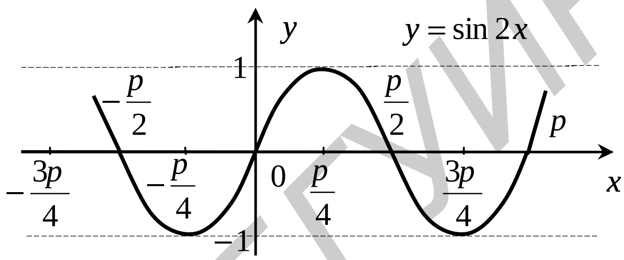


Рис. 47

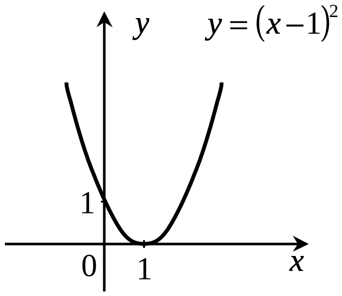


Рис. 48

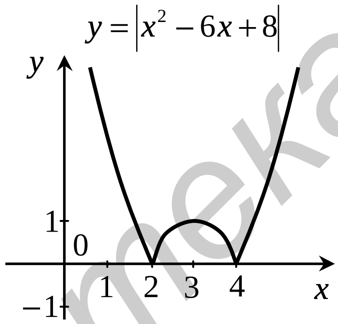


Рис. 49

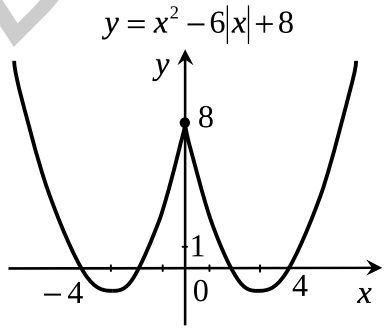


Рис. 50

Упражнения

Построить графики функций:

1. $y=1-|x+1|$;
2. $y=x^2-3$;
3. $y=3|x+2|-1$;
4. $y=-\frac{3}{|x|}$;
5. $y=\frac{3x}{x+5}$;
6. $y=\sqrt{(x-1)^2}$;
7. $y=\left(\sqrt{x-1}\right)^2$;
8. $y=(x-3)^2+2$;
9. $y=-x^3$;
10. $y=(x+1)^4$;
11. $y=\sqrt{x-1}$;
12. $y=-\sqrt{x-1}$;
13. $y=\sqrt{x}+1$;
14. $y=\sqrt{|x|-1}$.

ЗАНЯТИЕ 8

Квадратичная функция. Обратная функция

1. Квадратичная функция

Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где x – переменная; a, b, c – действительные числа, $a \neq 0$, называется **квадратичной функцией**. Многочлен $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$ называют квадратным трехчленом.

Выделим полный квадрат $\left((a \pm b)^2\right)$ в квадратном трехчлене:

$$ax^2 + bx + c = \left(ax^2 + bx\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{2b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Значит, график функции получается из графика функции $y = ax^2$ с помощью преобразований. Точка $(x_0; y_0)$, где $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$, – вершина параболы. Если $a > 0$ – ветви параболы вверх, $a < 0$ – ветви вниз.

Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$:

1) $D(f) = R$;

2) $E(y) = \left[\begin{array}{ll} [y_0; +\infty), & \textit{если} \quad a > 0 \\ (-\infty; y_0], & \textit{если} \quad a < 0 \end{array}\right.$;

3) функция ограничена сверху, если $a < 0$; снизу, если $a > 0$;

4) если $b = 0$ – функция четная; если $b \neq 0$ – функция общего вида;

5) функция возрастает при $x \in [x_0; +\infty)$, если $a > 0$, и убывает, если $a < 0$; Функция убывает при $x \in (-\infty; x_0]$, если $a > 0$, и возрастает, если $a < 0$;

6) функция непериодична;

7) характерные точки. График пересекает ось OY в точке $(0; c)$. Если существуют корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то с осью OX график пересекается в

точках $(x_1;0)$, $(x_2;0)$ или $(x_{1,2};0)$, когда $x_1 = x_2$. Если корни не существуют, то график не пересекает ось OX.

2. Обратная функция

Пусть дана функция $y = f(x)$. Функция $y = f^{-1}(x)$ – обратная. Функция $y = f(x)$ имеет обратную, если она монотонна (достаточное условие).

Свойства двух взаимно обратных функций:

1) $D(f) = E(f^{-1})$, $E(f) = D(f^{-1})$;

2) графики двух взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$;

3) если $y = f(x)$ – возрастающая функция, то $y = f^{-1}(x)$ – тоже возрастающая. Если $y = f(x)$ – убывающая функция, то и $y = f^{-1}(x)$ – убывающая.

Чтобы найти обратную функцию, нужно:

1) выразить переменную x из $y = f(x)$ через y;

2) поменять обозначения переменных x на y, y на x.

Пример.

Найдем функцию, обратную $y = \dfrac{2x}{x-3}$. Выразим x через y: $y(x-3) = 2x$; $yx - 3y = 2x$; $(y-2)x = 3y$; $x = \dfrac{3y}{y-2}$. Поменяем обозначение переменных: $y = \dfrac{3x}{x-2}$ – эта функция обратная $y = \dfrac{2x}{x-3}$.

Упражнения

1. Найти $E(y)$ данных функций:

а) $y = 2x^2 - 6x + 15$; б) $y = x^2 - 3x + 5$; в) $y = -3x^2 + 24x - 3$.

2. Построить графики функций:

а) $y = x^2 - 5x + 4$; в) $y = \left|x^2 - 4x + 5\right|$; д) $y = x \cdot |x|$;

б) $y = x^2 + 6x + 9$; г) $y = x^2 - 4|x| + 4$; е) $y = \left|x^2 - 5x\right| + 6$.

3. Найти обратные функции и построить их графики:

а) $y=\dfrac{2-x}{3+2x}$; б) $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$.

4. В какую прямую переходит прямая $y=-\dfrac{3}{4}x+3$ при симметрии относительно прямой $y=-x$.

Ответы

1. а) $[10{,}5;+\infty)$; б) $[2{,}75;+\infty)$; в) $(-\infty;45]$; *3.* а) $y=\dfrac{2-3x}{2x+1}$; б) $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$;

4. $y=-\dfrac{4}{3}x-4$.

ЗАНЯТИЕ 9

Тождества. Уравнения. Линейные уравнения. Системы линейных уравнений

1. Тождества

Равенство с переменными называется **тождеством**, если оно при всех допустимых значениях переменных становится верным числовым равенством.

Пример.

а) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;

б) $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{2x+5}{x^2+5x+6}$.

2. Уравнения

Равенство вида $f(x)=g(x)$ называется **уравнением с одной переменной**. **Корнем уравнения** называется значение переменной, при котором уравнение становится верным числовым равенством.

Пример.

$5x-8=2$; это уравнение имеет один корень $x=2$, т.е. $5\cdot 2-8=2$; $10=10$.

3. Равносильные уравнения

Равносильными уравнениями называются уравнения, которые имеют одинаковые корни или не имеют корней.

Пример.

а) $x+5=8$; $3x-1=8$ – эти уравнения равносильны, т.к. имеют одинаковый корень $x=3$;

б) $x^2+5=0$; $\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}$ – эти уравнения равносильны, т.к. не имеют корней.

4. Теоремы о равносильности уравнений

Теорема 1. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)+h(x)=g(x)+h(x)$.

Теорема 2. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$, где $h(x)\neq 0$.

Теорема 3. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow (f(x))^{2n+1}=(g(x))^{2n+1}$, $n\in N$.

Теорема 4. $f(x)=g(x)$; $f(x)\geq 0$; $g(x)\geq 0 \Leftrightarrow (f(x))^{2n}=(g(x))^{2n}$, $n\in N$.

5. Линейные уравнения

Определение. Уравнение вида $ax+b=0$, где a, $b\in R$, x – переменная, называется **линейным.**

Пример.

$ax+b=0$.

Решение: $a\neq 0$, $x=-\dfrac{b}{a}$;

$a=0$, $b=0$, $x\in R$;

$a=0$, $b\neq 0$, $x\in \varnothing$.

Определение. Уравнение вида $ax+by=c$, где a, b, $c\in R$; x, y – переменные, называется линейным с двумя переменными.

Уравнение с двумя переменными имеет бесконечное множество решений. Решениями являются пары чисел вида $(x;y)$, которые обращают уравнение в верное числовое равенство. Графиком линейного уравнения с двумя переменными является прямая на координатной плоскости.

6. Системы уравнений

Определение. Если даны уравнения $f(x;y)=0$ и $g(x;y)=0$ и надо найти их общее решение, то решаем систему уравнений.

Записываем так: $\begin{cases} f(x;y)=0; \\ g(x;y)=0. \end{cases}$

Определение. Пара чисел $(x;y)$, которая обращает в верное числовое равенство каждое из уравнений, называется **решением системы**.

Решение систем уравнений:

1. Метод подстановки

Выразим x через y (y через x) из одного уравнения. Полученное выражение подставим в другое уравнение. Находим корень уравнения, x или y. Находим y или x, используем для этого выражение x через y (y через x).

2. Метод сложения

Метод сложения основан на следующих теоремах:

Теорема 1. Пусть дана система двух уравнений с двумя переменными. Если одно уравнение оставить без изменений, а другое заменить равносильным, то новая система будет равносильна данной.

Теорема 2. Пусть дана система двух уравнений с двумя переменными. Если одно уравнение оставить без изменений, а другое заменить суммой или разностью обоих уравнений системы, то полученная система будет равносильна данной.

3. Метод введения новых переменных

Если в обоих уравнениях видим одинаковые выражения, которые содержат x и y, то можно их заменить другими переменными.

Пример.

$\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=9\ ; \quad y\neq 0 \\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20. \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=a\ ; \\ \dfrac{x}{y}=b. \end{cases}$ система принимает вид $\begin{cases} a+b=9; \\ a\cdot b=20. \end{cases}$

4. Метод умножения (деления)

Метод основан на следующей теореме:

Теорема 3. Пусть дана система

$\begin{cases} f(x;y)=g(x;y); \\ h(x;y)=m(x;y); \end{cases}$, где $h(x;y)\neq 0$, $m(x;y)\neq 0$; при $x\in R$, $y\in R$, то системы

$$\begin{cases} f(x;y)=g(x;y); \\ \dfrac{f(x;y)}{h(x;y)}=\dfrac{g(x;y)}{m(x;y)}. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x;y)=g(x;y); \\ f(x;y)h(x;y)=g(x;y)m(x;y) \end{cases}$$

равносильны друг другу и данной системе.

7. Системы линейных уравнений с двумя переменными

Определение. Система уравнений вида $\begin{cases} ax+by=c; \\ mx+ny=k \end{cases}$ называется **системой линейных уравнений с двумя переменными.**

В этой системе переменные x и y в каждом уравнении находятся в первой степени.

Графиками таких уравнений служат прямые. Две прямые на координатной плоскости могут пересекаться в одной точке, совпадать или не пересекаться, т.е. быть параллельными.

Примечание. В евклидовой геометрии прямые, которые не пересекаются, т.е. не имеют общих точек, называются параллельными.

Значит, система линейных уравнений с двумя переменными может иметь бесконечное множество решений, не иметь решений или иметь единственное решение.

Пусть дана система $\begin{cases} ax+by=c; \\ nx+my=k. \end{cases}$

Система имеет множество решений, если выполняется следующее условие:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{n}=\dfrac{b}{m}\ ; \\ \dfrac{b}{m}=\dfrac{c}{k} \quad \left(или\ \ \dfrac{a}{n}=\dfrac{c}{k} \right) \end{cases}$$

Система не имеет решений, если выполняется следующее условие:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{n} = \dfrac{b}{m} \ ; \\ \dfrac{b}{m} \neq \dfrac{c}{k} \quad \left(или \ \dfrac{a}{n} \neq \dfrac{c}{k} \right). \end{cases}$$

Система имеет единственное решение вида $(x; y)$, если выполняется следующее условие:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{n} \neq \dfrac{b}{m} \ ; \\ \dfrac{b}{m} \neq \dfrac{c}{k} \quad \left(или \ \dfrac{a}{n} \neq \dfrac{c}{k} \right). \end{cases}$$

Решаем линейные системы методом подстановки или сложения (вычитания).

Частным случаем метода сложения (вычитания) является **метод Гаусса**, который используется при решении линейных систем с n переменными.

Пример.

Решим систему $\begin{cases} x + 2y - z = 7; \\ 3x - 5y + 2z = -7; \\ 2x - y + z = 2. \end{cases}$.

Решение:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 7; \\ 3x - 5y + 2z = -7; \\ 2x - y + z = 2, \end{cases} \left| \begin{array}{r} \times(-3) \\ +\downarrow \\ \end{array} \right| \begin{array}{r} \times(-2) \\ \downarrow \\ +\downarrow \end{array} \Bigg| \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 7; \\ -11y + 5z = -28; \\ -5y + 3z = -12, \end{cases} \left| \begin{array}{r} \\ + \\ \times(-2)\uparrow \end{array} \right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 7; \\ -y - z = -4; \\ -5y + 3z = -12, \end{cases} \left| \begin{array}{r} \\ \times(-1) \\ \end{array} \right| \begin{array}{r} \\ \times(-5) \\ +\downarrow \end{array} \Bigg| \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 7; \\ y + z = 4; \\ 8z = 8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + 1 - 6; \\ y = 3; \\ z = 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = 3; \\ z = 1, \end{cases} \Leftrightarrow (x; y; z) \in \{(2;3;1)\}.$$

Ответ: $(2;3;1)$.

Система приводилась к треугольной форме. Такой метод называется **методом Гаусса**.

Прочитайте текст

С именем Карла Фридриха Гаусса (1777 – 1855) связаны многие замечательные страницы в истории математики. Он доказал основную теорему алгебры (всякое алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами имеет корень). Гаусс создал теорию поверхностей, т.е. нашел способ построения геометрических фигур на любой поверхности. Теория Гаусса получила название **внутренней геометрии**.

Гаусс занимался также астрономией, результаты своих исследований он опубликовал в книге «Теория движения небесных тел».

Упражнения

1. При каком значении m решением уравнения $mx-\frac{3x}{m}-m=7-\frac{8}{m}-2x$ является: а) пустое множество; б) любое действительное число.

2. Решить уравнение $2(a+1)x=3(x+1)+\frac{7}{a}$ для любого $a\in R$.

3. При каких значениях a система имеет множество решений

$$\begin{cases} x+(a+2)y=a; \\ ax+3y=2-a. \end{cases}$$

4. При каких значениях a система не имеет решений

$$\begin{cases} 2x+ay=1+a; \\ ax+2y=3. \end{cases}$$

5. Найти $n\in Z$, при котором система $\begin{cases} nx-2y=15; \\ 3x+ny=3 \end{cases}$ имеет решение $(x;y)$, где $\begin{cases} x>0; \\ y>0. \end{cases}$ В ответе указать минимальное значение n.

6. Решить системы:

а) $\begin{cases} x+2y+3z=8; \\ 3x+y+z=6; \\ 2x+y+2z=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y+3z=3; \\ 3x+y+2z=7; \\ 2x+3y+z=2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-ay+a^2z=a^3; \\ x-by+b^2z=b^3; \\ x-cy+c^2z=c^3. \end{cases}$

Ответы

1. а) $m=-3$; $m=0$; б) $m=1$.

2. $a=\frac{1}{2}$; $a=0$; $x\in\varnothing$; $a\in(-\infty;0)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; $x=\frac{3a+7}{a(2a-1)}$.

3. 1. *4.* -2. *5.* 16.

6. а) $(1;2;1)$; б) $(2;-1;1)$; в) $x=abc$, $y=ab+bc+ac$, $z=a+b+c$.

ЗАНЯТИЕ 10

Квадратные уравнения. Теорема Виета.

Разложение квадратного уравнения на множители

1. Квадратные уравнения

Определение. Уравнения вида $ax^2+bx+c=0$, где a, b, $c\in R$; $a\neq 0$; x– переменная, называется **квадратным**. a – первый коэффициент, или старший, b – второй, c – свободный член.

Если $a=1$, то уравнение $x^2+bx+c=0$ называется **приведенным**.

Если $b=0$ или $c=0$, или b и c равны 0, то уравнения имеют вид $ax^2+c=0$; $ax^2+bx=0$; $ax^2=0$ и называются **неполными**.

Решение квадратных уравнений:

1. Неполные уравнения

а) $ax^2+c=0$ б) $ax^2+bx=0$ в) $ax^2=0$

$x^2=-\frac{c}{a}$ $x(ax+b)=0$ $x=0$.

$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$; $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\frac{b}{a}; \end{array}\right.$

2. <u>Решение уравнения</u> $ax^2+bx+c=0$

Формула корней квадратного уравнения $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$; $D=b^2-4ac$, D – дискриминант.

Возможны случаи: $D>0$ – уравнение имеет два разных корня; $D=0$ – уравнение имеет два равных корня $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$; $D<0$ – уравнение не имеет корней.

Для уравнения, в котором второй коэффициент четный, существует своя формула корней уравнения. Если уравнение имеет вид $ax^2+2kx+c=0$, то $x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}$; $D_1=k^2-ac$.

2. Теорема Виета

1. <u>Прямая теорема Виета</u>

Сумма корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ равна $-\frac{b}{2a}$, а произведение равно $\frac{c}{a}$, т.е.

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{2a}; \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Если уравнение приведенное, т.е. имеет вид $x^2+px+q=0$, то теорему Виета записывают так:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p; \\ x_1x_2=q. \end{cases}$$

2. <u>Обратная теорема Виета</u>

Если сумма чисел x_1 и x_2 равна $-\frac{b}{a}$, а их произведение равно $\frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

3. Разложение квадратного трехчлена на множители

Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ можно разложить на множители следующим образом: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения.

Прочитайте текст

Французский математик Франсуа Виет (1540 – 1603) знаменит не только своей теоремой для корней квадратных уравнений и уравнений более высоких степеней. В конце XVI века он ввел буквенные обозначения не только для неизвестных, но и для произвольных постоянных величин, а так же предложил использовать фигурные скобки. В 1579 г. Виет вычислил число p с девятью знаками после запятой, что в то время, без вычислительной техники, было сложной задачей.

Упражнения

1. Не находя корней уравнения $2x^2 - 3x - 1$, найти:

а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; в) $x_1^3 + x_2^3$; г) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; д) $x_1^{-3} - x_2^{-3}$.

2. Найти p, если корни уравнения $x^2 + px - 3 = 0$ равны по модулю.

3. При каком значении a уравнения $x^2 + ax + 8 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют общий корень?

4. При каком значении a один корень уравнения $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + 2 = 0$ в два раза больше другого?

5. В квадратном уравнении $4x^2 - 8x + c = 0$ найти c, если известно, что его корни неотрицательные целые числа.

6. В квадратном уравнении $3x^2 + bx + 15 = 0$ найти b, если известно, что корни уравнения – целые числа.

7. Разложить квадратный трехчлен на множители и сократить дробь:

а) $\frac{x - 5}{3x^2 - 13x - 10}$; б) $\frac{-2x^2 + 7x - 3}{2x - 1}$.

Ответы

1. а) $3{,}25$; б) -3; в) $5{,}625$; г) $-6{,}5$; д) $-11\sqrt{17}$.

2. 0. *3.* -6. *4.* 4. *5.* 4; 0. *6.* -18; 18. *7.* а) $\dfrac{1}{3x+2}$; б) $3-x$.

ЗАНЯТИЕ 11

Уравнения высокой степени

Уравнения вида $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ называются **целыми уравнениями высокой степени**.

Целыми уравнениями являются, например, уравнения

$\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{4x}{5} - 8 = 0$; $\dfrac{x-1}{3} - \dfrac{x+1}{5} = 4$.

В знаменателе этих уравнений нет неизвестной x.

Способы решения уравнений:

1. Разложение на множители

Пример 1.

Решить уравнение $2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = 0$.

Разложим многочлен $2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$ на множители методом понижения степени, который основан на следствии из теоремы Безу.

Если число a является корнем уравнения, то многочлен может быть разложен на множители так: $(x-a)P_2(x) = 0$, где $P_2(x)$ – многочлен второй степени. Корнем уравнения могут быть числа ± 1, $\pm\dfrac{1}{2}$.

Найдем значение левой части уравнения при $x = 1$:

$2 - 5 + 4 - 1 = 0$;

$0 = 0$.

1 – корень уравнения, значит, многочлен делится без остатка на $(x-1)$. После деления мы найдем $P_2(x)$, и уравнение может быть разложено на множители в виде $(x-1)(2x^3-3x+1)=0$.

Если произведение равно 0, то каждый сомножитель может быть равен 0. Решим уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} x-1=0; \\ 2x^2-3x+1=0. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=1; \\ x=1; \quad x=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=\dfrac{1}{2}$; $x_{2,3}=1$.

Пример 2.

Решить уравнение $x^4+x^3-3x^2-5x-2=0$.

Применим способ группировки и запишем уравнение так:

$x^4+x^3-3x^2-3x-2x-2=0$;

$x^3(x+1)-3x(x+1)-2(x+1)=0$;

$(x+1)(x^3+3x-2)=0$;

$(x+1)(x+1)(x^2-x-2)=0$;

$(x+1)^2(x^2-x-2)=0$;

$$\left[\begin{array}{l} x_{1,2}=-1; \\ x_3=2; \quad x_4=-1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_{1,2,4}=-1$; $x_3=2$.

Пример 3.

Решить уравнение: $x^4-3x^2+4x-3=0$.

Используем формулы сокращенного умножения для того, чтобы разложить на множители левую часть уравнения. Запишем уравнение следующим образом:

$x^4-2x^2-(x^2-4x+3)=0$;

$$\left(x^4-2x^2+1\right)-\left(x^2-4x+4\right)=0;$$

$$\left(x^2-1\right)^2-(x-2)^2=0;$$

$$\left(x^2-1-x+2\right)\left(x^2-1+x-2\right)=0;$$

$$\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x-3\right)=0.$$

Каждый сомножитель равен нулю:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-x+1=0; \\ x^2+x-3=0, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \textit{нет решений}; \\ x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

2. Симметричные уравнения

Уравнение $2x^3-3x^2-3x+2=0$ – симметричное. Корнем кубического симметричного уравнения всегда является -1.

Уравнение $6x^4+7x^3-36x^2-7x+6=0$ – симметричное уравнение четвертой степени. Решаем такое уравнение способом деления на $x^2\neq 0$, т.е.

$$6x^2+7x-36-\frac{7}{x}+\frac{6}{x}=0.$$

Сгруппируем члены уравнения:

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x-\frac{1}{x}\right)-36=0.$$

Далее обозначим $x-\dfrac{1}{x}=t$ и выразим $x^2+\dfrac{1}{x^2}$, для этого возведем в квадрат обе части равенства $x-\dfrac{1}{x}=t$.

$$x^2+\frac{1}{x^2}-2=t^2;$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2.$$

Запишем уравнение в виде $6t^2 + 7t - 24 = 0$. Оно имеет корни $t_1 = -\frac{8}{3}$ и $t_2 = \frac{3}{2}$.

Найдем x: $\left[\begin{array}{l} x - \frac{1}{x} = -\frac{8}{3}; \\ x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{ll} x_1 = -\frac{3}{2}; & x_2 = \frac{1}{6}; \\ x_3 = 2; & x_4 = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$

Ответ: $x_1 = -\frac{3}{2}$; $x_2 = \frac{1}{6}$; $x_3 = 2$; $x_4 = -\frac{1}{2}$.

В решении уравнений используется также подстановка вида $x + \frac{1}{x} = t$.

3. Теорема Виета для уравнений высоких степеней

Уравнение вида $x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots + k = 0$ называется **приведенным**, старший коэффициент равен 1.

Теорема Виета для приведенного кубического уравнения $x^3 + px^2 + qx + k = 0$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p; \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q; \\ x_1x_2x_3 = -k. \end{cases}$$

Если в задании нужно найти сумму корней уравнения, произведение корней, то можно использовать теорему Виета.

Теорему не применяют, если надо найти сумму (произведение и т.д.) действительных корней.

Упражнения

1. Решите уравнения:

а) $x^3 - 31x + 30 = 0$;

б) $x^6 - 4x^4 - x^2 + 4 = 0$;

в) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$;

г) $2x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0$.

2. Найти сумму корней уравнения:

а) $x^3 - 10x^2 + 25x - 20 = 0$;

б) $4x^3 - 3x + 5 = 0$.

3. Найти сумму действительных корней:

а) $28x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$;

б) $\left(x^3 + 2x + 2\right)^3 + 2\left(x^3 + 2x + 2\right) + 2 = x$.

4. Найти среднее арифметическое всех действительных корней:

а) $(x - 0{,}5)(x + 2)^3 + (0{,}5 - x)(x - 1)^3 = 9(x - 0{,}5)$;

б) $x^3 + 5x - 6 = 0$;

в) $x^3 - 13x + 12 = 0$.

5. Найти корни уравнения:

а) $\left(x^2 + 7\right)^2 + \left(x^2 + 7\right)\left(x^2 + 3\right) - 6\left(x^2 + 3\right)^2 = 0$;

б) $\left(x^2 - 6x\right)^2 - 2(x - 3)^2 = 81$;

в) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 840$.

Ответы

1. а) $x_1 = -6$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$; в) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$;

б) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 2$; г) $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_{2,3} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

2. а) 10; б) 0. *3.* а) $-0{,}25$; б) -1. *4.* а) $-\dfrac{1}{6}$; б) 1; в) 0.

5. а) $x_{1,2} = \pm 1$; б) $x_{1,2} = 3$, $x_{3,4} = 3 \pm 2\sqrt{5}$; в) $x_1 = -3$, $x_2 = 8$.

СОДЕРЖАНИЕ

Св. план 2008, поз. 130

Учебное издание

Бурлуцкая Ирина Михайловна

МАТЕМАТИКА

Пособие для иностранных слушателей
подготовительного отделения

В 2-х частях
Часть 2

Редактор Т. П. Андрейченко
Корректор Л. А. Шичко

Подписано в печать 08.10.2008. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс». Печать ризографическая. Усл. печ. л. 3,49.
Уч.-изд. л. 2,7. Тираж 50 экз. Заказ 174.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП №02330/0131666 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6