СЕКЦИЯ «ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА»

ОБРАЗОВАНИЕ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ ПЕРЕСЕЧЕНИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЛОСКОСТЯМИ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Щуцкий.Н.А., Каражан К.А.

Амельченко Н.П. – к.т.н.,доцент

В курсах начертательной геометрии и высшей математики зачастую тема поверхностей второго порядка затрагивается в недостаточной мере, чтобы создать у студента настолько фундаментальное представление о них, чтобы в дальнейшем изучающий мог с лёгкостью использовать их в практических задачах.

Поверхность второго порядка – множество точек пространства, которые определяются уравнением второй степени относительно прямоугольных координат:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{13}zx+2a_{12}xy+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

Рассмотрим некоторые примеры поверхностей второго порядка: цилиндрические, конические, а также более сложные поверхности на примере гиперболического параболоида.

1) Цилиндрические. Если исключить из общего уравнения члены, содержащие ось Z, то можно принять, что Z может быть любым, таким образом направляющей такой поверхности становится кривая второго порядка. Если привести уравнения поверхностей второго порядка к каноническому виду, то необходимо будет обнулить только один член, содержащий Z, фактически секущей плоскостью в данном случае становится ось XY, благодаря которой поверхность второго порядка можно выразить за счёт более простых элементов.

Таким образом становится очевидно, что сечение плоскости XY фигуры, задаваемой этим уравнением, является эллипс (кривая второго порядка), уравнение которого можно увидеть ниже, однако помня, что Z = 0. Аналогичный эффект будет соблюдаться и в случае с параболическим и гиперболическим цилиндром, создавая сечение в виде соответствующих им кривых второго порядка (параболы и гиперболы).

Уравнение эллиптического цилиндра: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

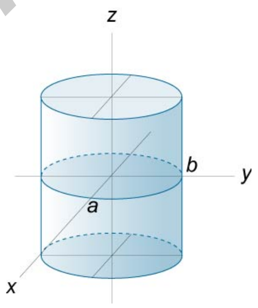

Рис. 1 – Эллиптический цилиндр

2) Конические. Поверхности данного типа удобно представить с помощью перенесения члена уравнения, содержащего Z в правую часть, а в дальнейшем приравнивание его к константе позволяет легко определить построение поверхности данного типа. Приравнивая Z к 0, мы получим уравнение мнимых пересекающихся прямых, эта точка будет называться вершиной конуса. Если взять Z отличное от нуля, то мы получим уравнения эллипсов, что означает, что с возрастанием и убыванием Z от 0 происходит увеличение размеров эллипса в сечении, производимом плоскостью XY.

Уравнение конической поверхности: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{C^2}$

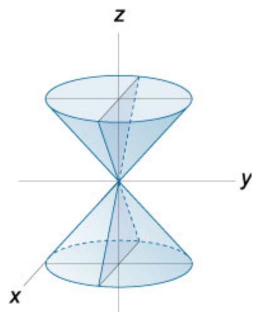

Рис. 2 – Эллиптический конус

3) Сложные поверхности. При пересечении с плоскостями XY, XZ, YZ поверхности, которые условно можно отнести к этой группе, образуют сечение в виде кривых второго порядка, и в этом есть определённая закономерность, которую можно эффективно использовать при визуализации или построении сечений.

Рассмотрим её на примере гиперболического параболоида:

А) При сечении плоскостью XY в сечении образуется гипербола, так как мы фиксируем Z, а с левой стороны остаётся уравнение гиперболы, как и в случае с цилиндрическими поверхностями.

Б) При сечении плоскостями XZ, YZ в сечении образуется парабола, так как мы фиксируем X либо Y, а уравнения вида $y^2=2pz$ либо $x^2=2pz$ представляют из себя параболу.

Таким образом, фиксируя определённую координату, задавая секущую плоскость, мы с лёгкостью определяем тип кривой второго порядка, а изменением константы от нуля в обе стороны мы можем проанализировать всю поверхность второго порядка в целом, представляя её общее построение.

Уравнение гиперболического параболоида: $:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$

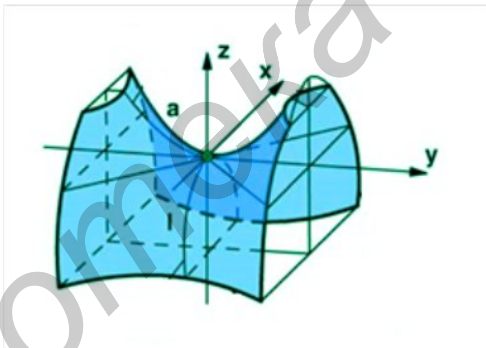

Рис. 3 – Гиперболический параболоид

Исходя из всего вышесказанного можно заметить, что метод сечений крайне эффективен при рассмотрении поверхностей второго порядка, в особенности при работе с наиболее сложными из поверхностей, визуализация которых порой бывает затруднительной. Его использование позволяет не только без особых проблем определить пространственное построение данных поверхностей, но и даёт возможность легкого взаимодействия с любой из образующей его кривой второго порядка, что может быть полезно при построении комбинации нескольких тел и в других задачах.

Список использованных источников:

1. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричикова. — Минск: ТетраСистемс, 2004.
2. Жевняк, Р.М. Высшая математика / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. — Минск: Высшая школа, 1992.

SKETCHUP КАК УТИЛИТА ДЛЯ СОЗДАНИЯ 3D МОДЕЛЕЙ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Куст И.В., Гальвидис М.О.

Столер В.А.– к.т.н.,доцент