

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра систем телекоммуникаций

В.А. Ильинков, В.Е. Романов, А.А. Силин

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ

Лабораторный практикум

для студентов специальностей
“Системы радиосвязи, радиовещания и телевидения”
и “Многоканальные системы телекоммуникаций”
всех форм обучения

В 2-х частях

Часть 1

Минск 2006

УДК 621.391.832.2 (076)

ББК 32.811.3 я 7

И 46

Ильинков В.А.

И 46 Моделирование систем телекоммуникаций: Лабораторный практикум для студ. спец. “Системы радиосвязи, радиовещания и телевидения” и “Многоканальные системы телекоммуникаций” всех форм обуч. В 2 ч. Ч. 1/ В.А. Ильинков, В.Е. Романов, А.А. Силин. – Мн.: БГУИР, 2006. – 52 с. : ил.

ISBN 985-444-998-X (ч. 1)

Даны краткие теоретические сведения и порядок выполнения шести лабораторных работ по изучению основных закономерностей моделирования сигналов и звеньев систем телекоммуникаций. Дано краткое описание программно-аппаратного комплекса математического и физического моделирования электрических сигналов и систем, на основе которого реализован фронтальный цикл лабораторных работ.

УДК 621.391.832.2 (076)

ББК 32.811.3 я 7

ISBN 985-444-998-X (ч. 1)

ISBN 985-444-997-1

© Ильинков В.А., Романов В.Е.,
Силин А.А., 2006

© БГУИР, 2006

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ СИСТЕМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ РЯДОМ ФУРЬЕ	4
Лабораторная работа № 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ СИСТЕМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ РЯДОМ КОТЕЛЬНИКОВА	12
Лабораторная работа № 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ СИСТЕМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ	17
Лабораторная работа № 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ СИСТЕМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА	25
Лабораторная работа № 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ СИСТЕМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ И НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ	33
Лабораторная работа № 6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ СИСТЕМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ	43
ЛИТЕРАТУРА	49
Приложение А. ОПИСАНИЕ ОБУЧАЮЩЕГО ПРОГРАММНО-АППАРАТНОГО КОМПЛЕКСА МОДЕЛИРОВАНИЯ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ	50

Лабораторная работа № 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ СИСТЕМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ РЯДОМ ФУРЬЕ

1.1 Цель работы

Изучение основных закономерностей моделирования телекоммуникационных сигналов рядом Фурье, особенностей представления рядом гармонических и импульсных сигналов.

1.2 Краткие теоретические сведения

При математическом и физическом моделировании систем телекоммуникаций (СТК) в качестве воздействий широко используют континуальные детерминированные периодические сигналы, которые часто раскладывают по ортогональной системе гармонических функций кратных частот (в ряд Фурье). При разложении периодического сигнала $f(t) = f(t + T)$ в ряд Фурье применяют либо систему действительных функций $\varphi_n(t) = \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} (n\omega_1 t)$ ($n=0, \infty$), либо соответствующую ей систему комплекснозначных функций $\varphi_n(t) = e^{jn\omega_1 t}$ ($n=(-\infty, \infty)$). Эти системы базовых функций являются ортогональными с единичным весом на любом отрезке длительностью $T = 2\pi/\omega_1$, квадрат нормы каждой функции $\varphi_n(t)$ равен $\|\varphi_n(t)\|^2 = T$.

Как известно [1], теорема разложения в обобщенный ряд Фурье устанавливает общие (достаточно жесткие) требования к моделируемой функции $f(t)$ и ортогональной системе. В случае некоторых ортогональных систем эти требования дополнительно уточнены с целью их ослабления. Так, применительно к описанию рядом Фурье кусочно-непрерывная функция $f(t)$ должна: удовлетворять на отрезке $[-T/2, T/2]$ условию абсолютной интегрируемости; быть на этом отрезке ограниченной и удовлетворять условиям Дирихле.

При выполнении этих условий периодическая кусочно-непрерывная функция (сигнал) $f(t)$ раскладывается в ряд Фурье, удобно представляемый в комплексном виде:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}, \quad C_n = C_{nc} - jC_{ns} = |C_n| e^{j\theta_n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (1.1)$$

Ряд (1.1) в каждой точке $t \in (-\infty, \infty)$ сходится к значению $(f(t-0) + f(t+0))/2$. При нахождении спектральных коэффициентов C_n , являющихся комплексными числами, операцию интегрирования в выражении

(1.1) можно выполнять не только на отрезке $[-T/2; T/2]$, но на любом отрезке длительностью T , например, на отрезке $[0, T]$. Модуль $|C_n|$ и аргумент Θ_n спектральных коэффициентов описывают дискретные математические спектры периодического сигнала: амплитудный и фазовый соответственно. При этом амплитудный спектр является четной, а фазовый – нечетной функциями частоты. Учитывая последнее, в ряде (1.1) можно выполнить попарное суммирование, что приводит к ряду Фурье в тригонометрическом виде

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|C_n| \cos(n\omega_1 t + \Theta_n), \quad (1.2)$$

который в математической и технической литературе часто представляют также в форме

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \Theta_n), \quad (1.3)$$

где $a_n = 2C_{nc}$; $b_n = 2C_{ns}$; $A_n = 2|C_n|$; $|C_n| = \sqrt{C_{nc}^2 + C_{ns}^2}$; $\Theta_n = -\arctg C_{ns}/C_{nc}$.

Форма (1.1) ряда Фурье соответствует ортогональной системе комплекснозначных функций, форма (1.3), широко используемая в инженерной практике, – ортогональной системе действительных функций. Коэффициенты A_n (Θ_n) описывают дискретный физический амплитудный (фазовый) спектр исследуемого периодического сигнала. Анализ ряда (1.3) с учетом свойств его коэффициентов показывает, что в случае четной раскладываемой функции ($f(t) = f(-t)$) $b_n = C_{ns} = 0$, $\Theta_n = 0$ ($\Theta_n = \pi$), а в случае нечетной ($f(t) = -f(-t)$) $a_n = C_{nc} = 0$ и $\Theta_n = \pm \pi/2$.

Важным параметром периодического сигнала $f(t)$, определяемым при его математическом моделировании, является средняя мощность

$$P_{cp} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = C_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{2} \right)^2 = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2}. \quad (1.4)$$

Выражение (1.4) часто используют для нахождения средней мощности сигнала на входе и выходе моделируемого звена СТК. Оно подтверждает известное свойство: средняя мощность периодического сигнала произвольной формы равна сумме средних мощностей постоянной составляющей и гармоник и не зависит от начальных фаз последних.

Ряд Фурье характеризуется плохой сходимостью, особенно при представлении сигналов, описываемых функциями с разрывами первого рода. Поэтому для достижения высокой точности аппроксимации количество N учитываемых членов ряда (1.3) приходится выбирать большим ($N \geq 1000$), что существенно увеличивает время моделирования на ПЭВМ. Однако, даже при $N \rightarrow \infty$ в точках разрыва первого рода в аппроксимирующей функции $f^*(t)$ возникают вы-

бросы нулевой длительности (игольчатые функции), имеющие значительную амплитуду. Как известно, эту особенность ряда Фурье называют явлением Гибса [1, 3].

Основные закономерности представления сигналов рядом Фурье наиболее информативно изучать на примере импульсных сигналов (с неограниченным по частоте амплитудным спектром), описываемых кусочно-непрерывными функциями. С учетом этого в рассматриваемой лабораторной работе для моделирования предлагаются сигналы $f_1(t)–f_4(t)$, первые три из которых являются импульсными, а четвертый – полигармоническим. Причем, в качестве сигналов $f_1(t)–f_3(t)$ выбраны периодическая последовательность идеальных прямоугольных импульсов, широко используемая при моделировании СТК, и функционально связанные с ней сигналы $f_2(t)$ и $f_3(t)$. Математические модели, амплитудные и временные (частотные) параметры сигналов $f_1(t)–f_4(t)$ для различных вариантов приведены в таблицах 1.1 и 1.2.

1.3 Порядок выполнения работы

1.3.1 Математическое и физическое моделирование сигнала $f_1(t)$

1.3.1.1 Изучить необходимые теоретические сведения. Проанализировать математическую модель $f_1(t)$ исследуемого периодического сигнала (см. табл. 1.1), представить его графически.

1.3.1.2 В системе MathCAD [7] запрограммировать модель $f_1(t)$, при значениях параметров выполняемого варианта (см. табл. 1.2) на отрезке времени $[0, T]$ с шагом $\delta t = 0,001 \cdot T$ рассчитать мгновенные значения исследуемого сигнала, построить график функции $f_1(t)$, сравнить его с графическим представлением по п. 1.3.1.1.

1.3.1.3 Используя теоретические сведения и данные табл. 1.1, построить модель аппроксимирующей (сигнал $f_1(t)$) функции $f_1^*(t)$ в форме (1.3) ряда Фурье и запрограммировать ее в системе MathCAD.

1.3.1.4 Ограничившись в модели $f_1^*(t)$ последним учитываемым членом с номером $n = N = 10$, при значениях параметров выполняемого варианта на отрезке $[0, T]$ с шагом $\delta t = 0,001 \cdot T$ рассчитать отсчетные значения функции $f_1^*(t)$, создать файл с массивом отсчетных значений, построить график функции $f_1^*(t)$, сравнить его с графиком по п. 1.3.1.2.

1.3.1.5 Используя файл отсчетных значений, с помощью подсистемы генерирования программно-аппаратного комплекса сформировать в реальном масштабе времени периодический сигнал $f_1^*(t)$, подать его на входы осциллографа и анализатора спектра. С помощью осциллографа измерить: амплитуду

Таблица 1.1 – Математические модели сигналов $f_1(t)–f_4(t)$

Математическая модель сигнала	Спектральные коэффициенты $C_n (A_n)$
$f_1(t) = \left\{ \begin{array}{l} A, [0, \tau) \\ 0, [\tau, T) \\ f_1(t+T), (-\infty, \infty) \end{array} \right\}$	$\frac{A}{2\pi n} \left(\sin \frac{2\pi n \tau}{T} - j \left(1 - \cos \frac{2\pi n \tau}{T} \right) \right)$
$f_2(t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{At}{\tau}, [0, \tau) \\ \frac{At}{(\tau-T)} + \frac{AT}{(T-\tau)}, [\tau, T) \\ f_2(t+T), (-\infty, \infty) \end{array} \right\}$	$\frac{AT^2}{4\pi^2 n^2 \tau (T-\tau)} \left(\left(\cos \frac{2\pi n \tau}{T} - 1 \right) - j \sin \frac{2\pi n \tau}{T} \right)$
$f_3(t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{At^2}{\tau^2}, [0, \tau) \\ \frac{A(t-T)^2}{(\tau-T)^2}, [\tau, T) \\ f_3(t+T), (-\infty, \infty) \end{array} \right\}$	$\begin{aligned} & \frac{A}{2\pi n} \left(\sin \frac{2\pi n \tau}{T} + \sin \frac{2\pi (T-\tau) n}{T} \right) + \frac{2AT}{(2\pi n)^2} \left(\frac{1}{\tau} \times \right. \\ & \times \cos \frac{2\pi n \tau}{T} + \frac{1}{T-\tau} \cos \frac{2\pi (T-\tau) n}{T} \left. \right) - \frac{2AT^2}{(2\pi n)^3} \left(\frac{1}{\tau^2} \times \right. \\ & \times \sin \frac{2\pi n \tau}{T} + \frac{1}{(T-\tau)^2} \sin \frac{2\pi (T-\tau) n}{T} \left. \right) - j \frac{A}{2\pi n} \times \\ & \times \left(\cos \frac{2\pi (T-\tau) n}{T} - \cos \frac{2\pi n \tau}{T} \right) - j \frac{2AT}{(2\pi n)^2} \left(\frac{1}{\tau} \times \right. \\ & \times \sin \frac{2\pi n \tau}{T} - \frac{1}{(T-\tau)} \sin \frac{2\pi (T-\tau) n}{T} \left. \right) - j \frac{2AT^2}{(2\pi n)^3} \times \\ & \times \left(\frac{1}{\tau^2} \left(\cos \frac{2\pi n \tau}{T} - 1 \right) - \frac{1}{(T-\tau)^2} \left(\cos \frac{2\pi (T-\tau) n}{T} - 1 \right) \right) \end{aligned}$
$f_4(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A(\cos(2\pi f_{11} t + \Theta) + \cos(2\pi k f_{11} t + \Theta)), (-\infty, \infty)$	A

A , период T повторения, длительность τ_{ϕ} фронта (на уровнях 0,1-0,9) и длительность $\tau_{0,5}$ (на уровне 0,5) импульсов; скважность Q ; наибольшую (нормированную относительно установившегося значения A) амплитуду Δ_{\max} выбросов на плоской части импульсов (в процентах); эффективную длительность $\tau_{\text{эф}}$ переходного процесса – интервал времени от момента начала импульса до момента на его вершине, за которым нормированная амплитуда Δ выбросов не превышает некоторого малого значения δ (принять $\delta = 3\%$). Проанализировать и зарисовать структуру амплитудного спектра, наблюдаемого на экране анализатора спектра.

Таблица 1.2 – Значения параметров сигналов $f_1(t)$ – $f_4(t)$

Сигнал	Параметры сигналов			
	Вариант задания	$A, В$	$T (f_{11}), с (Гц)$	$\tau (k), с (_)$
$f_1(t)$	1	0,50	0,0080	0,0016
	2	0,70	0,0050	0,0015
	3	0,90	0,0040	0,0016
	4	1,10	0,0025	0,0015
	5	1,30	0,0020	0,0012
	6	1,50	0,0010	0,0007
$f_2(t)$	1	0,50	0,0080	0,0016
	2	0,70	0,0050	0,0015
	3	0,90	0,0040	0,0016
	4	1,10	0,0025	0,0015
	5	1,30	0,0020	0,0012
	6	1,50	0,0010	0,0007
$f_3(t)$	1	0,50	0,0080	0,0016
	2	0,70	0,0050	0,0015
	3	0,90	0,0040	0,0016
	4	1,10	0,0025	0,0015
	5	1,30	0,0020	0,0012
	6	1,50	0,0010	0,0007
$f_4(t)$	1	0,05	500	1,25
	2	0,07	800	1,25
	3	0,09	1250	1,60
	4	0,11	800	2,50
	5	0,13	1000	2,50
	6	0,15	2000	2,50

1.3.1.6 Повторить п. 1.3.1.4 и 1.3.1.5 для значений параметра N , равных 20, 40 и 80. По результатам измерений построить графики зависимостей $\tau_{\phi}=\varphi_1(f_{\epsilon}), \Delta_{\max}=\varphi_2(f_{\epsilon})$ и $\tau_{\epsilon\phi}=\varphi_3(f_{\epsilon})$, где f_{ϵ} – верхняя граничная частота спектра, соответствующая значению N .

1.3.2 Математическое и физическое моделирование сигналов $f_2(t)$ и $f_3(t)$

1.3.2.1 Проанализировать математическую модель сигнала $f_2(t)$ (см. табл. 1.1), представить его графически.

1.3.2.2 В системе MathCAD запрограммировать модель $f_2(t)$, при значениях параметров выполняемого варианта на отрезке $[0, T]$ с шагом $\delta t=0,001 \cdot T$ рассчитать мгновенные значения исследуемого сигнала, построить график функции $f_2(t)$, сравнить его с графическим представлением по п. 1.3.2.1.

1.3.2.3 Используя данные табл. 1.1, построить модель аппроксимирующей функции $f_2^*(t)$ в форме (1.3) ряда Фурье и запрограммировать ее в системе MathCAD.

1.3.2.4 Ограничившись в модели $f_2^*(t)$ последним учитываемым членом с номером $n=N=10$, применительно к выполняемому варианту (см. табл. 1.2) на отрезке $[0, T]$ с шагом $\delta t=0,001 \cdot T$ рассчитать отсчетные значения функции $f_2^*(t)$, создать файл с массивом отсчетных значений, построить график функции $f_2^*(t)$, сравнить его с графиком по п. 1.3.2.2.

1.3.2.5 Используя файл отсчетных значений, с помощью подсистемы генерирования сформировать в реальном масштабе времени периодический сигнал $f_2^*(t)$, подать его на входы осциллографа и анализатора спектра. С помощью осциллографа: измерить амплитуду A , длительность $\tau_{0.5}$ и период T повторения импульсов; оценить степень отличия по форме наблюдаемого $f_2^*(t)$ и исходного $f_2(t)$ сигналов. Проанализировать и зарисовать структуру амплитудного спектра, воспроизводимого на экране анализатора спектра.

1.3.2.6 Повторить п. 1.3.2.4 и 1.3.2.5 для значений параметра N , равных 20, 40 и 80.

1.3.2.7 Прodelать п. 1.3.2.1 – 1.3.2.6 применительно к сигналу $f_3(t)$.

1.3.3 Математическое и физическое моделирование сигнала $f_4(t)$

1.3.3.1 Проанализировать математическую модель сигнала $f_4(t)$, запрограммировать ее в системе MathCAD, при значениях параметров выполняемого варианта определить период T повторения, на отрезке $[0, T]$ с шагом $\delta t=0,001 \cdot T$ рассчитать мгновенные значения исследуемого сигнала (при начальной фазе $\Theta=0$) и построить график функции $f_4(t)$.

1.3.3.2 Проанализировать структуру ряда Фурье для сигнала $f_4(t)$, построить модель аппроксимирующей функции $f_4^*(t)$ в форме (1.3) и запрограммировать ее в системе MathCAD.

1.3.3.3 Применительно к выполняемому варианту на отрезке $[0, T]$ с шагом $\delta t=0,001 \cdot T$ рассчитать отсчетные значения функции $f_4^*(t)$ (при $\Theta=0$), создать файл с массивом отсчетных значений, с помощью подсистемы генерирования сформировать в реальном масштабе времени периодический сигнал $f_4^*(t)$, подать его на входы осциллографа и анализатора спектра. С помощью осциллографа: исследовать форму наблюдаемого сигнала; измерить амплитуду и период T повторения. Проанализировать и зарисовать структуру амплитудного спектра, воспроизводимого на экране анализатора спектра.

1.3.3.4 Повторить п. 1.3.3.3 при начальной фазе $\Theta=\pi/2$.

1.4 Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Математические модели и графики исходных $f_1(t)–f_4(t)$ и аппроксимирующих (при различных значениях N) $f_1^*(t)–f_4^*(t)$ функций.
3. Результаты измерений и структуры амплитудных спектров по п. 1.3.1.5, 1.3.1.6, 1.3.2.5 – 1.3.2.7, 1.3.3.3 и 1.3.3.4.
4. Графики зависимостей по п. 1.3.1.6.
5. Выводы.

1.5 Контрольные вопросы и задания

1. Условие ортогональности бесконечной системы действительных функций и его физическая интерпретация.
2. Теорема разложения в обобщенный ряд Фурье.
3. Условие полноты системы, равенство Бесселя.
4. Доказать, что амплитудный спектр периодического сигнала является четной, а фазой – нечетной функциями частоты.
5. Установить функциональную взаимосвязь сигналов $f_1(t)–f_4(t)$.
6. Качественная характеристика амплитудных спектров сигналов $f_1(t)–f_4(t)$.
7. Структура ряда Фурье для полигармонического сигнала.
8. Используя результаты моделирования, оценить скорость сходимости ряда Фурье.
9. При разложении каких из сигналов $f_1(t)–f_4(t)$ наблюдается явление Гибса? Подтвердить результатами моделирования.
10. Установить эмпирические зависимости $\tau_\phi = \varphi_1(f_\varepsilon), \Delta_{\max} = \varphi_2(f_\varepsilon)$ и $\tau_{\varepsilon\phi} = \varphi_3(f_\varepsilon)$.
11. Влияние начальных фаз спектральных компонент на амплитуду полигармонического сигнала.
12. Представить рядом Фурье в форме (1.3) сигналы:

$$f_1(t) = \left\{ \begin{array}{l} \cos \omega_0 t, [-\pi/2\omega_0, \pi/2\omega_0) \\ f_1(t + \pi/\omega_0), (-\infty, \infty) \end{array} \right\}; \quad f_2(t) = \left\{ \begin{array}{l} U_0 \sin \omega_0 t, [-\pi/2\omega_0, \pi/2\omega_0) \\ f_2(t + \pi/\omega_0), (-\infty, \infty) \end{array} \right\};$$
$$f_3(t) = \left\{ \begin{array}{l} \cos \omega_0 t, [-\pi/2\omega_0, \pi/2\omega_0) \\ 0, [-3\pi/2\omega_0, -\pi/2\omega_0), [\pi/2\omega_0, 3\pi/2\omega_0) \\ f_3(t + 3\pi/\omega_0), (-\infty, \infty) \end{array} \right\}; \quad f_4(t) = \left\{ \begin{array}{l} 2U_0 t/T, [-T/2, T/2) \\ f_4(t+T), (-\infty, \infty) \end{array} \right\}.$$

Найти их среднюю мощность.

Лабораторная работа № 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ СИСТЕМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ РЯДОМ КОТЕЛЬНИКОВА

2.1 Цель работы

Изучение основных закономерностей моделирования телекоммуникационных сигналов рядом Котельникова, особенностей представления рядом гармонических и импульсных сигналов.

2.2 Краткие теоретические сведения

Описание сигналов рядом Котельникова лежит в основе одноименной теоремы об их дискретном представлении. Функции

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin \omega_m(t - n\Delta t)}{\omega_m(t - n\Delta t)}, \quad \Delta t = \pi/\omega_m, \quad n = -\infty, \infty, \quad (2.1)$$

образующие ряд, обладают важными отличительными свойствами [1, 3]:

по сравнению с функциями всех других ортогональных систем имеют одинаковую форму и отличаются друг от друга только расположением на оси абсцисс (времени);

являются четными относительно точки $t = n\Delta t$ и принимают нулевые значения через равные интервалы Δt времени, благодаря чему широко используются при синтезе устройств коррекции формы телекоммуникационных сигналов;

имеют модуль $|S_\varphi(\omega)|$ спектральной плотности, равный $1/(2f_m)$ при $|\omega| \leq \omega_m$ и нулю при $|\omega| > \omega_m$, т.е. характеризуются равномерным и ограниченным по частоте амплитудным спектром, что позволяет построить на их основе эффективные измерительные сигналы;

система функций $\varphi_n(t)$ на бесконечном интервале $(-\infty; \infty)$ является ортогональной с единичным весом, при этом $\|\varphi_n(t)\|^2 = \Delta t$.

С учетом изложенных свойств сигнал, ограниченный по спектру верхней граничной частотой f_m , в любой точке $t \in (-\infty, \infty)$ представляется рядом Котельникова [1]:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{\sin \omega_m(t - n\Delta t)}{\omega_m(t - n\Delta t)}, \quad (2.2)$$

где $C_n = f(n\Delta t)$.

Очевидно, сигнал, имеющий конечную длительность τ_c (финитный сигнал), представляется конечной суммой ряда Котельникова, так как за пределами отрезка его существования отсчетные значения $f(n\Delta t)$ равны нулю. С учетом этого можно определить энергию

$$\mathcal{E} = \int_0^{\tau_c} f^2(t) dt = \Delta t \sum_{n=0}^N f^2(n\Delta t) \quad (2.3)$$

и среднюю на отрезке мощность

$$P_{cp} = \mathcal{E} / \tau_c = \frac{1}{\tau_c} \int_0^{\tau_c} f^2(t) dt = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f^2(n\Delta t) \quad (2.4)$$

континуального финитного сигнала, где $[0, \tau_c]$ – совмещенный левой границей с началом координат отрезок существования; $N = \tau_c / \Delta t = 2\tau_c f_m$ – так называемое число степеней свободы или база сигнала. Формула (2.4) показывает, что средняя мощность численно равна среднему квадрату отсчетных значений $f(n\Delta t)$.

2.3 Порядок выполнения работы

2.3.1 Математическое и физическое моделирование базового сигнала $\varphi_0(t)$

2.3.1.1 Изучить необходимые теоретические сведения. Проанализировать математическую модель $\varphi_0(t) = [\varphi_n(t)]_{n=0}$ (см. формулу (2.1)) исследуемого бесконечно протяженного непериодического сигнала, представить его графически.

2.3.1.2 В системе MathCAD запрограммировать модель $\varphi_0(t)$, на отрезке времени $[-T/2, T/2]$ при значениях параметров $T = 0,5$ мс и $f_m = 10^4$ Гц с шагом $\delta t = 0,001 \cdot T$ рассчитать отсчетные значения функции $\varphi_0(t)$ (соответствующие финитному сигналу $\varphi_{0T}^*(t) = \left\{ \varphi_0(t), [-0,5 \cdot T, 0,5 \cdot T] \right\}$, $\left\{ 0, (-\infty, -0,5 \cdot T), (0,5 \cdot T, \infty) \right\}$), создать файл с массивом отсчетных значений, построить график функции $\varphi_{0T}^*(t)$, сравнить его с графиком по п. 2.3.1.1.

2.3.1.3 Используя файл отсчетных значений, с помощью подсистемы генерирования программно-аппаратного комплекса сформировать в реальном масштабе времени периодический сигнал $\varphi_0^*(t)$ ($\varphi_0^*(t) = \varphi_{0T}^*(t)$) на отрезке $[-0,5 \cdot T, 0,5 \cdot T]$, подать его на входы осциллографа и анализатора спектра. С помощью осциллографа измерить амплитуду и длительность $\tau_{0,0}$ (на нулевом уровне) основного лепестка, количество, амплитуды и длительность боковых лепестков сигнала $\varphi_0^*(t)$, укладывающихся на периоде T повторения. Проанализировать и зарисовать структуру амплитудного спектра, наблюдаемого на экране анализатора спектра.

2.3.1.4 Повторить п. 2.3.1.3 для значений параметра T , равных 1, 2, 4 и 8 мс. Объяснить наблюдаемые изменения амплитудного спектра.

2.3.2 Математическое и физическое моделирование финитных $f_{1T}(t) - f_{4T}(t)$ и периодических $f_1(t) - f_4(t)$ сигналов

2.3.2.1 Проанализировать математическую модель финитного сигнала $f_{1T}(t) = \left\{ f_1(t), [0, T] \right\}$, где $f_1(t)$ – модель из таблицы 1.1, представить его графически.

2.3.2.2 В системе MathCAD запрограммировать модель $f_{1T}(t)$, при значениях параметров выполняемого варианта (см. табл. 1.2) на отрезке времени $[-T, 2T]$ с шагом $\delta t = 0,001 \cdot T$ рассчитать отсчетные значения функции $f_{1T}(t)$, построить ее график, сравнить его с графическим представлением по п. 2.3.2.1.

2.3.2.3 Построить модель аппроксимирующей (сигнал $f_{1T}(t)$) функции $f_{1T}^*(t)$ в форме конечной суммы ряда (2.2) Котельникова, запрограммировать ее в системе MathCAD. При значениях параметров выполняемого варианта и $f_m = 5/T$ на отрезке $[-T, 2T]$ с шагом $\delta t = 0,001 \cdot T$ рассчитать отсчетные значения функции $f_{1T}^*(t)$, построить ее график, сравнить с графиком по п. 2.3.2.2.

2.3.2.4 Повторить п. 2.3.2.3 при значениях параметра f_m , равных $10/T$, $20/T$, $40/T$ и $80/T$. Оценить степень приближения аппроксимирующей функции $f_{1T}^*(t)$ к исходной $f_{1T}(t)$ (на отрезках $[0, \tau]$, $[-T, 0]$, $[\tau, 2T]$) в зависимости от выбора параметра f_m .

2.3.2.5 Проанализировать математическую модель $f_1(t)$ периодического сигнала (см. табл. 1.1), запрограммировать ее в системе MathCAD. При значениях параметров выполняемого варианта на отрезке $[-T, 2T]$ с шагом $\delta t = 0,001 \cdot T$ рассчитать отсчетные значения функции $f_1(t)$, построить ее график.

2.3.2.6 Построить модель $f_1^*(t)$ в форме конечной суммы ряда (2.2) Котельникова, аппроксимирующей сигнал $f_1(t)$ на отрезке $[-T, 2T]$. Запрограммировать модель $f_1^*(t)$ в системе MathCAD, при значениях параметров выполняемого варианта и $f_m = 5/T$ на отрезке $[-T, 2T]$ с шагом $\delta t = 0,001 \cdot T$ рассчитать отсчетные значения функции $f_1^*(t)$, построить ее график, сравнить с графиком по п. 2.3.2.5. Создать файл с массивом отсчетных значений, соответствующих отрезку времени $[0, T]$.

2.3.2.7 Используя файл отсчетных значений, с помощью подсистемы генерирования сформировать в реальном масштабе времени периодический сигнал $f_1^*(t)$, подать его на входы осциллографа и анализатора спектра. С помощью осциллографа измерить амплитуду A , длительность $\tau_{0.5}$ и период T повторения импульсов. Проанализировать и зарисовать структуру амплитудного спектра, воспроизводимого на экране анализатора спектра.

2.3.2.8 Повторить п.2.3.2.6 и 2.3.2.7 при значениях параметра f_m , равных $10/T$, $20/T$, $40/T$ и $80/T$. Оценить степень отличия по форме наблюдаемого

$f_1^*(t)$ и исходного $f_1(t)$ сигналов (на отрезках $[0, \tau]$, $[\tau, T]$) в зависимости от выбора параметра f_m .

2.3.2.9 Повторить п. 2.3.2.1 – 2.3.2.8 применительно к сигналам $f_2(t)$ и $f_3(t)$ (см. табл. 1.1, 1.2).

2.3.2.10 Повторить п. 2.3.2.1 – 2.3.2.8 применительно к сигналу $f_4(t)$ при начальной фазе $\Theta=0$ (см. табл. 1.1, 1.2), используя в качестве f_m значения $3kf_{11}, 5kf_{11}, 7kf_{11}, 10kf_{11}$ и $20kf_{11}$.

2.4 Содержание отчета

1. Цель работы.

2. Математические модели и графики исходных $\varphi_0^*(t)$, $f_{1T}(t) - f_{4T}(t)$, $f_1(t) - f_4(t)$ и аппроксимирующих (при различных значениях f_m) $f_{1T}^*(t) - f_{4T}^*(t)$, $f_1^*(t) - f_4^*(t)$ сигналов.

3. Результаты измерений и структуры амплитудных спектров по п. 2.3.1.3, 2.3.1.4, 2.3.2.7 – 2.3.2.10.

4. Выводы.

2.5 Контрольные вопросы и задания

1. Условие ортогональности бесконечной системы комплекснозначных функций.

2. Условие минимальности средней квадратической погрешности представления сигнала конечной суммой обобщенного ряда Фурье.

3. Привести примеры полных и неполных ортогональных систем.

4. Сформулировать рекомендации по выбору подходящей ортогональной системы функций.

5. Объяснить, с какой целью при представлении сигнала рядом (2.2) Котельникова вводится ограничение по спектру верхней граничной частотой f_m .

6. Проверить размерности энергии (2.3) и средней мощности (2.4). Объяснить расхождения.

7. Предложите наиболее эффективный измерительный сигнал для измерения и контроля частотно-временных свойств канала передачи с верхней граничной частотой $f_m = 6$ МГц.

8. Сформулировать принципиальные отличия амплитудных спектров сигналов $\varphi_0(t)$, $\varphi_{0T}^*(t)$ и $\varphi_0^*(t)$. Объяснить изменения амплитудных спектров сигналов $\varphi_{0T}^*(t)$ и $\varphi_0^*(t)$ в зависимости от изменения параметра T .

9. Дать сравнительную оценку точности представления сигналов $f_{1T}(t) - f_{4T}(t)$ конечной суммой ряда Котельникова. Аргументацию подтвердить результатами математического моделирования.

10. Дать сравнительную оценку точности представления сигналов $f_1(t) - f_4(t)$ рядом Котельникова. Аргументацию подтвердить результатами математического и физического моделирования.

11. Какой из сигналов $f_{1T}(t) - f_{4T}(t)$ и $f_1(t) - f_4(t)$ и при каких условиях может быть точно представлен рядом (2.2) Котельникова. Аргументацию подтвердить результатами математического и физического моделирования.

Библиотека БГУИР

Лабораторная работа № 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ СИСТЕМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

3.1 Цель работы

Изучение основных закономерностей моделирования телекоммуникационных сигналов на основе преобразования Фурье, особенностей представления им непериодических и периодических сигналов.

3.2 Краткие теоретические сведения

Помимо описания сигналов во временной области (ортгоналными системами базовых функций), при моделировании СТК также широко применяют их представление в частотной области и на комплексной плоскости с помощью преобразований соответственно Фурье и Лапласа. Большинство современных программ математического моделирования линейных свойств сигналов реализуют классическое (непрерывное) преобразование Фурье или его последующее развитие в вариантах дискретного и быстрого преобразований.

Прямое преобразование Фурье ставит во взаимно однозначное соответствие $f(t) \Leftrightarrow S(\omega)$ исходному сигналу $f(t)$ – функции времени – спектральную плотность (спектральную характеристику)

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (3.1)$$

которая в общем случае является комплекснозначной функцией частоты ω . Обратный переход от спектральной плотности $S(\omega)$ к сигналу $f(t)$ выполняется с помощью обратного преобразования Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.2)$$

Известно [1, 3]: для представления интегралом (3.1) Фурье функция (сигнал) $f(t)$ должна удовлетворять на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$ тем же условиям Дирихле и абсолютной интегрируемости, что и в случае ряда Фурье. Важно отметить, что условию абсолютной интегрируемости отвечают все непериодические финитные сигналы, а также непериодические бесконечно протяженные, описываемые функциями $f(t)$ с быстро спадающими “хвостами”.

Аналогично спектральным коэффициентам C_n ряда Фурье (см. (1.1)) спектральную плотность $S(\omega)$ представляют в виде

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = A(\omega) - jB(\omega) = |S(\omega)|e^{j\Theta(\omega)}, \quad (3.3)$$

$$\text{где } |S(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}; \quad \Theta(\omega) = -\text{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)}.$$

Модуль $|S(\omega)|$ (аргумент $\Theta(\omega)$) спектральной плотности является четной (нечетной) функциями частоты и описывает непрерывный математический амплитудный (фазовый) спектр непериодического сигнала.

Основываясь на соотношении (3.3), обратное преобразование (3.2) представляется также в форме

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)| e^{j\Theta(\omega)} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S(\omega)| \cos(\omega t + \Theta(\omega)) d\omega. \quad (3.4)$$

Она широко применяется в практике моделирования СТК, особенно при использовании численных методов.

Сравнивая математические модели спектральной плотности $S(\omega)$ (3.1) и спектральных коэффициентов C_n (1.1) ряда Фурье, можно установить:

$$S(n\omega_1)/T = C_n. \quad (3.5)$$

Это значит, что непрерывный спектр непериодического сигнала и огибающая дискретного спектра соответствующего ему периодического сигнала совпадают по форме. Соотношение (3.5) позволяет, зная выражение для спектральных коэффициентов, сразу перейти к выражению для спектральной плотности и, наоборот, от спектральной плотности к спектральным коэффициентам.

В практике моделирования СТК широко применяют следующие свойства преобразования Фурье [1].

1.Свойство линейности. Если $f_i(t) \Leftrightarrow S_i(\omega)$ ($i = \overline{1, N}$), то

$$f(t) = \sum_{i=1}^N A_i f_i(t) \Leftrightarrow S(\omega) = \sum_{i=1}^N A_i S_i(\omega) \quad (A_i - \text{постоянные коэффициенты}), \text{ т.е. ли-}$$

нейной суперпозиции сигналов соответствует линейная суперпозиция их спектральных плотностей.

2.Свойство сдвига по времени. Если $f_1(t) \Leftrightarrow S_1(\omega)$, то

$$f_2(t) = f_1(t - t_0) \Leftrightarrow S_2(\omega) = S_1(\omega) e^{-j\omega t_0}, \text{ т.е. запаздывающий (опережающий) сдвиг по времени исходного сигнала } f_1(t) \text{ изменяет только фазовый спектр.}$$

3.Свойство изменения масштаба по времени. Если $f_1(t) \Leftrightarrow S_1(\omega)$, то

$$f_2(t) = f_1(nt) \Leftrightarrow S_2(\omega) = \frac{1}{n} S_1\left(\frac{\omega}{n}\right), \text{ т.е. растяжению } (n < 1) \text{ или сжатию } (n > 1)$$

исходного сигнала по времени в n раз соответствует такое же по величине сжатие (растяжение) его спектральной плотности по частоте при одновременном увеличении (уменьшении) амплитуд спектральных компонент в n раз.

4.Свойство смещения спектра сигнала. Если $f_1(t) \Leftrightarrow S_1(\omega)$, то

$$f_2(t) = f_1(t) \cos(\omega_0 t + \Theta_0) \Leftrightarrow S_2(\omega) = \frac{1}{2} \left(e^{j\Theta_0} S_1(\omega - \omega_0) + e^{-j\Theta_0} S_1(\omega + \omega_0) \right), \text{ т.е.}$$

умножение исходного сигнала $f_1(t)$ на гармоническое колебание с частотой ω_0 приводит к расщеплению его спектра на две составляющие, смещаемые по частоте на $\pm \omega_0$.

5.Свойство дифференцирования сигнала. Если $f_1(t) \Leftrightarrow S_1(\omega)$, то

$f_2(t) = f_1'(t) \Leftrightarrow S_2(\omega) = j\omega S_1(\omega) = \omega S_1(\omega) e^{j\frac{\pi}{2}}$, т.е. дифференцирование приводит к относительному уменьшению (увеличению) амплитуд низкочастотных (высокочастотных) спектральных компонент исходного сигнала и дополнительному (опережающему) приращению их начальных фаз на угол $\Theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

6.Свойство интегрирования сигнала. Если $f_1(t) \Leftrightarrow S_1(\omega)$, то

$f_2(t) = \int_{-\infty}^t f_1(t) dt \Leftrightarrow S_2(\omega) = \frac{1}{j\omega} S_1(\omega) = \frac{S_1(\omega)}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$, т.е. интегрирование приводит к относительному увеличению (уменьшению) амплитуд низкочастотных (высокочастотных) спектральных компонент исходного сигнала и дополнительному (запаздывающему) приращению их начальных фаз на угол $\Theta_0 = -\frac{\pi}{2}$.

Свойство интегрирования применимо к сигналам, для которых $\lim_{\omega \rightarrow 0} S_1(\omega) = 0$.

7.Свойство произведения сигналов. Если $f_1(t) \Leftrightarrow S_1(\omega)$ и $f_2(t) \Leftrightarrow S_2(\omega)$,

то произведение $f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) \Leftrightarrow S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega - x) S_2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(x) S_2(\omega - x) dx$, т.е. произведению исходных сигналов соответствует свертка их спектральных плотностей.

8.Свойство произведения спектров. Если $S_1(\omega) \Leftrightarrow f_1(t)$ и

$S_2(\omega) \Leftrightarrow f_2(t)$, то $S(\omega) = S_1(\omega) \cdot S_2(\omega) \Leftrightarrow f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau =$

$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$, т.е. произведению спектральных плотностей исходных сигналов соответствует свертка этих сигналов.

9.Свойство взаимозаменяемости времени и частоты. Если

$f(t) \Leftrightarrow S(\omega)$, то $S(t) \Leftrightarrow F(\omega) = 2\pi f(\omega)$, т.е. сигналу $S(t)$, повторяющему по форме спектральную плотность $S(\omega)$ исходного сигнала $f(t)$, соответствует спектральная плотность $F(\omega)$, повторяющая по форме исходный сигнал. Свойство справедливо для сигнала, описываемого четной функцией $f(t)$.

10.Равенство Парсеваля. Если $f(t) \Leftrightarrow S(\omega)$, то $\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt =$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega$. Равенство Парсеваля, вытекающее из свойств

ва произведения сигналов, определяет энергию непериодического сигнала $f(t)$ через спектральную плотность $|S(\omega)|^2$ энерги. Оно широко применяется в СТК при моделировании энергетических характеристик сигналов, включая определение уровней внеполосных излучений.

В теории математического моделирования СТК особое место принадлежит δ -функции

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases} \infty, & t=t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}, \quad (3.6)$$

которая [1, 3, 6]:

существует в единственной точке $t = t_0$ (при $t_0 = 0$ $\delta(t-t_0) = \delta(t)$);

имеет размерность $[\delta(t-t_0)] = c^{-1}$ и площадь, равную единице;

обладает фильтрующим (стробирующим) свойством;

имеет спектральную плотность $S_\delta(\omega) = e^{-j\omega t_0}$ и поэтому обладает бесконечно большой энергией.

Применяя к спектральной плотности $S_\delta(\omega)$ обратное преобразование (3.2) Фурье, получаем определение функции $\delta(t-t_0)$ через частотную область:

$$\delta(t-t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega(t-t_0)} d\omega. \quad (3.7)$$

Формально заменяя в выражении (3.7) время $t(t_0)$ на частоту $\omega(\omega_0)$, а частоту $\omega(\omega_0)$ на время $t(t_0)$, приходим к определению

$$\delta(\omega - \omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm(\omega - \omega_0)t} dt \quad (3.8)$$

δ -функции на оси частот, которая также широко применяется при моделировании СТК.

Использование δ -функции позволяет распространить обычные правила дифференцирования также на кусочно-непрерывные функции с разрывами первого рода, часто применяемые для описания сигналов. Можно показать [1], что функция $f(t)$ в точке $t = t_0$ разрыва первого рода имеет производную

$$f'(t_0) = (A_2 - A_1)\delta(t-t_0), \quad (3.9)$$

где $A_1 = \lim_{t \rightarrow t_0 - 0} f(t)$; $A_2 = \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} f(t)$.

На примерах совместного применения свойств преобразования Фурье и δ -функции при моделировании сигналов, описываемых кусочно-непрерывными функциями и их производными, можно установить общую закономерность [1, 3]: сигнал, представляемый функцией $f(t)$, в n -й производной $f^{(n)}(t)$ которой возникает δ -функция, обладает амплитудным спектром, убывающим на высоких частотах по закону $1/\omega^n$. Если одновременно с убыва-

нием спектра наблюдается также его пульсация, то это свидетельствует о наличии в сигнале (его производных) нескольких, по крайней мере двух δ -функций.

С помощью δ -функции оказывается возможным преобразовывать по Фурье периодические сигналы, не удовлетворяющие условию абсолютной интегрируемости. С учетом этого периодический сигнал $f(t)$, представляемый тригонометрическим рядом Фурье в форме (1.3), имеет спектральную плотность

$$S(\omega) = 2\pi A_0 \delta(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \pi \left(e^{j\Theta_n} \delta(\omega - n\omega_1) + e^{-j\Theta_n} \delta(\omega + n\omega_1) \right) \quad (3.10)$$

в виде множества δ -функций на частотах $n\omega_1$ ($n = \overline{-\infty, \infty}$).

3.3 Порядок выполнения работы

3.3.1 Моделирование базового сигнала $\varphi_0(t)$ ряда Котельникова

3.3.1.1 Изучить необходимые теоретические сведения. Проанализировать математическую модель $\varphi_0(t) = [\varphi_n(t)]_{n=0}$ (см. формулу (2.1)) исследуемого бесконечно протяженного непериодического сигнала, представить его графически.

3.3.1.2 В системе MathCAD запрограммировать модель $\varphi_0(t)$, на отрезке времени $[-T/2, T/2]$ при значениях параметров $T = 0,5$ мс и $f_m = 10^4$ Гц с шагом $\delta t = 0,001 \cdot T$ рассчитать отсчетные значения функции $\varphi_0(t)$, построить ее график, сравнить последний с графиком по п. 3.3.1.1.

3.3.1.3 В системе MathCAD запрограммировать модель (3.1), взять временной отрезок $[-T/2, T/2]$ и шаг $\delta t = 0,001 \cdot T$ интегрирования, на частотном отрезке $[-F, F]$ при значениях параметров $T = 0,5$ мс, $f_m = 10^4$ Гц и $F = 10^5$ Гц с шагом $\delta f = F/1000$ рассчитать отсчетные значения спектральной плотности $S_\varphi^*(\omega)$, создать файл с массивом отсчетных значений, построить график функции $|S_\varphi^*(\omega)|$.

3.3.1.4 В системе MathCAD запрограммировать модель (3.2), взять частотный отрезок $[-F, F]$ и шаг $\delta f = F/1000$ интегрирования, на временном отрезке $[-T/2, T/2]$, используя файл отсчетных значений $S_\varphi^*(\omega)$ и значения параметров T и F по п. 3.3.1.3, с шагом $\delta t = 0,001 \cdot T$ рассчитать отсчетные значения аппроксимирующей функции $\varphi_0^*(t)$, построить ее график.

3.3.1.5 Повторить п. 3.3.1.3 и 3.3.1.4 для значений параметра T , равных 1, 2, 4 и 8 мс. Сравнить получаемые графики функций $S_\varphi^*(\omega)$ и $\varphi_0^*(t)$ с исходными графиками $S_\varphi(\omega)$ и $\varphi_0(t)$ ($S_\varphi(\omega)$ – спектральная плотность базового сигнала

$\varphi_0(t)$). Проанализировать и объяснить наблюдаемые изменения функций $S_\varphi^*(\omega)$ и $\varphi_0^*(t)$ в зависимости от выбора параметра T .

3.3.2 Моделирование сигнала $f_{1T}(t)$

3.3.2.1 Проанализировать математическую модель финитного сигнала $f_{1T}(t) = \left\{ f_1(t), [0, T] \right\}$, где $f_1(t)$ – модель из таблицы 1.1. В системе MathCAD запрограммировать модель $f_{1T}(t)$, при значениях параметров выполняемого варианта (см. табл. 1.2) на отрезке времени $[-T, 2T]$ с шагом $\delta t = 0,001 \cdot T$ рассчитать отсчетные значения функции $f_{1T}(t)$, построить ее график.

3.3.2.2 С помощью прямого преобразования (3.1) Фурье найти спектральную плотность $S_{1T}(\omega)$ сигнала $f_{1T}(t)$. Ее же получить, используя взаимосвязь (3.5) и данные таблицы 1.1. Сравнить полученные выражения.

3.3.2.3 Запрограммировать модель $S_{1T}(\omega)$ в системе MathCAD, на частотном отрезке $[-F, F]$ при значениях параметров выполняемого варианта (см. табл. 1.2) и $F = 5/T$ с шагом $\delta f = F/1000$ рассчитать отсчетные значения модуля $|S_{1T}(\omega)|$ и аргумента $\Theta_{1T}(\omega)$ спектральной плотности, создать файл с массивом отсчетных значений, построить графики функций $|S_{1T}(\omega)|$ и $\Theta_{1T}(\omega)$.

3.3.2.4 Взять частотный отрезок $[-F, F]$ и шаг $\delta f = F/1000$ интегрирования, по запрограммированной модели (3.2) на временном отрезке $[-T, 2T]$, используя файл отсчетных значений $|S_{1T}(\omega)|$ и $\Theta_{1T}(\omega)$, с шагом $\delta t = 0,001 \cdot T$ рассчитать отсчетные значения аппроксимирующей функции $f_{1T}^*(t)$, построить ее график, сравнить с графиком по п. 3.3.2.1.

3.3.2.5 Используя график функции $f_{1T}^*(t)$, измерить: длительность τ_ϕ фронта (на уровнях 0,1-0,9) и длительность $\tau_{0,5}$ (на уровне 0,5) импульса; наибольшую (нормированную) амплитуду Δ_{\max} выбросов на плоской части импульса (в процентах); эффективную длительность $\tau_{\text{эфф}}$ переходного процесса.

3.3.2.6 Повторить п. 3.3.2.3 и 3.3.2.4 при значениях параметра F , равных $10/T$, $20/T$, $40/T$ и $80/T$. Оценить степень приближения аппроксимирующей функции $f_{1T}^*(t)$ к исходной $f_{1T}(t)$ (на отрезках $[0, \tau]$, $[-T, 0]$, $[\tau, 2T]$) в зависимости от выбора параметра F . По результатам измерений построить графики зависимостей $\tau_\phi = \varphi_1(F)$, $\Delta_{\max} = \varphi_2(F)$ и $\tau_{\text{эфф}} = \varphi_3(F)$.

3.3.3 Моделирование сигналов $f_{2T}(t) - f_{4T}(t)$

3.3.3.1 Повторить п. 3.3.2.1 для сигнала $f_{2T}(t)$ (см. табл. 1.1).

3.3.3.2 Используя взаимосвязь (3.5) и данные табл. 1.1, найти спектральную плотность $S_{2T}(\omega)$ сигнала $f_2(t)$.

3.3.3.3 Повторить п. 3.3.2.3, 3.3.2.4 и 3.3.2.6 для сигнала $f_{2T}(t)$.

3.3.3.4 Повторить п. 3.3.3.1 – 3.3.3.3 для сигналов $f_3(t)$ и $f_4(t)$ (см. табл. 1.1, 1.2). При этом в случае сигнала $f_4(t)$: принять $\Theta=0$; в качестве F использовать значения $3kf_{11}, 5kf_{11}, 7kf_{11}, 10kf_{11}$ и $20kf_{11}$.

3.3.3.5 Сравнить амплитудные и фазовые спектры сигналов $f_{1T}(t)$ – $f_{4T}(t)$.

3.4 Содержание отчета

1. Цель работы.

2. Математическая модель и график исходного сигнала $\varphi_0(t)$, графики (при различных значениях T) спектральных плотностей $S_\varphi^*(\omega)$ и аппроксимирующих функций $\varphi_0^*(t)$.

3. Математические модели и графики исходных сигналов $f_{1T}(t)$ – $f_{4T}(t)$, их амплитудных $|S_{1T}(\omega)|$ – $|S_{4T}(\omega)|$ и фазовых $\Theta_{1T}(\omega)$ – $\Theta_{4T}(\omega)$ спектров, аппроксимирующих (при различных значениях F) функций $f_{1T}^*(t)$ – $f_{4T}^*(t)$.

4. Результаты измерений по п. 3.3.2.5, графики зависимостей по п. 3.3.2.6.

5. Выводы.

3.5 Контрольные вопросы и задания

1. Представляются ли интегралом (3.1) Фурье сигналы

$$f_1(t) = \begin{cases} A_1 \cos(\omega_0 t + \Phi_0), & [0, \infty) \\ 0, & (-\infty, 0) \end{cases} \text{ и } f_2(t) = \begin{cases} f_2(t+T), & [0, \infty) \\ 0, & (-\infty, 0) \end{cases} ?$$

2. Доказать, что амплитудный спектр $|S(\omega)|$ непериодического сигнала является четной, а фазовый спектр $\Theta(\omega)$ – нечетной функциями частоты.

3. Доказать взаимосвязь (3.5) спектральной плотности $S(\omega)$ и спектральных коэффициентов C_n ряда Фурье.

4. При каких условиях дифференцирующая и интегрирующая цепи выполняют с минимальной погрешностью соответствующие математические операции над сигналами? Доказать.

5. Доказать: свойство сдвига по времени; свойство изменения масштаба по времени; свойство смещения спектра сигнала.

6. Доказать свойство интегрирования сигнала, используя свойство дифференцирования.

7. Ограничения при применении свойства интегрирования сигнала.

8. Доказать: свойство произведения сигналов; свойство произведения спектров.

9. Энергия взаимодействия двух сигналов. Выражение получить из свойства произведения сигналов.

10. Доказать, что свойство взаимозаменяемости времени и частоты строго справедливо только для сигналов, описываемых четными функциями.

11. Предложить набор функций, предельным переходом под знаком которых можно ввести δ -функцию.

12. Что можно сказать о форме сигнала, амплитудный спектр которого убывает по закону: $1/\omega$; $1/\omega^2$?

13. Объяснить изменения формы сигнала $\varphi_0^*(t)$ и его амплитудного спектра $S_\varphi^*(\omega)$ в зависимости от изменения параметра T .

14. Проанализировать модели $f_{1T}(t)-f_{4T}(t)$ с позиции появления δ -функции в их производных. Что можно сказать о скорости убывания амплитудных спектров сигналов $f_{1T}(t)-f_{4T}(t)$? Аргументацию подтвердить результатами математического моделирования амплитудных спектров $|S_{1T}(\omega)|-|S_{4T}(\omega)|$.

15. Установить эмпирические зависимости $\tau_\phi = \varphi_1(F), \Delta_{\max} = \varphi_2(F)$ и $\tau_{\partial\phi} = \varphi_3(F)$.

16. Дать сравнительную оценку точности представления сигналов $f_{1T}(t)-f_{4T}(t)$ аппроксимирующими функциями $f_{1T}^*(t)-f_{4T}^*(t)$. Аргументацию подтвердить результатами математического моделирования.

17. Найти спектральную плотность и энергию сигналов:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \begin{cases} \cos \omega_0 t, & [-\pi/2\omega_0, \pi/2\omega_0] \\ 0, &]-\pi/2\omega_0, \pi/2\omega_0[\end{cases}; & f_2(t) &= \begin{cases} A \sin \omega_0 t, & [0, \pi/\omega_0] \\ 0, &]0, \pi/\omega_0[\end{cases}; \\ f_3(t) &= \begin{cases} 1, & [-\tau/2, \tau/2] \\ 0, &]-\tau/2, \tau/2[\end{cases}; & f_4(t) &= \begin{cases} 2U_0 t/T, & [-T/2, T/2] \\ 0, &]-T/2, T/2[\end{cases}; \\ f_5(t) &= \begin{cases} 2U_0(t-T/2)/T, & [0, T] \\ 0, &]0, T[\end{cases}; & f_6(t) &= \begin{cases} U_0, & [0, T/2] \\ -U_0, & [-T/4, 0] \\ 0, &]-T/4, T/2[\end{cases}; \\ f_7(t) &= f_4(t) \cdot \cos \omega_0 t; & f_8(t) &= f_5(t) \cdot \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

18. Найти спектральную плотность сигналов:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 0,25, (-\infty, \infty); & f_2(t) &= \cos \omega_0 t, (-\infty, \infty); \\ f_3(t) &= 2 + 0,5 \cdot \cos 4\pi t + 3 \cos 10\pi t, (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

19. Найти спектральную плотность сигналов $f_1(t)-f_4(t)$ (см. табл. 1.1).

Лабораторная работа № 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ СИСТЕМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

4.1 Цель работы

Изучение основных закономерностей моделирования телекоммуникационных сигналов на основе преобразования Лапласа, особенностей представления им различных континуальных детерминированных сигналов (непериодических финитных, непериодических бесконечно протяженных, периодических).

4.2 Краткие теоретические сведения

Моделирование сигналов СТК на комплексной плоскости получает все большее распространение. Известно [1, 6], что для преобразования по Лапласу комплекснозначная функция $f(t)$ (сигнал) должна отвечать трем условиям:

удовлетворять условию Гёльдера, которое по смыслу соответствует условиям Дирихле;

возрастать не быстрее показательной функции, т.е. для всех $t \in (-\infty, \infty)$ иметь такие постоянные $M > 0$ и $\sigma_0 \geq 0$, что $|f(t)| \leq Me^{\sigma_0 t}$, где σ_0 – показатель роста функции $f(t)$;

удовлетворять условию $f(t) = 0$ при $t < 0$ (оно всегда обеспечивается переходом от функции $f(t)$ к функции $\varphi(t) = \gamma(t)f(t)$, где $\gamma(t)$ – функция Хевисайда).

Функцию $f(t)$, отвечающую этим условиям, часто называют функцией-оригиналом. Важно отметить, что все сигналы, используемые в практике моделирования СТК, описываются функциями-оригиналами, т.е. преобразуемы по Лапласу.

Прямое преобразование Лапласа ставит во взаимно однозначное соответствие $f(t) \Leftrightarrow F(p)$ исходному сигналу $f(t)$ – функции времени – изображению

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (4.1)$$

Изображение $F(p)$ – функция комплексного переменного $p = \sigma + j\omega$ – строго определено и аналитично в полуплоскости $Re p > \sigma_0$, где сходимость равномерна относительно $\arg p$: $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$ по любому пути, при котором $\sigma \rightarrow \infty$.

На практике область определения распространяют и на полуплоскость $Re p < \sigma_0$, где функция $F(p)$ имеет особые точки [6].

Обратный переход от изображения $F(p)$ к сигналу (оригиналу) $f(t)$ выполняется с помощью обратного преобразования Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p)e^{pt} dp, \quad (a > \sigma_0). \quad (4.2)$$

Интеграл (4.2), часто называемый интегралом Римана-Меллина, восстанавливает значение функции $f(t)$ в любой точке, где выполняется условие Гельдера.

В практике моделирования СТК широко применяют следующие известные свойства преобразования Лапласа [1].

1. Свойство линейности. Если $f_i(t) \Leftrightarrow F_i(p)$ ($i = \overline{1, N}$), то $f(t) = \sum_{i=1}^N A_i f_i(t) \Leftrightarrow F(p) = \sum_{i=1}^N A_i F_i(p)$ (A_i – постоянные коэффициенты), т.е. линейной суперпозиции оригиналов $f_i(t)$ соответствует линейная суперпозиция их изображений $F_i(p)$.

2. Теорема сдвига. Если $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(p)$, то $f_2(t) = f_1(t)e^{p_0 t} \Leftrightarrow F_2(p) = F_1(p - p_0)$ ($p_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ – произвольное комплексное число), т.е. умножению оригинала $f_1(t)$ на комплекснозначную функцию $e^{p_0 t}$ соответствует “сдвиг” его изображения $F(p)$ на p_0 .

3. Теорема подобия. Если $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(p)$, то $f_2(t) = f_1(nt) \Leftrightarrow F_2(p) = \frac{1}{n} F_1\left(\frac{p}{n}\right)$.

4. Дифференцирование оригинала. Если при $t \in (0, \infty)$ функция $f_1(t)$ является дифференцируемой (в окрестности любой точки раскладывается в ряд Тейлора) и $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(p)$, то $f_2(t) = f_1^{(n)}(t) \Leftrightarrow F_2(p) = p^n F_1(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$, где $f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f^{(k)}(t)$, $k = \overline{0, n-1}$. Очевидно, если $f^{(k)}(0) = 0$ ($k = \overline{0, n-1}$), то $f_2(t) = f_1^{(n)}(t) \Leftrightarrow F_2(p) = p^n F_1(p)$, т.е. n -кратное дифференцирование оригинала при нулевых начальных условиях соответствует умножению его изображения на множитель p^n дифференцирования оригинала.

5. Дифференцирование изображения. Если $F_1(p) \Leftrightarrow f_1(t)$, то $F_2(p) = F_1^{(n)}(p) \Leftrightarrow f_2(t) = (-1)^n t^n f(t)$, т.е. n -кратное дифференцирование изображения соответствует умножению оригинала на множитель $(-1)^n t^n$ дифференцирования изображения. Выполняя n -кратное дифференцирование изображения $\Gamma(p)$ функции $\gamma(t)$ Хевисайда, можно получить: $f(t) = t^n \Leftrightarrow F(p) = n! / p^{n+1}$. Это соотношение – важное следствие из свойства

дифференцирования изображения, широко используемое в практике моделирования.

6. Интегрирование оригинала. Если $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(p)$, то

$f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) d\tau \Leftrightarrow F_2(p) = F_1(p)/p$, т.е. интегрирование оригинала соответствует умножению его изображения на множитель $1/p$ интегрирования оригинала.

7. Интегрирование изображения. Если $F_1(p) \Leftrightarrow f_1(t)$, то

$F_2(p) = \int_p^\infty F_1(p) dp \Leftrightarrow f_2(t) = f_1(t)/t$, т.е. интегрирование изображения соответствует умножению оригинала на множитель $1/t$ интегрирования изображения.

8. Теорема умножения изображений. Если $F_1(p) \Leftrightarrow f_1(t)$ и

$F_2(p) \Leftrightarrow f_2(t)$, то $F(p) = F_1(p)F_2(p) \Leftrightarrow f(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$, т.е. произведению изображений соответствует свертка оригиналов. В практике моделирования особое значение имеет следствие из теоремы умножения изображений, две симметричные формы которого образуются с дополнительным использованием свойств линейности и дифференцирования оригинала:

$$pF_1(p)F_2(p) \Leftrightarrow f_1(0)f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau)f_2(t-\tau)d\tau;$$

$$pF_1(p)F_2(p) \Leftrightarrow f_2(0)f_1(t) + \int_0^t f_2'(\tau)f_1(t-\tau)d\tau.$$

Из последних выражений непосредственно вытекают все четыре известные разновидности интеграла Дюамеля [1].

9. Теорема запаздывания. Если $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(p)$, то при любом $t_0 \geq 0$

$f_2(t) = f_1(t-t_0) \Leftrightarrow F_2(p) = F_1(p)e^{-pt_0}$, т.е. запаздыванию оригинала (сигнала) соответствует умножение его изображения на множитель e^{-pt_0} запаздывания.

10. Предельные соотношения. Если $f(t)$ и её производная $f'(t)$ являются оригиналами и $f(t) \Leftrightarrow F(p)$, то $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f(t) = f(0)$ и

$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$, где функция $pF(p)$ сходится при $p \rightarrow \infty$ ($p \rightarrow 0$) равномерно относительно $\arg p$ в полуплоскости $Re p > \sigma_0$ аналитичности функции $F(p)$.

В практике моделирования СТК широко применяют периодические в широком смысле $f(t)=f(t+T)$ ($-\infty < t < \infty$) и периодические в узком смысле $f_1(t)=\begin{cases} f(t), [0, \infty) \\ 0, (-\infty, 0) \end{cases}$ сигналы [1]. Они имеют одинаковое изображение

$$F(p) = F_1(p) = \frac{F_T(p)}{1 - e^{-pT}}. \quad (4.3)$$

где $F_T(p) = \int_0^T f_T(t) e^{-pt} dt$ изображение так называемого базового сигнала $f_T(t) = \begin{cases} f(t), [0, T] \\ 0,]0, T[\end{cases}$, которое аналитично во всей открытой комплексной плоскости. Анализ выражения (4.3) с учетом последнего замечания позволяет констатировать следующее [1, 6].

1. Изображение периодического (в широком и узком смысле) сигнала образуется умножением изображения $F_T(p)$ соответствующего базового сигнала на множитель $(1 - e^{-pT})^{-1}$ периодичности.

2. Особыми точками функции $F(p)$ являются бесконечное число простых полюсов $P_k = j2\pi k / T$ ($k = -\infty, \infty$), расположенных на мнимой оси комплексной плоскости Их положение здесь определяется только периодом T повторения сигнала и не зависит от его формы.

В общем случае переход от изображения $F(p)$ к самому сигналу (оригиналу) $f(t)$ выполняет обратное преобразование Лапласа. Однако непосредственное вычисление интеграла (4.2) является сложной и громоздкой задачей. Поэтому на практике, по возможности, переход к оригиналу осуществляют с помощью двух известных теорем разложения. При этом наиболее часто используется вторая теорема [6].

Вторая (обобщенная) теорема разложения. Если изображение $F(p)$ является функцией мероморфной (особыми точками являются только полюсы), аналитической в полуплоскости $Re p > \sigma_0$ и в бесконечно удаленной точке

$\left(\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0 \right)$ и если абсолютно сходится интеграл $\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p) dp$, то

$$f(t) = \sum_{P_k} \text{res}(F(p) e^{pt}), \quad (4.4)$$

т. е. искомый сигнал $f(t)$ (оригинал) равен сумме вычетов в полюсах его изображения $F(p)$, поскольку целая трансцендентная функция e^{pt} аналитична во всей открытой p -плоскости.

Изображение, удовлетворяющее условиям теоремы, представляет собой отношение $(F(p) = A(p)/B(p))$ двух целых функций (целых рациональных, целых трансцендентных), в общем случае содержит l полюсов разного порядка.

Поэтому выражение (4.4) с учетом механизма вычисления вычета в полюсе порядка n принимает вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \left(\frac{A(p)}{B(p)} (p - p_k)^{n_k} e^{pt} \right)^{(n_k - 1)}, \quad (4.5)$$

где p_k – полюс порядка n_k .

Наиболее часто полюсы p_k являются простыми (по крайней мере, к этому целесообразно стремиться). При таком подходе соотношение (4.5) существенно упрощается:

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (4.6)$$

где $B'(p_k) = \left(B'(p) \right)_{p=p_k}$.

Вычисление вычетов, основанное на операции дифференцирования, выполняется достаточно просто, особенно в случае простых полюсов (см. выражение (4.6)). Поэтому обобщенная теорема разложения широко используется на практике.

Если применить к изображению (4.3) периодического сигнала обобщенную теорему разложения, то можно получить представление этого сигнала в форме ряда Фурье. Последнее с учетом простоты механизма (4.6) вычисления вычетов делает возможным разложение в ряд Фурье с помощью преобразования Лапласа.

4.3 Порядок выполнения работы

4.3.1 Математическое моделирование сигналов $f_{1T}(t)$ и $f_1(t)$

4.3.1.1 Изучить необходимые теоретические сведения. Проанализировать математическую модель финитного сигнала $f_{1T}(t) = \left\{ \begin{matrix} f_1(t), [0, T] \\ 0, (-\infty, 0), (T, \infty) \end{matrix} \right\}$, где $f_1(t)$ – модель из таблицы 1.1, представить его графически. Используя теорему запаздывания и свойство линейности, найти в общем виде изображение $F_{1T}(p)$ сигнала $f_{1T}(t)$. Получить конкретную модель $F_{1T}(p)$, подставив значения параметров выполняемого варианта (см. табл. 1.2).

4.3.1.2 Проанализировать математическую модель периодического сигнала $f_1(t)$ (см. табл. 1.1). Получить его изображение $F_1(p)$ при значениях параметров выполняемого варианта. Найти особые точки функции $F_1(p)$, изобразить ее корневой портрет, дать качественную характеристику амплитудного спектра сигнала $f_1(t)$ и его изменений при вариации параметров выполняемого варианта.

4.3.1.3 Войти в программное обеспечение программно-аппаратного комплекса. Создать оперативную библиотеку сигналов. Просмотреть стационар-

ную библиотеку базовых сигналов, выбрать из нее базовые элементы, необходимые для синтеза сигналов $f_{1T}(t)$ и $f_1(t)$. Используя возможности стационарной библиотеки, при значениях параметров выполняемого варианта синтезировать финитный $f_{1T}(t)$ и периодический $f_1(t)$ сигналы, проанализировать (автоматически сформированные) соответствующие им изображения $F_{1T}(p)$ и $F_1(p)$, сравнить последние с конкретными моделями $F_{1T}(p)$ и $F_1(p)$ по п. 4.3.1.1 и 4.3.1.2, записать параметры моделей сигналов $f_{1T}(t)$ и $f_1(t)$ в оперативную библиотеку.

4.3.1.4 Используя конкретную модель $F_{1T}(p)$ и взаимосвязь прямых преобразований Фурье (3.1) и Лапласа (4.1), системе MathCAD запрограммировать модель $S_{1T}(\omega)$ (спектральную плотность сигнала $f_{1T}(t)$), на частотном отрезке $[-80/T, 80/T]$ при значении параметра T по выполняемому варианту с шагом $\delta f = 80/(1000T)$ рассчитать отсчетные значения модуля $|S_{1T}(\omega)|$ и аргумента $\Theta_{1T}(\omega)$ спектральной плотности, построить графики функций $|S_{1T}(\omega)|$ и $\Theta_{1T}(\omega)$.

4.3.2 Математическое моделирование сигналов $f_{2T}(t) - f_{4T}(t)$ и $f_2(t) - f_4(t)$

4.3.2.1 Проанализировать математическую модель финитного сигнала $f_{2T}(t) = \left\{ \begin{matrix} f_2(t), [0, T] \\ 0, (-\infty, 0), (T, \infty) \end{matrix} \right\}$ ($f_2(t)$ – модель из таблицы 1.1), представить его графически. Используя функциональную связь сигналов $f_{2T}(t)$ и $f_{1T}(t)$, теорему интегрирования оригинала и другие свойства преобразования Лапласа, на базе изображения $F_{1T}(p)$ найти в общем виде изображение $F_{2T}(p)$ сигнала $f_{2T}(t)$. Получить конкретную модель $F_{2T}(p)$, подставив значения параметров выполняемого варианта (см. табл. 1.2).

4.3.2.2 Повторить п. 4.3.1.2 – 4.3.1.4 применительно к сигналам $f_{2T}(t)$ и $f_2(t)$.

4.3.2.3 Проанализировать математическую модель финитного сигнала $f_{3T}(t) = \left\{ \begin{matrix} f_3(t), [0, T] \\ 0, (-\infty, 0), (T, \infty) \end{matrix} \right\}$ ($f_3(t)$ – модель из таблицы 1.1), представить его графически. Используя функциональную связь сигналов $f_{3T}(t)$ и $f_{2T}(t)$, теорему интегрирования оригинала и другие свойства преобразования Лапласа, на базе изображения $F_{2T}(p)$ найти в общем виде изображение $F_{3T}(p)$ сигнала $f_{3T}(t)$. Получить конкретную модель $F_{3T}(p)$, подставив значения параметров выполняемого варианта.

4.3.2.4 Повторить п. 4.3.1.2 – 4.3.1.4 применительно к сигналам $f_{3T}(t)$ и $f_3(t)$.

4.3.2.5 Проанализировать математические модели полигармонического периодического сигнала $f_4(t)$ (см. табл. 1.1) и его отрезка – финитного сигнала $f_{4T}(t) = \left\{ \begin{matrix} f_4(t), [0, T] \\ 0, (-\infty, 0), (T, \infty) \end{matrix} \right\}$, представить его графически. При значениях параметров выполняемого варианта определить период T повторения. Используя теорему смещения, свойство линейности и соотношение (4.3), получить конкретную модель $F_{4T}(p)$ финитного сигнала $f_{4T}(t)$.

4.3.2.6 Повторить п. 4.3.1.2 – 4.3.1.4 применительно к сигналам $f_{4T}(t)$ и $f_4(t)$. При выполнении п. 4.3.1.4 рассматривать частотный отрезок $[-20kf_{11}, 20kf_{11}]$.

4.3.2.7 Сравнить амплитудные $|S_{1T}(\omega)| - |S_{4T}(\omega)|$ и фазовые $\Theta_{1T}(\omega) - \Theta_{4T}(\omega)$ спектры сигналов между собой, а также с результатами моделирования по п. 3.3.3.5 лабораторной работы № 3.

4.4 Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Математические модели (во временной области и на комплексной плоскости) и графики исследуемых финитных и периодических сигналов, корневые портреты изображений $F_1(p) - F_4(p)$.
3. Графики амплитудных $|S_{1T}(\omega)| - |S_{4T}(\omega)|$ и фазовых $\Theta_{1T}(\omega) - \Theta_{4T}(\omega)$ спектров.
4. Выводы.

4.5 Контрольные вопросы и задания

1. Доказать теоремы смещения и подобия.
2. Доказать: свойство дифференцирования оригинала; свойство дифференцирования изображения и следствие из него.
3. Доказать свойства интегрирования оригинала и изображения.
4. Доказать следствие из теоремы умножения изображений.
5. Используя теорему запаздывания, доказать справедливость модели (4.3).
6. Объяснить смысл и идеологию доказательства второй (обобщенной) теоремы разложения.
7. Процедура разложения в ряд Фурье с помощью преобразования Лапласа.
8. Уточнить механизм (4.6) вычисления вычетов: в чисто вещественном полюсе; в паре комплексно-сопряженных полюсов.
9. Процедура нахождения изображения сигнала типа $f(t) = t^n \begin{cases} \sin \omega_0 t \\ \cos \omega_0 t \end{cases}$.

10. Проанализировать изображения $F_{1T}(p) - F_{4T}(p)$. Доказать, что они во всей открытой комплексной плоскости не имеют особых точек.

11. Сформулировать сходства и принципиальные различия корневых портретов изображений $F_1(p) - F_4(p)$.

12. Дать сравнительную оценку скорости убывания амплитудных спектров $|S_{1T}(\omega)| - |S_{4T}(\omega)|$.

13. Сформулировать условия, при которых сигнал $f_4(t)$ нельзя считать периодическим.

14. Найти изображения по Лапласу сигналов:

$$f_1(t) = \begin{cases} At^3 e^{2kt}, [0, \infty) \\ 0, (-\infty, 0) \end{cases}; \quad f_2(t) = \begin{cases} At^5 / 6!, [0, \infty) \\ 0, (-\infty, 0) \end{cases}; \quad f_3(t) = \begin{cases} 3kt \sin 2t, [0, \infty) \\ 0, (-\infty, 0) \end{cases};$$

$$f_4(t) = \begin{cases} 5kt \cos 10t - 1, [0, \infty) \\ 0, (-\infty, 0) \end{cases}; \quad f_5(t) = \begin{cases} 4 \sin 3t / (3t), [0, \infty) \\ 0, (-\infty, 0) \end{cases};$$

$$f_6(t) = \begin{cases} \sin \omega_0 t, [0, \pi / \omega_0) \\ f_6(t + \pi / \omega_0), (-\infty, \infty) \end{cases}; \quad f_7(t) = \begin{cases} \sin \omega_0 t, [0, \pi / \omega_0) \\ 0, (\pi / \omega_0, 2\pi / \omega_0) \\ f_7(t + 2\pi / \omega_0), (-\infty, \infty) \end{cases}.$$

15. Разложить в ряд Фурье с помощью преобразования Лапласа сигналы:

$$f_1(t) = \begin{cases} 1, [0, \tau] \\ 0, (\tau, T) \\ f_1(t + T), (-\infty, \infty) \end{cases}; \quad f_2(t) = \begin{cases} 3 \sin 2t, [0, \pi / 2) \\ f_2(t + \pi / 2), (-\infty, \infty) \end{cases}.$$

16. Найти математические модели во временной области сигналов, изображения которых равны:

$$F_1(p) = \frac{5 - 5e^{-p}}{p(1 - e^{-2p})}; \quad F_2(p) = \frac{10 - 10e^{-2p}}{p}; \quad F_3(p) = \frac{10p}{p^2 + 25}; \quad F_4(p) = \frac{20}{p^2 + 5}.$$

Лабораторная работа № 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ СИСТЕМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ И НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

5.1 Цель работы

Изучение основных закономерностей моделирования линейных звеньев систем телекоммуникаций в частотной области и на комплексной плоскости, приобретение практических навыков формирования и представления операторной и комплексной передаточных функций, амплитудно- и фазочастотной характеристик, характеристики рабочего затухания и характеристики группового времени запаздывания.

5.2 Краткие теоретические сведения

Современные СТК являются сложными физическими объектами и состоят из большого количества различных по свойствам звеньев, которые с позиции математического моделирования принято делить на линейные (инерционные, безынерционные) с постоянными и переменными параметрами и нелинейные (инерционные, безынерционные). Наиболее сложными для описания являются нелинейные инерционные звенья. При функциональном моделировании с целью упрощения их представляют совокупностью линейных инерционных, нелинейных и линейных безынерционных звеньев [1].

Важнейшей задачей при проектировании СТК является определение обоснованных допусков на неравномерность амплитудно-частотных (АЧХ) и нелинейность фазочастотных (ФЧХ) характеристик отдельных звеньев и системы в целом, что достигается математическим моделированием процесса прохождения измерительных сигналов. В качестве модели исследуемого реального звена (системы) используют одно либо несколько линейных звеньев с постоянными параметрами. Поэтому последние (называемые также линейными стационарными), являясь наиболее простыми для описания, наиболее широко применяются в практике моделирования СТК.

Линейные стационарные звенья в частотной области описывают комплексной передаточной функцией $K(\omega)$, АЧХ $|K(\omega)|$, ФЧХ $\varphi(\omega)$, характеристикой $a(\omega)$ рабочего затухания (ХРЗ) и характеристикой $\tau(\omega)$ группового времени запаздывания (ХГВЗ) [1 – 3].

Известно: АЧХ – частотная зависимость отношения амплитуды реакции линейного звена к амплитуде гармонического воздействия на его входе; ФЧХ – частотная зависимость разности фаз реакции и гармонического воздействия. Поскольку воздействие (реакцию) можно задавать в форме напряжения $U_{вх}(t)=U_{вх.m}(u)\cos(\omega t+\Theta_u(u))$ ($U_{вых}(t)=U_{вых.m}(u)\cos(\omega t+\xi_u(u))$) или тока $I_{вх}(t)=I_{вх.m}(u)\cos(\omega t+\Theta_I(u))$ ($I_{вых}(t)=I_{вых.m}(u)\cos(\omega t+\xi_I(u))$), то в общем случае различают разновидности $|K_1(\omega)| - |K_4(\omega)|$ АЧХ и соответствующие им ФЧХ $\varphi_1(\omega) - \varphi_4(\omega)$. При этом АЧХ $|K_1(\omega)|$ (разновидность “напряжение-

напряжение”) и $|K_2(\omega)|$ (“ток-ток”) являются безразмерными, $[|K_3(\omega)|] = \text{Ом}$, $|K_4(\omega)| = \text{Ом}^{-1}$, ФЧХ $\varphi_1(\omega) - \varphi_4(\omega)$ измеряются в радианах. На практике в основном используют АЧХ $|K_1(\omega)|$ и соответственно ФЧХ $\varphi_1(\omega)$, остальные – значительно реже [1, 2, 4].

Согласно символическому методу анализа гармонические колебания воздействия ($U_{вх}(t), I_{вх}(t)$) и реакции ($U_{вых}(t), I_{вых}(t)$) описываются комплексными

амплитудами соответственно $\dot{U}_{вх.m}(\omega) = U_{вх.m}(\omega) e^{j\Theta_u(\omega)}$, $\dot{I}_{вх.m}(\omega) = I_{вх.m}(\omega) e^{j\Theta_i(\omega)}$, $\dot{U}_{вых.m}(\omega) = U_{вых.m}(\omega) e^{j\xi_u(\omega)}$ и $\dot{I}_{вых.m}(\omega) = I_{вых.m}(\omega) e^{j\xi_i(\omega)}$. С учетом этого комплексную передаточную

функцию $K(\omega)$ определяют как частотную зависимость отношения комплексных амплитуд реакции и воздействия. Очевидно, по аналогии с АЧХ и ФЧХ различают четыре разновидности $K_1(\omega) - K_4(\omega)$ функции $K(\omega)$ [1, 2].

Из определений АЧХ, ФЧХ и функции $K(\omega)$ вытекает, что

$$K(\omega) = |K(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}, \quad (5.1)$$

т.е. комплексная передаточная функция одновременно определяет АЧХ $|K(\omega)|$ и ФЧХ $\varphi(\omega)$. Она полно описывает свойства линейного звена, широко применяется при моделировании СТК спектральным методом.

В теории и практике СТК, помимо характеристик $K(\omega)$, $|K(\omega)|$ и $\varphi(\omega)$, используют также ХРЗ $a(\omega)$ и ХГВЗ $\tau(\omega)$:

$$a(\omega) = 20 \lg(|K(\omega)|^{-1}), \quad \tau(\omega) = -d\varphi(\omega)/d\omega. \quad (5.2)$$

Причем, проектирование фильтров по известному методу рабочих параметров выполняют на основе ХРЗ, а не АЧХ. В основном по виду ХРЗ внутри и вне полосы пропускания классифицируют различные модели фильтров, например, наиболее часто применяемые фильтры Баттерворта, Чебышева, Золотарева-Кауэра [5]. В задачах передачи импульсных сигналов, где предъявляются жесткие требования к форме последних (в телевидении), особое значение приобретает знание ХГВЗ [1, 4].

В большинстве случаев частотные свойства линейного звена наглядно отображают двумя графиками: АЧХ и ФЧХ, ХРЗ и ФЧХ, ХРЗ и ХГВЗ либо АЧХ и ХГВЗ. Однако иногда их представляют годографом комплексной передаточной функции – кривой, описываемой в полярной системе координат концом радиус-вектора, на текущей частоте ω длина которого равна АЧХ, а угол, отсчитываемый в положительном направлении, – ФЧХ. Обычно годограф строят в частотном диапазоне $0 \dots \infty$.

При моделировании реальных звеньев СТК с помощью функции $K(\omega)$ необходимо располагать описанием их АЧХ и ФЧХ. Его выполняют разными методами. По одному из них АЧХ и ФЧХ аппроксимируют отрезками про-

стейших кривых, количество которых для достижения требуемой точности аппроксимации приходится выбирать значительным. В другом методе в качестве аппроксимирующих используют функции другого типа, например полиномы третьей степени, при соответствующем подборе коэффициентов которых можно повысить точность аппроксимации. Третьим (эффективным) методом является получение моделей АЧХ и ФЧХ из операторной передаточной функции $K(p)$ [1, 4].

Описание линейных звеньев на комплексной плоскости (с помощью операторной передаточной функции $K(p)$) получило большое распространение. Известно: функция $K(p)$ – отношение лапласовского изображения реакции линейного звена к изображению вызвавшего ее произвольного воздействия при нулевых начальных условиях. По аналогии с характеристиками АЧХ, ФЧХ и $K(\omega)$ различают четыре разновидности $K_1(p) - K_4(p)$ функции $K(p)$. На практике чаще используется функция $K_1(p)$, соответствующая $\overline{U_{ex}}(p) \Leftrightarrow U_{ex}(t)$ и $\overline{U_{вых}}(p) \Leftrightarrow U_{вых}(t)$.

Операторная передаточная функция физического реализуемого линейного устойчивого звена с сосредоточенными параметрами представляется дробно-рациональной функцией

$$K(p) = G(p) / (cV(p)) \quad (5.3)$$

где $G(p) = p^m + b_1 p^{m-1} + b_2 p^{m-2} + \dots + b_m$ – полином степени m с действительными коэффициентами; $V(p) = p^n + c_1 p^{n-1} + c_2 p^{n-2} + \dots + c_n$ – полином Гурвица степени n ; $m \leq n$, $c > 0$ – масштабный (нормирующий) множитель. При этом по расположению корней полинома $G(p)$ звенья делятся на минимально- и неминимально-фазовые: у минимально-фазовых звеньев все корни полинома $G(p)$ находятся в левой полуплоскости и на мнимой оси; у неминимально-фазовых звеньев хотя бы один их корней лежит в правой полуплоскости.

Свойства операторной передаточной функции линейного звена наглядно отображает ее корневой портрет – графическое изображение на комплексной плоскости корней полиномов числителя и знаменателя. Очевидно, корни полинома $G(p)$ являются нулями, а корни полинома $V(p)$ – полюсами функции $K(p)$.

Заменой $p = j\omega$ в функции $K(p)$ можно получить комплексную передаточную функцию $K(\omega)$, а затем, представляя последнюю в показательной форме, найти АЧХ и ФЧХ линейного звена:

$$[K(p)]_{p=j\omega} = K(\omega) = |K(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}. \quad (5.4)$$

Такой прием часто используют для нахождения АЧХ и ФЧХ. Для его упрощения рекомендуется вначале сделать следующие преобразования:

$[V(p)]_{p=j\omega} = A(\omega^2) + j\omega B(\omega^2)$, $[G(p)]_{p=j\omega} = E(\omega^2) + j\omega D(\omega^2)$, где $A(\omega^2)$, $B(\omega^2)$, $E(\omega^2)$, $D(\omega^2)$ – полиномы с действительными коэффициентами по четным степеням переменной ω . Их последующее применение в соответствии с выражениями (5.3) и (5.4) позволяет получить

$$|K(\omega)| = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{E^2(\omega^2) + \omega^2 D^2(\omega^2)}{A^2(\omega^2) + \omega^2 B^2(\omega^2)}}, \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\omega D(\omega^2)}{E(\omega^2)} - \operatorname{arctg} \frac{\omega B(\omega^2)}{A(\omega^2)}. \quad (5.5)$$

Для расширения возможностей моделирования и упрощения построения математической модели полином $V(p)$ Гурвица рекомендуется задавать в виде

$$V(p) = \prod_{s=1}^r (p + a_s) \cdot \prod_{l=1}^q (p^2 + 2a_l p + a_l^2 + \omega_l^2), \quad (5.6)$$

где $a_s > 0; a_l > 0; \omega_l > 0; r + 2q = n$.

Представление (5.3) с учетом (5.6), в отличие от других способов задания частотных характеристик, описывает с высокой точностью (не)минимально-фазовые звенья практически с любой формой АЧХ и ФЧХ: фильтры нижних (ФНЧ) и верхних (ФВЧ) частот, полосовые (ПФ) и заграждающие (ЗФ), фильтры с несколькими полосами пропускания. Использование в качестве p нормированной комплексной переменной позволяет применять справочную литературу, где табулированы корни полиномов $G(p)$ и $V(p)$ типовых ФНЧ [5]. Трансформируя корни с помощью реактансных или нереактансных преобразований, можно получить операторные передаточные функции звеньев типа ФВЧ, ПФ и ЗФ [1, 4, 5].

Можно показать [1, 2], что по заданной АЧХ линейного минимально-фазового звена с точностью до знака определяется его передаточная функция $K(p)$ и с точностью до π ФЧХ и, наоборот, по заданной ФЧХ с точностью до постоянного вещественного множителя – функции $K(p)$ и $K(\omega)$, т.е. в минимально-фазовых линейных звеньях существует взаимно однозначное соответствие между АЧХ и ФЧХ.

При описании линейных звеньев СТК на комплексной плоскости иногда используют операторную $\xi(p)$ и комплексную $\xi(\omega)$ постоянные передачи:

$$\xi(p) = \ln K(p), \quad \xi(\omega) = \ln |K(\omega)| + j\varphi(\omega) = A(\omega) + j\varphi(\omega), \quad (5.7)$$

где $K(p)$ – операторная передаточная функция; $|K(\omega)|$ ($\varphi(\omega)$) – АЧХ (ФЧХ); $A(\omega) = \ln |K(\omega)|$ – логарифмическое затухание звена.

Известно [1]: АЧХ (представляемая логарифмическим затуханием) и ФЧХ минимально-фазового звена связаны соотношениями

$$A(\omega_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega, \quad \varphi(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \quad (5.8)$$

Гильберта, из которых следует, что значение АЧХ (ФЧХ) на конкретной (фиксированной) частоте ω_0 определяется поведением ФЧХ (АЧХ) во всем частотном диапазоне от 0 до ∞ . Соотношения (5.8) позволяют напрямую найти, не прибегая к синтезу передаточной функции $K(p)$, одну частотную характеристику минимально-фазового звена по его второй характеристике, которая с учетом возможности численного вычисления интегралов (5.8) может быть задана также таблично, т.е. по результатам экспериментов.

Можно показать [1, 2], что неминимально-фазовое звено можно представить последовательным соединением минимально-фазового звена, имеющего одинаковую с ним АЧХ $|K(\omega)|=|K_0(\omega)|$ и неминимально-фазового звена с идеальной АЧХ $|K_\phi(\omega)|=1$ и монотонно убывающей ФЧХ $\varphi_\phi(\omega)$. Последнее звено часто называют фазовым контуром либо чисто фазовым звеном. Важно отметить, что при заданной АЧХ $|K(\omega)|$ минимально возможный фазовый набег на любой частоте ω равен $\varphi_0(\omega)$. Он соответствует минимально-фазовому звену (звену минимальной фазы) с передаточной функцией $K_0(p)$. Одну и ту же АЧХ может иметь множество неминимально-фазовых звеньев, различающихся видом фазового контура.

В выполняемой лабораторной работе практические навыки формирования и представления характеристик линейных звеньев в частотной области и на комплексной плоскости отрабатываются на примерах простейших звеньев (I и II порядков) наиболее распространенных типов: ФНЧ, ФВЧ, ПФ и ЗФ. Каждое из них может быть получено при соответствующих условиях из обобщенного линейного звена, изображенного в операторном виде на рис. 5.1.

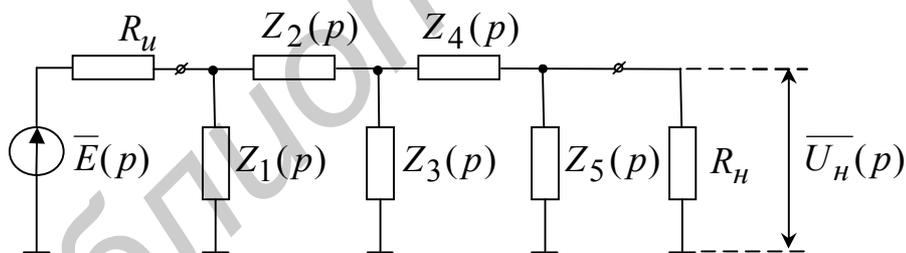


Рисунок 5.1 – Обобщенное линейное звено в операторном виде

В обобщенном звене: $\bar{E}(p)$, $\bar{U}_n(p)$ – изображения воздействия $E(t)$ и реакции $U_n(t)$; R_u , R_n – сопротивления (активные) источника сигнала и нагрузки; $Z_1(p)$ – $Z_5(p)$ – операторные сопротивления (активных, реактивных) элементов звена.

Используя законы Ома и Кирхгофа, несложными преобразованиями можно получить следующее выражение для операторной передаточной функции обобщенного звена:

$$K(p) = \overline{U}_H(p) / \overline{E}(p) = Z_1 Z_3 Z_5 R_H / ((R_H + Z_5)(R_u(Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4) + Z_1(Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4)) + R_H Z_5(R_u(Z_1 + Z_2 + Z_3) + Z_1(Z_2 + Z_3))), \quad (5.9)$$

где (для упрощения обозначения) $Z_i = Z_i(p)$, $(i = \overline{1,5})$.

Виды и структуры изучаемых линейных звеньев приведены в таблице 5.1. При этом прочерк в строке на позиции элемента в последовательной ветви, например на позиции $Z_2(p)$, соответствует его переключению в обобщенном звене и подстановке $Z_2(p) = 0$ в выражении (5.9), а прочерк в строке на позиции элемента в параллельной ветви, например на позиции $Z_3(p)$, соответствует отключению последнего от корпуса и подстановке $Z_3(p) = \infty$ в модели (5.9).

Таблица 5.1 – Виды и структуры линейных звеньев

Вид звена	Структура звена, операторные сопротивления элементов						
	R_u	$Z_1(p)$	$Z_2(p)$	$Z_3(p)$	$Z_4(p)$	$Z_5(p)$	R_H
ФНЧ 1	R_u	-	R	$(pC)^{-1}$	-	-	R_H
ФНЧ 2	R_u	-	R	$(pC)^{-1}$	R	$(pC)^{-1}$	R_H
ФНЧ 3	R_u	-	pL	R	-	-	R_H
ФНЧ 4	R_u	-	pL	R	pL	R	R_H
ФВЧ 1	R_u	-	$(pC)^{-1}$	R	-	-	R_H
ФВЧ 2	R_u	-	$(pC)^{-1}$	R	$(pC)^{-1}$	R	R_H
ФВЧ 3	R_u	-	R	pL	-	-	R_H
ФВЧ 4	R_u	-	R	pL	R	pL	R_H
ПФ	R_u	-	pL	-	$(pC)^{-1}$	-	R_H
ЗФ	R_u	-	$pL + (pC)^{-1}$	-	-	-	R_H

Совместное применение данных табл. 5.1 и общего выражения (5.9) позволяет существенно упростить нахождение операторных и комплексных передаточных функций исследуемых звеньев.

5.3 Порядок выполнения работы

5.3.1 Математическое моделирование интегрирующего и двойного интегрирующего звеньев

5.3.1.1 Изучить необходимые теоретические сведения. Проанализировать структуру обобщенного линейного звена. Упрощая ее, перейти к интегрирующему RC -звену ФНЧ 1 (см. рис. 5.1, табл. 5.1). При условии $R_u = 0$ и $R_H = \infty$ построить его операторную передаточную функцию $K(p)$. Используя соотношения (5.1), (5.2), (5.4) и (5.5), получить математические модели комплексной передаточной функции $K(\omega)$, АЧХ $|K(\omega)|$, ФЧХ $\varphi(\omega)$, ХРЗ $a(\omega)$ и ХГВЗ $\tau(\omega)$.

5.3.1.2 В системе MathCAD запрограммировать модели $|K(\omega)|$ и $\varphi(\omega)$. При значении параметра T по выполняемому варианту (см. табл. 1.2) и значении постоянной времени исследуемого звена $\tau_0=RC=T$ на частотном отрезке $[-80/T, 80/T]$ с шагом $\delta f=80/(1000T)$ рассчитать отсчетные значения функций $|K(\omega)|$ и $\varphi(\omega)$, построить их графики.

5.3.1.3 В системе MathCAD запрограммировать модели $|K_u(\omega)|$ и $\varphi_u(\omega)$ идеального интегрирующего звена (имеющего комплексную передаточную функцию $K_u(\omega)=(j\omega A)^{-1}$). При значении параметра $A=\tau_0=T$ на частотном отрезке $[-80/T, 80/T]$ с шагом $\delta f=80/(1000T)$ рассчитать отсчетные значения функций $|K_u(\omega)|$ и $\varphi_u(\omega)$, построить их графики, сравнить с графиками по п. 5.3.1.2.

5.3.1.4 Повторить п. 5.3.1.2 и 5.3.1.3 для значения параметра τ_0 , равных $5T$, $25T$ и $125T$.

5.3.1.5 Запрограммировать модели $a(\omega)$ и $\tau(\omega)$, при $\tau_0=125T$ на том же частотном отрезке построить и проанализировать графики функций $a(\omega)$ и $\tau(\omega)$.

5.3.1.6 Упрощая структуру обобщенного линейного звена, перейти к двойному интегрирующему RC -звену ФНЧ 2 (см. рис. 5.1, табл. 5.1). При условии $R_u=0$ и $R_n=\infty$ построить для его математические модели $K(p)$, $K(\omega)$, $|K(\omega)|$, $\varphi(\omega)$, $a(\omega)$ и $\tau(\omega)$. Построить модели $|K_u(\omega)|$ и $\varphi_u(\omega)$ идеального двойного интегрирующего звена, имеющего комплексную передаточную функцию $K_u(\omega)=(j\omega A)^{-2}$.

5.3.1.7 Прodelать п. 5.3.1.2 – 5.3.1.5 применительно к звену ФНЧ 2.

5.3.1.8 Проанализировать структуры интегрирующего (ФНЧ 3) и двойного интегрирующего (ФНЧ 4) LR -звеньев. Построить их операторные передаточные функции. Определить, при каких условиях частотно-временные характеристики ФНЧ 3 (ФНЧ 4) точно соответствуют характеристикам ФНЧ 1 (ФНЧ 2).

5.3.2 Математическое моделирование дифференцирующего и двойного дифференцирующего звеньев

5.3.2.1 Упрощая структуру обобщенного линейного звена, перейти к дифференцирующему CR -звену ФВЧ 1 (см. рис. 5.1, табл. 5.1). При условии $R_u=0$ и $R_n=\infty$ построить для его математические модели $K(p)$, $K(\omega)$, $|K(\omega)|$, $\varphi(\omega)$, $a(\omega)$ и $\tau(\omega)$.

5.3.2.2 В системе MathCAD запрограммировать модели $|K(\omega)|$ и $\varphi(\omega)$. При значении постоянной времени $\tau_0=RC=T$, где значение T соответствует выполняемому варианту (см. табл. 1.1), на частотном отрезке $[-80/T, 80/T]$ с

шагом $\delta f = 80/(1000T)$ рассчитать отсчетные значения функций $|K(\omega)|$ и $\varphi(\omega)$, построить их графики.

5.3.2.3 Запрограммировать модели $|K_u(\omega)|$ и $\varphi_u(\omega)$ идеального дифференцирующего звена ($K_u(\omega) = (j\omega A)$). При значении параметра $A = \tau_0 = T$ аналогично п. 5.3.2.2 рассчитать отсчетные значения функций $|K_u(\omega)|$ и $\varphi_u(\omega)$, построить их графики, сравнить с графиками по п. 5.3.2.2.

5.3.2.4 Повторить п. 5.3.2.2 и 5.3.2.3 для значений параметра τ_0 , равных $0,2T$, $0,04T$ и $0,008T$.

5.3.2.5 Запрограммировать модели $a(\omega)$ и $\tau(\omega)$, при $\tau_0 = 0,008T$ на том же частотном отрезке построить и проанализировать графики функций $a(\omega)$ и $\tau(\omega)$.

5.3.2.6 Упрощая структуру обобщенного линейного звена, перейти к двойному дифференцирующему CR -звену ФВЧ 2 (см. рис. 5.1, табл. 5.1). При условии $R_u = 0$ и $R_n = \infty$ построить для его математические модели $K(p)$, $K(\omega)$, $|K(\omega)|$, $\varphi(\omega)$, $a(\omega)$ и $\tau(\omega)$. Построить модели $|K_u(\omega)|$ и $\varphi_u(\omega)$ идеального двойного дифференцирующего звена ($K_u(\omega) = (j\omega A)^2$).

5.3.2.7 Прodelать п. 5.3.2.2 – 5.3.2.5 применительно к звену ФВЧ 2.

5.3.2.8 Проанализировать структуры дифференцирующего (ФВЧ 3) и двойного дифференцирующего (ФВЧ 4) RL -звеньев. Построить их операторные передаточные функции. Определить, при каких условиях частотно-временные характеристики ФВЧ 3 (ФВЧ 4) точно соответствуют характеристикам ФВЧ 1 (ФВЧ 2).

5.3.3 Математическое моделирование ПФ и ЗФ

5.3.3.1 Упрощая структуру обобщенного линейного звена, перейти к ПФ (см. рис. 5.1, табл. 5.1). Построить для его математические модели $K(p)$, $K(\omega)$, $|K(\omega)|$, $\varphi(\omega)$, $a(\omega)$ и $\tau(\omega)$.

5.3.3.2 В системе MathCAD запрограммировать модели $|K(\omega)|$, $\varphi(\omega)$, $a(\omega)$ и $\tau(\omega)$. При значении постоянной $\tau_0^2 = LC = T^2 / (6400\pi^2)$ (значение T соответствует выполняемому варианту; см. табл. 1.2) на частотном отрезке $[-80/T, 80/T]$ с шагом $\delta f = 80/(1000T)$ рассчитать отсчетные значения и построить графики функций $|K(\omega)|$, $\varphi(\omega)$, $a(\omega)$ и $\tau(\omega)$.

5.3.3.3 Сохраняя неизменной постоянную τ_0^2 , повторить п. 5.3.3.2 при значениях емкости, равных $C/5$ и $C/25$ (C – емкость по п. 5.3.3.2). Объяснить наблюдаемые изменения характеристик.

5.3.3.4 Прodelать п. 5.3.3.1 – 5.3.3.3 применительно к ЗФ (см. табл. 5.1).

5.4 Содержание отчета

1. Цель работы.

2. Структуры и математические модели $K(p)$, $K(\omega)$, $|K(\omega)|$, $\varphi(\omega)$, $a(\omega)$ и $\tau(\omega)$ исследуемых линейных звеньев.

3. Графики функций $|K(\omega)|$, $\varphi(\omega)$, $a(\omega)$ и $\tau(\omega)$.

4. Выводы.

5.5 Контрольные вопросы и задания

1. Сформулировать основные свойства линейных стационарных, линейных параметрических и нелинейных звеньев СТК.

2. Как связаны свойства звеньев с формой их практической реализации.

3. Область применения метода описания АЧХ и ФЧХ отрезками простейших кривых.

4. Процедура получения функции $R(\omega^2)$ (квадрат АЧХ) из операторной передаточной функции $K(p)$.

5. Форма ХРЗ ФНЧ Баттерворта, Чебышева, Золотарева-Кауэра.

6. Свойства полиномов с действительными коэффициентами по четным степеням переменного p .

7. Процедура синтеза операторной передаточной функции $K(p)$ минимально-фазового звена по квадрату его АЧХ.

8. Взаимосвязь логарифмического затухания и ФЧХ минимально-фазового звена.

9. Особенности операторных передаточных функций неминимально-фазовых линейных звеньев.

10. Сущность метода проектирования фильтров по рабочим параметрам.

11. На примере обобщенного линейного звена объяснить суть процедуры получения операторной передаточной функции $K(p)$.

12. Используя модель (5.9), получить выражения для операторных передаточных функций ФНЧ моделей Т03-50 и С03-50. Изобразить их корневые портреты.

13. Изобразить годограф комплексной передаточной функции: ФНЧ; ФВЧ; ПФ; ЗФ.

14. Размерность параметров τ_0 и τ_0^2 . Постоянная времени в случае LR-звеньев.

15. Оценить по результатам моделирования степень приближения (в зависимости от значения постоянной τ_0) АЧХ и ФЧХ реальных интегрирующего и двойного интегрирующего звеньев к АЧХ и ФЧХ соответствующих идеальных звеньев. То же проделать применительно к дифференцирующим звеньям.

16. Объяснить характер изменения ХГВЗ интегрирующего и дифференцирующего звеньев.

17. Объяснить характер изменения ХГВЗ исследуемых ПФ и ЗФ.

Лабораторная работа № 6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ СИСТЕМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

6.1 Цель работы

Изучение основных закономерностей моделирования линейных звеньев систем телекоммуникаций во временной области, приобретение практических навыков формирования и представления импульсной и переходной характеристик

6.2 Краткие теоретические сведения

Во временной области линейные звенья полностью описываются импульсной $g(t)$ и переходной $h(t)$ характеристиками. Как известно [1, 2], под импульсной (переходной) характеристикой понимают реакцию линейного звена на δ -функцию (единичное ступенчатое воздействие – функцию $\gamma(t)$ Хевисайда) при нулевых начальных условиях.

Функции $\delta(t)$ и $\gamma(t)$ связаны соотношениями

$$\delta(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt}, \quad \gamma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \int_{0-0}^t \delta(t) dt. \quad (6.1)$$

Поскольку $\delta(t) \Leftrightarrow g(t)$, $\gamma(t) \Leftrightarrow h(t)$ и вследствие принципа линейной суперпозиции между реакциями существует такая же зависимость, как и между соответствующими им воздействиями, то

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad h(t) = \int_{0-0}^t g(t) dt. \quad (6.2)$$

Причем, $[\delta(t)] = c^{-1}$, функция $\gamma(t)$ является безразмерной. Поэтому (в зависимости от задания воздействия и реакции) импульсная характеристика $\delta(t)$ может иметь размерность $Om \cdot c^{-1}$, $Om^{-1} \cdot c^{-1}$ или c^{-1} , а переходная характеристика – Om , Om^{-1} либо быть безразмерной, что подтверждает абстрактный характер воздействий $\delta(t)$, $\gamma(t)$ и реакций $g(t)$, $h(t)$. Функция $g(t)$ по форме соответствует реакции звена на реальное физическое воздействие большой амплитуды и малой длительности, а функция $h(t)$ – реакции на реальное ступенчатое воздействие с малой длительностью фронта.

Важно отметить следующее. Воздействие $\delta(t)$ обладает бесконечно большой энергией. Поэтому оно, в отличие от любых воздействий, описываемых кусочно-непрерывными функциями с разрывами первого рода, мгновенно изменяет напряжения на емкостях и токи в индуктивностях, что необходимо учитывать при моделировании звеньев на уровне принципиальной схемы.

При моделировании СТК часто возникает потребность перехода от частотных характеристик линейных звеньев к их временным характеристикам и от

временных характеристик к частотным. Это выполняют на основе функциональных связей, существующих между этими характеристиками.

Известно [1 – 3], что

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (6.3)$$

т.е. импульсная характеристика произвольного линейного звена и его комплексная передаточная функция связаны парой преобразований Фурье. Импульсная характеристика единственным образом определяет его частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) и наоборот. Поскольку по известной импульсной характеристике можно найти переходную характеристику, то последняя также однозначно определяет (определяется) АЧХ и ФЧХ линейного звена.

Можно показать, что растяжение (сжатие) частотных характеристик линейного звена по частоте в a раз сопровождается таким же по величине сжатием (растяжением) его переходной и импульсной характеристик по времени при одновременном увеличении (уменьшении) размаха последней в a раз. Важно отметить следующее. При изменении масштаба частотных характеристик по частоте и соответствующем изменении масштаба временных характеристик по времени размах переходной характеристики, в отличие от размаха импульсной характеристики, остается неизменным. Это необходимо учитывать при моделировании.

Формально подставляя в прямое преобразование (4.1) Лапласа функцию $\delta(t)$ и учитывая ее фильтрующее свойство, можно получить: $\delta(t) \Leftrightarrow \Delta(p) = 1$. Последнее по аналогии с выражениями (6.3) приводит к следующим функциональным связям [1, 3, 6]:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} K(p) e^{pt} dp, \quad K(p) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt, \quad (6.4)$$

т.е. импульсная характеристика и операторная передаточная функция линейного звена связаны преобразованиями Лапласа. Первый интеграл (6.4) очень часто используют при моделировании частотно-временных характеристик звеньев СТК.

Основываясь на предельных соотношениях в теории преобразования Лапласа [1, 6] (см. раздел 4), можно установить:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} K(p) = \lim_{t \rightarrow 0+0} h(t) = h(0), \quad \lim_{p \rightarrow 0} K(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h(\infty), \quad (6.5)$$

где $h(0)$ ($h(\infty)$) – начальное (установившееся) значение переходной характеристики звена.

Анализ поведения операторной (5.3) и комплексной (5.4) передаточных функций линейного звена показывает, что $\lim_{p \rightarrow \infty} K(p) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} K(\omega) = K_{\infty}$ и

$\lim_{p \rightarrow 0} K(p) = \lim_{\omega \rightarrow 0} K(\omega) = K_0$ (K_{∞} , K_0 – действительные значения). Из этого вытекает: установившееся значение переходной характеристики отличается от нуля

тогда, когда не равно нулю значение $|K_0|$ АЧХ на постоянном токе; если АЧХ на бесконечно большой частоте имеет ненулевое значение $|K_\infty|$ (при $m = n$ в модели (5.3)), то переходная характеристика в момент времени $t = 0 + 0$ принимает скачком значение K_∞ . С учетом взаимосвязи (6.2) и свойства (3.8) это означает, что в составе импульсной характеристики присутствует составляющая $K_\infty \delta(t)$ (δ -функция “прорывается” на выход моделируемого звена).

Соотношения (6.5) широко используются при моделировании СТК. С их помощью непосредственно по передаточной функции $K(p)$ довольно просто установить требуемые для анализа начальные $h(0)$ и установившееся $h(\infty)$ значения переходной характеристики звена. Оценка значения $h(0)$, например, необходима для правильного выбора алгоритма моделирования по формуле Дюамеля.

6.3 Порядок выполнения работы

6.3.1 Математическое моделирование интегрирующих и дифференцирующих звеньев

6.3.1.1 Изучить необходимые теоретические сведения. Упрощая структуру обобщенного линейного звена, перейти к интегрирующему RC -звену ФНЧ 1 (см. рис. 5.1, табл. 5.1). При условии $R_u = 0$ и $R_n = \infty$ построить его операторную $K(p)$ и комплексную $K(\omega)$ передаточные функции.

6.3.1.2 Используя взаимосвязь (6.4) и обобщенную теорему разложения (4.4), построить математическую модель $g(t)$ импульсной характеристики исследуемого звена. Ее же получить на основе соотношения (6.3). Сравнить результаты, оценить трудоемкость обоих способов.

6.3.1.3 В системе MathCAD запрограммировать модель $g(t)$. При значении параметра T по выполняемому варианту (см. табл. 1.2) и значении постоянной времени $\tau_0 = RC = T$ исследуемого звена на отрезке времени $[0, 20T]$ с шагом $\delta t = 20T/1000$ рассчитать отсчетные значения функции $g(t)$ (соответствующие финитному сигналу $g_T^*(t) = \begin{cases} g(t), & [0, 20T] \\ 0, &]0, 20T[\end{cases}$), создать файл с массивом отсчетных значений, построить график функции $g(t)$.

6.3.1.4 Используя файл отсчетных значений, с помощью подсистемы генерирования программно-аппаратного комплекса сформировать в реальном масштабе времени периодический сигнал $g^*(t)$ ($g^*(t) = g_T^*(t)$ на отрезке $[0, 20T]$), подать его на входы осциллографа и анализатора спектра. С помощью осциллографа измерить эффективную длительность $\tau_{эф}$ импульсной характеристики. Проанализировать и зарисовать структуру амплитудного спектра, наблюдаемого на экране анализатора спектра, сравнить форму его огибающей с

формой АЧХ исследуемого звена (см. п. 5.3.1.2).

6.3.1.5 Повторить п. 6.3.1.3, 6.3.1.4 при $\tau_0 = RC = 5T$. Проанализировать наблюдаемые изменения импульсной характеристики $g(t)$ и степень приближения формы огибающей амплитудного спектра сигнала $g^*(t)$ к форме АЧХ исследуемого RC -звена.

6.3.1.6 В системе MathCAD численным методом с помощью соотношения (6.3) на отрезке $[-20T, 20T]$ при $\tau_0 = RC = T$ с шагом $\delta t = 20T/1000$ рассчитать отсчетные значения функции $g(t)$. Численное интегрирование выполнять на частотном отрезке $[-20/T, 20/T]$ с шагом $\delta f = 20/(1000T)$. Построить график функции $g(t)$, сравнить с графиком по п. 6.3.1.3.

6.3.1.7 Повторить п. 6.3.1.6, интегрируя на частотном отрезке $[-80/T, 80/T]$. Объяснить наблюдаемые изменения импульсной характеристики $g(t)$.

6.3.1.8 Учитывая, что $\gamma(t) \Leftrightarrow 1/p$, используя взаимосвязь (6.4) и обобщенную теорему разложения (4.4), построить математическую модель $h(t)$ переходной характеристики исследуемого звена. В системе MathCAD при значениях параметра T по выполняемому варианту и значениях постоянной времени $\tau_0 = RC$, равных T и $5T$, на отрезке времени $[0, 20T]$ с шагом $\delta t = 20T/1000$ рассчитать отсчетные значения функции $h(t)$, построить и проанализировать ее графики.

6.3.1.9 Прodelать п. 6.3.1.1 – 6.3.1.3, 6.3.1.5 – 6.3.1.8 применительно к дифференцирующему RC -звену ФВЧ 1 (см. рис. 5.1, табл. 5.1). При этом вместо значений T и $5T$ постоянной времени τ_0 использовать значения T и $0,2T$ соответственно.

6.3.2 Математическое моделирование ПФ и ЗФ

6.3.2.1 Упрощая структуру обобщенного линейного звена, перейти к ПФ (см. рис. 5.1, табл. 5.1). Используя взаимосвязь (6.4) и обобщенную теорему разложения (4.4), построить математическую модель $g(t)$ его импульсной характеристики.

6.3.2.2 В системе MathCAD запрограммировать модель $g(t)$. При значении постоянной $\tau_0^2 = LC = T^2 / (6400\pi^2)$ (значение T соответствует выполняемому варианту; см. табл. 1.2) на отрезке времени $[0, 20T]$ с шагом $\delta t = 20T/1000$ рассчитать отсчетные значения функции $g(t)$ (соответствующие финитному сигналу $g_T^*(t)$), создать файл с массивом отсчетных значений, построить график функции $g(t)$.

6.3.2.3 Используя файл отсчетных значений, с помощью подсистемы генерирования программно-аппаратного комплекса сформировать в реальном

масштабе времени периодический сигнал $g^*(t)$, подать его на входы осциллографа и анализатора спектра. Измерить эффективную длительность $\tau_{эф}$ импульсной характеристики, проанализировать и зарисовать структуру амплитудного спектра, сравнить форму его огибающей с формой АЧХ исследуемого звена (см. п. 5.3.3.2).

6.3.2.4 Сохраняя неизменной постоянной τ_0^2 , повторить п. 6.3.2.2, 6.3.2.3 при значении емкости, равном $C/5$ (C – емкость по п. 6.3.2.3). Проанализировать и объяснить наблюдаемые изменения импульсной характеристики.

6.3.2.5 Построить математическую модель $h(t)$ переходной характеристики. При значении постоянной $\tau_0^2 = LC = T^2 / (6400\pi^2)$ для двух значений емкости (C и $C/5$) на отрезке $[0, 20T]$ с шагом $\delta t = 20T/1000$ рассчитать отсчетные значения функции $h(t)$, построить и проанализировать ее графики.

6.3.2.6 Прodelать п. 6.3.2.1 – 6.3.2.5 применительно к ЗФ (см. табл. 5.1).

6.4 Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Математические модели $K(p)$, $g(t)$ и $h(t)$ исследуемых линейных звеньев.
3. Результаты измерений и структуры наблюдаемых амплитудных спектров.
4. Графики функций $g(t)$ и $h(t)$.
5. Выводы.

6.5 Контрольные вопросы и задания

1. Объяснить принципиальную невозможность использования в качестве входного воздействия игольчатой функции при моделировании свойств линейных звеньев СТК.

2. Показать, что воздействие $\delta(t)$ мгновенно изменяет напряжение на емкости и ток в индуктивности.

3. Доказать: если звену с комплексной передаточной функцией $K_1(\omega)$ соответствует импульсная характеристика $g_1(t)$, то звену с функцией $K_2(\omega) = K_1(a\omega)$ – импульсная характеристика $g_2(t) = g_1(t/a)/a$.

4. Доказать: если звену с комплексной передаточной функцией $K_1(\omega)$ соответствует импульсная характеристика $h_1(t)$, то звену с функцией $K_2(\omega) = K_1(a\omega)$ – импульсная характеристика $h_2(t) = h_1(t/a)$.

5. Относительно каких из исследуемых в работе звеньев можно сказать, что воздействие “прорывается” на выход звена? Доказать.

6. Построить математические модели импульсной $g(t)$ и переходной $h(t)$ характеристик: двойного интегрирующего звена ФНЧ 4; двойного дифференцирующего звена ФВЧ 4 (см. табл. 5.1).

7. Процедура построения математической модели $h(t)$ переходной характеристики на основе операторной передаточной функции $K(p)$.

8. Основные преимущества и недостатки метода нахождения импульсной характеристики $g(t)$ с помощью численного интегрирования соотношения (6.3). Мероприятия, обеспечивающие минимизацию погрешности вычисления функции $g(t)$. Аргументацию подтвердить результатами математического моделирования.

9. Непосредственно по операторной передаточной функции $K(p)$ найти начальное $h(0)$ и установившееся $h(\infty)$ значения переходной характеристики: ФНЧ 3; ФВЧ 4; ПФ; ЗФ (см. табл. 5.1).

10. Какие параметры импульсной $g(t)$ и переходной $h(t)$ характеристик изменяются при изменении величины емкости C и сохранении неизменной постоянной τ_0^2 ? Аргументацию подтвердить результатами моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильинков В.А., Беленкевич Н.И., Романов В.Е. Моделирование линейных свойств звеньев и сигналов в телекоммуникационных системах: Учеб. пособие. – Мн.: БГУИР, 2005. – 102 с.
2. Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей: Учеб. для вузов – М.: Радио и связь, 1986. – 544 с.
3. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.
4. Ильинков В.А. Математическое моделирование линейных искажений в телевизионных системах: Метод. пособ. – Мн.: МРТИ, 1992. – 44 с.
5. Зааль Р. Справочник по расчету фильтров: Пер с нем. / Под ред. Н.Н. Слепова. – М.: Радио и связь, 1983. – 752 с.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного: Учеб. пособ. для ун-тов. – 5-е изд., испр. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
7. Гурский Д.А. Вычисления в MathCAD. – Мн.: Новое знание, 2003. – 814 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ОПИСАНИЕ ОБУЧАЮЩЕГО ПРОГРАММНО-АППАРАТНОГО
КОМПЛЕКСА МОДЕЛИРОВАНИЯ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ

Фронтальный цикл лабораторных работ по дисциплине “Моделирование систем телекоммуникаций” построен на базе многофункционального обучающего программно-аппаратного комплекса (ПАК) математического и физического моделирования электрических сигналов и систем, разработанного на кафедре систем телекоммуникаций БГУИР. ПАК структурно состоит из ПЭВМ 1, подсистемы 2 генерирования сигналов и реакций, подсистемы 3 управления, подсистемы 4 математического моделирования, библиотеки 5 виртуальных систем (лабораторных работ), осциллографа 6, анализатора 7 спектра и частотомера 8, аппаратно — из генератора Г6-45 сигналов сложной формы, осциллографа, анализатора спектра и частотомера (рис. А.1) Генератор Г6-45 серийно выпускается ОАО “Минский приборостроительный завод”, которое имеет на его сертификат об утверждении типа средств измерений № 2945 Республики Беларусь.

Используя ПАК, можно создавать быстро перестраиваемые фронтальные циклы лабораторных работ по различным изучаемым дисциплинам.

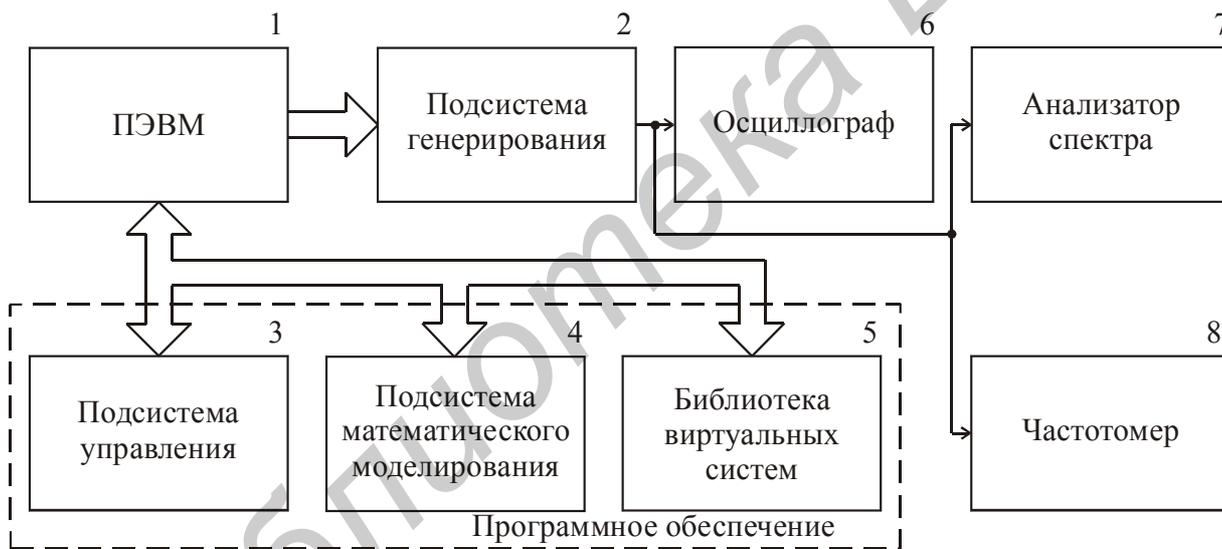


Рисунок А.1 – Обучающий программно-аппаратный комплекс моделирования электрических сигналов и систем

Основой ПАК является система генерирования-имитации сигналов произвольной формы, состоящая из ПЭВМ 1, подсистемы 2 генерирования сигналов и реакций (аппаратная часть генератора Г6-45) и программного обеспечения в составе подсистемы 3 управления, подсистемы 4 математического моделирования и библиотеки 5 виртуальных систем. Система генерирования-имитации обладает следующими свойствами и характеристиками:

математическое моделирование электрических сигналов в частотной и временной областях;

математическое моделирование электрических звеньев в частотной и временной областях;

генерирование гармонических, импульсных, аналого-импульсных, цифровых и модулированных детерминированных сигналов произвольной формы, включая полные цветные телевизионные и комплексные стереофонические сигналы;

генерирование псевдослучайных и псевдошумовых испытательных сигналов;

электрическая имитация в реальном масштабе времени электрических звеньев и устройств;

возможность использования системы генерирования-имитации в качестве многофункциональных (программно перестраиваемых) лабораторных макетов по различным дисциплинам;

возможность определения амплитудно-фазовых спектров генерируемых сигналов и их частотной фильтрации;

электрический анализ и синтез испытательных цветных (черно-белых) изображений;

диапазон частот генерируемых синусоидальных сигналов — $10^{-2} \dots 10^8$ Гц, верхняя граничная частота генерируемых видеосигналов (модулированных радиосигналов) — $40 \cdot 10^6$ Гц;

количество поддиапазонов — 10, декадное разбиение;

относительная нестабильность частоты генерируемых колебаний — $3 \cdot 10^{-6}$
шаг сетки частот — $10^{-5} \cdot F_k$, Гц (F_k — верхняя граничная частота k -го поддиапазона, $k=1, 10$);

диапазон уровней выходных сигналов — $0 \dots 1$ В;

предельно допустимое значение коэффициента нелинейных искажений (коэффициента гармоник) — 0,5%;

длительность фронта (среза) генерируемых импульсных сигналов — не более 4 нс;

возможность детерминированного (случайного) изменения амплитудных и временных (частотных) параметров генерируемых сигналов (реакций);

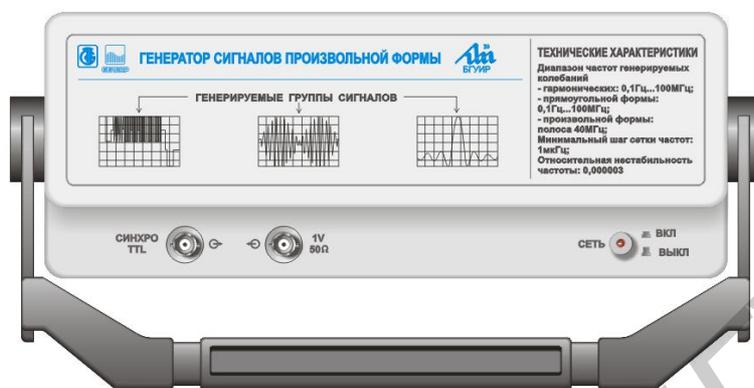
возможность аналитического, графического (с помощью манипулятора типа “мышь”) и табличного задания генерируемых сигналов;

открытость системы генерирования-имитации — возможность использования других программ (пакетов программ) для задания сигналов;

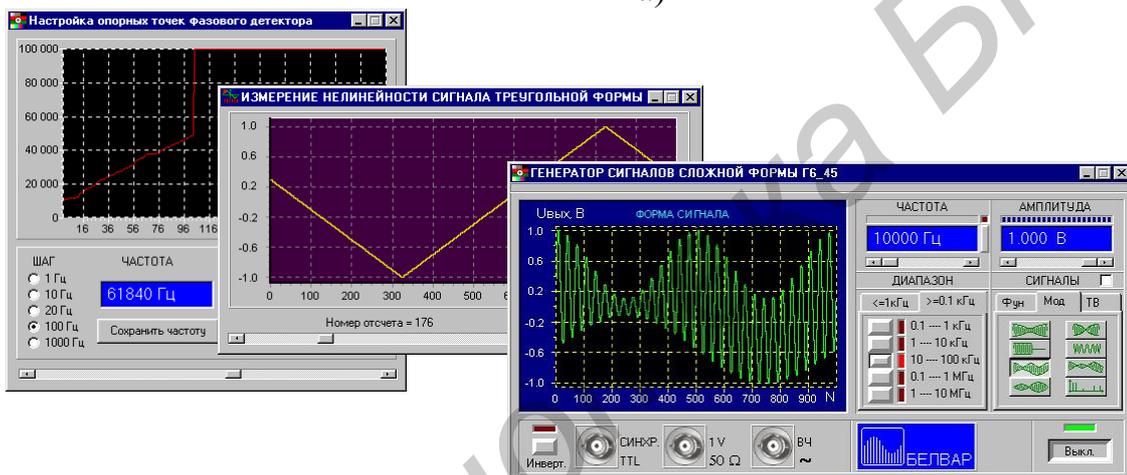
инвариантность к IBM-совместимым компьютерам, применение параллельного интерфейса IEEE 1284 (LPT) для связи подсистемы генерирования с ПЭВМ.

ПЭВМ 1, подсистема 2 генерирования и подсистема 3 управления образуют в совокупности генератор Г6-45 сигналов сложной формы (см. рис. А.1, А.2), определяющий электрические характеристики ПАК. Подсистема 4 математического моделирования представляет собой (специально разработанный) пакет прикладных программ математического моделирования электрических

сигналов, звеньев и их реакций в частотной и временной областях. Подсистема 3 управления поддерживает процедуры: формирования сигналов; формирования, обработки и анализа изображений; обработки результатов моделирования и формирования отсчетных значений сигналов для подсистемы 2 генерирования; управления и связи с подсистемой 2 генерирования; связи с другими программами (пакетами программ).



а)



б)

а — аппаратная часть; б — программное обеспечение генератора

Рисунок А.2 — Генератор Г6-45 сигналов сложной формы

Процедура связи с другими пакетами расширяет возможности ПАК за счет использования стандартных пакетов программ математического моделирования. Процедура формирования сигналов поддерживает различные способы их задания: аналитический (математическим выражением); графический (манипулятором типа “мышь”); табличный (формируется таблица отсчетных значений генерируемого сигнала); из файлов данных (могут создаваться различными программными средствами, работающими с устройствами ввода/вывода сигналов в ПЭВМ). Процедура формирования, обработки и анализа изображений позволяет создавать полноценные кадры цветных и черно-белых изображений

разных телевизионных стандартов и систем (PAL, SECAM, NTSC). Она работает с различными форматами компьютерных изображений (BMP, GIF, JPG и т.п.), что позволяет применять известные графические пакеты редактирования изображений.

Процедура обработки результатов моделирования и процедура управления и связи с подсистемой генерирования оформлены в стиле концепции “виртуальных приборов”: управляющие элементы выбора вида сигнала, установки его частоты и амплитуды, элементы установки режима работы и т.п. реализованы на программной “виртуальной” передней панели системы генерирования-имитации (рис. А.3).

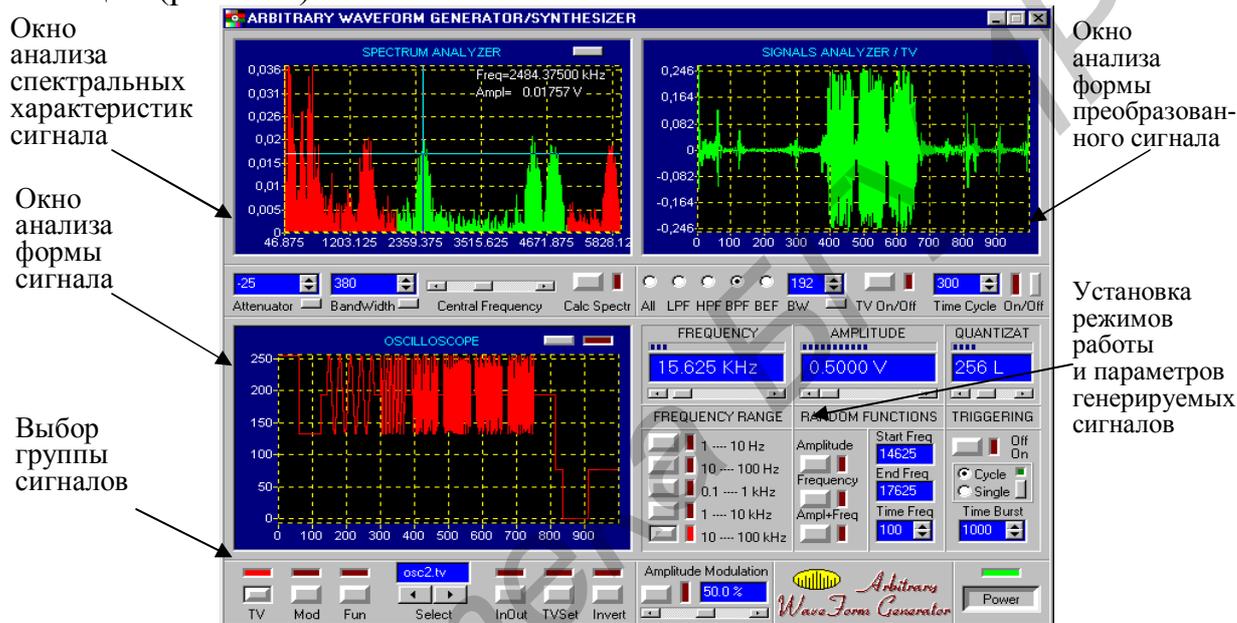


Рисунок А.3 — Виртуальная панель системы генерирования-имитации

Для удобства выбора генерируемые сигналы условно разделены на три группы: телевизионные; функциональные; сигналы с различными видами модуляции (см. рис. А.3). Принципиально, перечень и количество сигналов каждой группы можно формировать произвольно. При необходимости имеется возможность создания новых групп сигналов (по признаку, удобному для пользователя).

Возможны следующие основные варианты построения лабораторных работ на базе ПАК:

- использование программного обеспечения (из библиотеки 5 виртуальных систем), реализующего “виртуальную” панель исследуемой лабораторной установки, с последующей электрической имитацией в реальном масштабе времени (с помощью генератора Г6-45) ее функциональных блоков;

- использование стандартных пакетов математического, структурно- и схемотехнического моделирования (MathCAD, MathLab, SimuLink, Mathematica, Electronics WorkBench, PSpice и др.) для формирования вектора отсчетных значений с последующим его преобразованием в электрический сигнал в реальном масштабе времени (с помощью генератора Г6-45).

По первому варианту предлагается использовать программное обеспечение, реализующее структурную схему исследуемого устройства и необходимые контрольные точки (рис. А.4). Студент работает с виртуальным лабораторным макетом. Программа обеспечивает необходимые переключения в контрольных точках и одновременное формирование соответствующих сигналов в реальном масштабе времени (с помощью генератора Г6-45). Параметры сигналов в контрольных точках измеряются с помощью осциллографа, частотомера и анализатора спектра.

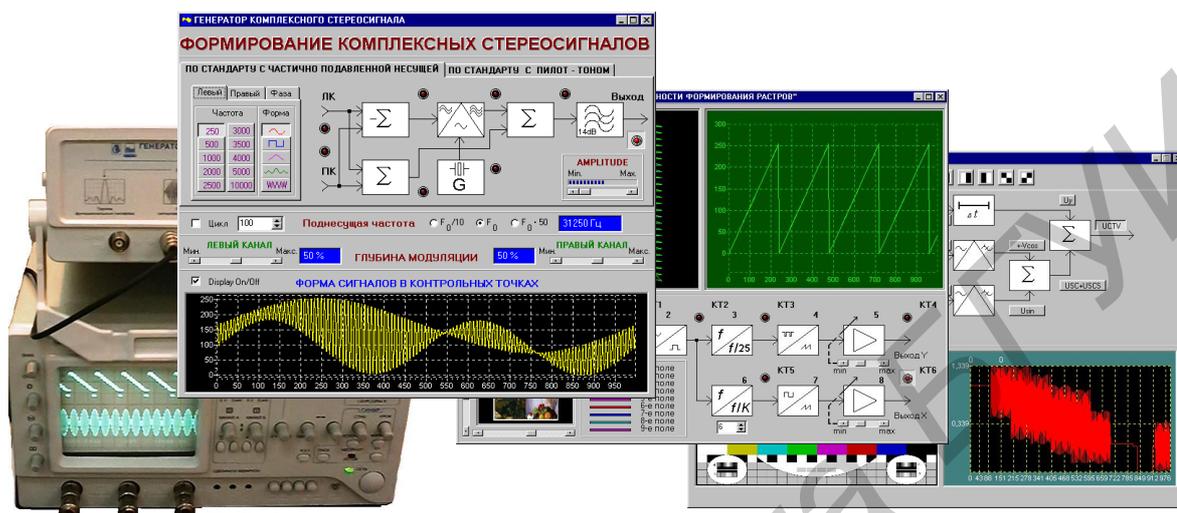


Рисунок А.4 — Примеры виртуальных лабораторных макетов

По второму варианту используется стандартный макет программ, например MathCAD. По результатам проведенного математического моделирования необходимо сформировать файл отсчетных значений исследуемого сигнала, синтезировать его в реальном масштабе времени (с помощью генератора Г6-45) и подвергнуть измерениям (аналогично первому варианту). Лабораторные работы по дисциплине “Моделирование СТК” построены по второму варианту.

Учебное издание

Ильинков Валерий Андреевич
Романов Вячеслав Евгеньевич
Силин Алексей Анатольевич

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ

Лабораторный практикум

для студентов специальностей

“Системы радиосвязи, радиовещания и телевидения” и

“Многоканальные системы телекоммуникаций”

всех форм обучения

В 2-х частях

Часть 1

Ответственный за выпуск В.Е. Романов

Подписано в печать.

Гарнитура “Таймс”.

Уч.-изд. л. 2,9.

Формат 60x84 1/16.

Печать ризографическая.

Тираж 100 экз.

Бумага офсетная.

Усл. печ. л.

Заказ 198.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
“Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники”
ЛИ № 02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП № 02330/0131666 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6