

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра систем телекоммуникаций

Н. И. Беленкевич, В. Е. Романов

ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

по дисциплине «Прикладное программирование»
для студентов специальностей
«Системы радиосвязи, радиовещания и телевидения»
и «Многоканальные системы телекоммуникаций»
всех форм обучения

В 2-х частях

Часть 1

Минск БГУИР 2010

УДК 004.9(076.5)
ББК 32.973.26 – 018.2я73
Б43

Беленкевич, Н. И.

Б43

Прикладное программирование : лаб. практикум для студ. спец. «Системы радиосвязи, радиовещания и телевидения» и «Многоканальные системы телекоммуникаций» всех форм обуч. В 2 ч. Ч. 1 / Н. И. Беленкевич, В. Е. Романов. – Минск : БГУИР, 2010. – 47 с. : ил.

ISBN 978-985-488-507-0 (ч. 1)

Даны краткие теоретические сведения и порядок выполнения четырех лабораторных работ по анализу различных сигналов, звеньев, систем телекоммуникаций в пакете математического моделирования MathCAD.

УДК 004.9(076.5)
ББК 32.973.26 – 018.2я73

ISBN 978-985-488-507-0 (ч. 1)
ISBN 978-985-488-508-7

© Беленкевич Н. И., Романов В. Е., 2010
© УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 2010

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа №1

Спектральный анализ периодической последовательности импульсов в динамическом режиме в MathCAD.....4

Лабораторная работа №2

Спектральный анализ амплитудно-моделированного и частотно-модулированного сигналов с помощью быстрого преобразования Фурье в динамическом режиме в MathCAD.....18

Лабораторная работа №3

Обработка изображений в MathCAD.....33

Лабораторная работа №4

Расчет спектра сложного периодического сигнала и его идеальная фильтрация в MathCAD.....40

ЛИТЕРАТУРА.....46

Лабораторная работа №1
СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
ИМПУЛЬСОВ В ДИНАМИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ В MATHCAD

1.1 Цель работы

Изучение особенностей спектрального представления периодических сигналов в MathCAD, применение динамического режима для анализа изменения характеристик сигналов в зависимости от величины временных параметров.

1.2 Краткие теоретические сведения

1.2.1 Спектральное представление сигналов

В теории и практике важное значение имеет представление сигналов определенной формы (периодических и непериодических) в виде линейной суперпозиции некоторых известных базовых сигналов. Математически эта задача сводится к разложению исходной функции $f(t)$ по системе ортогональных базисных функций $\{\varphi_n(t)\}$. Система действительных функций $\{\varphi_n(t)\}$ ($n = \overline{0, \infty}$) называется ортогональной на отрезке $[a, b]$ с весом $\rho(t)$, если

$$\int_a^b \rho(t) \cdot \varphi_n(t) \cdot \varphi_m(t) dt = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \neq 0, & n = m. \end{cases} \quad (1.1)$$

Величина

$$\|\varphi_n(t) \cdot \sqrt{\rho(t)}\| = \sqrt{\int_a^b \rho(t) \cdot \varphi_n^2(t) dt} \quad (1.2)$$

называется нормой функции $\varphi_n(t)$. Если она равна единице, то функция $\varphi_n(t)$ является нормированной с весом $\rho(t)$, а бесконечная система нормированных функций $\{\varphi_n(t)\}$ – ортонормированной. Известна теорема [1], согласно которой, если существует система ортогональных базисных функций $\{\varphi_n(t)\}$ с весом $\rho(t)$ на отрезке $[a, b]$, то любая функция $f(t)$, кусочно-непрерывная и интегрируемая с квадратом на данном отрезке (т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt < \infty$), может быть представлена на $[a, b]$ в виде следующего ряда:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot \varphi_n(t). \quad (1.3)$$

Этот ряд называется обобщенным рядом Фурье по системе ортогональных базисных функций $\{\varphi_n(t)\}$ (речь идет о функциях действительного переменного). Причем исходная функция $f(t)$ на $[a, b]$ может допускать разрывы

первого рода, но количество точек разрыва на отрезке $[a, b]$ не должно быть бесконечно большим. Здесь коэффициенты

$$C_n = \frac{1}{\|\varphi_n(t) \cdot \sqrt{\rho(t)}\|^2} \cdot \int_a^b \rho(t) \cdot \varphi_n(t) \cdot f(t) dt, \quad (1.4)$$

полученные из (1.3) путем умножения левой и правой части на $\varphi_n(t) \cdot \rho(t)$, последующего интегрирования с учетом условия ортогональности (1.1), называют спектром функции (сигнала) в ортогональной системе базисных функций, полностью определяющих сигнал $f(t)$.

На практике количество учитываемых членов ряда (1.3) ограничивают, сигнал представляют конечной суммой

$$f(t) \approx f_N(t) = \sum_{n=0}^N C_n \cdot \varphi_n(t). \quad (1.5)$$

Очевидно, что аппроксимирующая функция $f_N(t)$ будет с определенной погрешностью описывать исходный сигнал $f(t)$. Из теории аппроксимации известно [2], что если существует система базисных функций, ортогональная на отрезке $[a, b]$ с весом $\rho(t)$, то некоторую аналитически заданную функцию $f(t)$, удовлетворяющую условиям разложения, можно представить в виде

обобщенного многочлена $P_m(t) = \sum_{n=0}^m a_n \cdot \varphi_n(t)$, причем для построения наилучшего приближения по критерию минимума среднеквадратичного отклонения

$$\sigma^2 = \min_{a_n (n=0, m)} \int_a^b \rho(t) \cdot [f(t) - P_m(t)]^2 dt \quad (1.6)$$

коэффициенты данного обобщенного многочлена a_n соответствуют коэффициентам обобщенного ряда Фурье C_n , рассчитанным по (1.4). Это означает, что при заданной системе базисных функций $\{\varphi_n(t)\}$ минимальная среднеквадратичная погрешность обеспечивается при представлении сигнала конечной суммой обобщенного ряда Фурье. Ортогональная система базисных функций называется полной, если $\sigma^2 \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Это означает, что ряд (1.3) с коэффициентами (1.4) сходится к функции $f(t)$ в среднем, т. е. в некоторых отдельных точках аппроксимирующая функция может отличаться от исходной, но площадь, заключенная между аппроксимирующей и исходной функциями, стремится к нулю.

На практике приходится сталкиваться с представлением сигнала по системе комплексных базисных функций. Все указанные выше формулировки и теоремы относительно системы действительных функций справедливы и в этом случае, однако необходимы дополнения. Для бесконечной системы комплекснозначных функций $(-\infty \leq n \leq \infty)$ $\varphi_n(t) = \varphi_{nr}(t) + j\varphi_{ni}(t)$ условие ортогональности таково:

$$\int_a^b \varphi_n(t) \cdot \varphi_m^*(t) \cdot \rho(t) dt = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \neq 0, & n = m, \end{cases} \quad (1.7)$$

где $\varphi_m^*(t)$ – функция, комплексно-сопряженная к функции $\varphi_m(t)$, т. е. если $\varphi_m(t) = |\varphi_m(t)| \cdot e^{j\psi_m(t)}$, то $\varphi_m^*(t) = |\varphi_m(t)| \cdot e^{-j\psi_m(t)}$.

В теореме, которая формулирует условия разложения в обобщенный ряд Фурье, необходимо соблюсти требование $\int_a^b |f^2(t)| dt < \infty$, при этом норма функции соответствует выражению

$$\|\varphi_n(t)\sqrt{\rho(t)}\| = \sqrt{\int_a^b \varphi_n(t) \cdot \varphi_n^*(t) \cdot \rho(t) dt} = \sqrt{\int_a^b |\varphi_n(t)|^2 \cdot \rho(t) dt}. \quad (1.8)$$

Тогда разложение в обобщенный ряд Фурье по системе комплексных функций

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot \varphi_n(t) \quad (1.9)$$

с коэффициентами Фурье $C_n = \frac{1}{\|\varphi_n(t)\sqrt{\rho(t)}\|^2} \int_a^b f(t) \cdot \varphi_n^*(t) \cdot \rho(t) dt$ для практических применений представляют конечной суммой

$$f(t) \approx f_N(t) = \sum_{n=-N}^N C_n \cdot \varphi_n(t). \quad (1.10)$$

Все указанные соотношения описывают общую процедуру разложения исследуемого сигнала по произвольной ортогональной системе базисных функций. Таких систем известно значительное количество. Применение конкретных систем обусловлено особенностями исследуемых сигналов.

Периодические сигналы часто раскладывают по ортогональной системе гармонических функций кратных частот [3, 4]. Такое разложение называют рядом Фурье. Применение гармонических функций обусловлено следующим: гармонические сигналы инвариантны относительно преобразований в стационарных линейных электрических цепях, т. е. сигнал на выходе цепи остается гармоническим с той же частотой, что и входной сигнал, но отличается от последнего лишь амплитудой и начальной фазой; техника генерирования гармонических сигналов относительно проста. Если сигнал представлен в виде суммы гармонических колебаний с различными частотами, то этот процесс называют спектральным разложением данного сигнала. Отдельные гармонические компоненты сигнала образуют его спектр.

При разложении периодического сигнала $f(t) = f(t + T)$ в ряд Фурье используют систему действительных функций

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t), & n = \overline{0, \infty} \\ \sin(n \cdot \omega_1 \cdot t), & n = \overline{-\infty, -1} \end{cases} \quad (1.11)$$

или соответствующую ей систему комплекснозначных функций

$$\varphi_n(t) = e^{j \cdot n \cdot \omega_1 \cdot t}, \quad n = \overline{-\infty, \infty}. \quad (1.12)$$

Эти системы базисных функций являются ортогональными с единичным весом ($\rho(t)=1$) на любом отрезке $[a, b]$ с длительностью $T_{ab} = b - a = T = 2\pi/\omega_1$, а квадрат нормы каждой функции $\varphi_n(t)$ равен T .

Для возможности описания рядом Фурье кусочно-непрерывная функция $f(t)$ должна удовлетворять условиям Дирихле [1]. Тогда периодическая кусочно-непрерывная функция (сигнал) $f(t)$ раскладывается в ряд Фурье, представленный в комплексном виде

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_1 \cdot t}, \quad (1.13)$$

где $C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_1 \cdot t} dt$. Спектральные коэффициенты ряда Фурье,

являющиеся комплексными числами, можно представить в форме

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t) dt - j \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n \cdot \omega_1 \cdot t) dt = \\ &= C_{nc} - j C_{ns} = |C_n| \cdot e^{j\theta_n} \end{aligned} \quad (1.14)$$

где $|C_n| = \sqrt{C_{nc}^2 + C_{ns}^2}$; $\theta_n = -\text{arctg}(C_{ns}/C_{nc})$.

При нахождении коэффициентов ряда Фурье операцию интегрирования можно выполнять на любом отрезке длительностью T . Модуль $|C_n|$ и аргумент θ_n спектральных коэффициентов описывают дискретные математические спектры (соответственно амплитудный и фазовый) периодического сигнала.

Для получения дискретных физических спектров (амплитудного и фазового) следует иметь в виду, что $|C_n| = |C_{-n}|$ (амплитудный спектр – четная функция частоты), а $\theta_n = -\theta_{-n}$ (фазовый спектр – нечетная функция частоты). Выполняя попарно суммирование в ряде (1.13) членов с номерами n и $-n$, переходят к тригонометрическому ряду Фурье:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot |C_n| \cdot \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t + \theta_n), \quad (1.15)$$

часто представляемому в виде

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t) + b_n \sin(n \cdot \omega_1 \cdot t)) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t + \theta_n), \end{aligned} \quad (1.16)$$

где $a_n = 2C_{nc}$; $b_n = 2C_{ns}$; $A_n = 2|C_n|$.

В выражениях (1.15) и (1.16) коэффициенты A_n и θ_n описывают дискретные физические спектры исследуемого периодического сигнала: соответственно амплитудный и фазовый.

Ряд Фурье характеризуется плохой сходимостью, особенно в случае представления сигналов, описываемых функциями с разрывами первого рода. Для повышения точности увеличивают количество учитываемых членов ряда N , однако в точках разрыва первого рода даже при $N \rightarrow \infty$ в аппроксимирующей функции $f_N(t)$ возникают бесконечно тонкие игольчатые выбросы значительной величины. Эта особенность ряда Фурье называется явлением Гиббса [3, 4].

Разложение в ряд Фурье допускает обобщение, позволяющее получать спектральные характеристики непериодических сигналов. Пусть есть некоторый периодический сигнал $f(t)$. В соответствии с разложением в ряд Фурье этот сигнал в любой момент t можно представить в виде ряда (1.13). При подстановке в этот ряд выражения для коэффициентов C_n получим

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_1 \cdot t} dt \right) \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_1 \cdot t}. \quad (1.17)$$

Сделаем предельный переход, устремив к бесконечности период повторения T . Периодический сигнал $f(t)$ трансформируется в непериодический, состоящий из одного импульса. При этом $\omega_1 \rightarrow 0$, поэтому можно ввести замену переменной $\omega_1 \rightarrow d\omega$, а $n \cdot \omega_1 \rightarrow \omega$, поскольку частоты соседних гармоник окажутся сколь угодно близкими. Амплитудные коэффициенты C_n станут неограниченно малыми, компоненты амплитудного спектра устремятся к началу координат и спектр из дискретного преобразуется в сплошной. При сделанном переходе операцию суммирования можно заменить операцией интегрирования. Получим пару преобразований Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} d\omega, \quad (1.18)$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt. \quad (1.19)$$

Здесь $S(\omega)$ называется спектральной плотностью непериодического детерминированного сигнала. Последняя может быть представлена в виде

$$S(\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = |S(\omega)| \cdot e^{-j \cdot \theta(\omega)}, \quad (1.20)$$

где $A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega \cdot t) dt$, $B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega \cdot t) dt$ (т. е. $A(\omega)$ и $B(\omega)$ эквивалентны соответственно C_{nc} и C_{ns}).

Модуль и аргумент спектральной плотности называют амплитудой и фазой непрерывного спектра непериодического сигнала

$$|S(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}, \quad \theta(\omega) = -\arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)}. \quad (1.21)$$

При этом $|S(\omega)|$ функция четная, а $\theta(\omega)$ – нечетная. Сравнивая выражения для спектральной плотности $S(\omega)$ (1.19) и коэффициента C_n комплексного ряда

Фурье (1.13), можно установить, что

$$C_n = \frac{1}{T} S(\omega). \quad (1.22)$$

Формула (1.22) позволяет найти выражение для спектральной плотности единичного импульса, зная коэффициенты ряда Фурье C_n для периодической последовательности таких импульсов, и наоборот, а также показывает, что огибающая дискретного спектра периодической последовательности импульсов и спектр единичного импульса различаются только масштабным коэффициентом и одинаковы по форме.

1.2.2 Принципы работы в MathCAD: типы данных, графика, анимация графиков, специальный язык программирования

MathCAD занимает лидирующее положение среди всех математических систем. К ее достоинствам относятся высокая универсальность; полное соответствие используемых функций и операторов традициям оформления в математике; возможность проведения численных расчетов и символьных преобразований; написание алгоритмов любой сложности с помощью специального языка программирования; высокая степень интеграции с другими Windows-приложениями; проведение расчетов в режиме реального времени; хорошие возможности визуализации; невысокая требовательность к машинным ресурсам.

Вычислительные алгоритмы в MathCAD читаются слева направо и сверху вниз, поэтому чтобы получить результат, требуется сначала задать выражение и исходные данные для расчетов. MathCAD является математическим редактором, однако наряду с формульным режимом ввода имеется возможность введения текстовой области (Insert/ Text Region), в которую заносятся комментарии и пояснения к выполняемым расчетам. Если требуется создать текст, содержащий математические вычисления, то, находясь в текстовом режиме, с помощью команды Insert/ Math Region можно ввести математическое выражение, расчет которого осуществится по принципам математического редактора.

Все математические операции осуществляются с помощью операторов или встроенных функций. Для набора вычислительных выражений используется панель математических шаблонов (View/ Toolbars/ Math), в которой операторы распределены по категориям: Calculator (основные арифметические действия), Graph (операторы визуализации), Matrix (основные матричные и векторные преобразования), Evaluation (операторы выражений), Calculus (операторы выполнения операций математического анализа), Boolean (логические операторы), Programming (операторы специального языка программирования), Greek (символы греческого алфавита), Symbolic (операторы символьных преобразований). В имени переменных строчная и прописная буквы воспринимаются как различные символы. Среди операторов выражений имеются следующие: «= \Rightarrow » – оператор численного вывода; «:=» – оператор присвоения; « \rightarrow » – оператор символьного вывода; « \leftarrow » – оператор локального присвоения (используется

при написании программ с помощью операторов панели Programming); «≡» – оператор глобального присвоения. Основное различие между «:=» и «≡» состоит в том, что при нахождении численного значения функции в некоторой точке, определение переменной с помощью «:=» должно быть сделано строго выше или левее определения самой функции, а с помощью «≡» – в любой точке документа, поэтому оператором «≡» во избежание ошибок пользоваться следует крайне осторожно.

При стандартных настройках численный ответ отображается только до трех знаков после запятой, точность же расчета алгебраических выражений и встроенных функций постоянна и составляет 15 знаков после запятой. Вывод численного результата (Format Result/ – закладка Number Format) возможен в пяти форматах: основном, десятичном (целая часть не длиннее 15 знаков), научном (целая часть мантииссы из одного символа, возможность представления числа в техническом формате $E \pm 000$), инженерном (близок к научному, но порядок числа кратен трем), дробном (результат в виде простой дроби, точность можно регулировать, для выделения целой части в неправильной дроби используется опция Use Mixed Numbers).

К основным типам данных в MathCAD относятся:

- 1) числа (действительные, комплексные, встроенные константы – π (число «пи»), e (основание натурального логарифма), i или j (мнимая единица), ∞ (символ бесконечности – число 10^{307}), % (символ процента – 0.01));
- 2) строки (любая последовательность символов, заключенная в кавычки);
- 3) массивы (любая упорядоченная последовательность элементов).

Также имеются шесть системных переменных (см. Math/ Options), которые служат для управления точностью численных методов, определения особенностей задания массивов и параметров ввода – вывода данных. Переменная ORIGIN, задающая начальный индекс массива, – целое число (по умолчанию – нуль); TOL, устанавливающая точность сходимости численных методов решения уравнений, поиска экстремумов и интегрирования, имеет минимальное значение 10^{-15} (по умолчанию – 0.001); STOL, указывающая граничную точность численного поиска корней систем уравнений и других задач, использующих блок Given, по своим характеристикам аналогична TOL; Seed Value for random numbers – начальная величина случайных чисел в генераторах случайных чисел; PRNPRECISION и PRNCOLWIDTH – параметры соответственно формата данных и формата столбца при выводе в файл.

Массив – это любая упорядоченная последовательность элементов (чисел, строк, матриц). По своей структуре массивы делятся на три группы: векторы (матрицы-столбцы или матрицы-строки), матрицы (двумерный массив), тензоры (вложенные массивы – матрицы или векторы, элементы которых также являются массивами). По принципу задания элементов массивы делятся на две группы: 1) векторы, матрицы и тензоры, при задании которых нет прямой связи между величиной элемента и его индексами; 2) ранжированные переменные – векторы, величина элементов которых напрямую определяется индексом.

В MathCAD реализовано восемь способов задания массивов:

1. Ручной способ – команда Insert/ Matrix (на экран можно вывести шаблон матрицы не более 100 элементов).
2. Последовательное задание каждого элемента через имя матрицы и индексы ($A_{i,j} :=$).
3. Использование ранжированных переменных ($i := 0..5$ $x_i := 0.2 \cdot i$).
4. Задание массива при помощи языка программирования.
5. Применение встроенных функций: редактирование, создание матриц (в том числе специального вида), поиск матричных норм, ранга матрицы, собственных значений и собственных векторов, матричных разложений (LU и других) командой Insert/ Function из категории Vector and Matrix;
6. Задание массива через связь с другими приложениями (Excel);
7. Создание таблицы данных командой Insert/ Component (выбор из списка компонентов компонента Input Table);
8. Чтение из внешнего файла (выбор функции чтения командой Insert/ Function из категории File Access).

При задании вложенных массивов непосредственно в отдельный элемент шаблона матрицы вставить еще одну матрицу нельзя. Определение тензора производится другим путем – поэлементно. Например, $A_{0,0} := (1 \ 3)$, $A_{0,1} := \pi$,

$A_{1,0} := "Matrix"$, $A_{1,1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, тогда $A = \begin{pmatrix} \{1,2\} & \pi \\ "Matrix" & \{2,1\} \end{pmatrix}$. Видно, что при визуализации тензоров отображаются не сами элементы-матрицы, а их размерность.

Для раскрытия тензора используется команда Format/ Result – на закладке Display Options параметр Expand nested arrays. Использовать значение любого элемента вложенной матрицы можно с помощью двух наборов индексов – первый соответствует положению самой матрицы, второй – выделяемому в ней элементу (в примере $A_{0,0} = (1 \ 3)$, $(A_{0,0})_{0,0} = 1$). Для выделения из матрицы произвольной подматрицы существует специальная функция $submatrix(M, r1, r2, c1, c2)$, с помощью которой из матрицы M извлекаются строки, начиная с $r1$ и заканчивая $r2$, и столбцы, начиная с $c1$ и заканчивая $c2$.

Для визуализации результатов расчетов используются графические возможности MathCAD. Все основные типы графиков и инструменты работы с ними расположены на рабочей панели Graph семейства Math. Имеется семь типов графиков: X-Y Plot (график кривой в двумерной декартовой системе координат), Polar Plot (график кривой в полярной системе координат), Surface Plot (поверхность), Contour Plot (контурный график), 3D Bar Plot (столбчатая трехмерная диаграмма), 3D Scatter Plot (точечный трехмерный график), и Vector Field (векторное поле). Деление графиков на типы условно, поскольку изменяя различные параметры и установки, можно построить в двумерной декартовой системе координат кривую, гистограмму, ступенчатый график или график с отложенными ошибками. Широкие возможности форматирования существуют и в трехмерной системе координат.

При визуализации расчетов вначале вводится шаблон графической области соответствующего типа графика, представляющий собой две вложенные рамки – во внутренней отображаются непосредственно кривые зависимостей, в пространстве между рамками – разного рода служебная информация. При быстром построении графика в двумерной декартовой системе координат в специальном маркере, расположенном под внутренней рамкой, указывается имя переменной, а в расположенном слева от внутренней рамки – сама функция либо, если последняя была определена ранее, <имя функции> (<имя переменной>). Недостаток этого метода состоит в том, что область изменения переменной для всех функций одинакова – $[-10; 10]$, что в большинстве случаев неприемлемо. Однако при выделении графической области непосредственно под крайними значениями на горизонтальной и вертикальной осях имеются маркеры с максимальными и минимальными величинами узловых точек графика. Эти значения пользователь может изменять, что вызовет автоматический пересчет графика. В ряде случаев удобнее задать вектор изменений аргумента функции до построения графика с помощью оператора ранжированной переменной *m..n* панели Matrix (т. е. ■:=■,■..■, где первый маркер – имя переменной, второй – левая граница интервала изменений, третий – следующее значение на интервале изменения, что определяет шаг, четвертый – правая граница интервала изменений). В результате аргумент и функция заданы в виде двух соразмерных векторов, по которым будет построен график. При этом необходимо обращать внимание на величину шага, чтобы вид полученной зависимости не оказался искаженным. Для получения нескольких зависимостей в одном графическом шаблоне, когда курсор находится справа от выражения, определяющего координаты последнего ряда данных по вертикальной оси, нажимают клавишу [,], курсор опустится на строчку ниже и появится новый маркер для ввода еще одной зависимости. Если кривые зависят от разных переменных, то аналогично поступают и с маркером горизонтальной оси.

В одном графическом шаблоне можно визуализировать кривые, заданные различными способами. При форматировании графика в диалоговом окне Formatting Currently Selected X-Y Plot на закладке Traces можно произвести настройку вида визуализируемого ряда данных. Максимальное число зависимостей – 16, для каждой – шесть пунктов настройки. Важнейшая среди них – Type (тип графика): lines (график в виде обычной кривой, отсчетные значения соединяются по принципу кусочно-линейной интерполяции), points (задание точечного графика, визуализируются только узловые точки без соединительных линий), bar (график в виде столбчатой диаграммы), solidbar (график в виде столбчатой диаграммы, столбцы которой залиты выбранным оттенком), step (задание шагового графика в виде контура диаграммы), stem (для задания стержневой диаграммы), error (график с отложенной погрешностью), draw (кривая прорисовывается между узловыми точками).

Анимация представляет собой быстро сменяющиеся друг друга кадры с более или менее значительными изменениями изображения. За счет инертности

зрения при просмотре создается впечатление непрерывного процесса. Для создания динамического режима используется специальная переменная FRAME (кадр). Значение этой переменной равно номеру кадра и может изменяться от 0 (до запуска процесса анимации) до предельного значения 9999. Подставляя переменную FRAME в функцию, можно получить по мере смены кадров изменение данной функции. В результате при совмещении нескольких кадров получим анимацию. Алгоритм задания анимации состоит в следующем.

1. Определяем переменную (или константу), значение которой зависит от переменной FRAME.

2. Задаем функцию, в которую изменяемая переменная (или константа) входит как параметр.

3. Строим график этой функции.

4. При помощи команды View/Animate открываем специальное диалоговое окно Animate с опциями анимации: первое (From) и последнее (To) значения целочисленной переменной FRAME, количество (At) кадров, сменяющихся в секунду.

5. Выделяем (мышью) ту часть рабочей области, которая должна быть отображена в анимационном ролике.

6. Для непосредственного начала анимации нажимаем кнопку Animate, а после завершения анимации имеем окно просмотра созданной анимации (Playback), которую можно сохранить (Save As) в стандартном видеоформате, что позволит просмотреть ее как в MathCAD, так и без использования данной среды.

Язык программирования MathCAD содержит все элементы языка высокого уровня, необходимые для математических расчетов, дополнен встроенными функциями системы, возможностями численного и символьного расчета различных величин, но при этом предельно прост. Все операторы, всего их восемь, и элементы языка программирования находятся на специальной рабочей панели Programming, расположенной на панели Math. Программа пишется в специальном обособленном от остального документа блоке, созданном командой Add Line панели Programming. Программный блок можно создать и внутри уже заданного блока. Например, в шаблоне

```

|
|
| for i ∈
| |
| |
|

```

программы MathCAD параллельная главному блоку линия будет содержать выражения, обособленные от остальной программы. Выполнение соответствующих им действий будет связано только с оператором, к которому относится внутренний блок. Для присвоения значений переменным, выражениям или константам в программах используется специальный оператор Local Definition

(«←») с панели Programming (использовать оператор обычного присвоения «:=» в программах нельзя). Причем если в блоках значение присваивается функции, то определять переменные, от которых она зависит, в скобках после ее имени не нужно, в отличие от стандартного синтаксиса MathCAD.

Программа строится по принципу конструктора с использованием специальных операторов. Для задания этих операторов обращаются к соответствующим командам панели Programming либо применяют сочетание «горячих» клавиш (при наборе оператора с клавиатуры последний воспринимается системой как неизвестная функция).

Условий для каждого оператора можно задать несколько. Делается это двумя способами. Первый из них состоит в действии команды Add Line, по которой в появившемся программном блоке следует определить условия. При таком задании условий оператор будет выполнен, если выполняется хотя бы одно условие множества условий (т. е. имеет место соответствие использованию логического оператора Or («∨»)). Ко второму способу прибегают, если требуется задействовать оператор при условии выполнения всего комплекса условий. Тогда для записи этого комплекса условий используют логический оператор And («∧»). Аналогично поступают, если требуется в случае выполнения оператора осуществить несколько операций: либо создают отдельный программный блок командой Add Line, либо используют для объединения операций логические операции And («∧») и Exclusive or («⊕»).

В качестве результата работы программы выводится значение того выражения, которое находится в последнем маркере главного программного блока, т. е. результатом может быть скаляр либо вектор (матрица). Вывод результата осуществляется при помощи оператора «=» или присвоения результату работы программы некоторого имени. Кроме того, можно создавать свои собственные функции пользователя, подобные встроенным функциям MathCAD. Для этого при написании программы помимо имени функции в скобках идет перечисление формальных входных переменных, относительно которых реализован внутренний алгоритм. При применении такой функции вместо формальных входных параметров используют фактические. Если функции пользователя прописаны в одном документе MathCAD, а применять их нужно в другом, то осуществляют ссылку на первый документ командой Insert/Reference, т. е. к новому документу как бы приписывается сверху еще один документ.

В языке программирования MathCAD имеются два оператора, предназначенных для задания цикла. Первый из них

for ■ ∈ ■

■

организует выполнение операции(й) или проверку условия(й) для ряда конкретных значений переменной. В двух верхних маркерах, соединенных символом принадлежности, задаются имя переменной, по которой организуется цикл, и ряд принимаемых ею значений. В нижнем маркере определяется операция или комплекс операций, которые должны быть выполнены для каждого значе-

ния переменной. Ряд значений переменной задается с помощью либо ранжированной переменной (оператором *m..n* панели Matrix можно учесть шаг изменения переменной) либо вектора значений. Вторым оператором цикла

`while` ■

■

организуется цикл, который будет работать до тех пор, пока выполняется некоторое условие. Он имеет два маркера, в которые вводятся условия работы цикла и выражения операций, проделываемых на каждом его витке. Иногда при работе программы могут возникнуть не предусмотренные в них проблемы, в этом случае следует остановить работу цикла и выдать сообщение об ошибке. Для прерывания цикла используется оператор `break`. Если алгоритм содержит несколько условий и возможна ситуация, когда при выполнении одного из них рассмотрение остальных приведет к ошибке, то после выполнения операций, прописанных в первом условии, для перехода к рассмотрению следующего значения циклической переменной применяют оператор прерываний `continue`.

Условных операторов в MathCAD два. Наиболее важный из них оператор

■ `if` ■

имеет два маркера: в правый маркер вводится условие, в левый – операция, которая должна быть проделана в случае, если условие истинно. Оператор

■ `otherwise`

предназначен для определения того действия, которое должно быть выполнено, если условие оператора `if` окажется ложным. Одновременно может быть использовано несколько условных операторов `if`, причем оператор `otherwise` будет задействован только в том случае, если не выполнятся условия всех операторов `if` (имеется в виду, что операторы стоят в одном программном блоке, созданном командой `Add Line`).

При помощи оператора

`return` ■

можно прервать работу программы и выдать некоторое значение при выполнении заданного условия. Обычно данный оператор используется при описании действий алгоритма в случае ошибочной ситуации. Этой же цели, но без остановки работы программы, служит специальный оператор обхода ошибки

■ `on error` ■

который по своему синтаксису полностью соответствует условному оператору `if`. В правый маркер вводится выражение, ошибка в вычислении которого должна быть зарегистрирована; в левый маркер вписывается условие (выражение), которое должно быть выполнено в случае ошибочной ситуации. В некоторых случаях вместо оператора обхода ошибки удобнее пользоваться условным оператором.

1.3 Порядок выполнения работы

1.3.1 В качестве исходного сигнала задан сигнал, представляющий собой периодическую последовательность прямоугольных или треугольных видеоимпульсов напряжения. Начало отсчета выбрано посередине одного из импульсов, т. е. функция $f(t)$ четная относительно переменной t . Сигнал характеризуется следующими параметрами: U – амплитуда импульсов, T – период следования импульсов, τ – длительность импульсов. Осуществить нормирование этих параметров (для удобства представления и расчетов в MathCAD). Записать аналитическое выражение функции $f(t)$.

1.3.2 Получить, исходя из вида $f(t)$, аналитическое выражение для коэффициентов ряда Фурье C_n (по формулам (1.13) или (1.14)). Записать выражение для A_n дискретного физического амплитудного спектра исследуемого периодического сигнала. На основе полученных коэффициентов ряда Фурье записать функцию $f(t)$ в виде разложения в ряд Фурье (формулы (1.15) или (1.16)).

1.3.3 На основе полученных выражений для дискретного физического амплитудного спектра и разложения в ряд Фурье функции (сигнала) $f(t)$ построить в одном графическом шаблоне амплитудный спектр (и огибающую этого спектра), а в другом – временное представление исследуемого сигнала (зарисовать k периодов этого сигнала, количество членов ряда Фурье ограничить интервалом 30К100).

1.3.4 Записать выражение для периода T , который с каждым изменением значения переменной FRAME увеличивается на ΔT (длительность импульса τ фиксирована). Осуществить анимацию в обоих графических шаблонах, учесть, что при изменении периода в диапазоне $T_{st} \text{ К } T_{fin}$, количество выдаваемых на график компонент амплитудного спектра n таково, что для каждого значения переменной FRAME (периода сигнала) рассматривается спектр в одном и том же диапазоне частот.

1.3.5 Период сигнала фиксирован, длительность импульса τ с каждым значением переменной FRAME изменяется на $\Delta\tau$. Записать выражение для τ , учесть, что длительность не может превысить период. Осуществить анимацию в обоих графических шаблонах, для спектрального представления количество выдаваемых на график компонент амплитудного спектра n таково, что для каждого значения переменной FRAME (длительности сигнала) рассматривается спектр в одном и том же диапазоне частот.

1.3.6 Период и длительность сигнала фиксированы. Записать выражение для функции $f(t)$ в виде разложения в ряд Фурье при следующем законе изменения количества учитываемых членов ряда: FRAME = 0 – $f(t)$ соответствует постоянная составляющая, FRAME = 1...9 – сумма постоянной составляющей и первой гармоники, FRAME = 10...19 – сумма постоянной составляющей и двух первых гармоник и т.д. Для записи выражения воспользоваться функцией MathCAD $\text{floor}(x)$ (отсекает у аргумента x дробную часть). Осуществить анимацию сигнала (функции $f(t)$).

1.4 Содержание отчета

- 1 Цель работы.
- 2 Вывод выражений по пункту 1.3.2.
- 3 Графики амплитудного спектра и временного представления исследуемого сигнала по пункту 1.3.3.
- 4 Результаты анимации при изменении периода сигнала по пункту 1.3.4, длительности сигнала по пункту 1.3.5, количества учитываемых членов ряда Фурье по пункту 1.3.6.
- 5 Выводы.

1.5 Контрольные вопросы и задания

- 1 В чем суть спектрального разложения сигнала?
- 2 Какие функции представимы обобщенным рядом Фурье по системе действительных функций, комплекснозначных функций? Записать выражение для обобщенного ряда Фурье. Какие системы базисных функций называются ортогональными, ортонормированными, полными?
- 3 Какова погрешность при ограничении количества учитываемых членов обобщенного ряда Фурье? Что означает сходимость к исходной функции в среднем?
- 4 В чем преимущество гармонических функций для разложения в обобщенный ряд Фурье? Записать ряд Фурье в комплексном и тригонометрическом виде. В чем заключается явление Гиббса?
- 5 Что такое дискретные математические спектры периодического сигнала? Как перейти к дискретным физическим спектрам?
- 6 Как изменяется амплитудный спектр периодической последовательности импульсов при увеличении периода?
- 7 Как изменяется амплитудный спектр периодической последовательности импульсов при увеличении длительности импульсов?
- 8 Пояснить характер взаимосвязи спектральной плотности единичного импульса и коэффициентов комплексного ряда Фурье периодической последовательности таких импульсов.
- 9 Типы данных в MathCAD: особенности их задания.
- 10 Операторы выражений в MathCAD: правила применения.
- 11 Графические возможности MathCAD, правила осуществления анимации.
- 12 Особенности языка программирования MathCAD.
- 13 Операторы программирования в MathCAD: особенности применения.

Лабораторная работа №2
СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АМПЛИТУДНО-МОДЕЛИРОВАННОГО
И ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННОГО СИГНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ БЫСТРОГО
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ В ДИНАМИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ В MATHCAD

2.1 Цель работы

Изучение характера изменения спектра амплитудно-модулированного и частотно-модулированного сигналов в зависимости от их параметров, особенностей расчета спектров сигналов с помощью быстрого преобразования Фурье и специфики реализации алгоритма последнего в MathCAD.

2.2 Краткие теоретические сведения

2.2.1 Модулированные сигналы

Под информацией понимают совокупность сведений о событиях, явлениях или предметах. Информацию представляют в определенной форме с помощью различных символов, совокупность которых образует сообщение. Сообщения передают записанными на специальный носитель или с помощью физического процесса, называемого сигналом. В системах телекоммуникаций используют электрические и оптические сигналы. С информационной точки зрения сигналы делятся на детерминированные и случайные. Мгновенные значения детерминированных сигналов в любой момент времени можно предсказать с вероятностью, равной единице. Случайные сигналы носят случайный характер.

Сигналы в системах телекоммуникаций можно классифицировать по времени существования, способу задания, согласованию с линией связи. По времени существования различают периодические, непериодические финитные и непериодические бесконечно протяженные сигналы. По способу задания сигналы подразделяются на континуальные, дискретные, квантованные и цифровые. Континуальные сигналы могут принимать любое из определенного диапазона мгновенных значений, задаются по оси времени на несчетном множестве точек и, являясь функциями непрерывной переменной, могут допускать разрывы первого рода, т. е. аналоговые или непрерывные сигналы образуют подмножество континуальных сигналов. Дискретные сигналы являются произвольными по величине и дискретными по времени, т. е. это результат дискретизации по времени континуальных сигналов, они задаются по оси времени на счетном множестве точек. Квантованные сигналы получают путем дискретизации по уровню континуальных сигналов, они являются непрерывными по времени и квантованными по величине, задаются на несчетном множестве точек и могут принимать лишь дискретные значения из определенного диапазона. Цифровые сигналы являются дискретными по времени и квантованными по величине, это результат цифрового кодирования последовательности дискретных значений квантованных сигналов.

При передаче по линии связи относительно низкочастотные информационные сигналы модулируют по тому или (и) иному параметру несущие колебания, образуя высокочастотные модулированные радиосигналы (оптические сигналы), т. е. по критерию согласования с линией связи сигналы подразделяют на модулирующие и модулированные. Частота ω_0 несущего колебания в любом случае должна быть велика по сравнению с наивысшей частотой Ω_m спектра передаваемого сообщения (модулирующего сигнала), поскольку чем меньше отношение Ω_m/ω_0 , тем меньше проявляется несовершенство характеристик системы. Любой радиосигнал трактуют как «узкополосный» процесс даже при передаче «широкополосных» сообщений [3, 4].

В самом общем случае радиосигнал, несущий в себе информацию, можно представить в виде

$$a(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \theta(t)) = A(t)\cos(\psi(t)), \quad (2.1)$$

в котором амплитуда A и фаза θ изменяются по закону передаваемого сообщения. В зависимости от того, изменяется амплитуда A или угол θ , различают два основных вида модуляции – амплитудную и угловую. Последняя, в свою очередь, делится на частотную и фазовую, которые тесно связаны между собой, различия между ними проявляются лишь в характере изменения во времени угла ψ при одной и той же модулирующей функции.

Модулированное колебание имеет спектр, структура которого зависит от спектра модулирующего сигнала (передаваемого сообщения) и вида модуляции. Поскольку ширина спектра модулирующего сигнала мала по сравнению с несущей частотой ω_0 , то функции $A(t)$ и $\theta(t)$ являются медленноменяющимися, т. е. относительное изменение $A(t)$ или $\theta(t)$ за один период несущего колебания мало по сравнению с единицей. Это означает, что при любом виде модуляции параметры радиосигнала (амплитуда, фаза или частота) изменяются настолько медленно, что в пределах одного периода $T_0 = 2\pi/\omega_0$ колебание можно считать гармоническим.

При амплитудной модуляции (АМ) огибающая амплитуд несущего колебания изменяется по закону, совпадающему с законом изменения передаваемого сообщения, а частота и начальная фаза колебания поддерживаются неизменными. Общее выражение для радиосигнала (2.1) можно заменить следующим выражением:

$$a(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \theta_0). \quad (2.2)$$

Характер огибающей $A(t)$ определяется видом передаваемого сообщения и при непрерывном сообщении $A(t)$ совпадает по форме с модулирующей функцией $s(t)$. Основным параметром АМ-колебания является коэффициент модуляции. Для тональной модуляции, когда модулирующая функция является гармоническим колебанием $s(t) = s_0 \cos(\Omega t + \gamma)$, огибающая модулированного колебания представляется в виде

$$A(t) = A_0 + k_{AM} \cdot s(t) = A_0 + \Delta A_m \cos(\Omega t + \gamma) = A_0 (1 + M \cos(\Omega t + \gamma)), \quad (2.3)$$

где Ω – частота модуляции;

γ – начальная фаза огибающей;

k_{AM} – коэффициент пропорциональности;

$\Delta A_m = k_{AM} \cdot s_0$ – амплитуда изменения огибающей;

$M = \Delta A_m / A_0$ – коэффициент модуляции.

Тогда мгновенное значение модулированного колебания определяется формулой

$$a(t) = A_0(1 + M \cos(\Omega t + \gamma)) \cos(\omega_0 t + \theta_0). \quad (2.4)$$

Из выражения (2.4) видно, что при неискаженной модуляции ($M \leq 1$) амплитуда колебания изменяется в пределах от минимальной $A_{\min} = A_0(1 - M)$ до максимальной $A_{\max} = A_0(1 + M)$. Для установления связи между спектром модулированного колебания и спектром модулирующей функции при тональной модуляции выражение (2.4) представляют в форме

$$a(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0) + \frac{M \cdot A_0}{2} \cos((\omega_0 + \Omega)t + \theta_0 + \gamma) + \frac{M \cdot A_0}{2} \cos((\omega_0 - \Omega)t + \theta_0 - \gamma). \quad (2.5)$$

Спектральный состав тонального АМ-сигнала включает три компоненты: составляющую на несущей частоте ω_0 , нижнюю (частота $\omega_0 - \Omega$) и верхнюю (частота $\omega_0 + \Omega$) боковые составляющие. Ширина спектра равна удвоенной частоте модуляции (2Ω), а амплитуды колебаний боковых частот не могут превышать половины амплитуды немодулированного колебания (при $M \leq 1$).

Более реален случай, когда модулирующий низкочастотный сигнал имеет сложный спектральный состав. Математической моделью такого сигнала может быть тригонометрическая сумма

$$s(t) = \sum_{i=1}^{N_c} s_i \cos(\Omega_i t + \gamma_i), \quad (2.6)$$

где частоты Ω_i образуют упорядоченную возрастающую последовательность $\Omega_{\min} = \Omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_{N_c} = \Omega_{\max}$, а амплитуды s_i и начальные фазы γ_i произвольны.

Подставляя (2.6) в (2.3), получают вид выражения (2.4):

$$a(t) = A_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{N_c} M_i \cos(\Omega_i t + \gamma_i) \right) \cos(\omega_0 t + \theta_0), \quad (2.7)$$

где M_i – парциальные коэффициенты модуляции.

Спектральное разложение проводится как и при тональной модуляции и соответствует выражению

$$a(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{M_i \cdot A_0}{2} \cos((\omega_0 + \Omega_i)t + \theta_0 + \gamma_i) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{M_i \cdot A_0}{2} \cos((\omega_0 - \Omega_i)t + \theta_0 - \gamma_i), \quad (2.8)$$

т. е. в спектре сложного АМ-сигнала помимо несущего колебания содержится группа верхних и нижних боковых колебаний. Спектр верхних боковых колебаний является масштабной копией спектра модулирующего сигнала, сдвинутой в область высоких частот на величину ω_0 , а спектр нижних боковых колебаний также повторяет спектральную диаграмму сигнала $s(t)$, но располагается зеркально относительно несущей частоты ω_0 . Ширина спектра АМ-сигнала равна удвоенному значению наивысшей частоты в спектре модулирующего низкочастотного сигнала.

При частотной модуляции (ЧМ) в несущем гармоническом колебании $a(t)$ передаваемое сообщение $s(t)$ изменяет мгновенное значение частоты ω , а амплитуда A_0 остается неизменной. Между $s(t)$ и $\omega(t)$ имеется связь

$$\omega(t) = \omega_0 + k \cdot s(t), \quad (2.9)$$

которая при тональной модуляции преобразуется к виду

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega_d \cos(\Omega t + \gamma), \quad (2.10)$$

где $\omega_d = 2\pi f_d$ представляет собой амплитуду частотного отклонения и называется девиацией частоты.

Поскольку мгновенная угловая частота колебания $\omega(t)$ и полная фаза высокочастотного колебания $\psi(t)$ связаны интегрально-дифференциальными соотношениями, то из (2.10) получают

$$\psi(t) = \int_0^t \omega(t) dt + \theta_0 = \omega_0 t + \frac{\omega_d}{\Omega} \sin(\Omega t) + \theta_0. \quad (2.11)$$

Тогда выражение для тональной ЧМ имеет следующий вид:

$$a(t) = A_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\omega_d}{\Omega} \sin(\Omega t) + \theta_0\right). \quad (2.12)$$

Здесь $m = \omega_d / \Omega$ называется индексом угловой модуляции, он совершенно не зависит от средней частоты ω_0 .

Аналитическая форма записи тонального фазомодулированного (ФМ) сигнала соответствует (2.12), но ЧМ- и ФМ-сигналы ведут себя по-разному при изменении частоты модуляции Ω и амплитуды модулирующего сигнала: при ЧМ ω_d пропорциональна амплитуде модулирующего напряжения и не зависит от частоты модуляции Ω , а при ФМ величина m пропорциональна амплитуде модулирующего напряжения и не зависит от частоты модуляции Ω .

Вне зависимости от вида угловой модуляции, если считать заданным спектр функции $\theta(t)$, входящей в (2.1), спектр модулированного колебания находится так:

$$a(t) = A_0 \cos(\theta(t))\cos(\omega_0 t) - A_0 \sin(\theta(t))\sin(\omega_0 t) = a_c(t) - a_s(t). \quad (2.13)$$

Из этого выражения следует, что модулированное по углу колебание есть сумма двух квадратурных колебаний (косинусного и синусного), каждое из которых модулировано только по амплитуде. Соответственно при одном и том же передаваемом сообщении спектр модулированного по углу колебания значительно сложнее, чем спектр модулированного по амплитуде, так как $\cos(\theta(t))$ и $\sin(\theta(t))$ являются нелинейными функциями своего аргумента $\theta(t)$ и спектры этих функций могут существенно отличаться от спектра функции $\theta(t)$. Это означает, что при угловой модуляции спектр модулированного колебания нельзя получить простым сдвигом спектра сообщения на величину несущей частоты ω_0 (как при АМ), связь между спектрами сообщения и модулированного колебания носит более сложный (нелинейный) характер.

Для тональной частотной модуляции (пусть $\gamma = \theta_0 = 0$) выражение (2.13) приобретает вид

$$a(t) = A_0 \cos(m \sin(\Omega t))\cos(\omega_0 t) - A_0 \sin(m \sin(\Omega t))\sin(\omega_0 t). \quad (2.14)$$

Если индекс угловой модуляции $m \ll 1$, то имеют место приближенные равенства $\sin(m \sin(\Omega t)) \approx m \sin(\Omega t)$, $\cos(m \sin(\Omega t)) \approx 1$, и выражение (2.14) переходит в следующее:

$$\begin{aligned} a(t) &\approx A_0 (\cos(\omega_0 t) - m \sin(\Omega t) \sin(\omega_0 t)) = \\ &= A_0 \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{m}{2} \cos((\omega_0 + \Omega)t) - \frac{m}{2} \cos((\omega_0 - \Omega)t) \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Видно, что при малых значениях m спектр колебания, как и у АМ-сигнала (2.5), состоит из несущей частоты ω_0 и двух боковых частот: верхней $\omega_0 + \Omega$ и нижней $\omega_0 - \Omega$. Отличие заключается в фазировке колебаний боковых частот относительно несущего колебания: фаза колебания нижней боковой частоты сдвинута на 180° .

При возрастании m требуется учесть, что множители $\cos(m \sin(\Omega t))$ и $\sin(m \sin(\Omega t))$ являются периодическими функциями времени, их можно разложить в ряд Фурье, используя бесселевы функции. Получают следующие соотношения:

$$\sin(m \sin(\Omega t)) = 2J_1(m)\sin(\Omega t) + 2J_3(m)\sin(3\Omega t) + 2J_5(m)\sin(5\Omega t) + \mathbf{K}, \quad (2.16)$$

$$\cos(m \sin(\Omega t)) = J_0(m) + 2J_2(m)\cos(2\Omega t) + 2J_4(m)\cos(4\Omega t) + \mathbf{K}, \quad (2.17)$$

где $J_n(m)$ – бесселева функция первого рода n -го порядка от аргумента m .

С помощью приведенных соотношений выражение (2.14) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} a(t) &= A_0 \left\{ J_0(m)\cos(\omega_0 t) + J_1(m) \left[\cos((\omega_0 + \Omega)t) - \cos((\omega_0 - \Omega)t) \right] + \right. \\ &\quad + J_2(m) \left[\cos((\omega_0 + 2\Omega)t) - \cos((\omega_0 - 2\Omega)t) \right] \\ &\quad \left. + J_3(m) \left[\cos((\omega_0 + 3\Omega)t) - \cos((\omega_0 - 3\Omega)t) \right] + \mathbf{K} \right\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Видно, что при частотной и фазовой модуляциях спектр колебания состоит из бесконечного числа боковых частот, расположенных попарно симметрично относительно несущей частоты ω_0 и отличающихся от последней на $n\Omega$ (n – любое целое число). Амплитуда n -й боковой составляющей $A_n = J_n(m) \cdot A_0$, где A_0 – амплитуда несущего немодулированного колебания, m – индекс модуляции. При нечетных n амплитуды нижних боковых частот берутся со знаком минус (сдвиг по фазе на 180°).

При анализе зависимости бесселевых функций $J_n(m)$ от порядкового номера n при больших значениях аргумента m было установлено [3, 4], что при $m \gg 1$ величина $|J_n(m)|$ более или менее равномерна при всех целых значениях $|n|$, меньших, чем аргумент m . При $|n|$, близких к m , $|J_n(m)|$ образует всплеск, а при дальнейшем увеличении $|n|$ функция $|J_n(m)|$ быстро убывает до нуля. Поэтому справедливо следующее положение: при быстрой угловой модуляции (когда $\omega_d \ll \Omega$) ширина спектра модулированного колебания близка к значению 2Ω ; при медленной угловой модуляции (когда $\omega_d \gg \Omega$) ширина спектра близка к значению $2\omega_d$.

Если модулирующий сигнал не является гармоническим, то спектр еще более сложный. Например, при двухтональном сигнале

$$a(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + m_1 \sin(\Omega_1 t) + m_2 \sin(\Omega_2 t)) \quad (2.19)$$

и предположении, что индексы модуляции m_1 и m_2 достаточно малы и можно воспользоваться приближенными выражениями для косинуса и синуса, получим следующий вид спектрального разложения:

$$\begin{aligned} a(t) = & A_0 \left[1 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{4} \right] \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2} m_1 A_0 [\cos((\omega_0 + \Omega_1)t) - \\ & - \cos((\omega_0 - \Omega_1)t)] + \frac{1}{2} m_2 A_0 [\cos((\omega_0 + \Omega_2)t) - \cos((\omega_0 - \Omega_2)t)] + \\ & + \frac{1}{8} m_1^2 A_0 [\cos((\omega_0 + 2\Omega_1)t) + \cos((\omega_0 - 2\Omega_1)t)] + \\ & + \frac{1}{8} m_2^2 A_0 [\cos((\omega_0 + 2\Omega_2)t) + \cos((\omega_0 - 2\Omega_2)t)] + \\ & + \frac{1}{2} m_1 m_2 A_0 [\cos((\omega_0 + \Omega_1 - \Omega_2)t) + \cos((\omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2)t) - \\ & - \cos((\omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2)t) - \cos((\omega_0 - \Omega_1 - \Omega_2)t)]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Видно, что в спектре рассматриваемого сигнала помимо частот $\omega_0 \pm \Omega_1$, $\omega_0 \pm \Omega_2$, $\omega_0 \pm 2\Omega_1$, $\omega_0 \pm 2\Omega_2$, присутствуют комбинационные частоты $\omega_0 \pm \Omega_1 \pm \Omega_2$.

Таким образом, спектр колебания со сложной угловой модуляцией гораздо богаче спектра аналогичного АМ-сигнала. Угловую модуляцию считают модуляцией нелинейного типа.

2.2.2 Дискретизация сигнала, алгоритмы дискретного и быстрого преобразования Фурье

Часто для расчета спектра сигнала используется алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ). Если исходный сигнал является непрерывным, то предварительно требуется перевести его в дискретную форму.

Дискретизация – это представление сигнала $f(t)$ совокупностью отсчетов в дискретные моменты времени $n \cdot T$. Шаг T дискретизации выбирается на основании теоремы Котельникова (отсчетов) [3, 4]. Процедуру дискретизации удобно рассматривать как умножение функции $f(t)$ на вспомогательную последовательность коротких импульсов $Y_T(t)$, у которых длительность τ_0 во много раз меньше периода T . Какова длительность τ_0 ?

Представим периодическую функцию $Y_T(t)$ рядом Фурье в тригонометрической форме. Для случая, когда начало координат совпадает с серединой одного из импульсов последовательности $Y_T(t)$, получим

$$Y_T(t) = U_0 \left\{ \frac{\tau_0}{T} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\omega_1 \tau_0}{2}\right) \cos(n\omega_1 t) \right\} = U_0 \frac{\tau_0}{T} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\pi\tau_0}{T}\right) \cos(n\omega_1 t) \right\},$$

что приводит к математическим моделям дискретизированного сигнала соответственно во временной

$$f_T(t) = U_0 \frac{\tau_0}{T} \left\{ f(t) + 2f(t) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\pi\tau_0}{T}\right) \cos(n\omega_1 t) \right\}$$

$$\text{и частотной } S_T(\omega) = U_0 \frac{\tau_0}{T} \left\{ S(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\pi\tau_0}{T}\right) [S(\omega - n\omega_1) + S(\omega + n\omega_1)] \right\}$$

областях, где $S(\omega)$ – спектральная плотность исходного непрерывного, а $S_T(\omega)$ – спектральная плотность дискретизированного сигнала. Поскольку $\text{sinc}(0) = 1$, то в окончательном виде имеем

$$S_T(\omega) = U_0 \frac{\tau_0}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\pi\tau_0}{T}\right) S(\omega - n\omega_1). \quad (2.21)$$

Спектр $S_T(\omega)$ дискретизированного сигнала $f_T(t)$ есть последовательность спектров $S(\omega)$ исходного сигнала, сдвинутых на частотной оси относительно друг друга на $\omega_1 = 2\pi/T$ и убывающих по закону $\text{sinc}(n\pi\tau_0/T)$.

Если $T < 1/2f_m$ (f_m – верхняя граничная частота спектра сигнала $f(t)$), то отдельные спектры не перекрываются. При $\tau_0/T \rightarrow 0$ спектр $S_T(\omega)$ приобретает строго периодическую структуру, уровень его лепестков стремится к нулю. При $U_0\tau_0 = \text{Const}$ функции $Y_T(t)$ и $f_T(t)$ представляют собой периодическую (с периодом T) последовательность δ -функций. Принимая для упрощения $U_0\tau_0 = 1$, приходим к определению тактовой функции $Y_T(t)$ в форме

$$Y_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \text{ Тогда}$$

$$f_T(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT). \quad (2.22)$$

При этом выражение (2.21) принимает вид

$$S_T(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - n\omega_1). \quad (2.23)$$

Представление $f_T(t)$ через δ -функцию существенно упрощает анализ дискретных сигналов. Например, спектральную плотность $S_T(\omega)$ можно определить прямо из совокупности временных отсчетов, не обращаясь к спектру исходного непрерывного сигнала. Действительно, формально применив преобразование Фурье к сигналу (2.22), имеем

$$S_T(\omega) = \int_0^{\infty} f_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) \right] e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot e^{-j\omega kT} \quad (2.24)$$

(в предположении, что $f(t) = 0$ при $t < 0$). Переходя к комплексной частоте $p = \sigma + j\omega$, получаем изображение по Лапласу дискретизированного сигнала $f_T(t)$:

$$F_T(p) = \int_0^{\infty} f_T(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) \right] e^{-pt} dt = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-pkT}. \quad (2.25)$$

Оригинал-функцию $f_T(t)$ можно найти с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F_T(p) e^{pt} dp,$$

которое определяет всю последовательность $\{f(kT)\}$ в форме, совпадающей с (2.22).

Для нахождения k -го (одного) отсчета $f(kT)$ без множителя $\delta(t - kT)$, необходимо воспользоваться выражением

$$f(kT) = \frac{T}{2\pi j} \int_{a-j\pi/T}^{a+j\pi/T} F_T(p) e^{pkT} dp, \quad (2.26)$$

при этом интегрирование ведется в пределах одного частного интервала $(-\pi/T, \pi/T)$.

Спектр $S_T(\omega)$ дискретного сигнала $f_T(t)$, как и спектр $S(\omega)$ исходного непрерывного сигнала $f(t)$, является сплошным. При цифровой обработке выполняется дискретизация и во временной, и в частотной областях. Поэтому непрерывный спектр $S_T(\omega)$ должен быть представлен совокупностью значений $S_T(n \cdot \Delta\omega)$ на дискретных частотах $\omega = n \cdot \Delta\omega$. Подобный спектр образуется из $S_T(\omega)$ при периодическом повторении последовательности $\{f(kT)\}$ с периодом $T_c = NT$. Тогда $\Delta\omega = 2\pi/T_c = 2\pi/NT$ и с учетом последнего выражение (2.24) преобразуется к виду

$$S_T(n \cdot \Delta\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-j\Delta\omega n k T} = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-j2\pi n k / N}, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N/2) \quad (2.27)$$

(при четном N).

Выражение (2.27) представляет собой дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Аргументы $n \cdot \Delta\omega$ и kT обозначаются просто n и k , поэтому ДПФ представляют в форме

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-j2\pi n k / N}, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N/2). \quad (2.28)$$

Выражение (2.28) – алгоритм вычисления спектральных коэффициентов $\{S(n)\}$ по заданным временным отсчетам $\{f(k)\}$. При четном N и вещественном $f(k)$ $S(N/2 + l) = S^*(N/2 - l)$ ($l = 0, 1, 2, \dots, N/2$). Действительно, подставляя в (2.28) $n = N/2 + l$ и учитывая, что N – период, имеем

$$S(N/2 + l) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-j2\pi k \left(\frac{N}{2} + l\right) / N} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{j2\pi k \left(\frac{N}{2} - l\right) / N} = S^*(N/2 - l), (l = 0, 1, 2, \dots, N/2).$$

Следовательно, при $l = 0$ спектральные коэффициенты $S(N/2) = S^*(N/2)$ являются вещественными числами. Это справедливо и для $S(0) = S^*(0)$. Например, в случае $N = 8$ в точке $n = N/2 = 4$ $S(4) = S(-4)$, в точке $n = 5 = N/2 + 1$ спектральная плотность $S(5) = S^*(3)$ и $|S(5)| = |S^*(3)|$. При $n = N = 8$ начинается новый период повторения последовательности $S(n)$. Очевидно, в пределах одного периода ДПФ (выражение (2.28)) можно представить в форме

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-j2\pi n k / N}, (n = 0, 1, 2, \dots, N - 1), \quad (2.29)$$

которая чаще используется на практике.

Применяя свойство дуальности прямого и обратного преобразований Фурье и основываясь на выражении (2.29), сразу приходим к обратному ДПФ:

$$f(k) = C \sum_{n=0}^{N-1} S(n) e^{j2\pi k n / N}, (k = 0, 1, 2, \dots, N - 1), \quad (2.30)$$

где $C = 1/T$. Вне интервала $0 \leq k \leq N - 1$ обратное ДПФ определяет периодическое продолжение исходной последовательности $f(k)$.

Таким образом, дискретному сигналу $\{f(kT)\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$) соответствует сплошной спектр $S_T(\omega)$ периодической структуры, дискретному спектру $S(n)$ соответствует периодическая последовательность сигналов $\{f(kT)\}$, повторяемых с периодом N .

Значительное упрощение процедуры расчета спектров с помощью ДПФ достигается при грамотном применении свойств последнего [3, 4]. При больших N (см. (2.29)) вычисление ДПФ требует выполнения большого числа математических операций: для определения одного спектрального коэффициента

$S(n)$ необходимо выполнить N умножений $f(k)$ на комплексное число и N последующих сложений, а на все N спектральных коэффициентов $S(n) - N^2$ умножений и столько же сложений. Так, при $N = 2^{10} = 1024$ требуется примерно 10^6 умножений и сложений. Существенный сдвиг произошел благодаря открытию быстрого преобразования Фурье (БПФ), суть которого – многократное разбиение заданной последовательности временных отсчетов на более короткие последовательности.

Пусть дан дискретный сигнал $\{f(k)\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$), причем $N = 2^r$ (r – целое число). Разобьем исходную последовательность на две последовательности: четную и нечетную. Для первой из них (четной) $f_I(k) = f(2k)$. Тогда в соответствии с выражением (2.29) ее ДПФ представится в виде

$$S_I(n) = \sum_{k=0}^{N/2-1} f(2k) e^{-j2\pi nk} = \sum_{k=0}^{N/2-1} f_I(k) e^{-j2\pi nk} \quad (n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1).$$

Для второй (нечетной) последовательности $f_{II}(k) = f(2k+1)$ и ее ДПФ будет равен

$$S_{II}(n) = \sum_{k=0}^{N/2-1} f(2k+1) e^{-j2\pi n(2k+1)} = \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{II}(k) e^{-j2\pi n(2k+1)} =$$

$$= e^{-j2\pi n} \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{II}(k) e^{-j2\pi nk} \quad (n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1). \quad \text{Но } e^{-j2\pi n} = e^{-j2\pi n \cdot 2} = e^{-j2\pi n}.$$

$$S_I(n) = \sum_{k=0}^{N/2-1} f_I(k) e^{-j2\pi nk} \quad \text{и} \quad S_{II}(n) = e^{-j2\pi n} \cdot S'_{II}(n) = e^{-j2\pi n} \cdot \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{II}(k) e^{-j2\pi nk}.$$

Замена $e^{-j2\pi nk}$ на $e^{-j2\pi nk}$ учитывает, что шаг дискретизации в последовательностях $\{f_I(k)\}$ и $\{f_{II}(k)\}$ вдвое больше. Фазовый множитель $e^{-j2\pi n}$ в $S_{II}(n)$ учитывает задержку последовательности $\{f_{II}(k)\}$ на один интервал относительно последовательности $\{f_I(k)\}$. Количеству $N/2$ временных отсчетов соответствует такое же количество спектральных коэффициентов. Очевидно, функции $S_I(n)$ и $S_{II}(n)$ периодичны с периодом $N/2$. Поэтому в диапазоне ($n = 0, 1, \dots, N/2 - 1$)

$$S(n) = S_I(n) + e^{-j2\pi n} \cdot S'_{II}(n), \quad \text{в диапазоне } (n = N/2, N/2 + 1, \dots, N-1)$$

$$S_I(n) = S_I(n - N/2) \quad \text{и} \quad S_{II}(n) = S_{II}(n - N/2).$$

Кроме того, при $n \geq N/2$

$$e^{-j2\pi n} = e^{-j2\pi (\frac{N}{2} + n - \frac{N}{2})} = e^{-j2\pi \frac{N}{2}} \cdot e^{-j2\pi (n - \frac{N}{2})} = -e^{-j2\pi (n - \frac{N}{2})}.$$

С учетом этого выражение для всей последовательности $S(n)$ представится в виде

$$S(n) = \begin{cases} S_I(n) + e^{\frac{-j2\pi n}{N}} \cdot S'_{II}(n), & 0 \leq n \leq N/2 - 1, \\ S_I(n - N/2) - e^{\frac{-j2\pi(n-N/2)}{N}} \cdot S'_{II}(n - N/2), & N/2 \leq n \leq N - 1. \end{cases} \quad (2.31)$$

Спектр $S(n)$ содержит N спектральных отсчетов на интервале одного периода. Для вычисления функций $S_I(n)$ и $S_{II}(n)$ надо выполнить $(N/2)^2$ умножений отсчетов $f(k)$ на комплексные коэффициенты $e^{\frac{-j2\pi nk}{N}}$, N умножений $S'_{II}(n)$ на коэффициент $e^{\frac{-j2\pi n}{N}}$, т. е. всего $2(N/2)^2 + N$ умножений (почти вдвое меньше, чем при использовании алгоритма дискретной свертки).

Разбиением каждой подпоследовательности можно осуществить дальнейшее уменьшение объема вычислений. Разбиение продолжают до получения простейших, двухэлементных, последовательностей. Найдя ДПФ указанных простейших пар отсчетов, можно найти ДПФ 4-элементных, 8-элементных и т.д. последовательностей. При объединении ДПФ двух последовательностей руководствуются алгоритмом (2.31), подставляя в него соответствующие значения N и n . В целом в случае применения алгоритма БПФ для вычисления ДПФ N -точечной последовательности требуется примерно $N \log_2 N$ операций умножения (при прямом вычислении ДПФ необходимо N^2 умножений). Следовательно, алгоритм БПФ уменьшает число необходимых операций в $N^2 / (N \log_2 N)$ раз. Например, при $N = 1024$ ($r = 10$) $\log_2 N = 10$ и $N / \log_2 N \cong 100$. Резкое сокращение числа операций сокращает объем аппаратной реализации и повышает быстродействие цифровых устройств. Приведенные рассуждения можно распространить и на комплексный сигнал. Известно большое многообразие конкретных алгоритмов реализации БПФ.

2.2.3 Реализация алгоритма быстрого преобразования Фурье в MathCAD

В MathCAD имеются специальные функции, реализующие численные алгоритмы БПФ. К ним относятся функция $fft(y)$, где y – вектор равномерно распределенных по промежутку измеренных значений изучаемого сигнала. Функ-

ция реализует разновидность алгоритма БПФ в форме $F_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \cdot e^{\frac{i2\pi kn}{N}}$ и

возвращает вектор прямого преобразования Фурье, причем элементы этого вектора имеют комплексный вид (т. е. вектор результата содержит информацию об амплитудном и фазовом спектре исследуемого сигнала). Функция $ifft(c)$ осуществляет обратное преобразование Фурье над элементами вектора c – равномерно распределенных значений Фурье-спектра. Кроме того, имеются функции $FFT(y)$ и $IFFT(c)$, которые реализуют соответственно алгоритмы БПФ и обратного БПФ в другой нормировке, чем при fft и $ifft$.

При использовании указанных функций необходимо учитывать следующее: число элементов в векторе значений сигнала должно точно равняться 2^n (целое число $n \geq 2$); в качестве результата прямого преобразования Фурье система выдает вектор из $2^{n-1} + 1$ элемента (поскольку в случае действительных исходных данных Фурье-спектр симметричен и нет смысла отображать вторую половину спектра, являющуюся зеркальным отображением первой); результатом обратного преобразования Фурье вектора спектра из $2^{n-1} + 1$ элементов будет являться вектор из 2^n строк, значения элементов которого будут крайне близки к исходному сигналу.

Если обрабатываемые данные являются комплексными величинами, использовать указанные функции прямого и обратного преобразования Фурье нельзя. В MathCAD существуют встроенные функции, позволяющие проводить преобразование Фурье над комплексным сигналом. К ним относятся функция $cfft(y)$, реализующая комплексное преобразование Фурье в стандартной нормировке, функция $CFFT(y)$, также реализующая комплексное преобразование Фурье, но с другим условием нормировки, функция $icfft(c)$ для обратного комплексного преобразования Фурье и функция $ICFFT(c)$, являющаяся обратной для $CFFT(y)$. Вектор данных y для функций $cfft$ и $CFFT$ должен содержать строго 2^n ($n > 2$) элементов, но поскольку преобразование Фурье для комплексных данных не является симметричным, результатом работы этих функций будет вектор c , образованный 2^n элементами.

Функции комплексного преобразования Фурье можно применять и для вектора исходных данных действительного вида, результат (спектр) будет образован двумя симметричными половинами, одна из которых может быть отброшена. В основе функций $ifft$ и $icfft$ лежит один и тот же алгоритм обратного БПФ, различно только число подсчитываемых элементов вектора спектра.

В MathCAD существует возможность проведения преобразования Фурье не только над выборкой в виде вектора, но и над матрицами, однако использовать для этого можно только более общие функции комплексных преобразований ($cfft$, $CFFT$, $icfft$, $ICFFT$). Функции действительного преобразования могут работать только с векторами.

2.3 Порядок выполнения работы

2.3.1 Заданы параметры АМ-колебания (модуляция одним тоном): A_0 – амплитуда несущего колебания (В), f_M – частота модулирующего колебания (Гц), f_0 – частота несущего колебания (Гц). Параметры привести к нормированному виду (для удобства представления и расчетов в MathCAD). Для дискретизации сигнала принять количество отсчетных значений $N = 1024$.

2.3.2 На основании выражения (2.4), считая, что начальные фазы $\theta_0 = \gamma = 0$, сформировать вектор a отсчетных значений АМ-колебания ($t = 0 \dots 1023$ – номера элементов вектора). Учесть, что Ω соответствует норми-

рованному значению f_M , ω_0 – нормированному значению f_0 , вектор a содержит значения амплитуд за один период модулированного сигнала. Для осуществления анимации задать следующие законы изменения глубины модуляции M и частоты модулирующего колебания f_M :

а) при $0 \leq FRAME \leq K$ M изменяется с одинаковым шагом от нуля (нет модуляции) до 1 (100 % модуляция), при $K < FRAME \leq 2K$ – наоборот, с 1 до 0, при $FRAME > 2K$ M постоянна (M_{const});

б) при $0 \leq FRAME \leq 2K$ f_M остается постоянной, при $FRAME > 2K$ f_M увеличивается по правилу: $FRAME$ от $2K + 1$ до $2K + 9 - 2f_M$, от $2K + 10$ до $2K + 19 - 3f_M$, от $2K + 20$ до $2K + 29 - 4f_M$ и т.д. (записать общую формулу, применяя функцию $floor(x)$).

2.3.3 На основании вектора a (пункт 2.3.2) рассчитать с помощью функции БПФ вектор b , содержащий амплитудный и фазовый спектры АМ-колебания. Построить в разных графических шаблонах временное представление сигнала (вектор a) и его амплитудный спектр (получить из вектора b). Осуществить анимацию обоих графиков.

2.3.4 Заданы параметры АМ-сигнала: A_0 – амплитуда несущего колебания (В); f_0 – частота несущего колебания (Гц); вид модулирующего сигнала – периодическая последовательность прямоугольных или треугольных видеоимпульсов с нулевой постоянной составляющей (U – амплитуда импульсов (В), T_c – период повторения (с), τ – длительность (с)), представленная в виде разложения в ряд Фурье (см. (1.15)) с количеством членов ряда N_c (см. (2.6)). Параметры привести к нормированному виду, для дискретизации сигнала принять количество выборок $N = 1024$. В соответствии с выражением (2.7) сформировать вектор a отсчетных значений амплитуд модулированного сигнала, а в соответствии с (1.15) – вектор $a1$ амплитудных значений модулирующего сигнала ($t = 0 \dots 1023$ – номера элементов вектора), которые будут содержать значения амплитуд за один период соответственно модулированного и модулирующего сигналов. Для осуществления анимации задать следующие законы изменения параметров сигналов: а) глубина модуляции, определяющая парциальные коэффициенты модуляции M_i , постоянна (M_{const}); б) количество учитываемых членов ряда N_c модулирующего сигнала увеличивается на единицу от 1 до N_{end} через каждые $K1$ значений изменения переменной $FRAME$. С помощью функций БПФ рассчитать векторы b и $b1$, содержащие амплитудный и фазовый спектры соответственно амплитудно-модулированного и модулирующего сигналов. Построить в разных графических шаблонах временное представление сигналов (векторы a и $a1$) и их амплитудные спектры (получить из векторов b и $b1$). Осуществить анимацию.

2.3.5 Заданы параметры ЧМ-колебания (модуляция одним тоном): A_0 – амплитуда несущего колебания (В), f_M – частота модулирующего колебания (Гц), f_0 – частота несущего колебания (Гц), f_D – девиация частоты (Гц). Пара-

метры привести к нормированному виду (для удобства представления и расчетов в MathCAD). Для дискретизации сигнала принять количество отсчетных значений $N = 1024$.

2.3.6 На основании выражения (2.12), считая, что начальные фазы $\theta_0 = \gamma = 0$, сформировать вектор a отсчетных значений ЧМ-колебания ($t = 0 \dots K-1$ – номера элементов вектора). Учесть, что Ω соответствует нормированному значению f_M , ω_0 – нормированному значению f_0 , ω_d – нормированному значению f_D , вектор a содержит значения амплитуд за один период модулированного сигнала. Для осуществления анимации задать следующие законы изменения девиации частоты и частоты модулирующего колебания: при $0 \leq FRAME \leq K/2$ девиация с одинаковым шагом изменяется от 0 до f_D , а частота модулирующего колебания f_M постоянна, при $FRAME > K/2$ девиация частоты f_D постоянна, а частота модулирующего колебания f_M увеличивается в m раз ($m = 2, 3, \dots$) через каждые $K/3$ значений изменения переменной $FRAME$.

2.3.7 На основании вектора a (пункт 2.3.6) рассчитать с помощью функции БПФ вектор b , содержащий амплитудный и фазовый спектры ЧМ-сигнала. Построить в разных графических шаблонах временное представление сигнала (вектор a) и его амплитудный спектр (получить из вектора b). Осуществить анимацию обоих графиков.

2.4 Содержание отчета

- 1 Цель работы.
- 2 Результаты анимации по пунктам 2.3.3, 2.3.4 и 2.3.7.
- 3 Выводы.

2.5 Контрольные вопросы и задания

- 1 В чем смысл модуляции?
- 2 Вид спектра при тональной и сложной АМ. На что влияет конкретное значение глубины модуляции?
- 3 Сходство и отличие частотной и фазовой модуляций.
- 4 Каков характер спектра ЧМ-сигнала (рассмотреть модуляцию одним тоном) в зависимости от конкретного значения индекса модуляции?
- 5 Вид спектра при тональной и сложной частотной модуляции.
- 6 Сравнить АМ-сигнал и ЧМ-сигнал по ширине спектра при одинаковой частоте несущего колебания, виду и частоте модулирующего колебания.
- 7 В чем заключается процесс дискретизации сигнала?
- 8 Из каких соображений при дискретизации сигнала выбирают требуемое число выборок?

9 Какова взаимосвязь спектров непрерывного сигнала и полученного из него путем дискретизации дискретного сигнала?

10 Пояснить суть ДПФ. Какие свойства последнего полезны при расчете спектров сложных сигналов?

11 Пояснить суть БПФ. В чем его преимущество по сравнению с ДПФ?

12 Какие встроенные функции спектрального анализа присутствуют в MathCAD? Охарактеризуйте особенности их применения.

Библиотека БГУИР

3.1 Цель работы

Ознакомление с функциями MathCAD для работы с файлами, трёхкомпонентной теорией цветового зрения и возможностями обработки цветных изображений.

3.2 Краткие теоретические сведения

3.2.1 Понятие о цвете

Свет (цвет) есть результат действия электромагнитного излучения видимого диапазона (от 380 до 780 нм) на органы зрения. Излучения бывают монохроматическими и сложными. Монохроматический световой поток создаётся излучением одной длины волны или очень узким участком спектра. Волны разной длины вызывают ощущения различных цветов, среди которых выделяют 7 главных (красный, оранжевый, жёлтый, зелёный, голубой, синий, фиолетовый) с условными границами, поскольку каждый цвет непрерывно переходит в следующий, образуя множество оттенков (других спектральных цветов). Сложные излучения состоят из совокупности монохроматических и характеризуются своим спектральным составом – величиной энергии на каждой длине волны излучения, графические представления указанной зависимости называются спектральной характеристикой излучения. Любые излучения, имеющие сложный спектр в видимом диапазоне с распределением энергии, близким к его распределению в солнечном свете, воспринимаются как белый цвет. Однако ощущение белого цвета может быть создано смешением в определённой пропорции красного и голубого световых потоков, синего и жёлтого световых потоков, зелёного и пурпурного световых потоков (т. е. главного цвета и дополнительного к нему). Связь цветового ощущения со спектральным составом света взаимно неоднозначна, существует много различных спектральных составов, вызывающих ощущение одинаковых цветов. Такие цвета называют метамерами.

Восприятие цвета объектов трёхмерно. Цвет как физическое явление характеризуется яркостью (светлотой), преобладающей длиной волны λ_D и чистотой цвета p . Качественными характеристиками цвета являются цветовой тон и насыщенность. Цветовой тон – это свойство цвета, которое позволяет оценивать его как красный, зелёный, синий и т.д. Насыщенность цвета есть степень отличия данного цвета от белого по зрительному восприятию (наиболее насыщены спектральные цвета, а нейтральные цвета (белый и серый) имеют нулевую насыщенность). Совокупность цветового тона и насыщенности называют цветностью. Цветовой тон монохроматического излучения численно определяется длиной волны λ , сложного – преобладающей длиной волны λ_D , под кото-

рой понимают длину волны монохроматического света, имеющего тот же цветовой тон, что и данный цвет. Под чистотой p цвета (светового потока F) понимают относительное содержание в нём спектрального цвета (монохроматического светового потока F_λ). Воспринимаемый цвет объектов может меняться по светлоте, цветовому тону и насыщенности, его описание возможно лишь с помощью единственной комбинации количественных мер этих понятий.

Согласно изложенной М. В. Ломоносовым трёхкомпонентной (трёхцветной) теории восприятия цветов [5, 6] наши ощущения есть результат смешения в различных пропорциях трёх основных цветов. За основные цвета приняты красный (R), зелёный (G) и синий (B). Глаз воспринимает яркость предметов путём суммирования ощущений, а цветность – как отношение этих ощущений.

Существуют два метода образования цветов: аддитивный и субтрактивный. Аддитивный метод основан на сложении цветовых потоков. Большинство цветов видимого спектра образуется при суммировании основных (R, G, B) цветов в различных пропорциях. В качестве основных цветов могут быть взяты цвета, удовлетворяющие условию линейной независимости друг от друга, согласно которому ни один из этих цветов не должен получаться при сложении двух оставшихся. Аддитивный метод образования цветов применяется в телевидении (под сложением цветов понимается смешение цветовых потоков, но не смешение красок). Аддитивное смешение цветов подчиняется законам колориметрии – учению о цвете и цветовых измерениях [5]. Субтрактивный метод образования цветов основан на вычитании последних. Вычитаются цвета путём поглощения части потока лучей белого цвета при прохождении его через избирательно поглощающую (отражающую) среду или несколько сред, расположенных последовательно на пути этого потока, цвет предмета определяется разностью между белым цветом и цветом излучения, поглощённого последовательно расположенными избирательными средами, поэтому цвет предмета есть цвет света, отражённого предметами. При аддитивном методе возможно смешение любых цветов без каких либо ограничений, предъявляемых к спектрам смешиваемых излучений, для субтрактивного метода образования цвета необходимо, чтобы в исходном световом потоке присутствовали те цвета, которые из него вычитаются, поэтому при использовании субтрактивного метода в качестве исходного цвета выбирают белый свет со сплошным спектром. Субтрактивный метод образования цветов применяется в полиграфии (при цветной печати), цветном кино и цветной фотографии. В качестве основных пигментов (красок) используются жёлтая, голубая и пурпурная краски, которые поглощают соответственно синий, красный и зелёный цвета, а отражают красный и зелёный, синий и зелёный, красный и синий цвета.

3.2.2 Работа с файлами и обработка изображений в MathCAD

MathCAD имеет в наличии множество специальных функций, предназначенных для работы с файлами (текстовыми, графическими, звуковыми). Пере-

чень этих функций можно найти, используя команду Insert/Function, в категории File Access и Image Processing. Возможность MathCAD считывать информацию из текстовых или ASCII-файлов облегчает задачу обработки данных. Реализовано чтение структурированных (результат – вектор) и неструктурированных (результат – матрица) ASCII-файлов. Для импорта данных из текстового документа служит функция *READPRN*("file"), где *file* – имя текстового файла (если он сохранен в том же каталоге, что и MathCAD) или путь к файлу. Функция работает с файлами любых форматов, использующих кодировку ASCII (PRN, DAT, TXT и др.). Для экспорта данных применяется функция *WRITEPRN*("file"), особенностью которой является то, что не она присваивает, а ей присваивается значение некоторой матрицы (например, *WRITEPRN*("C:\Sample.prn"):=A). Добавление информации в уже существующий файл осуществляется функцией *APPENDPRN*("file").

При помощи разнообразных графических функций получают матрицы, описывающие изображение, проводят над ними различные математические преобразования, а затем сохраняют результат как обычный графический файл. Эти функции работают с различными графическими форматами, предназначенными для хранения растровых изображений [7], строящихся совокупностью отдельных точек в прямоугольной матрице. Каждая точка изображения имеет адрес в строке и столбце матрицы и называется пикселом. При монохроматическом изображении каждый пиксел соответствует одному биту, т. е. бит со значением 1 образует в соответствующем месте экрана светящуюся точку. В цветном изображении для одного пиксела нужно несколько битов, поэтому изображение разлагают на отдельные цветовые слои (красный, зеленый и синий). В результате суммирования этих цветовых слоев возникает цветное изображение.

В качестве примера рассмотрим файл формата Bitmap(bmp) [8, 9]. BMP-файл состоит из нескольких блоков данных: блок BITMAP_FILE – заголовок, блок BITMAP_INFO – состоит из частей BITMAP_INFO (хранятся общие сведения об изображении: ширина и высота битовой карты в пикселах, количество битов на пиксел, тип сжатия данных, количество основных цветов, количество используемых цветов и т.д.) и RGB_QUAD (задается палитра цветов), блок BITMAP (содержит непосредственно данные рисунка). Самым важным в блоке BITMAP_INFO является поле "biBitCount", значение которого определяет количество битов, отводимые для описания точек изображения, а также количество цветов, используемых в графическом изображении. Значение 1 определяет один бит на пиксел, что соответствует монохромному изображению; при значении 4 для задания изображения можно использовать 16 цветов, при значении 8 – не более 256 цветов, а значение 24 определяет графическое изображение с 2^{24} цветов, при этом палитра отсутствует, а цвета кодируются непосредственно в области данных – в битовой карте 24 бита представляются тремя байтами, значения которых определяют интенсивность красного, зеленого и синего цветов в диапазоне от 0 до 255, в этом случае устройство вывода генерирует сложный цвет, образованный указанными цветовыми составляющими.

В зависимости от типа изображения и особенностей его обработки можно использовать одну из трех функций импорта данных из графического файла. Функция *READBMP("file")* создает массив из целых чисел от 0 (абсолютно черный) до 255 (абсолютно белый), соответствующий отображению некоторого bmp-файла в градациях серого. Чтобы отобразить результат чтения из графического файла, имя матрицы, полученной указанной функцией, прописывают в маркере панели Picture (вводится командой Insert Picture). Функция *READ_IMAGE("file")* по своим свойствам и назначению совпадает с *READBMP*, однако может читать файлы с расширением bmp, jpg, gif, tga. Функция *READRGB("file")* позволяет создавать матрицу, описывающую цветное изображение, последняя будет образована тремя соединенными слева направо подматрицами одной размерности, элементы первой из которых описывают интенсивность красной составляющей соответствующих им пикселей, вторая – зеленой, третья – синей. Каждый элемент образован целым числом от 0 (наименее яркий оттенок) до 255 (наиболее яркий оттенок). Данная функция способна читать цветные изображения в форматах BMP, GIF, JPG, PCX, TGA. Чтобы изображение было отображено цветным, соответствующие элементы подматриц R, G, B должны рассматриваться системой совместно, для чего подматрицы выделяют (например, функцией *submatrix*) в отдельные матрицы и объединяют в один массив путем указания имени этих отдельных матриц в маркере панели Picture через запятую. Создать матрицы, описывающие цветовые составляющие изображения, можно с помощью специальных функций: *READ_BLUE("file")*, *READ_GREEN("file")* и *READ_RED("file")*. Они извлекают соответственно синий, зеленый и красный канал из цветного изображения.

Поскольку изображение в MathCAD рассматривается как матрица с числами, то для него могут быть применимы многие матричные преобразования. Например, вырезание фрагмента картинки осуществляется с помощью функции подматрицы *submatrix*, поворот картинки на 90° – операцией транспонирования матрицы, перевод позитивного изображения в негативное – вычитанием от всех элементов матрицы числа 128 (сохранить следует модуль результата).

Кроме указанных функций в MathCAD имеются другие, позволяющие считывать разнообразную информацию об изображении. К ним относится функция *READ_HLS("file")*, которая рассматривает изображение с точки зрения другой, чем у *READRGB*, цветовой модели – HLS-модели Освальда (оттенок + освещенность + насыщенность). Последняя возвращает матрицу, образованную тремя соответствующими этим параметрам подматрицами. На ее основании изображение строится по такому же принципу, как и при *READRGB*, читать изображения можно в формате BMP, GIF, TGA, JPG. Кроме этой функции, можно использовать три, ее заменяющие: *READ_HLS_HUE("file")*, *READ_HLS_LIGHT("file")* и *READ_HLS_SAT("file")*, которые извлекают из цветного изображения канал соответственно оттенка, освещенности и насыщенности. Также имеется функция *READ_HSV("file")*, она создает матрицу, описывающую изображение на основании цветовой модели Смита HSV (оттенок + насыщенность + значение). По своим особенностям эта функция анало-

гична *READ_HLS*, вместо нее могут быть использованы три другие, ее заменяющие: *READ_HSV_HUE*("file"), *READ_HSV_SAT*("file") и *READ_HSV_VALUE*("file"), с помощью которых из изображения извлекают канал соответственно оттенка, насыщенности и значение HSV-модели.

Обрабатываемые в MathCAD изображения можно сохранять на диске в нужном формате, используя следующие специальные функции: *WRITEBMP*("file") (для записи массива целых чисел от 0 до 255 как bmp-файл в градациях серого в определенный пользователем каталог), *WRITERGB*("file") (для создания файла на основании упакованной матрицы RGB-модели), *WRITE_HLS*("file") (для создания файла на основании упакованной матрицы HLS-модели), *WRITE_HSV*("file") (для создания файла на основании упакованной матрицы HSV-модели). Особенностью этих функций является то, что не они присваивают, а наоборот, им присваивают значение некоторой матрицы.

3.3 Порядок выполнения работы

3.3.1 С помощью функции *READRGB* из графического файла осуществить считывание изображения в некоторую матрицу *Z*. Отобразить это изображение в специально предназначенном для этого графическом шаблоне MathCAD.

3.3.2 Разделить матрицу *Z* на три подматрицы *R*, *G*, *B* с помощью функции *submatrix*(*Z*, *ir*, *jr*, *ic*, *jc*), которая из матрицы *Z* выделяет подматрицу, лежащую между строками *ir*, *jr* и столбцами *ic*, *jc* (включая их). Учтите, что размер изображения может быть различным, нумерация строк и столбцов в матрицах в MathCAD зависит от значения системной константы *ORIGIN*, поэтому для корректной работы программы количество строк и столбцов определить с помощью специальных матричных функций (*cols*(*M*), *rows*(*M*), *last*(*V*), *length*(*V*) – они возвращают соответственно количество столбцов, строк матрицы *M*, номер последнего элемента вектора *V* и длину вектора *V*), а при выделении подматриц для указания номеров выделенных строк и столбцов использовать как параметр константу *ORIGIN* (это же касается и последующих вычислений). Построить матрицы *R*, *G*, *B* в отдельных специальных графических шаблонах, получить с их помощью цветное отображение.

3.3.3 Из матриц *R*, *G*, *B* выделить векторы *R_v*, *G_v*, *B_v*, в которых содержится информация об интенсивности свечения пикселей соответственно красной, зеленой и синей составляющих в одной строке изображения. Построить полученные векторы в одном графическом шаблоне (двумерной декартовой системе координат X-Y Plot).

3.3.4 При низком контрасте изображения (т. е. максимальная интенсивность свечения значительно ниже 255, а минимальная – выше 0) для получения контрастного изображения последнее требуется нормировать. Для реализации нормировки изображения написать две функции: функцию (*MinMax*(*M*)), которая у произвольной матрицы *M* осуществляет поиск минимального и максимального элементов, и функцию (*Normir*(*M*, *V*)), которая для произвольной матрицы *M* с учетом вектора *V*, содержащего значения максимума и минимума,

осуществляет нормировку элементов (правило нормировки следующее: элемент, соответствующий максимуму, становится равным 255, минимуму – 0, среднему значению между максимумом и минимумом – $255/2$ (округлить до целого), промежуточному значению между максимумом и минимумом – пересчет значения с учетом отношений пропорциональности).

3.3.5 С помощью функции $MinMax(M)$ у матрицы Z определить минимальный и максимальный элемент, получив вектор ZV . На основе этого вектора с помощью функции $Normir(M, V)$ нормировать матрицы R, G, B , получив матрицы Rn, Gn, Bn . Построить полученные матрицы в отдельных специальных графических шаблонах, получить на их основе цветное изображение, сравнить с изображением в пункте 3.3.2. Это контрастное изображение, сформировав упакованную матрицу Zn (для этой цели воспользоваться функцией $augment(A, B, \dots)$, которая осуществляет слияние матриц (векторов) слева направо), с помощью функции $WRITERGB$ сохранить на диске.

3.3.6 На основе нормированных матриц Rn, Gn, Bn осуществить моделирование процесса регулирования яркости, контрастности и насыщенности в телевизионном приемнике [5, 6]. Для этого из трех матриц образовать матрицу яркости $SV = (0.3Rn + 0.59Gn + 0.11Bn)$, (SV соответствует сигналу яркости в телевидении) и три цветоразностные матрицы $R_Y = Rn - SY, G_Y = Gn - SY, B_Y = Bn - SY$ (они соответствуют цветоразностным сигналам в телевидении). Ввести три параметра – насыщенность $SAT = 1$, яркость $BR = 1$, контрастность $CON = 1$. При регулировке яркости в телевизионном приемнике выбирается рабочая точка на модуляционной характеристике кинескопа (т. е. уровень постоянной составляющей сигнала яркости U_Y), регулировка насыщенности устанавливает размах цветоразностных сигналов (U_{R-Y} и U_{B-Y}), контрастности – размах сигналов основных цветов (U_R, U_G, U_B). Для моделирования указанного процесса осуществить следующие преобразования матриц:

$$\begin{aligned} R_Yr &= R_Y \cdot SAT, & G_Yr &= G_Y \cdot SAT, & B_Yr &= B_Y \cdot SAT, \\ SYr &= SY \cdot CON + (BR - CON) \cdot 255, \\ Rnr &= R_Yr + SYr, & Gnr &= G_Yr + SYr, & Bnr &= B_Yr + SYr. \end{aligned}$$

На основе матриц Rnr, Gnr и Bnr в специальном графическом шаблоне построить цветное изображение. Осуществить варьирование параметров SAT, BR, CON .

3.3.7 MathCAD не обрабатывает случая увеличения интенсивности свечения пиксела более 255, уменьшения ниже 0, поэтому происходит нарушение цвета. Для корректировки изображения требуется обработать его, изменив указанную ситуацию: написать функцию ($Korrekt(M)$), которая для некоторой матрицы M осуществляет пересчет элементов по следующему правилу: если значение превышает 255 (белее белого), функция устанавливает 255, если значения меньше 0 (чернее черного), функция устанавливает 0, все промежуточные значения оставляет прежними. С помощью функции $Korrekt(M)$ откорректировать матрицы Rnr, Gnr, Bnr , получив матрицы $Rnrk, Gnrk, Bnrk$, на основе которых

построить в специальном графическом шаблоне цветное изображение. Осуществить варьирование параметров *SAT*, *BR*, *CON*, сравнить полученное изображение с изображением из пункта 3.3.6.

3.4 Содержание отчета

- 1 Цель работы.
- 2 Изображения по пунктам 3.3.1, 3.3.2, 3.3.5 – 3.3.7 (по пунктам 3.3.6 и 3.3.7 при разных значениях параметров *SAT*, *BR*, *CON*).
- 3 Графики зависимостей по пункту 3.3.3.
- 4 Функции для обработки изображения по пунктам 3.3.4 и 3.3.7.
- 5 Выводы.

3.5 Контрольные вопросы и задания

- 1 Что понимают под монохроматическим и сложным излучением?
- 2 Какие цвета называют дополнительными?
- 3 Какими параметрами характеризуется цвет?
- 4 Какие цвета называют метамерными?
- 5 В чем суть трехкомпонентной теории восприятия цветов?
- 6 Какие методы образования цветов вам известны? На каких идеях они основаны?
- 7 Какие цветовые модели реализованы в MathCAD?
- 8 В чем состоит обработка изображений в MathCAD, какие для этих целей имеются специальные функции?
- 9 С какими графическими форматами можно работать при обработке изображений в MathCAD?
- 10 Правила написания функций пользователя в MathCAD.

Лабораторная работа №4
РАСЧЕТ СПЕКТРА СЛОЖНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА
И ЕГО ИДЕАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В MATHCAD

4.1 Цель работы

При решении поставленной задачи по спектральному анализу сложных сигналов продемонстрировать умение использовать возможности MathCAD: имеющиеся типы данных и специальный язык программирования для описания сигнала на временной оси, встроенные функции быстрого преобразования Фурье для расчета спектра, имитацию прохождения сигнала через идеальные фильтрующие устройства (нижних частот, верхних частот, полосовой и заграждающий) и встроенные функции расчета реакции.

4.2 Краткие теоретические сведения

Для расчета спектра сложного периодического континуального сигнала (т. е. сигнала, состоящего в пределах периода повторения из совокупности некоторых элементарных сигналов – прямоугольного импульса, пилообразного импульса, радиоимпульса, синусквадратичного импульса и т. д.) наиболее удобно с учетом возможностей MathCAD осуществить дискретизацию сигнала и применить одну из встроенных функций преобразования Фурье. Для аналитического представления сигнала совокупностью отсчетов в дискретные моменты времени nT при выборе частоты дискретизации f_d (т. е. интервала T между выборками сигнала) используется теорема Котельникова (отсчетов) [3, 4], которая устанавливает возможность сколь угодно точного восстановления мгновенных значений сигнала с ограниченным спектром, исходя из отсчетных значений (выборок), взятых через равные промежутки времени. По данной теореме, если наивысшая частота в спектре функции $s(t)$ меньше, чем f_m , то функция $s(t)$ полностью определяется последовательностью своих значений в моменты, отстоящие друг от друга не более чем на $1/(2f_m)$ секунд. Это положение определяет наименьшее возможное значение частоты дискретизации.

У финитного сигнала $s(t)$ длительность конечна и равна T_c , у такой функции спектр теоретически бесконечно широкий. Однако практически всегда можно определить наивысшую частоту спектра f_m так, чтобы «хвосты» функции времени, обусловленные отсеканием частот, превышающих f_m , содержали пренебрежимо малую долю энергии по сравнению с энергией исходного сигнала $s(t)$. При таком допущении для сигнала длительностью T_c с полосой частот f_m общее число независимых параметров (значений $s(nT)$), которое необходимо (минимально) для полного задания сигнала, составит

$$N = T_c / T = 2f_m T_c = f_d T_c. \quad (4.1)$$

Иногда сигнал необходимо представить с помощью частотных выборок спектральной функции $S(\omega)$. Частотный интервал между соседними выборками $\Delta\omega$ не должен превышать $2\pi/T_c$. При ширине спектра $2\omega_m$, охватывающей область частот $-\omega_m < \omega < \omega_m$, число выборок равно $2\omega_m/\Delta\omega = 2f_m T_c$ (как и при дискретизации функции времени). Выборки спектральной функции $S(\omega)$ являются комплексными числами, т. е. в каждой отсчетной точке задаются два параметра – модуль и аргумент $S(n \cdot (2\pi/T_c))$. Это свидетельствует о том, что в отличие от дискретизации функции времени, здесь общее число задаваемых параметров вдвое больше. Однако поскольку $S(-n \cdot (2\pi/T_c))$ и $S(n \cdot (2\pi/T_c))$ являются комплексно-сопряженными, то спектр сигнала полностью характеризуется совокупностью комплексных выборок, взятых только в области положительных частот, и число независимых параметров, как и при представлении сигнала во временной области, $N = 2f_m T_c$.

Для спектрального анализа в качестве сложных периодических сигналов могут быть предложены разные варианты. Вариант первый – телевизионный сигнал (рисунок 4.1), соответствующий черно-белому изображению в виде вертикальных полос разных полутонов серого (от белого до черного), в котором могут встречаться участки с линейным нарастанием или спадом тона [5, 6]. Сигнал получается в результате развертки изображения по строкам и кадрам (по горизонтали и вертикали). Длительность строки равна 64 мкс, из них 52 мкс соответствуют элементам изображения в строке (прямой ход развертки по горизонтали), остальные 12 мкс – это интервал гашения (обратный ход луча), в котором с задержкой 1,5 мкс передается строчный синхроимпульс длительностью 4,7 мкс, размах сигнала – 1 В. Сигнал является почти периодическим от строки к строке, от кадра к кадру (если не принимать во внимание кадровые синхронизирующие и гасящие импульсы). Вне зависимости от изображения с учетом чересстрочной развертки верхняя частота спектра телевизионного сигнала $f_m = 6$ МГц [5, 6], поэтому в соответствии с теоремой Котельникова для аналитического представления последнего в виде совокупности отсчетов в дискретные моменты времени частота дискретизации должна быть не менее 12 МГц (эта величина в телевидении стандартизирована и составляет 13,5 МГц [10]). Спектр большинства передаваемых изображений имеет следующие особенности: амплитуды составляющих резко уменьшаются с ростом частоты и 90 % полной мощности сигнала передают низкочастотные составляющие (из диапазона до 0,6–0,7 МГц), по сравнению с которыми высокочастотные составляющие (4–6 МГц) ослаблены на 50–70 дБ.

Второй вариант – измерительные сигналы испытательных строк, применяемые для контроля и измерения параметров телевизионной системы непосредственно в процессе передачи [11, 12]. К ним относится испытательный сигнал для измерения амплитудно-частотной характеристики телевизионного тракта на дискретных частотах, представляющий собой полный телевизионный сигнал, в интервале каждой строки которого содержатся элементы С1 и С2,

расположенные на пьедестале В5. Элемент С1 – это два последовательно передаваемых прямоугольных импульса положительной и отрицательной полярности длительностью 4 мкс; элемент С2 – шесть пакетов синусоидальных колебаний фиксированных частот 0,5 МГц, 1 МГц, 2 МГц, 4 МГц, 4,8 МГц и 5,2 МГц, имеющих целое число периодов в пакете (это условие в данной лабораторной работе не накладывается), интервал между пакетами составляет 0,4 мкс, длительность элемента – 36 мкс (каждый пакет по 6 мкс) и размах 0,42 В; элемент В5 – прямоугольный импульс с фиксированным размахом. К этому варианту относится испытательный сигнал, применяемый для измерения амплитудной характеристики, представляющий собой полный телевизионный сигнал, в интервале каждой строки которого содержатся элементы В2, В1 и D2. Элемент В2 – прямоугольный импульс длительностью 10 мкс, В1 – синусквадратичный импульс длительностью 2 мкс (может быть заменен на короткий прямоугольный импульс), D2 – пятиступенчатый сигнал (амплитуды ступеней 0,44 В, 0,58 В, 0,72 В, 0,86 В, 1В) с наложенным на него синусоидальным колебанием частотой 4,43 МГц (частотой цветовой поднесущей) и размахом 0,28 В, общая длительность D2 составляет 24 мкс (на пятой ступени – 8 мкс). Для измерения амплитудной характеристики может быть использован и испытательный сигнал, представляющий собой полный телевизионный сигнал, в каждой строке которого содержатся элементы В2, F и D1. Элемент F – сложный синусквадратичный импульс, состоящий из суммы синусквадратичного импульса (сигнал яркости) и синусоидального напряжения частотой цветовой поднесущей (4,43 МГц), модулированного этим синусквадратичным импульсом (сигнал цветности), верхняя огибающая описывается выражением синусквадратичного импульса, а нижняя огибающая – прямая линия, длительность 4 мкс; элемент D1 – пятиступенчатый сигнал, содержащий шесть уровней, первый из которых соответствует уровню гасящих импульсов (0,3 В), высота ступеней меняется с шагом 0,14 В, длительность сигнала – 26 мкс (шестая ступень – 6 мкс). Входящий в указанный испытательный сигнал сложный синусквадратичный импульс используется для измерения характеристики группового времени запаздывания телевизионного тракта. И наконец, к этой же группе относятся испытательные сигналы в виде полного телевизионного сигнала, в интервале каждой строки которого содержатся в первом случае элемент В2 и сумма элементов D4 и E1, а во втором случае элемент E1 и сумма элементов D4 и D3. Элемент D4 – это импульс пилообразной формы длительностью 30 мкс и размахом 0,7 В, D3 – синусоидальное напряжение фиксированной частоты (1,2 МГц) размахом 0,28 В, промодулированное прямоугольным импульсом, E1 – синусоидальное напряжение частоты цветовой поднесущей (4,43 МГц) размахом 0,28 В, промодулированное прямоугольным импульсом.

Сигналы третьего варианта представляют собой совокупность прямоугольных, пилообразных видеоимпульсов и прямоугольных радиоимпульсов различных частот (амплитуды, длительности элементов сложного компонентного сигнала, а также его период произвольны).

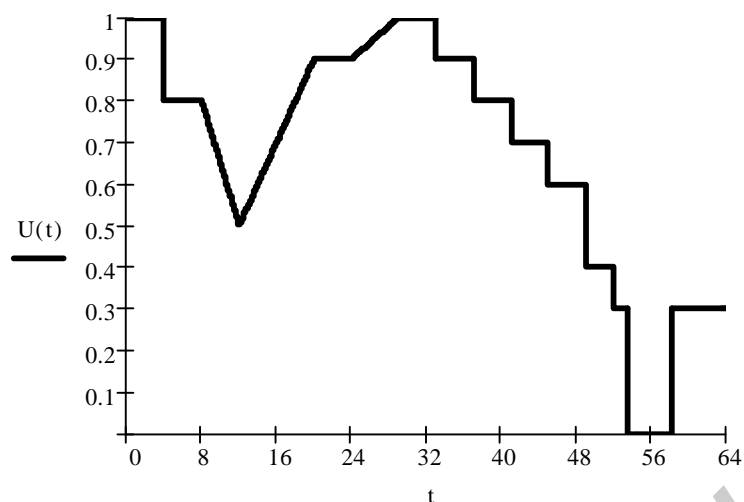


Рисунок 4.1 – Телевизионный сигнал (сигнал яркости) в интервале строки

При выборе частоты дискретизации в случае сигналов второго и третьего вариантов требуется учесть, что для правильного описания синусоидального колебания на периоде последнего желательно брать не менее $5K10$ выборок. Поэтому в качестве частоты дискретизации выбирают $f_d = (5K10)f_{\max}$, где f_{\max} – максимальная частота входящего в данный сигнал гармонического колебания. Расчет спектра дискретизированного сигнала осуществляют с помощью алгоритма БПФ, а переход от спектра к функции времени – с помощью обратного БПФ, которые реализованы в MathCAD в виде встроенных функций интегральных преобразований (*fft, ifft, FFT, IFFT, cfft, icfft, CFFT, ICFFT*).

Электрический фильтр – это линейный четырехполюсник, предназначенный для выделения из состава сложного электрического колебания, подведенного к его входу, частотных составляющих, расположенных в заданной полосе частот, и подавления тех составляющих, которые расположены в других, также заданных, полосах частот [13]. Эти частотные полосы называются соответственно полосой пропускания и полосой задерживания фильтров. По взаимному расположению полос пропускания и задерживания различают фильтр нижних частот (ФНЧ), фильтр верхних частот (ФВЧ), полосовой фильтр (ПФ) и режекторный фильтр (РФ). Линейное звено описывается операторной передаточной функцией

$$K(p) = U_{\text{вых}}(p) / U_{\text{вх}}(p), \quad (4.2)$$

где $U_{\text{вых}}(p)$ и $U_{\text{вх}}(p)$ – лапласовское изображение соответственно реакции $U_{\text{вых}}(t)$ и воздействия $U_{\text{вх}}(t)$.

От операторной передаточной функции осуществляют переход к комплексной передаточной функции

$$K(p)|_{p=j\omega} = K(\omega) = |K(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \quad (4.3)$$

где $|K(\omega)|$ – амплитудно-частотная характеристика звена;
 $\varphi(\omega)$ – фазочастотная характеристика звена.

Для расчета реакции некоторой линейной цепи на входное воздействие можно воспользоваться спектральным методом [3, 13], в соответствии с которым реакция $U_{\text{вых}}(t)$ линейного звена находится с помощью обратного преобразования Фурье:

$$U_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(\omega) K(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.4)$$

спектральной плотности реакции

$$S_{\text{вых}}(\omega) = S_{\text{вх}}(\omega) K(\omega), \quad (4.5)$$

где $S_{\text{вх}}(\omega)$ – спектральная плотность воздействия $U_{\text{вх}}(t)$, определяемая

$$\text{прямым преобразованием Фурье } S_{\text{вх}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(t) e^{-j\omega t} dt ;$$

$K(\omega)$ – комплексная передаточная функция звена, которая для электрического фильтра с идеальными характеристиками единична в полосе пропускания и равна нулю в полосе задерживания.

Реализовать фильтрующее устройство с идеальными частотными характеристиками невозможно, поэтому синтез электрических фильтров основан на различных аппроксимациях данных характеристик в зависимости от заданных требований на допустимое отклонение [13].

4.3 Порядок выполнения работы

4.3.1 По выданному варианту сложного сигнала (задание имеет различные модификации) выбрать частоту дискретизации f_d , рассчитать количество выборок сигнала $N = f_d T_c$, где T_c – период сигнала. Учесть, что для применения алгоритма БПФ N должно соответствовать 2^r , где r – целое число.

4.3.2 По графическому виду и описанию сигнала с учетом истинных значений длительностей и амплитуд последнего записать аналитическое выражение – функцию времени $U(t)$. От функции времени $U(t)$ перейти к вектору отсчетных значений амплитуд сигнала U_{inp} с количеством элементов N . Отобразить в разных графических шаблонах функцию $U(t)$ (непрерывный сигнал) и вектор U_{inp} (дискретный сигнал).

4.3.3 С помощью одной из функций БПФ рассчитать спектр сигнала – вектор S , элементы которого являются комплексными числами. В новом графическом шаблоне построить амплитудный спектр сигнала (получить из вектора S).

4.3.4 Сформировать векторы Kl , Kh , Kbp и Kbs , содержащие отсчетные значения комплексной передаточной функции соответственно ФНЧ, ФВЧ, ПФ и ЗФ, идеальных по своим частотным характеристикам. Учесть, что размер этих векторов соответствует размеру вектора S . Количество элементов этих векторов, попадающих в полосы пропускания и задерживания, выбрать самостоя-

тельно (этим определяются частота среза фильтров нижних частот и верхних частот и частоты, с которых начинается и заканчивается полоса пропускания (задерживания) у полосового (режекторного) фильтра).

4.3.5 Рассчитать спектр сигнала на выходе идеальных фильтров – векторы Sl , Sh , Sbp и Sbs . В отдельных графических шаблонах построить амплитудные спектры этих сигналов (получить из векторов Sl , Sh , Sbp и Sbs).

4.3.6 С помощью одной из функций обратного БПФ (в соответствии с тем, какая функция прямого БПФ была использована в пп. 4.3.3) получить векторы отсчетных значений реакций $Uoutl$, $Uouth$, $Uoutbp$ и $Uoutbs$, отобразить их в разных графических шаблонах, сравнить с исходным сигналом.

4.4 Содержание отчета

- 1 Цель работы.
- 2 Графики исходного сигнала по пункту 4.3.2.
- 3 Амплитудные спектры исходного сигнала по пункту 4.3.3. и сигнала на выходе идеальных фильтров по пункту 4.3.5.
- 4 Графики сигналов на выходе идеальных фильтров по пункту 4.3.6.
- 5 Выводы.

4.5 Контрольные вопросы и задания

1 Из каких соображений при аналитическом представлении финитного сигнала совокупностью отсчетов в дискретные моменты времени выбирают интервал дискретизации T ?

2 Из каких соображений при аналитическом представлении финитного сигнала совокупностью частотных выборок его спектральной функции $S(\omega)$ выбирают интервал дискретизации $\Delta\omega$?

3 Что представляет собой верхняя частота спектра f_m сигнала, ограниченного во времени?

4 Что понимают под аппроксимацией частотных характеристик устройств фильтрации?

5 Что такое линейные искажения, нелинейные искажения?

6 Для полученных в работе спектров сигналов от оси номеров перейти к оси частот (в Гц), пояснить характер спектра в зависимости от имеющихся в составе сигнала (функции $U(t)$) элементарных участков.

7 В чем суть спектрального метода расчета реакции линейного звена на некоторое входное воздействие?

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ильинков, В. А. Моделирование линейных свойств звеньев и сигналов в телекоммуникационных системах: учеб. пособие / В. А. Ильинков, Н. И. Беленкевич, В. Е. Романов. – Минск : БГУИР, 2005. – 102 с.
- 2 Бахвалов, Н. С. Численные методы: учеб. пособие для вузов / Н. С. Бахвалов. – 4-е изд. – М. : БИНОМ, 2006. – 636 с.
- 3 Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов / И. С. Гоноровский. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Радио и связь, 1986. – 512 с.
- 4 Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. пособие для вузов / С. И. Баскаков. – М. : Высш. шк., 2005. – 462 с.
- 5 Ткаченко, А. П. Цветное телевидение / А. П. Ткаченко. – Минск : Беларусь, 1981. – 255 с.
- 6 Джакония, В. Телевидение: учебник для вузов / В. Джакония. – 3-е изд. – М. : Радио и связь, 2004. – 616 с.
- 7 Пономаренко, С. Пиксел и вектор. Принципы цифровой графики / С. Пономаренко. – СПб. : БХВ-Петербург, 2002. – 496 с.
- 8 Борн, Г. Форматы данных / Г. Борн ; пер. с нем. – К. : Торгово-издательское бюро ВНУ, 1995. – 472 с.
- 9 Леонтьев, Б. К. Форматы файлов Microsoft Windows XP: справочник 2005 / Б. К. Леонтьев. – М. : Новый издательский дом, 2005. – 352 с.
- 10 Локшин, Б. А. Цифровое вещание: от студии к телезрителю / Б. А. Локшин. – М. : Компания САЙРУС СИСТЕМС, 2001. – 446 с.
- 11 Кривошеев, М. И. Основы телевизионных измерений / М. И. Кривошеев. – 3-е изд., перераб. – М. : Радио и связь, 1989. – 580 с.
- 12 ГОСТ 18471-83 Тракт передачи изображения вещательного телевидения. Звенья тракта и измерительные сигналы. – М. : Изд-во стандартов, 1984.
- 13 Белецкий, А. Ф. Теория линейных электрических цепей: учебник для вузов / А. Ф. Белецкий. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Радио и связь, 1986. – 512 с.
- 14 Гурский, Д. А. Вычисления в MathCad / Д. А. Гурский. – Минск : Новое знание, 2003. – 814 с.
- 15 Гурский, Д. А. Вычисления в MathCad 12 / Д. А. Гурский, Е. С. Турбина. – СПб. : Питер, 2006. – 544 с.
- 16 Очков, В. MathCad 12 для студентов и инженеров / В. Очков. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 99 с.
- 17 Дьяконов, В. П. MathCad 8/2000: специальный справочник / В. П. Дьяконов. – СПб. : Питер, 2001. – 592 с.

Учебное издание

**Беленкевич Наталья Ивановна
Романов Вячеслав Евгеньевич**

ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Лабораторный практикум
по дисциплине «Прикладное программирование»
для студентов специальностей
«Системы радиосвязи, радиовещания и телевидения»
и «Многоканальные системы телекоммуникаций»
всех форм обучения

В 2-х частях

Часть 1

Редактор Г. С. Корбут
Корректор Е. Н. Батурчик

Подписано в печать 31.12.2009.
Гарнитура «Таймс».
Уч.-изд. л. 3,2.

Формат 60x84 1/16.
Отпечатано на ризографе.
Тираж 70 экз.

Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,91.
Заказ 409.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ № 02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП № 02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6.