ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

В.В. Аксенов,
к. ф.-м. н., доц.,
e-mail: ***axenov@bsuir.by,***
И.Л. Дорошевич,
к. ф.-м. н., доц.,
e-mail: ***dorochevich@bsuir.by,***
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники,
г. Минск, Белоруссия

МЕТОДИКА ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА – БОЛЬЦМАНА» В КУРСЕ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

PRESENTATION METHOD OF TOPIC «MAXWELL – BOLTZMANN DISTRIBUTION» IN COURSE GENERAL PHYSICS

Аннотация: предложен простой и наглядный метод изложения материала по изучению темы «Распределение Максвелла – Больцмана», раздела статистической физики и термодинамики в курсе общей физики. Использованы элементы теории вероятностей и логики.

Ключевые слова: вероятность события, функция распределения, теорема умножения, нормировка, средние значения.

Annotation: a simple and intuitive method of presentation for the study of the topic «Distribution Maxwell – Boltzmann statistics», section of statistical physics and thermodynamics in the introductory physics course. Elements of probability theory and logic.

Keywords: probability, distribution function, theorem of multiplication, normalization, means values.

Введение

Предположим, что мы можем наблюдать движение частиц газа в небольшом объеме (это действительно возможно с использованием, например, электронного микроскопа). Итак, какие выводы нам удастся сделать: а) имеется довольно малое количество медленных молекул, как и молекул, движущихся с огромными скоростями, б) очень много молекул двигаются с примерно одинаковыми скоростями. В связи с этим возникает вопрос о средней скорости молекул и других характеристиках, которые отображают свойства физической системы. Явления, в которых принимает участие огромное число частиц, подчиняются законам больших чисел, или иначе законам статистики. В 1 см^3 газа при нормальных условиях находится $2{,}7 \cdot 10^{18}$ молекул (число Лошмидта). Статистика оперирует только средними значениями тех величин, которые характеризуют поведение системы. Для описания поведения системы большого числа частиц нам понадобятся элементарные сведения из теории вероятности.

Краткие сведения из теории вероятности

Рассмотрим некоторую помеченную молекулу, которая может свободно перемещаться в объеме V, разбитом на равноправные ячейки объемом ΔV. Какова вероятность, что эта молекула окажется в объеме ΔV? Ответить можно двумя способами:

1) Если за время наблюдения t молекула время τ находится в объеме ΔV, то при $t \to \infty$ вероятность появления данной молекулы в объеме ΔV есть

$$w = \lim_{t \to \infty} \frac{\tau}{t}. \qquad (1)$$

2) При равноправности всех элементов объема и большом времени наблюдения вероятность можно определить как

$$w = \frac{\Delta V}{V}. \qquad (2)$$

При $\Delta V = V$, то $w = 1$.

Молекулы газа двигаются хаотически. Какова вероятность того, что значение модуля скорости данной молекулы лежит между значениями u_1 и $u_1 + du$?

Пусть n – общее число молекул, а dn число молекул со скоростями в интервале от u_1 и $u_1 + du$. Тогда искомая вероятность определится как

$$dw = \frac{dn}{n}. \tag{3}$$

Среднее значение переменной величины

Пусть некоторая переменная величина (например, скорость частицы) принимает n_1 раз значение x_1, $n_2 - x_2$ и т. д., а общее число этих значений

$$n = n_1 + n_2 + \ldots,$$

тогда среднее значение переменной величины

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots}{n} \tag{4}$$

или, учитывая что

$$w_1 = \frac{n_1}{n}, \quad w_2 = \frac{n_2}{n}, \ \ldots, \tag{5}$$

$$\overline{x} = \frac{n_1}{n} x_1 + \frac{n_2}{n} x_2 + \ldots = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots = \sum_{i=1} w_i x_i. \tag{6}$$

Если величина x меняется непрерывно, то

$$\overline{x} = \int x \cdot dw, \tag{7}$$

где dw – вероятность того, что значение x лежит между x и $x + dx$.

Для дальнейшего изложения нам понадобится теорема умножения вероятностей, согласно которой вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$w(a,b) = w(a) \cdot w(b). \tag{8}$$

Теорема умножения вероятностей может быть обобщена на случай произвольного числа независимых событий. В общем виде она формулируется следующим образом [1]:

$$w(a,b,c,\ldots) = w(a) \cdot w(b) \cdot w(c) \ldots. \tag{9}$$

Поэтому

$$dw(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z, x, y, z) = dw(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z) \cdot dw(x, y, z), \tag{10}$$

откуда имеем, что

$$dw(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z, x, y, z) \sim d\upsilon_x \cdot d\upsilon_y \cdot d\upsilon_z, \tag{11}$$

$$dw\left(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z,x,y,z\right)\sim dx\cdot dy\cdot dz. \qquad (12)$$

Это почти очевидно. Но как записать равенства? Рассмотрим два примера.

1. Частица движется в одномерном ящике длиной a с постоянной по величине скоростью. Какова вероятность обнаружить ее в интервале (x, x+dx)? Ответ очевиден:

$$dw(x)=\frac{2\cdot dx}{a}. \qquad (13)$$

Перепишем это в виде

$$dw(x)=\rho(x)\cdot dx, \qquad (14)$$

где $\rho(x)$ – плотность вероятностей, которая в данном случае является постоянной величиной. Но в общем случае это не так, что видно из следующего примера.

2. Рассмотрим движение математического маятника с амплитудой A и зададим тот же вопрос, что и в предыдущем примере для одного периода T. Вероятность будем определять, как отношение времени dt, в течение которого частица находится на отрезке dx, к периоду T. Очевидно, что

$$dw(x)=\frac{2\cdot dt}{T}. \qquad (15)$$

Для выражения dt через dx воспользуемся уравнением гармонических колебаний:

$$x=A\sin(\omega t), \qquad (16)$$

$$dx=A\omega\cos(\omega t)\cdot dt, \qquad (17)$$

откуда

$$dt=\frac{dx}{A\omega\cos(\omega t)}=\frac{dx}{A\omega\sqrt{1-\sin^2(\omega t)}}=\frac{dx}{A\omega\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}}. \qquad (18)$$

Теперь для вероятности имеем

$$dw(x)=\frac{2\cdot dx}{TA\omega\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}}. \qquad (19)$$

Поскольку период T связан с циклической частотой ω как

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{20}$$

окончательно получаем:

$$dw(x) = \frac{dx}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} = \rho(x) \cdot dx, \tag{21}$$

где плотность вероятностей $\rho(x)$ имеет уже более сложный вид:

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}. \tag{22}$$

А теперь попробуем записать вероятность того, что частица находится в объёме $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ и имеет компоненты скорости в интервалах ($\upsilon_x + d\upsilon_x$, $\upsilon_y + d\upsilon_y$, $\upsilon_z + d\upsilon_z$). Вид должен быть такой

$$dw(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z, x, y, z) = (??) \cdot d\upsilon_x \cdot d\upsilon_y \cdot d\upsilon_z \cdot dx \cdot dy \cdot dz, \tag{23}$$

а вот что должно стоять в скобках? Попробуем угадать. Рассуждаем так: это должна быть какая– то функция координат и скоростей. Кроме того она должна как-то быть согласованной с теоремой умножения вероятностей. И убеждаемся, что трудно что-нибудь выбрать кроме экспоненциальной функции, например

$$(??) = A \cdot \exp\left[-\frac{H(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z, x, y, z)}{kT} \right], \tag{24}$$

где k – постоянная Больцмана, T – температура по шкале Кельвина, H – гамильтониан, или в данном случае полная энергия частицы, то есть сумма потенциальной и кинетической энергий:

$$H(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z, x, y, z) = U(x, y, z) + E_k(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z). \tag{25}$$

Тогда окончательно получаем выражение для вероятности того, что частица находится в объёме $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ и имеет компоненты скорости в интервалах ($\upsilon_x + d\upsilon_x$, $\upsilon_y + d\upsilon_y$, $\upsilon_z + d\upsilon_z$):

$$dw(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z, x, y, z) =$$

$$= A\exp\left[-\frac{U(x, y, z) + E_k(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)}{kT} \right] \cdot d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z dx\, dy\, dz. \tag{26}$$

А это и есть распределение Максвелла – Больцмана.

Согласно теореме умножения вероятностей, учитывая независимость между собой значений координат частицы и компонент ее скорости, можем записать:

$$dw(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z,x,y,z)=dw(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z)\cdot dw(x,y,z), \qquad (27)$$

где первый множитель, который можно представить в виде

$$dw(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z)=B\cdot\exp\left[-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right]\cdot d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z, \qquad (28)$$

является распределением Максвелла по скоростям, а второй множитель

$$dw(x,y,z)=C\cdot\exp\left[-\frac{U(x,y,z)}{kT}\right]\cdot dx\,dy\,dz \qquad (29)$$

– распределение Больцмана по координатам.

Далее, опять же используя теорему умножения, можно записать

$$dw(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z)=dw(\upsilon_x)\cdot dw(\upsilon_y)\cdot dw(\upsilon_z), \qquad (30)$$

где множители в правой части равенства представим как

$$dw(\upsilon_x)=D_1\cdot\exp\left[-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}\right]\cdot d\upsilon_x, \qquad (31)$$

$$dw(\upsilon_y)=D_2\cdot\exp\left[-\frac{m\upsilon_y^2}{2kT}\right]\cdot d\upsilon_y, \qquad (32)$$

$$dw(\upsilon_z)=D_3\cdot\exp\left[-\frac{m\upsilon_z^2}{2kT}\right]\cdot d\upsilon_z. \qquad (33)$$

Воспользовавшись условием нормировки, определим постоянную D_1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_1\cdot\exp\left[-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}\right]\cdot d\upsilon_x=1, \qquad (34)$$

$$D_1\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}\right]\cdot d\upsilon_x=1. \qquad (35)$$

Учтем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\alpha x^2\right] \cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \qquad (36)$$

тогда

$$D_1 = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \cdot \qquad (37)$$

Рассуждая аналогично, находим

$$D_2 = D_3 = D_1 = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \cdot \qquad (38)$$

Теперь окончательно получаем распределение Максвелла по скоростям

$$dw\left(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z\right) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \exp\left[-\frac{m\left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2\right)}{2kT}\right] \cdot d\upsilon_x \cdot d\upsilon_y \cdot d\upsilon_z.$$

Литература и примечания:

[1] Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. – 120 с.