Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра радиоэлектронных средств

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В КОНСТРУИРОВАНИИ И ТЕХНОЛОГИИ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ

Методическое пособие к практическим занятиям
для студентов специальностей
«Моделирование и компьютерное проектирование РЭС»
и «Проектирование и производство РЭС»
всех форм обучения

Под редакцией С. М. Боровикова

Минск БГУИР 2011

УДК 621.396.6-027.31:51-7(076)
ББК 32.844-02+22.1я73
М 33

А в т о р ы:
С. М. Боровиков, А. И. Бересневич
Е. Н. Шнейдеров, Т. В. Малышева, В. Е. Галузо

Р е ц е н з е н т:
заведующий кафедрой «Защита информации» учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», профессор, доктор технических наук Л. М. Лыньков

М33 **Математические** методы в конструировании и технологии радиоэлектронных средств : метод. пособие к практ. занятиям для студ. спец. «Моделирование и компьютерное проектирование РЭС» и «Проектирование и производство РЭС» всех форм обучения / С. М. Боровиков [и др.] ; под ред. С. М. Боровикова. – Минск : БГУИР, 2011. – 80 с. : ил.
ISBN 978-985-488-582-7.

Приводится описание шести лабораторных работ. Даны методические указания к выполнению практических заданий и расчётной работы по дисциплине, а также приложения с необходимой справочной информацией, литература.

Пособие может быть использовано для выполнения лабораторных работ и проведения практических занятий по учебным дисциплинам «Математические методы в проектировании технических изделий» специальности «Техническое обеспечение безопасности» и «Теоретические основы проектирования электронных систем безопасности» специальности «Электронные системы безопасности».

УДК 621.396.6-027.31:51-7(076)
ББК 32.844-02+22.1я73

ISBN 978-985-488-582-7

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебных планах специальностей 1-39 02 01 «Моделирование и компьютерное проектирование радиоэлектронных средств (РЭС)» и 1-39 02 01 «Проектирование и производство РЭС» дисциплина «Математические методы в конструировании и технологии РЭС» (ММвКиТРЭС) занимает особое положение. Дисциплина ММвКиТРЭС предусматривает изучение прикладных математических методов, используемых в конструировании и технологии РЭС для вероятностного описания параметров, получения математических моделей радиоэлектронных устройств и технологических процессов, решения задач оптимизации конструкторско-технологических решений, математического описания систем массового обслуживания в технологии РЭС и определения характеристик этих систем.

Предлагаемые лабораторные работы, практические занятия и расчётная работа способствуют усвоению студентами методов, которые применяют в радиоэлектронике для расчётно-аналитического и экспериментального исследования конструкций, технологии и надёжности РЭУ.

В результате выполнения практических занятий обучаемый должен:

уметь:

− получать вероятностное описание независимых и зависимых случайных параметров, используя экспериментальные методы;

− применять математическую теорию планирования эксперимента для получения математических моделей устройств и технологических процессов;

− формулировать задачи оптимизации в конструировании и технологии РЭС, выбирать математические методы их решения;

− применять для решения задачи оптимизации метод случайного поиска на ЭВМ;

− определять основные характеристики систем массового обслуживания для установившегося и неустановившегося режимов функционирования в случае простейшего стационарного потока поступающих заявок;

приобрести навыки:

− выбора математических методов, используемых для аналитического и экспериментального исследования конструкций РЭС и технологических процессов их изготовления;

− практического применения прикладных математических пакетов для получения на ЭВМ регрессионных моделей с использованием экспериментальных данных.

Для студентов специальности «Моделирование и компьютерное проектирование РЭС» учебным планом предусмотрены лабораторные занятия в объёме 16…32 ч (в зависимости от года набора студентов) и расчётная работа, а для студентов специальности «Проектирование и производство РЭС» – практические занятия в объёме 34 ч.

1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО ОПИСАНИЯ ПАРАМЕТРОВ

Цель работы: экспериментально определить вероятностное описание параметров элементов с учётом их производственных отклонений.

Для достижения цели необходимо:

- получить (путём измерения) статистические данные о двух параметрах;
- определить на ЭВМ числовые характеристики параметров (математические ожидания и средние квадратические отклонения), построить гистограммы распределения, выбрать и проверить гипотезы о законах распределения;
- выяснить наличие или отсутствие корреляции между параметрами.

1.1. Теоретические сведения

При изготовлении изделий (элементов, устройств и т. п.) в условиях производства всегда имеют место некоторые отклонения их параметров относительно средних (номинальных) значений, т. е. параметры по сути являются случайными. Указанные отклонения называются производственными, иначе – технологическими отклонениями или погрешностями.

При проектировании РЭУ для учёта влияния производственных погрешностей параметров элементов пользуются их вероятностным описанием, под которым понимают такие характеристики параметра, которые дают представление о его среднем значении, степени разброса (рассеивания) значений относительно среднего, характере группировки значений параметра в пределах диапазона его возможных значений.

Для вероятностного описания параметра используют следующие характеристики:

- математическое ожидание, иначе – среднее значение $M(x)$; при симметричном допуске соответствует номинальному значению параметра;
- среднее квадратическое отклонение (СКО) $\sigma(x)$ или дисперсию $D(x)$; эти характеристики связаны соотношением $D(x) = [\sigma(x)]^2$;
- закон распределения параметра в пределах его поля допуска.

Здесь и далее буквой *x* будем обозначать символически как сам параметр, так и его текущие значения в случае, если рассматриваемая характеристика параметра является функцией.

Для решения многих практических задач было бы достаточно знать числовые характеристики $M(x)$ и $\sigma(x)$. Однако информация о производственных погрешностях параметров обычно задается в виде значения половины поля допуска $\delta(x)$. Для определения же значения $\sigma(x)$ или $D(x)$ необходимо располагать законом распределения параметра.

Закон распределения случайного параметра может быть задан плотностью распределения $w(x)$, иначе – плотностью вероятностей или же функцией распределения $F(x)$. График плотности распределения $w(x)$ показывает, как плотно группируются значения параметра на том или ином участке диапазона его возможных значений (рис. 1.1). Из рис. 1.1 следует, что значения параметра вблизи точки $R_{\text{ном}}$ = 300 Ом будут встречаться чаще, нежели вблизи границ поля допуска $R_{\text{ном}}$ – 10 % и $R_{\text{ном}}$ + 10 %.

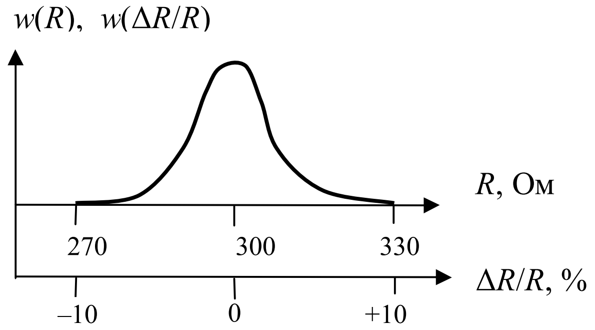


Рис. 1.1. Плотность распределения параметра *R* и его относительной погрешности Δ*R*/*R*

Функция распределения $F(x)$ для точки $x = a$ показывает, какова вероятность того, что случайный параметр примет меньшее значение, чем текущее значение $x = a$. Функции $w(x)$ и $F(x)$ по сути несут одну и ту же информацию о случайном параметре, но в разной форме.

Зная функцию $w(x)$ или $F(x)$, можно дать ответ на вопрос: какова вероятность того, что параметр примет значение, заключенное в некоторых пределах, например от a до b [1, с. 19; формулы (2.2), (2.3); рис. 2.3].

Во многих случаях при инженерном проектировании пользуются функцией плотности распределения не самого параметра x, а функцией плотности распределения его относительной ($\Delta x/x$) производственной погрешности. Переход от функции $w(R)$ к функции $w(\Delta R/R)$ применительно к параметру R = 300 Ом ± 10 % иллюстрируется рис. 1.1. Вид кривой распределения сохраняется, меняются лишь параметры закона распределения, в случае нормального закона – параметры $m = M(R)$ и $\sigma = \sigma(R)$.

Аналогично во многих случаях при расчетах удобнее пользоваться не характеристиками $M(x)$, $\sigma(x)$ и $\delta(x)$, а характеристиками $M(\Delta x/x)$, $\sigma(\Delta x/x)$ и $\delta(\Delta x/x)$.

Законы распределения параметров

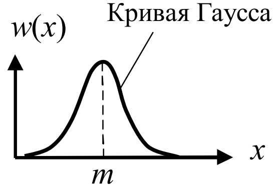
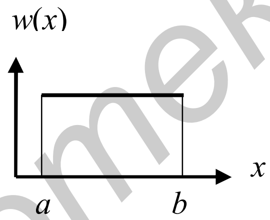
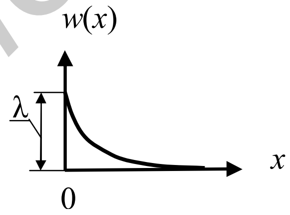
Особый интерес на практике представляют нормальное, равномерное и экспоненциальное распределения (табл. 1.1).

В случае нормального закона инженера нередко интересует вопрос: какова вероятность того, что значение параметра x отстоит не далее чем на $n \cdot \sigma$ от среднего значения m, где n – определенное целое число (n = 1, 2, …).

Пользуясь табличной нормальной функцией распределения $F(x)$ (прил. 1, [1, с. 296]) для чисел n = 1, 2, 3 по формуле (1.2), приведённой в табл. 1.1, можно получить значения вероятностей, указанные в табл. 1.2.

Из табл. 1.2 видно, что при значении n = 3 вероятность выхода параметра x за пределы ± 3σ очень мала (примерно 0,27 %), что означает: при нормальном законе распределения всё рассеивание параметра (с ошибкой до долей процента) укладывается на участке $m \pm 3\sigma$. Это позволяет, зная СКО и математическое ожидание (номинальное значение) параметра, ориентировочно указать диапазон его практически возможных значений (рис. 1.2).

Таблица 1.1

Закон распределения случайного параметра x	Выражение функции плотности распределения и связь параметров закона распределения с числовыми характеристиками $M(x)$ и $\sigma(x)$	График плотности распределения $w(x)$	Выражение функции распределения $F(x)$	Способ определения теоретической вероятности попадания параметра в заданный интервал (p_i)
Нормальный (распределение Лапласа – Гаусса)	$w(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$, $-\infty<x<+\infty$, где m, σ – параметры распределения; $\begin{cases} m=M(x) \\ \sigma=\sigma(x) \end{cases}$ (1.1)		$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-t^2/2}dt=$ $=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$	$p_i=P(a\le x\le b)=$ $=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$, (1.2) где a – нижняя граница; b – верхняя граница; $\Phi(\ldots)$ – функция распределения стандартного нормального распределения ($m=0$, $\sigma=1$)
Равной вероятности (равномерное распределение, прямоугольное распределение)	$w(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } a\le x\le b; \\ 0, & \text{если } x<a \text{ и } x>b, \end{cases}$ где a, b – параметры распределения; $\begin{cases} M(x)=\frac{a+b}{2}; \quad \sigma(x)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}} \end{cases}$ (1.3)		$F(x)=\frac{x-a}{b-a}$	$P(\alpha\le x\le\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$, (1.4) где α – нижняя граница; β – верхняя граница. Параметры a и b закона распределения находят, решая систему равенств (1.3)
Экспоненциальный	$w(x)=\lambda e^{-\lambda x}$; $x\ge 0$, где λ – параметр распределения; $\lambda=\frac{1}{M(x)}$; $\lambda=\frac{1}{\sigma(x)}$. Свойство распределения: $M(x)=\sigma(x)$		$F(x)=1-e^{-\text{лх}}$	$P(a\le x\le b)=F(b)-F(a)$, (1.5) где a – нижняя граница; b – верхняя граница. Параметр λ определяют как $\lambda=\frac{1}{M(x)}$ (1.6)

Примечание. Функцию $\Phi(\ldots)$ обычно называют «нормальная функция распределения», для неё численными методами получена таблица значений (см., например, [1, с. 296]).

Такой способ оценки диапазона возможных значений параметра широко используется в инженерной практике (и математической статистике вообще) и носит название «правила трёх сигм». С учётом этого в технике половина поля допуска на параметр часто устанавливается в виде значения

Таблица 1.2

n	1	2	3
$P(m - n\sigma \le x \le m + n\sigma)$	0,68	0,95	0,9973

$$\delta(x) = 3\sigma(x),$$

где $\delta(x)$ – половина поля допуска на параметр x, записываемая в техническую документацию;

$\sigma(x)$ – СКО параметра x, подсчитанное по результатам измерений параметра x.

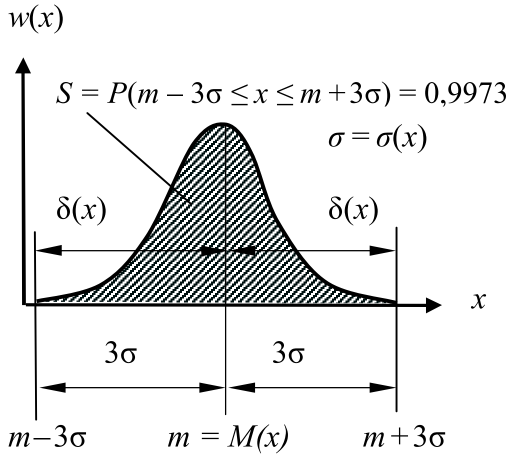


Рис. 1.2. Пояснение к «правилу трёх сигм»

Из «правила трёх сигм» вытекает ориентировочный способ определения СКО параметра:

$$\sigma(x) \approx \frac{\delta(x)_{\text{ТУ}}}{3}, \tag{1.7}$$

где $\delta(x)_{\text{ТУ}}$ – половина поля допуска на параметр, указанная в нормативно-технической документации – технических условиях (ТУ).

Если параметр x распределен по закону равной вероятности и известно значение половины поля допуска $\delta(x)$, то СКО $\sigma(x)$ определяется выражением

$$\sigma(x) = \frac{\delta(x)_{\text{ТУ}}}{\sqrt{3}}.$$

Определение закона распределения параметра на основе опытных данных

Вначале получают статистическую совокупность из n наблюдений интересующего параметра (обозначим его через x). Для этого у n экземпляров – выборки объёмом n однотипных элементов или устройств измеряют значение x. Желательно, чтобы $n \ge 50\ldots100$. Далее, обрабатывая статистическую совокупность, определяют оценки математического ожидания $M^*(x)$ и СКО $\sigma^*(x)$.

Затем строят статистический ряд. Для этого диапазон наблюдаемых значений параметра x разбивают на k интервалов и для каждого i-го ($i = 1, 2, ..., k$) интервала определяют величину

$$p_i^* = \frac{m_i}{n}, \tag{1.8}$$

где p_i^* – относительная частота (далее кратко – частота), соответствующая i-му интервалу;

m_i – число наблюдений параметра x, приходящихся на i-й интервал [1].

При $n \le 100$ примерное число интервалов можно определить как значение $n/10$ или $\sqrt{n}$. Сумма частот p_i^* всех интервалов должна быть равна единице.

Строят таблицу, в которой приводят интервалы (значения x) в порядке их расположения на оси абсцисс и соответствующие частоты p_i^* (табл. 1.3).

Таблица 1.3

Интервал, I_i	x_1, x_2	x_2, x_3	…	x_k, x_{k+1}
p_i^*	p_1^*	p_2^*	…	p_k^*

Полученную таблицу называют статистическим рядом. В ней: I_i – обозначение i-го интервала; x_i, x_{i+1} – границы i-го интервала; $i = 1, 2, \ldots, k$.

Далее строят гистограмму распределения параметра. Если до наблюдения параметра известен вид закона распределения, построение гистограммы можно не выполнять. Гистограмма строится следующим образом. По оси абсцисс откладываются интервалы и на каждом из них, как на основании, строится прямоугольник, высота которого

$$h_i = \frac{p_i^*}{x_{i+1} - x_i},$$

где $(x_{i+1} - x_i)$ – ширина i-го интервала.

Удобно выбирать равные интервалы. В этом случае высоты прямоугольников h_i пропорциональны соответствующим значениям p_i^* и m_i (рис. 1.3).

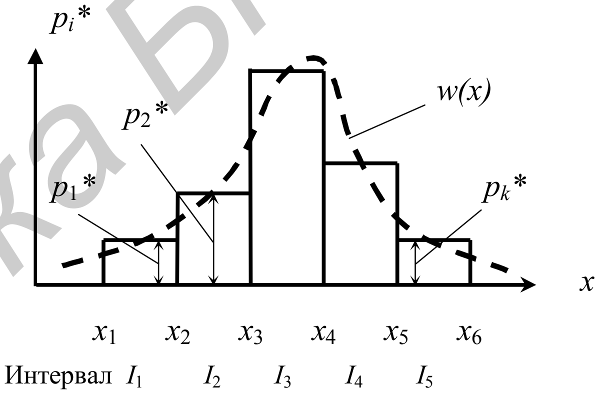


Рис. 1.3. Гистограмма распределения параметра

Огибающую ступенчатую линию гистограммы можно рассматривать как статистический аналог плотности распределения $w(x)$. Пользуясь данными статистического ряда (см. табл. 1.3), можно приближённо построить и статистическую функцию распределения параметра. Её строят по нескольким точкам, в качестве которых по оси параметра используют границы интервалов $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$, а в качестве координат по оси функции распределения берут значения, определяемые с помощью табл. 1.4. Соединяя полученные точки линией, получают приближенный график статистической функции распределения (рис. 1.4).

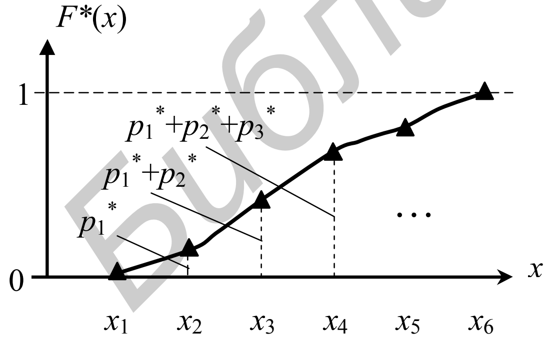


Рис. 1.4. Статистическая функция распределения параметра

[1] В литературе по применению математической статистики в экономике и некоторых научных областях величины m_i называют частотами, а величины p_i^* – частостями.

На практике возникает вопрос: как для статистического распределения подобрать теоретический закон, выражающий лишь существенные черты статистического материала, а не случайности, связанные с ограниченным объемом экспериментальных данных.

Таблица 1.4

Значение параметра x_i	$F^*(x_i)$
x_1	0
x_2	p_1^*
x_3	$p_1^* + p_2^*$
x_k	$p_1^* + p_2^* + p_3^*$
...	...
x_k	$\sum_{i=1}^{k-1} p_i^*$
x_{k+1}	$\sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1$

В некоторых случаях вид теоретического закона выбирается заранее на основе анализа сущности задачи, в других случаях – по внешнему виду гистограммы. По графику статистической функции распределения (см. рис. 1.4) в большинстве случаев трудно сказать что-то определенное о законе распределения.

Аналитическое выражение выбранного теоретического распределения зависит от некоторых параметров этого распределения. Задача подбора теоретического распределения переходит в задачу рационального выбора таких значений параметров распределения, при которых соответствие между теоретическим и статистическим распределением оказывается наилучшим. Одним из методов решения этой задачи является так называемый **метод моментов** [1, с. 44].

Согласно методу моментов параметры теоретического распределения выбирают так, чтобы важнейшие числовые характеристики (моменты) теоретического распределения были равны соответствующим статистическим характеристикам. Обычно параметры распределения выбирают так, чтобы моменты теоретического распределения $M(x)$ и $\sigma(x)$, совпадали с соответствующими статистическими характеристиками $M^*(x)$ и $\sigma^*(x)$.

С учётом этого **при выравнивании статистического распределения нормальным законом параметры *m* и σ надо принять с учётом равенств (1.1), параметры *a* и *b* теоретического закона равной вероятности должны быть определены путём решения уравнений (1.3), а параметр λ экспоненциального распределения – по выражению (1.6)** согласно табл. 1.1.

Как бы хорошо не была подобрана теоретическая функция, например $F(x)$, между нею и статистической функцией распределения $F^*(x)$ неизбежны некоторые расхождения. Возникает вопрос: чем объясняются эти расхождения – ограниченным числом наблюдений или неудачным подбором функции? Для ответа на этот вопрос используют «критерии согласия».

Широкое применение находит критерий согласия χ^2 (критерий Пирсона). Схема его применения следующая.

1. Определяется мера расхождения U по формуле

$$U = \chi^2 = n\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(p_i^* - p_i\right)^2}{p_i} = \sum_{i=1}^{k}\frac{\left(m_i - np_i\right)^2}{np_i}, \tag{1.9}$$

где p_i – вероятность попадания параметра в i-й интервал, подсчитанная по теоретическому закону распределения, согласно выдвинутой гипотезе.

В выражении (1.9) отношения n/p_i представляют собой веса, с которыми учитываются квадраты разностей $(p_i^* - p_i)$. Пирсон показал, что при больших n закон распределения величины U практически не зависит от теоретической функции $F(x)$ и числа наблюдений n, а зависит только от числа интервалов k. При увеличении n этот закон приближается к распределению χ^2. Поэтому мера расхождения U обозначается как χ^2.

2. Определяется число степеней свободы распределения χ^2:

$$f = k - s,$$

где s – число независимых условий (связей), наложенных на частоты p_i^*, а следовательно, и на распределение параметра.

Обычно $s = 3$, так как теоретическое распределение подбирается с учётом следующих требований:

- $\sum\limits_i p_i^* = 1$;
- совпадение теоретического и статистического средних значений: $M(x) = M^*(x)$;
- совпадение теоретического и статистического СКО: $\sigma(x) = \sigma^*(x)$.

3. По значениям f и χ^2 с помощью специальных таблиц (табл. П.1.2 прил. 1), составленным для функции χ^2, находится вероятность того, что величина U, имеющая распределение χ^2 с f степенями свободы, превзойдет данное значение. Если эта вероятность мала, гипотеза отбрасывается как неправдоподобная. Если эта вероятность относительно велика ($P > 0{,}1–0{,}2$), гипотезу можно принять как не противоречащую опытным данным.

С примером выбора закона распределения параметра на основе опытных данных можно ознакомиться в [1, с. 45 – 46; 2, с. 16 – 18].

Корреляция параметров

В инженерной практике во многих случаях приходится иметь дело с зависимыми параметрами. При этом зависимость между параметрами является не функциональной, а вероятностной или «стохастической». Вероятностный характер зависимости между двумя параметрами, например параметрами $h_{11Э}$ и β биполярных транзисторов, означает, что с изменением одного из параметров второй параметр имеет лишь тенденцию либо убывать, либо возрастать. Эта тенденция соблюдается в среднем, в общих чертах, и в каждом отдельном случае от неё возможны отступления (рис. 1.5).

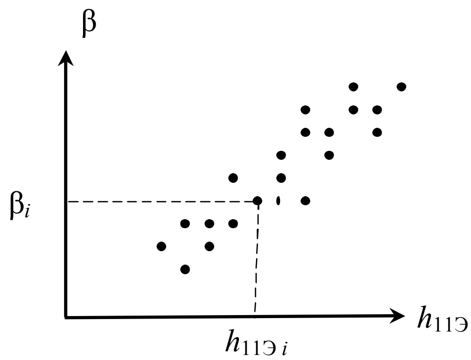


Рис. 1.5. Корреляционное поле параметров – диаграмма разброса

Вероятностная зависимость может быть более или менее тесной. По мере увеличения тесноты вероятностная зависимость приближается к предельному случаю – функциональной зависимости. Другой предельный случай – полная независимость параметров.

Возникает вопрос: как учесть вероятностную зависимость между параметрами.

Для учёта взаимозависимости между параметрами пользуются понятием корреляции параметров. В качестве количественной меры корреляции используют характеристику, называемую **коэффициентом корреляции**. При решении практических задач пользуются коэффициентом, показывающим близость зависимости параметров к линейной функциональной зависимости. Его выборочное значение между параметрами x и z определяют с помощью выражения

$$r_{\mathrm{x,z}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)(z_i - m_z)}{(n-1)\sigma_x \sigma_z}, \quad (1.10)$$

где x_i, z_i – значения параметра x в i-м измерении и соответствующее ему значение параметра z;

m_x, m_z – оценки математических ожиданий параметров x и z;

σ_x, σ_z – оценки СКО параметров x и z;

n – общее число наблюдений пар параметров x и z.

Если коэффициент корреляции, определяемый по формуле (1.10), отличен от нуля, то говорят, что параметры x и z коррелированы между собой.

Коэффициент корреляции, определяемый выражением (1.10), называют также коэффициентом линейной корреляции, а взаимозависимость между параметрами – линейной корреляционной зависимостью.

В общем случае коэффициент корреляции лежит в интервале от –1 до +1. В случае $r_{x,z} > 0$ говорят о положительной, а при $r_{x,z} < 0$ – об отрицательной корреляции параметров x и z. Положительная корреляция означает, что с увеличением одного из параметров другой имеет тенденцию в среднем возрастать. При отрицательной корреляции с возрастанием одного из параметров другой имеет тенденцию в среднем убывать. При $r_{x,z} = 0$ параметры не коррелированы. Если параметры x и z связаны точной линейной функциональной зависимостью, то $r_{x,z} = \pm 1$.

Если коэффициент корреляции имеет значение $|r_{x,z}| \to 0{,}9\ldots0{,}95$, то параметры можно считать связанными линейной функциональной зависимостью. При $|r_{x,z}| \to 0{,}25\ldots0{,}35$ корреляцией можно пренебречь.

В случаях когда число первичных параметров более двух и все они или их часть из них связаны между собой, определяют коэффициенты корреляции между каждой парой рассматриваемых параметров. Корреляцию параметров представляют в виде корреляционной матрицы. Такой матрицей можно представить, например, взаимозависимость h-параметров транзисторов [1, с. 30].

При определении коэффициента корреляции число наблюдений пар параметров ограничено. Поэтому возникает вопрос: насколько правомерно в дальнейших расчетах пользоваться рассчитанным значением коэффициента корреляции. Для ответа на этот вопрос выполняют проверку статистической значимости, иногда говорят – надежности этого коэффициента. Проверка статистической значимости означает выяснение того, является ли отличие от нуля коэффициента корреляции, подсчитанного по формуле (1.10), следствием наличия корреляции параметров или же это отличие оказалось случайным из-за ограниченного числа наблюдений n пар значений исследуемых параметров.

Проверка статистической значимости коэффициента корреляции r выполняется путём построения доверительного интервала, который определяют по-разному в зависимости от числа наблюдений n и значения оценки r.

При числе наблюдений пар исследуемых параметров $n > 50$ используется классический подход, основанный на гипотезе о нормальном законе распределения оценки r. С примером можно ознакомиться в [1, с. 39; 2, с. 15–16].

При $n \leq 50$, а также при значениях оценки $|r| \to \pm 1$ следует пользоваться преобразованием Фишера. С примером можно ознакомиться в [1, с. 40; 2, с. 16].

При использовании любого из рассмотренных подходов считается, что выборочный коэффициент корреляции r, найденный по формуле (1.10), статистически значим, если при выбранной доверительной вероятности γ (обычно 0,95) построенный доверительный интервал для величины r не содержит точку со значением $r = 0$. В этих случаях полученным выборочным значением коэффициента корреляции можно пользоваться в дальнейших расчётах.

1.2. Описание лабораторного макета

Лабораторный макет представляет собой устройство, содержащее выборку однотипных элементов (не менее 50-ти экземпляров). Измерение параметров выполняется либо встроенным, либо внешним измерительным прибором.

Предлагаемые лабораторные макеты позволяют получить статистические данные о двух параметрах, для которых необходимо выбрать подходящие законы распределения и определить корреляцию. При необходимости метод измерения параметров поясняется схемой, приведенной на передней панели макета.

1.3. Задание на экспериментальную часть лабораторной работы

При выполнении исследований в лабораторной работе необходимо:

1. Используя лабораторный макет, выполнить измерения двух указанных преподавателем параметров у всех экземпляров выборки элементов.

При измерении исследуемых параметров и последующем вводе в ЭВМ их значений для обработки необходимо, чтобы первому из параметров в i-м наблюдении ставилось в соответствие значение второго параметра в этом же i-м наблюдении.

2. Обработать опытные данные на ЭВМ: для каждого параметра получить основные числовые характеристики (средние значения, СКО) и рисунок гистограммы.

Программа, используемая для обработки результатов измерений, находится в папке ММКТРЭС, имя программы ***lab***1. Из нескольких гистограмм, полученных при сопоставимом числе интервалов, лучшей является та, которая имеет меньшее число инверсий (кроме равномерного распределения). Инверсией считают смену закономерности изменения для высот прямоугольников гистограммы.

3. На основе анализа физической сущности параметра и (или) вида гистограммы выбрать гипотезу о теоретическом законе его распределения и, пользуясь формулами (1.1) – (1.6) табл. 1.1, определить теоретическую вероятность p_i попадания параметра в i-й интервал; $i = 1, 2, …., k$.

4. Используя ЭВМ, выполнить подсчёт меры расхождения $U = \chi^2$ между полученным статистическим и выбранным теоретическим распределениями.

5. Подсчитать число степеней свободы f для меры расхождения $U = \chi^2$, по этим значениям (f и χ^2) с помощью статистической таблицы (см. табл. П.1.2 прил. 1) найти значение вероятности P и принять решение о согласованности теоретического и статистического распределений.

6. Используя программу для ЭВМ ***lab*1**, построить корреляционное поле (диаграмму разброса) исследуемых параметров. По виду корреляционного поля определить характер корреляции (положительная, отрицательная, практически независимые параметры), а также примерное значение оценки коэффициента корреляции. Ввести в ЭВМ запрашиваемую информацию.

7. С помощью программы ***lab*1** рассчитать оценку коэффициента корреляции между исследуемыми параметрами и сравнить её со значением оценки этого коэффициента, сделанной по виду корреляционного поля.

8. Проверить статистическую значимость рассчитанного коэффициента корреляции.

9. Написать отчёт по лабораторной работе.

1.4. Содержание отчета

1. Цель работы.

2. Результаты измерений исследуемых параметров в виде таблицы с указанием номера элемента (наблюдения) и значений его параметров.

3. Результаты статистической обработки опытных данных:

- статистический ряд исследуемого параметра в виде таблицы с указанием номеров и границ интервалов, количества значений параметра, попавших в i-й интервал (m_i), значений относительных частот p_i^* и теоретических (для выбранного теоретического закона распределения) вероятностей p_i, соответствующих i-му интервалу; $i = 1, 2, …., k$;
- основные числовые характеристики параметра в виде табл.1.5.

4. Гистограмма распределения параметра с указанием на горизонтальной оси его значений, соответствующих границам интервалов, на вертикальной оси – частот p_i^* в долях единицы или процентах.

Таблица 1.5

Параметр	Основные числовые характеристики		Коэффициент корреляции, $r_{1,2}$
	$M(x_i)$	$\sigma(x_i)$	
x_1			
x_2			

5. График функции распределения $F^*(x)$, построенный по точкам.

6. Значение меры расхождения $U = \chi^2$ и заключение о согласованности статистического и теоретического распределений.

7. Корреляционное поле исследуемых параметров, построенное на миллиметровой или обычной бумаге, но с нанесённой координатной сеткой.

8. Рассчитанное значение коэффициента корреляции и результаты проверки статистической значимости коэффициента: значение выбранной доверительной вероятности, нижней и верхней доверительных границ, заключение о значимости коэффициента.

9. Выводы: полученные характеристики вероятностного описания параметров и возможность их использования на практике.

Примечание. *Пп. 3–6 приводятся по каждому из исследуемых параметров.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровиков, С. М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности : учеб. для студ. инж.-техн. спец. вузов / С. М. Боровиков. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.

2. Боровиков, С. М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности. Сборник задач : учеб. пособие для вузов / С. М. Боровиков, А. В. Погребняков. – Минск : БГУИР, 2001. – 124 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Таблица П.1.1

Значения нормальной функции распределения $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
–3,2	0,0007	–2,1	0,0179	–1,0	0,1587	0,1	0,5398	1,2	0,8849	2,3	0,9892
–3,1	0,0010	–2,0	0,0228	–0,9	0,1841	0,2	0,5793	1,3	0,9032	2,4	0,9918
–3,0	0,0014	–1,9	0,0288	–0,8	0,2119	0,3	0,6179	1,4	0,9192	2,5	0,9937
–2,9	0,0019	–1,8	0,0359	–0,7	0,2420	0,4	0,6554	1,5	0,9332	2,6	0,9953
–2,8	0,0026	–1,7	0,0446	–0,6	0,2743	0,5	0,6915	1,6	0,9452	2,7	0,9965
–2,7	0,0035	–1,6	0,0548	–0,5	0,3085	0,6	0,7257	1,7	0,9554	2,8	0,9974
–2,6	0,0047	–1,5	0,0668	–0,4	0,3446	0,7	0,7580	1,8	0,9641	2,9	0,9981
–2,5	0,0063	–1,4	0,0808	–0,3	0,3821	0,8	0,7881	1,9	0,9713	3,0	0,9986
–2,4	0,0082	–1,3	0,0968	–0,2	0,4207	0,9	0,8159	2,0	0,9772	3,1	0,9990
–2,3	0,0108	–1,2	0,1151	–0,1	0,4602	1,0	0,8413	2,1	0,9821	3,2	0,9993
–2,2	0,0139	–1,1	0,1357	0,0	0,5000	1,1	0,8643	2,2	0,9861	3,3	0,9995

Таблица П.1.2

Значения χ^2 в зависимости от f и P

f	Вероятность P							
	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,10	0,05
1	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07	2,71	3,84
2	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	4,60	5,99
3	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	6,25	7,82
4	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	7,78	9,49
5	1,145	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	9,24	11,07
6	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	10,64	12,59
7	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	12,02	14,07

2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2
ПРИМЕНЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ СЕТОК ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ

Цель работы: применить вероятностные сетки для проверки гипотез о законах распределения параметров.

Статистические данные об исследуемых параметрах получают моделированием значений параметров на ЭВМ.

2.1. Теоретические сведения

Для быстрого принятия решений о законах распределения параметров используют вероятностные сетки, называемые также вероятностной бумагой [1].

Вероятностная сетка – это координатная сетка в прямоугольной системе координат, в которой масштаб по оси функции распределения (ось ординат), а иногда также и по оси параметра (ось абсцисс) преобразованы таким образом, что функция распределения параметра, построенная на этой сетке, принимает вид прямой линии.

Различают вероятностную бумагу нормального распределения, экспоненциального, распределения Вейбулла и т. д. Для равномерного распределения вероятностная сетка совпадает с обычной прямоугольной системой координат. Поэтому для этого закона понятие «вероятностная сетка» теряет смысл.

Пользуются вероятностными сетками следующим образом. На вероятностную сетку наносят точки, координатами которых являются верхние границы интервалов (кроме последнего интервала) и соответствующие этим границам накопленные относительные частоты (статистические вероятности), выраженные в процентах или долях единицы. Так, применительно к параметру, статистическим рядом которого является табл. 2.1, верхними границами, которые надо принять во внимание, являются значения 76, 82, 88, 94. Верхняя граница последнего интервала (точка со значением 100) в рассмотрении не участвует.

Таблица 2.1

Интервал	70; 76	76; 82	82; 88	88; 94	94; 100
Значение p_i^*	0,05	0,20	0,42	0,27	0,06

Накопленные значения относительных частот p_i^*, т. е. значения функции распределения $F^*(x)$, соответствующие принятым во внимание верхним границам интервалов, определены по формулам табл. 1.4 лабораторной работы №1 (в предположении нормального закона распределения параметра). Эта информация приведена в табл. 2.2. Вероятностная сетка нормального распределения с нанесёнными точками показана на рис. 2.1. Номера точек соответствуют номерам интервалов табл. 2.2.

Таблица 2.2

Номер интервала	1	2	3	4
Значение параметра	76	82	88	94
Значение $F^*(x)$	0,05	0,25	0,67	0,94

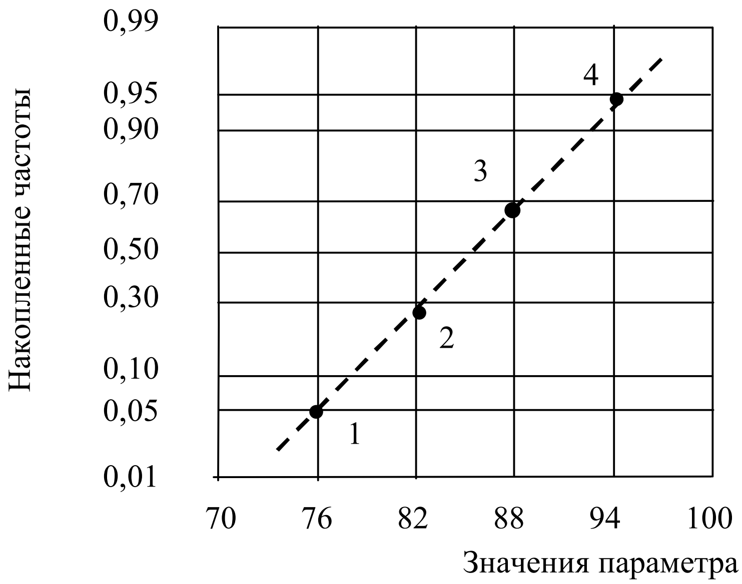


Рис. 2.1. Статистическая функция распределения, построенная на вероятностной сетке нормального закона

Если точки, нанесенные на вероятностную сетку, хорошо ложатся на прямую линию, мысленно проведенную через эти точки, то принимается гипотеза о распределении параметра по закону, вероятностная сетка которого была использована. Из рис. 2.1 видно, что точки неплохо ложатся на прямую линию. Поэтому гипотеза о нормальном законе распределения параметра не противоречит опытным данным.

Пример применения вероятностной сетки для проверки гипотезы о законе распределения параметра подробно рассмотрен в [1, с. 49; 2, с. 18].

На практике пользуются либо готовыми бланками вероятностных сеток, либо эти сетки строят с помощью шаблонов. В прил. 2 приведены шаблоны для построения вероятностных сеток нормального и экспоненциального распределений. Шаблоны используются для построения оси ординат вероятностной сетки, на которой откладывают накопленное значение частот. Для этого на узкой полоске бумаги отмечают точками вертикальный размер (нижнюю и верхнюю границы), который будет иметь вероятностная сетка. Затем её прикладывают к шаблону и, поддерживая параллельность его вертикальным линиям, перемещают полоску влево или вправо до совпадения точек с крайними лучами. После чего на полоске делают отметки, совпадающие с промежуточными лучами, и проставляют цифровые значения. Полученная таким способом шкала используется для нанесения делений на вертикальной оси вероятностной сетки. Если требуемый вертикальный размер вероятностной сетки планируется бо́льшим, нежели размер крайней левой вертикальной линии шаблона, то лучи продлеваются на нужное расстояние влево.

2.2. Задание на экспериментальную часть лабораторной работы

1. С помощью программы ***lab*2** в папке **ММКТРЭС** смоделировать на ЭВМ значения параметра, распределенного по **нормальному** закону ($n \approx 500 \ldots 1000$ наблюдений, если не указано иное). Разбив диапазон наблюдаемых значений на 7…15 интервалов, просмотреть вид гистограммы при различном числе интервалов, выбрать «рабочий» вид гистограммы и получить статистический ряд.

Лучшей из гистограмм, построенных при разном (но сопоставимом) числе интервалов, является та, которая имеет меньше инверсий (кроме равномерного распределения). Инверсией считают смену закономерности изменения высот прямоугольников гистограммы.

2. Пользуясь видом гистограммы или статистическим рядом, аналогичным табл. 2.1, выполнить следующее:

- определить верхние границы интервалов (кроме последнего интервала) и соответствующие этим границам накопленные статистические вероятности (относительные частоты); в результате будут получены координаты точек, наносимых на вероятностную сетку – подобие табл. 2.2;
- используя программу ***lab*2**, нанести точки на вероятностную сетку нормального закона и по расположению точек на сетке принять решение о том, будет ли гипотеза о нормальном законе распределения отвергнута или принята как не противоречащая результатам наблюдений параметра;
- пользуясь ЭВМ, нанести точки на вероятностную сетку экспоненциального закона и по расположению точек на сетке принять решение о том, будет ли гипотеза об экспоненциальном законе распределения отвергнута или принята как не противоречащая результатам наблюдений параметра.

3. С помощью программы ***lab*2** смоделировать на ЭВМ 500…1000 значений параметра, распределенного по **экспоненциальному** закону, и далее **выполнить все действия,** указанные в п. 2.

4. Написать отчёт по лабораторной работе.

Примечание. *Преподавателем может быть дано указание на моделирование параметров, распределённых по законам, отличным от нормального и экспоненциального.*

2.3. Содержание отчета

1. Цель работы.

2. Статистический ряд и гистограмма распределения параметра (приводятся для каждого из исследуемых параметров). В случае моделирования параметров на ЭВМ указывается закон, по которому моделировался параметр.

3. Статистические функции распределения исследуемых параметров, построенные на вероятностной сетке нормального распределения.

4. Статистические функции распределения исследуемых параметров, построенные на вероятностной сетке экспоненциального распределения.

5. Выводы.

Примечание. Вероятностные сетки должны быть построены с помощью шаблонов (см. прил. 2); размер вероятностных сеток должен быть примерно 100 x 100 мм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровиков, С. М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности : учеб. для студ. инж.-техн. спец. вузов / С. М. Боровиков. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.

2. Боровиков, С. М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности. Сборник задач : учеб. пособие для вузов / С. М. Боровиков, А. В. Погребняков. – Минск : БГУИР, 2001. – 124 с.

3. Герчук, Я. П. Графики в математико-статистическом анализе / Я. П. Герчук. – М. : Статистика, 1972. – 77 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ШАБЛОНЫ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ СЕТОК

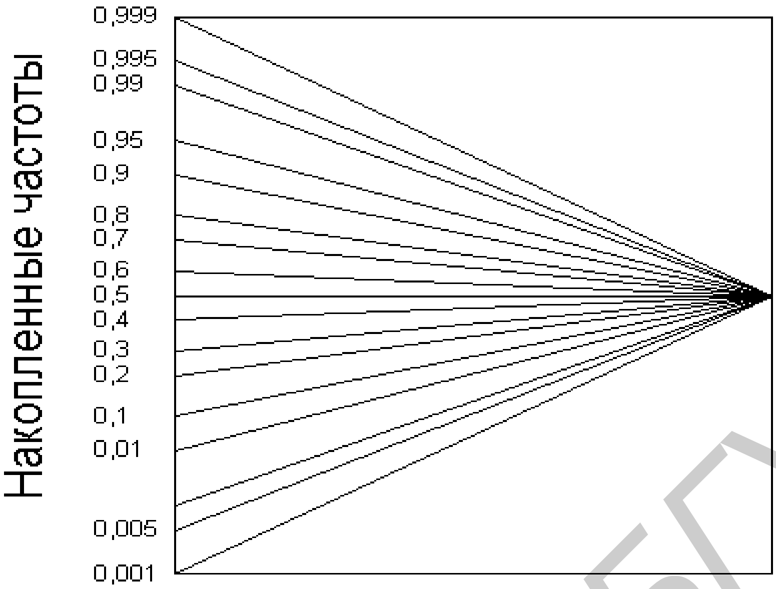


Рис. П.2.1. Шаблон для построения шкалы накопленных частот (функции распределения) вероятностной бумаги нормального распределения (ось абсцисс – равномерная)

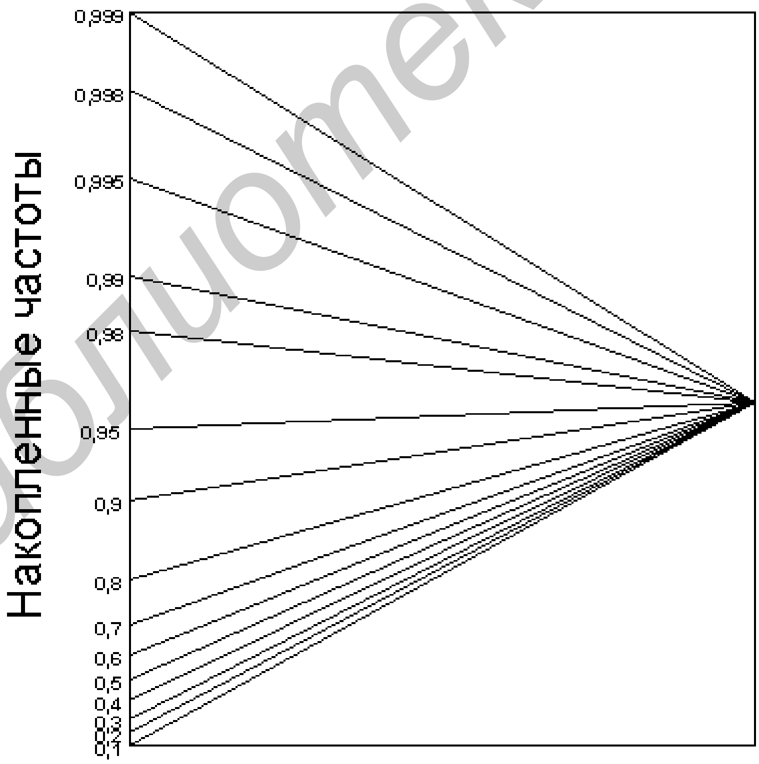


Рис. П.2.2. Шаблон для построения шкалы накопленных частот (функции распределения) вероятностной бумаги экспоненциального распределения (ось абсцисс – равномерная)

3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3
ПОЛУЧЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЭУ МЕТОДОМ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Цель работы: научиться применять математическую теорию планирования эксперимента для получения математических моделей радиоэлектронных устройств (РЭУ) и технологических процессов.

Для достижения цели необходимо:

- изучить основы теории планирования активных факторных экспериментов;
- выполнить планирование полного факторного эксперимента (ПФЭ) применительно к получению математической модели РЭУ в виде полинома;
- используя лабораторный макет, провести опыты с исследуемым РЭУ в соответствии с разработанным планом ПФЭ;
- обработать на ЭВМ результаты опытов и оценить пригодность для практики полученной математической модели.

3.1. Теоретические сведения

При решении многих задач проектирования РЭУ необходимо иметь математическое выражение (модель), связывающее выходной параметр РЭУ с параметрами элементов. В инженерной практике эти модели получают путём проведения эксперимента. Оптимальный путь получения модели указывает математическая теория планирования эксперимента [1, с. 68–86].

Планирование эксперимента – это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых для получения математической модели. В теории планирования эксперимента выходной параметр РЭУ называют откликом, а влияющие параметры (параметры элементов) – факторами.

Для получения математических моделей широко используют активные факторные эксперименты, в которых исследователь активно вмешивается в исследуемый объект (устройство или процесс), устанавливая в опытах нужные ему значения факторов согласно плану эксперимента. В активных факторных экспериментах исследователь варьирует факторами и следит за значением отклика. Термин «варьирование» означает установление исследователем нужных ему в опытах значений факторов.

Теория планирования эксперимента даёт ответ на следующие вопросы:

- по какому плану проводить эксперимент;
- как обрабатывать результаты опытов;
- как оценивать качество опытов и пригодность построенной модели для практики.

Полный факторный эксперимент (ПФЭ)

Пусть для РЭУ или технологического процесса первичные параметры $x_1, x_2, \ldots, x_k$, рассматриваемые как факторы, связаны с выходным параметром y, называемым откликом, зависимостью

$$y = \varphi\,(x_1,\ \ldots,\ x_k), \tag{3.1}$$

где k – общее число учитываемых факторов.

При использовании ПФЭ зависимость (3.1) часто получают в виде неполной квадратичной модели (полинома):

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + \beta_{12} x_1 x_2 + \ldots\ , \tag{3.2}$$

где $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k, \beta_{12}, \ldots$ – коэффициенты полинома;

$x_1, x_2, \ldots, x_k$ – значения факторов в их размерности.

Модель вида (3.2) называют уравнением регрессии, или регрессионной моделью; $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k, \beta_{12}, \ldots$ – коэффициентами регрессионной модели.

Получить полином вида (3.2), в который факторы подставляются в своей размерности (условно – размерный полином), сразу в большинстве случаев не представляется возможным. Поэтому вначале получают полином с кодированными безразмерными значениями факторов. Такой полином условно будем называть безразмерным. Его получают в виде

$$y = b_0 + b_1\hat{x}_1 + b_2\hat{x}_2 + \ldots + b_k\hat{x}_k + b_{12}\hat{x}_1\hat{x}_2 + \ldots\ , \tag{3.3}$$

где $\hat{x}_1,\ \hat{x}_2, \ldots,\ \hat{x}_k$ – кодированные безразмерные значения факторов;

$b_0, b_1, \ldots,\ b_{12}, \ldots$ – коэффициенты, значения которых в общем случае отличны от значений соответствующих коэффициентов модели (3.2).

Кодированные значения факторов определяются отношением

$$\hat{x}_j = \frac{x_j - x_{j\text{о}}}{\lambda_j}\ , \tag{3.4}$$

где x_j – текущее значение j-го фактора в его размерности;

$x_{j\text{о}}$ – значение нулевого уровня j-го фактора в размерности фактора;

λ_j – шаг варьирования j-м фактором в размерности фактора;

j – номер фактора ($j = 1, \ldots, k$).

На практике вначале получают полином вида (3.3), а затем, используя выражения (3.4), делают переход к размерному полиному (3.2), в который факторы подставляются в своей размерности. Отметим, что отклик y как в размерном (3.2), так и в безразмерном (3.3) полиномах выражается в своей размерности.

Для получения модели вида (3.3) или ее линейной части каждый фактор достаточно варьировать в эксперименте на двух уровнях. Уровень j-го фактора, соответствующий его большему значению $x_{j\text{в}}$, называют верхним уровнем, а соответствующий меньшему значению $x_{j\text{н}}$ – нижним. Посередине между верхним $x_{j\text{в}}$ и нижним $x_{j\text{н}}$ уровнями размещен нулевой (иначе – основной или базовый) уровень $x_{j\text{о}}$ (рис. 3.1).

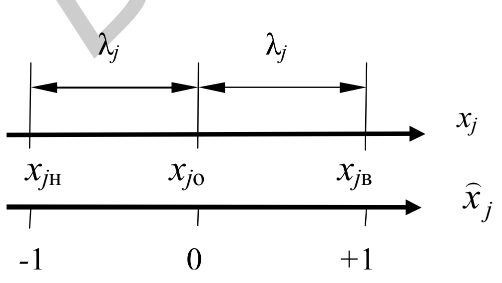


Рис. 3.1. Уровни варьирования фактора x_j

При кодированном задании уровней факторов с использованием выражения (3.4) план эксперимента не зависит от физики процесса.

На практике стремятся уровни варьирования выбрать так, чтобы получить $\hat{x}_j = \pm 1$. Это упрощает эксперимент и обработку его результатов. Значение $\hat{x}_j = -1$ соответствует нижнему уровню, а значение $\hat{x}_j = +1$ – верхнему уровню варьирования. В этом случае число сочетаний уровней факторов или, что то же самое, число опытов N эксперимента определяется выражением

$$N = 2^k. \tag{3.5}$$

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называют полным факторным экспериментом – ПФЭ. При варьировании факторов лишь на двух уровнях (–1 или +1) число опытов ПФЭ составляет 2^k, поэтому такой эксперимент называют экспериментом типа «2^k».

Условия эксперимента представляют в виде таблицы, называемой **матрицей планирования** или **планом эксперимента**. Для простоты записи в матрице символ «1» обычно опускают, оставляя лишь знаки «плюс» или «минус». В табл. 3.1 в качестве примера приведен план ПФЭ типа «2^k» при $k = 2$.

Таблица 3.1

Номер опыта	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$
1	–	–
2	–	+
3	+	–
4	+	+

В матрице (табл. 3.1) $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$ задают планирование, то есть в соответствии со знаками этих столбцов должны устанавливаться значения факторов при проведении опытов.

Важнейшими свойствами матрицы плана ПФЭ являются симметричность, нормировка и ортогональность. Эти свойства описываются соответственно выражениями

$$\sum_{i=1}^{N}(\hat{x}_j)_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{N}\left[(\hat{x}_j)_i\right]^2 = N; \quad \sum_{i=1}^{N}(\hat{x}_j)_i(\hat{x}_l)_i = 0; \quad j, l = 1,\ldots, k;\ j \neq l, \tag{3.6}$$

где j, l – номера факторов; $j, l = 1,\ldots, k$; $j \neq l$;

i – номер опыта; $i = 1, 2,\ldots, N$.

Если хотя бы одно из условий (3.6) не выполняется, это означает, что матрица планирования составлена неверно. Линейная часть модели (3.3) может оказаться непригодной для практики. ПФЭ позволяет количественно оценить взаимодействие (иначе – произведение) факторов.

Из ПФЭ нельзя извлечь информацию о квадратичных членах. Нетрудно убедиться, что вектор-столбцы для квадратичных членов $(\hat{x}_j)^2$ в любом опыте плана (см. табл. 3.1) всегда будут иметь значения +1 и совпадать между собой. Поэтому оценка коэффициента b_0 оказывается смешанной и справедлива запись $b_0 \to \beta_0 + \beta_{11} + \ldots \beta_{kk}$, означающая, что b_0 содержит эффекты, обусловленные как свободным членом β_0, так и квадратичными членами $\beta_{jj} x_j^2$ ($j = 1, \ldots, k$).

Для оценок других коэффициентов справедливы записи

$$b_1 \to \beta_1,\ b_2 \to \beta_2, \ldots, b_k \to \beta_k .$$

Планирование ПФЭ и его выполнение

Планирование ПФЭ с любым числом факторов k сводится к записи в таблицу (матрицу) всех неповторяющихся сочетаний уровней этих факторов. С примером планирования ПФЭ можно ознакомиться в [1, пример 3.3, с. 72 – 73].

Нулевые уровни факторов x_{j0} выбирают обычно равными средним значениям параметров элементов, а шаг варьирования λ_j – равным половине поля допуска соответствующих параметров x_j .

В большинстве практических случаев даже линейная часть модели вида (3.3) оказывается пригодной для дальнейшего инженерного анализа объектов исследования. Если линейная модель (линейная часть модели) оказывается непригодной, то ее дополняют квадратичными членами вида $b_{jl}\hat{x}_j\hat{x}_l(j,l=1,...;\ j\neq l)$. Причем в модель включают наиболее значимые (весомые) эффекты и проверяют пригодность новой модели.

Любой эксперимент сопровождается погрешностями – ошибками воспроизводимости. Для оценки ошибок воспроизводимости каждый i-й опыт матрицы планирования выполняют в конечном итоге несколько раз, организуя серии параллельных опытов. Каждая серия должна включать все N неповторяющихся опытов матрицы планирования. Число серий параллельных опытов n рекомендуется выбирать из условия $n \geq 2…5$. Оценка воспроизводимости опытов по сути сводится к расчету так называемой дисперсии воспроизводимости опытов. Если эта дисперсия известна априорно или каким-либо способом может быть оценена до выполнения эксперимента, то параллельные опыты необязательны.

С целью **исключения систематических ошибок** (влияния оператора, места и т. п.) при реализации плана ПФЭ проводят так называемую рандомизацию опытов, т. е. опыты каждой серии выполняют не по порядку, как они записаны в матрице планирования, а в случайной очерёдности. Рандомизация разбрасывает влияние неслучайных факторов (если они имеют место) по результатам разных опытов. Очерёдность опытов в каждой серии должна определяться по таблицам случайных чисел (табл. П.3.1 прил. 3). Делается это следующим образом. Выбирается произвольный фрагмент (участок) таблицы случайных чисел и последовательно просматриваются строки или столбцы этого участка таблицы с любого места. Очередность проведения опытов назначается в соответствии с появлением чисел при просмотре участка таблицы. Числа, большие по значению, чем номера опытов, пропускаются. Повторяющиеся числа учитываются лишь первый раз, а далее также пропускаются.

Пример. **Для исследования влияния на выходной параметр РЭУ двух факторов (x_1 и x_2) используется ПФЭ типа «2^k» (см. табл. 3.1). Принято решение провести 3 серии параллельных опытов (так как опыты трудоемки). Необходимо рандомизировать опыты каждой серии.**

Решение. **В таблице случайных чисел (см. табл. П.3.1 прил. 3) просмотрим однозначные случайные числа, принимая во внимание значения от 1 до 4 (так как в матрице всего 4 опыта). Просмотр начнем, например, с начала третьей строки таблицы и будем двигаться по строкам. Нетрудно убедиться, что в первой серии опыт под номером 1 в матрице ПФЭ должен выполняться третьим. Аналогичным образом определяют оче-**

рёдность остальных опытов первой серии. Затем переходят к рандомизации опытов второй серии. Для неё просмотр можно начать с иной строки таблицы, например с пятой. Для третьей серии просмотр начат с седьмой строки. Полученная очерёдность опытов каждой серии с учетом рандомизации указана в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Номер опыта	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	Очередность выполнения опытов		
			серия 1	серия 2	серия 3
1	–	–	3	2	1
2	–	+	2	4	2
3	+	–	4	3	4
4	+	+	1	1	3

Выполнение ПФЭ состоит в проведении последовательно опытов каждой серии. В пределах каждой серии опыты выполняются в очерёдности, полученной при рандомизации. Для проведения каждого опыта исследователь должен для всех факторов принудительно установить такие значения в их размерности, которые соответствуют кодированным уровням этих факторов, указанным в матрице планирования для выполняемого опыта. После этого нужно измерить значение отклика и записать результат **в строку с условиями проведения данного опыта.**

Статистическая обработка результатов ПФЭ

Общий вид матрицы планирования и результатов опытов, которыми должен располагать экспериментатор, приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Номер опыта	$\hat{x}_1$	…	$\hat{x}_k$	Значение отклика y_i в параллельных опытах		
				1-я серия	….	n-я серия
1	–		–	$(y_1)_1$		$(y_1)_n$
2	–		+	$(y_2)_1$		$(y_2)_n$
…				…		
N	+		+	$(y_N)_1$		$(y_N)_n$

Последовательность выполнения статистической обработки.

1. Определяются среднее значение и дисперсия отклика в i-м опыте (строке) по формулам

$$M(y_i) = \frac{\sum_{u=1}^{n} (y_i)_u}{n}; \qquad D(y_i) = \frac{\sum_{u=1}^{n} \left[(y_i)_u - M(y_i)\right]^2}{n-1}, \tag{3.7}$$

где $(y_i)_u$ – отклик в i-м опыте (строке) u-й серии; $i = 1, 2, \ldots, N$; $u = 1, 2, \ldots, n$ (см. табл. 3.3);

n – количество параллельных опытов (серий опытов).

2. Выполняется проверка однородности дисперсий вида $D(y_i)$. Для этого определяется расчётное значение критерия Кохрена по формуле

$$G_{\text{расч}} = D(y_i)_{\max} \Big/ \sum_{i=1}^{N} D(y_i). \tag{3.8}$$

Проверяется условие

$$G_{\text{расч}} < G_{\text{кр}}, \tag{3.9}$$

где $G_{кр}$ – критическое (табличное) значения критерия Кохрена, найденное для заданной доверительной вероятности γ (обычно 0,95) при числе степеней свободы $f_1 = n - 1$ и $f_2 = N$ (табл. П.3.2 прил. 3).

Если условие (3.9) выполняется, то дисперсии $D(y_i)$ однородны и статистическая обработка продолжается. Если оно не выполняется, то дисперсии неоднородны. В этом случае требуются дополнительные параллельные опыты или уточнение результатов опытов, для которых $D(y_i)$ имеют наибольшие значения.

3. Определяется дисперсия воспроизводимости опытов (отклика) по выражению

$$D(y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} D(y_i)\,. \tag{3.10}$$

4. Подсчитываются оценки коэффициентов b_0, b_j и b_{jl} по формулам

$$b_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} M(y_i)}{N}; \quad b_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} (\hat{x}_j)_i M(y_i)}{N}; \quad b_{jl} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} (\hat{x}_j)_i (\hat{x}_l)_i M(y_i)}{N}, \tag{3.11}$$

$$j,\, l = 1,\ldots,\, k;\; j \neq l,$$

где $(\hat{x}_j)_i, (\hat{x}_l)_i$ – кодированные значения соответственно j-го и l-го факторов в i-м опыте (строке) матрицы планирования.

5. Выполняется проверка значимости коэффициентов b_0, b_j и b_{jl}. Для этого для каждого коэффициента из числа b_0, b_j и b_{jl} строится доверительный интервал I_γ, соответствующий доверительной вероятности γ (обычно 0,95):

$$I_\gamma = (b_v - \Delta b;\; b_v + \Delta b),$$

где b_v – оценка коэффициентов, рассчитанная по формулам (3.11); $v = 0, j, jl$;

Δb – возможная ошибка, возникшая от замены истинного значения коэффициента его оценкой.

Ошибка Δb полагается одинаковой для всех коэффициентов:

$$\Delta b = t_\gamma \sqrt{\frac{D(y)}{N(n-1)}}, \tag{3.12}$$

где t_γ – табличное значение критерия Стьюдента при доверительной вероятности γ и числе степеней свободы $f = N(n - 1)$, с которым определялась дисперсия $D(y)$, согласно табл. П.3.3 прил. 3.

Коэффициент (его расчетное значение) значим, если доверительный интервал I_γ не содержит точку $b_v = 0$. Это равносильно условию $|b_v| > \Delta b$.

6. Принимая во внимание только значимые коэффициенты, записывается безразмерный полином (модель) вида (3.3), выполняется проверка адекватности этой модели и делается заключение о её пригодности для практики. Для этого вначале подсчитывается дисперсия адекватности по формуле

$$D_{\text{ад}}(y) = \frac{\sum_{i=1}^{N} (\Delta y_i)^2}{N-d} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left[y_{i\,\text{расч}} - M(y_i) \right]^2}{N-d}, \tag{3.13}$$

где Δy_i – разность между рассчитанным по полученной модели и экспериментальным значениями в i-й строке (опыте);

d – число значимых коэффициентов построенной модели;

$y_{i\ \text{расч}}$ – расчётное (по построенной модели) значение отклика в i-й строке (опыте).

Затем определяется расчетное значение критерия Фишера:

$$F_{\text{расч}} = \frac{D_{\text{ад}}(y)}{D(y)}. \tag{3.14}$$

Проверяется условие

$$F_{\text{расч}} < F_{\text{кр}}, \tag{3.15}$$

где $F_{\text{кр}}$ – критическое (табличное) значение критерия Фишера, найденное для заданной доверительной вероятности γ (обычно 0,95) при числе степеней свободы $f_1 = N - d$ и $f_2 = N(n - 1)$, согласно табл. П.3.4 прил. 3.

Если условие (3.15) выполняется, то построенная модель адекватна результатам эксперимента. При невыполнении условия (3.15) модель не адекватна и пользоваться ей на практике нельзя.

7. Осуществляется переход к размерному полиному вида (3.2). Для этого необходимо в построенном полиноме вида (3.3) кодированные значения факторов $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, ..., \widehat{x}_k$ заменить выражениями (3.4) и выполнить необходимые преобразования.

Примечание. Заключение об адекватности модели (3.3), сделанное в п. 6, в равной степени относится и к модели вида (3.2). Поэтому можно вначале от модели (3.3) сделать переход к модели (3.2), а затем проверить её адекватность. От этого вывод об адекватности модели не изменится.

С примером статистической обработки опытов ПФЭ можно ознакомиться в [1, пример 3.5, с. 78 – 80; 2, с. 28 – 30].

3.2. Описание лабораторного макета

Одним из объектов исследования в лабораторной работе является неинвертирующий усилитель переменного напряжения звуковой частоты, выполненный с использованием операционного усилителя (ОУ) серии К140. Электрическая схема усилителя без цепей питания показана на рис. 3.2. Номинальные значения сопротивлений резисторов указаны на передней панели лабораторного макета.

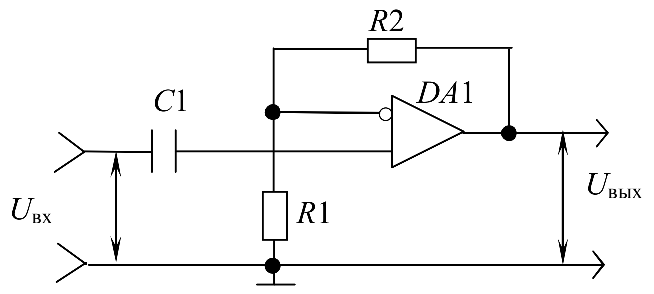


Рис. 3.2. Электрическая принципиальная схема усилителя

Входной сигнал (см. рис. 3.2) подается на неинвертирующий вход ОУ, а часть выходного напряжения через делитель $R1R2$ поступает на его инвертирующий вход. С учётом ряда допущений выражение для коэффициента передачи этого усилителя, приводимое в литературе [3], имеет вид

$$K = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{R1 + R2}{R1}, \qquad (3.16)$$

т. е. коэффициент K в основном зависит от параметров внешних цепей.

Реальный ОУ в действительности обладает достаточно большим, но конечным значением коэффициента усиления и входного сопротивления. Имеют конечные значения либо отличны от нуля и другие параметры ОУ. Поэтому построение математической модели для коэффициента передачи усилителя, выполненного с использованием ОУ, представляет практический интерес. Студентам могут быть предложены лабораторные макеты и с другими РЭУ.

В лабораторном макете предусмотрена возможность изменения параметрами резисторов $R1$ и $R2$, а также значением коэффициента усиления напряжения ОУ в пределах ± 5 % и ± 10 % относительно средних значений. Кроме исследуемой схемы в макете размещены вспомогательные устройства. Для удобства на передней панели макета приведена электрическая схема исследуемого усилителя, а входные и выходные гнезда усилителя установлены в соответствующих цепях схемы.

3.3. Задание на экспериментальную часть лабораторной работы

Рекомендуемая последовательность выполнения работы.

1. Для исследуемого РЭУ уточнить выходную характеристику, рассматриваемую в качестве отклика, и три параметра, рассматриваемые в качестве факторов.

2. По варианту табл. П.3.5 прил. 3 или, руководствуясь указаниям преподавателя, выбрать нулевые уровни и шаг варьирования по каждому фактору.

2. Спланировать ПФЭ типа «2^k» (при $k = 3$).

3. Определиться с числом серий параллельных опытов и выполнить рандомизацию опытов каждой серии.

При выполнении рандомизации следует использовать случайные числа, генерируемые ЭВМ (опция в программе ***lab*3-4**), или в крайнем случае воспользоваться табл. П.3.1 прил. 3.

4. Используя лабораторный макет, выполнить опыты каждой серии ПФЭ с учётом рандомизации.

При проведении эксперимента для РЭУ, описанного выше (см. рис. 3.2), следует руководствоваться структурной схемой, показанной на рис. 3.3. Допускается использование одного вольтметра ЦВ, переключаемого при необходимости с входа на выход устройства ИУ. Электронный осциллограф может отсутствовать. Сигнал, подаваемый на вход усилителя от внешнего генератора, должен иметь амплитуду 50…200 мВ. Частоту сигнала рекомендуется выбирать из диапазона 400…5000 Гц. В некоторых модификациях макета вместо внешнего генератора может использоваться внутренний. При использовании для проведения эксперимента других РЭУ необходимо пользоваться указаниями преподавателя, а также электрической схемой РЭУ, приведённой на передней панели макета.

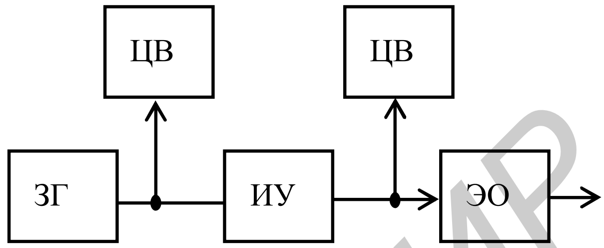


Рис. 3.3. Структурная схема лабораторного комплекса:
ИУ – исследуемое устройство (схема);
ЗГ – звуковой генератор;
ЦВ – цифровой вольтметр;
ЭО – электронный осциллограф

5. С помощью программы для ЭВМ ***lab*3-4** (папка **ММКТРЭС**) выполнить статистическую обработку результатов опытов ПФЭ.

*Если при выполнении статистической обработки дисперсии опытов окажутся **неоднородными**, то это свидетельствует о том, что была **велика погрешность установки уровней факторов либо допущена ошибка при записи результатов опытов**: результаты опытов записаны не в те строки. В таких случаях требуется либо точнее выполнить опыты, имеющие большую дисперсию, либо проверить правильность записи результатов, скорректировать вводимые в ЭВМ результаты опытов и продолжить статистическую обработку. **Рекомендуется** перед вводом результатов опытов сделать их анализ. Значения отклика в разных сериях, но для одного и того же опыта должны отличаться незначительно: максимум на 5…7 %.*

6. Выяснить значимость рассчитанных коэффициентов модели вида (3.3), сформировать конечный вид безразмерного полинома и, используя программу ***lab*3-4**, проверить адекватность построенного полинома результатам опытов.

7. Сделать переход к размерному полиному – модели вида (3.2).

8. Написать отчёт по лабораторной работе.

3.4. Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Электрическая схема исследуемого РЭУ (каскада).
3. Таблица с указанием, какой выходной параметр РЭУ рассматривается в качестве выходного и какому параметру соответствует тот или иной номер фактора, нулевых уровней и интервалов варьирования факторами.
4. План ПФЭ (матрица планирования).

5. Результаты опытов ПФЭ с учётом параллельных опытов и рандомизации опытов каждой серии.

6. Основные формулы алгоритма статистической обработки результатов ПФЭ (приводятся только в случае указания преподавателем).

7. Рассчитанные на ЭВМ значения величин $M(y_i)$, $D(y_i)$ и $D(y)$, ($i = 1, 2,\ldots, N$). Ответы на пп. 4, 5 и 7 дать одной таблицей (табл. 3.4).

Таблица 3.4

Номер опыта	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	Номер серии (параллельные опыты)					$M(y_i)$	$D(y_i)$	$D(y)$
				1-я серия		…	n-я серия				
				Очерёдность опыта	Значение y_i		Очерёдность опыта	Значение y_i			
1	–	–	–			…					
2	–	–	+			…					
…	…	…	…			…					
8	+	+	+			…					

8. Рассчитанные на ЭВМ значения коэффициентов b_j (при необходимости и вида b_{jl}), ошибки Δb и заключение о значимости полученных коэффициентов с указанием значения доверительных интервалов и доверительной вероятности γ ; $j,l = 1,\ldots, k$; $j \neq l$. Ответ на этот пункт дать в виде табл. 3.5.

Таблица 3.5

Коэффициент модели	Оценка	Табличное значение t_γ	Значение Δb	Доверительный интервал при $\gamma = \ldots$	Решение о значимости
b_0 b_1 b_2 b_3 b_{12} …					

9. Математический вид построенного безразмерного полинома и аргументированное заключение об адекватности этой модели.

10. Результаты сопоставления полученного размерного полинома с выражением (3.16). Эти результаты представить в виде табл. 3.6.

Для сопоставления построенной модели с выражением (3.16) необходимо в обоих случаях выполнить расчет значений отклика для всех опытов матрицы ПФЭ, а затем полученные результаты сравнить со значениями, полученными экспериментально, – со значениями $M(y_i)$.

Таблица 3.6

Номер опыта	Экспериментальное значение y_i – значение $M(y_i)$	Расчётное значение y_i	
		по построенной математической модели	по литературной формуле
1 … 8			

11. Выводы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровиков, С. М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности : учеб. для студ. инж.-техн. спец. вузов / С. М. Боровиков. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.

2. Боровиков, С. М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности. Сборник задач : учеб. пособие для вузов / С. М. Боровиков, А. В. Погребняков. – Минск : БГУИР, 2001. – 124 с.

3. Нестеренко, Б. К. Интегральные операционные усилители : справ. пособие по применению / Б. К. Нестеренко. – М. : Энергоиздат, 1982. – 80 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ

Таблица П.3.1

Равномерно распределенные случайные числа

2780	9463	6244	5965	1755	2291	6041	2291	6040	2285
5997	1983	3885	0409	2865	0059	0415	2908	0361	2529
7703	3927	7494	7212	0698	4889	4292	9607	7252	0770
5396	7774	4423	6731	7128	9840	8886	2202	5419	7938
6568	8978	2849	9632	7426	1985	3900	7302	1614	7804
4628	2401	6811	3764	6354	4484	1391	9740	8185	7301
1112	1778	4518	1419	9939	9577	7041	9289	5026	5185
6299	4097	8681	5374	7619	3335	3347	3433	4031	8221
7549	2844	9910	5596	9175	4230	9616	7313	1195	8369
8589	0124	0871	2721	9053	3372	3606	5246	6723	7065
9456	6194	3359	4628	2397	6785	7499	2498	7489	2425
6977	8842	1900	3119	1837	2863	0042	0294	2058	4409
0866	6068	8481	1601	1211	8483	9381	5670	9691	7838
4870	4096	8674	5072	5504	8530	9716	8016	6118	2827
9791	8537	9761	8323	8265	7858	5012	5090	5633	9434
6038	2267	5872	7775	4430	1016	7113	9793	8556	9895

Таблица П.3.2

Значения критерия Кохрена при доверительной вероятности $\gamma = 0,95$

$f_2 = N$	$f_1 = n - 1$							
	1	2	3	4	5	6	7	8
4	0,77	0,68	0,63	0,59	0,56	0,54	0,52	0,50
8	0,52	0,44	0,39	0,36	0,34	0,32	0,30	0,29
12	0,39	0,33	0,29	0,26	0,24	0,23	0,22	0,21
15	0,33	0,28	0,24	0,22	0,20	0,19	0,19	0,17
20	0,27	0,22	0,10	0,17	0,16	0,15	0,14	0,14

Таблица П.3.3

Значения критерия Стьюдента при доверительной вероятности $\gamma = 0,95$

$f = N(n–1)$	t_γ	$f = N(n–1)$	t_γ	$f = N(n–1)$	t_γ	$f = N(n–1)$	t_γ
2	4,30	10	2,23	24	2,06	60	2,00
4	2,77	12	2,18	28	2,05	120	1,98
6	2,45	16	2,12	32	2,04	250	1,97
8	2,31	20	2,09	40	2,02	∞	1,96

Таблица П.3.4

Критические значения критерия Фишера при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$

$f_2 = N(n–1)$	$f_1 = N – d$							
	1	2	3	4	5	6	7	8
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27

Таблица П.3.5

Варианты заданий для выполнения экспериментальной части лабораторной работы №3 (для РЭУ, схема которого приведена на рис. 3.2)

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Delta R1/R1$, %	10	5	10	5	10	5	10	5
$\Delta R2/R2$, %	10	5	5	10	10	10	5	5
$\Delta K_{ОУ}/K_{ОУ}$, %	10	10	10	10	5	5	5	5

Примечание. В табл. П.3.5 знаки ± при относительных отклонениях параметров для простоты записи опущены.

4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4
ПРИМЕНЕНИЕ ДРОБНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЭУ

Цель работы: научиться применять дробный факторный эксперимент (ДФЭ) для получения математических моделей РЭУ.

Для достижения цели необходимо:

- изучить основные положения планирования ДФЭ;
- выполнить планирование ДФЭ применительно к получению линейной модели исследуемого РЭУ;
- используя лабораторный макет, провести опыты в соответствии с разработанным планом ДФЭ;
- обработать на ЭВМ результаты эксперимента и построить математическую модель РЭУ.

4.1. Теоретические сведения

При числе факторов $k \le 5$ оправданы опыты с перебором всех возможных сочетаний уровней факторов, т. е. оправдан полный факторный эксперимент (ПФЭ). В ПФЭ число опытов N (без учета параллельных опытов) равно 2^k.

С увеличением k число опытов N растет очень быстро. Поэтому ПФЭ оправдан при $k \le 5–7$. При исследовании параметров РЭУ число влияющих факторов может быть больше 5–7. Уменьшить число опытов можно за счёт использования избыточности ПФЭ. Число опытов в ПФЭ обычно больше, чем количество значимых (или интересующих исследователя) коэффициентов. Модель объекта в случае рассмотрения неполного квадратичного полинома имеет вид (при $k = 2$)

$$y = b_0 + b_1\hat{x}_1 + ... + b_2\hat{x}_2 + b_{12}\hat{x}_1\hat{x}_2 . \tag{4.1}$$

Матрица ПФЭ для получения этого уравнения приведена в табл. 4.1 (столбцы $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$).

Таблица 4.1

Номер опыта	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_1\hat{x}_2 \to (\hat{x}_3)$
1	–	–	+
2	–	+	–
3	+	–	–
4	+	+	+

Предположим, из априорных сведений известно, что при выбранных шагах варьирования поведение объекта с требуемой точностью описывается линейной моделью. В этом случае в уравнении (4.1) нелинейный член ($b_{12}\hat{x}_1\hat{x}_2$), характеризующий произведение факторов, может не учитываться. Поэтому вектор-столбец $\hat{x}_1\hat{x}_2$ может быть использован для введения в план ПФЭ какого-либо нового фактора, не увеличивая числа опытов, например, фактора $\hat{x}_3$, записанного в последнем столбце матрицы (см. табл. 4.1). Нетрудно установить, что эта матрица (три фактора, четыре опыта) является половиной более крупного плана ПФЭ, а именно, плана ПФЭ типа «2^3», имеющего восемь опытов.

Таким образом, для оценки влияния трёх факторов можно воспользоваться половиной ПФЭ типа «2^3» или, как говорят, 1/2 реплики от ПФЭ типа «2^3».

Если исходной является матрица ПФЭ типа «2^3» и за счёт малозначимых взаимодействий факторов, построенных из $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ и $\hat{x}_3$, вводится дополнительно три новых фактора, например, $\hat{x}_4$, $\hat{x}_5$ и $\hat{x}_6$, то полученный новый план будет представлять 1/8 часть ПФЭ типа «2^6» (так как в новом плане всего шесть факторов). Какую именно восьмую часть представляет этот план, зависит от знаков столбцов $\hat{x}_4$, $\hat{x}_5$ и $\hat{x}_6$, определяемых знаками произведений, вместо которых будут введены новые факторы $\hat{x}_4$, $\hat{x}_5$ и $\hat{x}_6$. При большом числе факторов могут использоваться реплики более высокой дробности: 1/16, 1/32 и т. д.

Эксперимент, который реализует часть опытов ПФЭ, называют дробным факторным экспериментом (ДФЭ). ДФЭ (дробные реплики) принято обозначать как «2^{k-p}», где k – общее число факторов нового плана – плана ДФЭ, а p – число факторов, введенных в план ДФЭ вместо малозначимых произведений. Так, например, ДФЭ, план которого приведён в табл. 4.1, запишется в виде «2^{3-1}». Для определения числа опытов ДФЭ надо число 2 возвести в степень $k-p$.

Планирование ДФЭ

Для построения плана ДФЭ используют исходный план, в качестве которого выбирают план ПФЭ. При планировании ДФЭ обычно возникает вопрос: какой план ПФЭ (следовательно, и число факторов) следует выбрать в качестве исходного.

На практике вначале обычно получают линейные модели объектов исследования. Из математической статистики известно, что число опытов матрицы, необходимое для оценки коэффициентов линейной модели при k факторах, должно быть не менее чем $k + 1$ (коэффициенты при переменных $\hat{x}_j$ и свободный член b_0). Кроме того, дополнительно хотя бы один опыт (говорят «одну степень свободы») необходимо иметь для проверки адекватности линейной модели. Поэтому минимальное число опытов ДФЭ, необходимое для получения линейной модели и проверки её адекватности, должно быть не менее чем $k + 2$. Определив значение величины $k + 2$, необходимо из ряда чисел 8, 16, 32, … выбрать ближайшее большее. Оно укажет минимальное число опытов плана ПФЭ, который должен быть выбран в качестве исходного плана, и, следовательно, число опытов плана ДФЭ. Количество исходных факторов определяется в зависимости от числа опытов исходного плана. Так, при восьми опытах оно составляет три, при 16 опытах – четыре и т.д.

Обобщение описанной процедуры получения плана ДФЭ на матрицы любых размерностей позволяет сформулировать следующее правило: **чтобы ввести в исходный план** (план ПФЭ) **новый фактор, не увеличивая число опытов, этому фактору необходимо присвоить вектор-столбец такого произведения, построенного из исходных факторов, влиянием которого можно пренебречь. Значение нового фактора, введенного в исходный план, должно изменяться в соответствии со знаками этого столбца** [1].

Правильно построенный план ДФЭ точно так же, как и план ПФЭ, должен обладать свойствами симметричности, нормировки и ортогональности (см. выражения (3.6), с. 21). Взаимодействие (построенное из исходных факторов), вместо которого в план вводится новый фактор, принято называть **генерирующим соотношением**. В рассмотренном примере (см. табл. 4.1) генерирующим соотношением является $\hat{x}_1\hat{x}_2$. Если исходные факторы образуют несколько произведений, то имеется несколько генерирующих соотношений и в исходный план ПФЭ могут быть введены несколько новых факторов.

Оценки коэффициентов в ДФЭ оказываются смешанными, ибо знаки некоторых вектор-столбцов могут совпасть между собой (если построить вектор-столбцы для возможных произведений факторов).

Характер смешивания оценок коэффициентов можно быстро определить, не обращаясь к матрице планирования эксперимента, а используя для этой цели так называемый **определяющий контраст**. Определяющий контраст получают умножением генерирующего соотношения на фактор, который вводят в план вместо малозначимого произведения факторов. Для ДФЭ типа «2^{3-1}» (см. табл. 4.1) определяющий контраст запишется как $(\hat{x}_1\hat{x}_2)\hat{x}_3 = \hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$. Для оценки характера смешивания коэффициентов математической модели рассматривают последовательно произведения определяющего контраста на все факторы, участвующие в эксперименте. Например, для коэффициентов b_1 получим $(\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3)\hat{x}_1 = \hat{x}_2\hat{x}_3$, т. е. оценка b_1 будет такой: $b_1 \to \beta_1 + \beta_{23}$.

При планировании ДФЭ важным является вопрос: какие из произведений следует выбрать для введения вместо них новых факторов. Если информация о силе влияния эффектов произведения факторов отсутствует, то при введении в исходный план нового фактора выбирают для него вектор-столбец с большим порядком произведения, так как обычно эффекты произведений более высоких порядков менее значимы, чем эффекты произведений низших порядков. Если же имеется информация об эффектах произведений, то она должна быть использована при выборе генерирующих соотношений.

Пример. Необходимо построить план ДФЭ для исследования влияния на выходной параметр y РЭУ пяти факторов. Информация о силе эффектов произведения факторов отсутствует.

Решение. Строим план ДФЭ применительно к получению линейной модели. Определим минимальное число опытов исходного плана ПФЭ. Так как $k + 2 = 7$, то минимальное число опытов исходного ПФЭ, а следовательно, и разрабатываемого плана ДФЭ должно быть выбрано равным восьми. В качестве исходного должен быть выбран план ПФЭ типа «2^3». Легко установить, что количество исходных факторов равно трём.

Информация о силе влияния факторов на выходной параметр РЭУ не приводится, поэтому в качестве исходных выбираем любые три фактора и строим ПФЭ типа «2^3» (табл. 4.2, столбцы $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$). Для получения из исходного плана ПФЭ плана требуемого ДФЭ нужно в исходный план ПФЭ ввести факторы $\hat{x}_4$ и $\hat{x}_5$. Причём они должны быть введены вместо малозначимых произведений, построенных только из исходных факторов $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$. Так как информация о силе эффектов произведения факторов отсутствует, то фактор $\hat{x}_4$ лучше всего ввести вместо произведения высшего порядка в исходном плане ПФЭ, т. е. вместо произведения $\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$. Для фактора $\hat{x}_5$ используем одно из «двойных« произведений $\hat{x}_1\hat{x}_2$, $\hat{x}_1\hat{x}_3$ или $\hat{x}_2\hat{x}_3$, например $\hat{x}_1\hat{x}_2$. Знаки столбцов $\hat{x}_4$ и $\hat{x}_5$ (см. табл. 4.2) необходимо проставить с учётом выбранных произведений. Легко убедиться, что построенный план ДФЭ представляет собой 1/4 часть плана ПФЭ типа «2^5». Примеры планирования ДФЭ рассмотрены подробно в [1, с. 84 – 85; 2, с. 30 – 31].

Таблица 4.2

Номер опыта	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3 \to \hat{x}_4$	$\hat{x}_1\hat{x}_2 \to \hat{x}_5$
1	−	−	−	−	+
2	−	−	+	+	+
3	−	+	−	+	−
4	−	+	+	−	−
5	+	−	−	+	−
6	+	−	+	−	−
7	+	+	−	−	+
8	+	+	+	+	+

Если линейная модель, построенная по результатам опытов ДФЭ, окажется неадекватной, то в ряде случаев имеется возможность ввести в модель наиболее влияющие произведения факторов и проверить адекватность новой модели. Но надо быть осторожным, чтобы не ввести в модель дважды по сути один и тот же коэффициент. Для этого следует проанализировать характер смешивания коэффициентов.

Для оценки ошибки воспроизводимости опытов в ДФЭ так же, как и в ПФЭ, выполняют серии параллельных опытов, а для исключения систематических ошибок (влияния оператора, места, и т.п.) проводят рандомизацию опытов (см. лаб. работу №3).

При решении практических задач матрицы планирования ДФЭ могут быть получены для числа факторов $k \geq 4$. Как было показано, исходный план ПФЭ, используемый для получения плана ДФЭ, должен иметь не менее чем $k + 2$ опытов. Для трёх факторов в качестве исходного должен быть принят план, имеющий восемь опытов, который представляет собой ПФЭ типа «2^3», т. е. все факторы вошли в исходный план и получение плана ДФЭ теряет смысл.

Исходный план из четырех опытов (ПФЭ типа «2^2») использовался выше лишь для объяснения сущности ДФЭ.

Статистическая обработка результатов ДФЭ

Статистическая обработка результатов ДФЭ выполняется аналогично обработке результатов ПФЭ (см. лаб. работу №3).

При построении математической модели следует иметь в виду, что максимальное число коэффициентов, включаемых в модель, должно быть не более чем $N - 1$, где N – число опытов (строк) матрицы ДФЭ.

4.2. Описание лабораторного макета

Объектом исследования в лабораторной работе является неинвертирующий источник высокостабильного (опорного) напряжения, выполненный с использованием операционного усилителя серии 140 (К140). Электрическая схема источника приведена на рис. 4.1. Номинальные значения параметров элементов, тип стабилитрона и напряжение питания указаны на передней панели лабораторного макета.

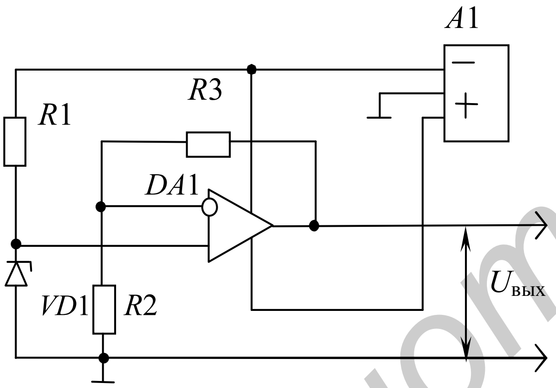


Рис. 4.1. Электрическая схема источника опорного напряжения

С учётом ряда допущений в отношении параметров ОУ выражение для выходного напряжения источника опорного напряжения (отклика y), приводимое в литературе [2], имеет вид

$$y \to U_{\text{вых}} = U_{\text{ст}} \frac{R2 + R3}{R2} = U_{\text{ст}} K, \tag{4.2}$$

где $U_{\text{ст}}$ – напряжение стабилизации стабилитрона;

K – коэффициент передачи неинвертирующего усилителя.

Из формулы (4.2) видно, что выходное напряжение $U_{\text{вых}}$ зависит от значений параметров элементов $R2$ и $R3$. Производственный разброс сопротивлений резисторов $R2$ и $R3$ может заметно сказаться на значении коэффициента передачи K и, следовательно, выходного напряжения $U_{\text{вых}}$. Кроме того, значение параметра $U_{\text{ст}}$, определяемое типом стабилитрона, всегда имеет некоторый разброс и зависит от тока стабилизации $I_{\text{ст}}$. Ток $I_{\text{ст}}$ в свою очередь определяется напряжением источника питания $A1$ и значением сопротивления резистора $R1$, которые также могут иметь отклонения от номинальных значений. Поэтому построение математической модели для выходного напряжения источника опорного напряжения представляет практический интерес.

В макете предусмотрена возможность изменения в пределах до ± 10 % значениями пяти факторов: сопротивлениями резисторов $R1…R3$, напряжением стабилизации элемента $VD1$ и напряжением источника питания $A1$. Для наглядности и удобства выполнения лабораторной работы на передней панели макета в соответствующих цепях схемы установлены входные и выходные гнезда.

4.3. Задание на экспериментальную часть лабораторной работы

Рекомендуемая последовательность выполнения работы.

1. Для исследуемого РЭУ согласно схеме макета и варианту, указанному преподавателем (приложение), выбрать нулевые уровни и интервалы варьирования факторами. В качестве отклика y рассматривать $U_{вых}$, в качестве факторов – параметры $R1$ – $R3$, $U_{ст}$, напряжение питания источника $A1$.
2. Спланировать ДФЭ типа «2^{k-p}» при $k = 5$.
3. Определиться с числом серий параллельных опытов и выполнить рандомизацию опытов каждой серии.

*При выполнении рандомизации следует использовать случайные числа, генерируемые ЭВМ (опция в программе **lab3-4**), или в крайнем случае воспользоваться табл. П.3.1 прил. 3 лаб. работы №3.*

4. Используя лабораторный макет, выполнить опыты каждой серии ДФЭ с учётом рандомизации.
5. С помощью учебной программы для ЭВМ ***lab*3-4** (папка **ММКТРЭС**) выполнить статистическую обработку результатов опытов ДФЭ.
6. Используя результаты статистической обработки, сформировать линейную модель вида

$$y = b_0 + b_1\hat{x}_1 + b_2\hat{x}_2 + ... + b_5\hat{x}_5. \qquad (4.3)$$

Выяснить статистическую значимость рассчитанных коэффициентов модели (4.3), сформировать конечный вид безразмерного полинома и с помощью программы для ЭВМ ***lab*3-4** проверить адекватность построенной модели результатам опытов.

7. Сделать переход к размерному полиному – модели, в которую значения x_j подставляются в своей размерности.
8. Проанализировать построенную модель и выполнить её сопоставление с выражением (4.2).

Для сопоставления построенной модели с выражением (4.2) необходимо для каждого опыта матрицы планирования рассчитать значения выходного напряжения $U_{вых}$ по построенной модели и по выражению (4.2), а затем сравнить полученные два результата с экспериментальным значением (средним значением y в данном опыте).

9. Написать отчёт по лабораторной работе.

4.4. Содержание отчета

1. Цель работы.

2. Электрическая схема исследуемого РЭУ (функционального узла).

3. Таблица с указанием выходного параметра РЭУ, рассматриваемого в качестве отклика, и соответствия факторов конкретным номерам, нулевых уровней и размахов варьирования факторами.

4. План ДФЭ (матрица планирования).

5. Результаты опытов ДФЭ.

6. Рассчитанные значения величин $M(y_i)$, $D(y_i)$ и $D(y)$, ($i = 1, 2,\ldots, N$).

Ответы на пп. 4, 5 и 6 дать в виде таблицы, аналогичной табл. 3.4 лаб. работы №3 (см. с. 28).

7. Рассчитанные на ЭВМ значения коэффициентов b_j (при необходимости и вида b_{jl}), ошибки Δb и заключение о статистической значимости полученных коэффициентов с указанием значения доверительных интервалов и доверительной вероятности γ ; $j = 1, \ldots, k$; $j \neq l$. Ответ на этот пункт дать в виде таблицы, аналогичной табл. 3.5 лаб. работы №3 (см. с. 27).

8. Математический вид линейного безразмерного полинома (4.3) и аргументированное заключение об адекватности этой модели.

9. Математический вид линейного размерного полинома (4.1).

10. Результаты сопоставления полученной в п. 8 математической модели с выражением (4.2), представленные в виде таблицы, аналогичной табл. 3.6 лаб. работы № 3 (см. с. 29).

11. Выводы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровиков, С. М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности : учеб. для студ. инж.-техн. спец. вузов / С. М. Боровиков. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.

2. Нестеренко, Б. К. Интегральные операционные усилители : справ. пособие по применению / Б. К. Нестеренко. – М. : Энергоиздат, 1982. – 80 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица П.4.1

Номер варианта	$\Delta R1/R1$, %	$\Delta R2/R2$, %	$\Delta R3/R3$, %	$\Delta U_{ст}/U_{ст}$, %	$\Delta U_{пит}/U_{пит}$, %
1	10	10	10	10	10
2	5	5	5	5	5
3	10	10	10	5	10
4	10	10	5	10	10
5	10	5	10	10	10
6	5	10	10	10	10
7	10	10	10	5	5

Примечание. Знаки ± при относительных отклонениях параметров для простоты записи опущены.

5. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5
ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИРОВАНИЕМ НА ЭВМ ПРОЦЕССА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Цель работы: определить основные характеристики системы массового обслуживания (СМО) смешанного типа с ограничением длины очереди моделированием на ЭВМ процесса её функционирования.

Исследование выполняется на примере работы участка регулировки и (или) участка ремонта функциональных узлов РЭУ.

5.1. Теоретические сведения

В технологии РЭУ протекание многих процессов можно рассматривать как функционирование СМО. Каждая СМО состоит из некоторого числа каналов обслуживания, в качестве которых могут выступать рабочие места, участки, технологическое оборудование и т. п. В качестве заявок могут быть функциональные узлы, сошедшие с конвейера и поступающие на участок регулировки, или неисправные ФУ, поступающие на участок ремонта, отказавшее технологическое оборудование и т. п.

Функционирование любой СМО состоит в обслуживании поступающих на её каналы заявок. Заявки поступают одна за другой через некоторые, в общем случае случайные, интервалы времени. После того как заявка обслужена, канал СМО освобождается и готов принять следующую заявку.

Основные характеристики СМО, используемые на практике:

- пропускная способность. Различают относительную и абсолютную пропускные способности. Относительная пропускная способность показывает, каков процент заявок будет обслужен системой, абсолютная – какое количество заявок будет обслужено в единицу времени;
- вероятность необслуживания заявки или средний процент заявок, получивших отказ в обслуживании;
- вероятность простоя – средняя доля времени, в течение которого СМО будет простаивать (будут простаивать сразу все каналы).

Указанные характеристики зависят как от особенностей СМО, так и от характера поступления заявок. В технологии РЭУ моменты поступления заявок часто случайны, например поступление функциональных узлов РЭУ на ремонт с участка регулировки. Обычно случайно и время обслуживания заявки. Поэтому в системе могут образовываться местные «скопления» и «разряжения» заявок. Это может приводить либо к отказам в обслуживании заявок и образованию очередей, либо к простою СМО. В зависимости от того, как поступают с заявкой, если все каналы СМО оказались занятыми, различают:

- СМО с отказом (в обслуживании заявки);
- СМО с ожиданием.

В СМО с отказом заявка, заставшая все каналы занятыми, немедленно покидает СМО (изделие убирается с участка и, например, складируется).

В СМО с ожиданием заявка, заставшая все каналы занятыми, не покидает систему, а ставится в очередь и при освобождении одного из каналов обслуживается. На процесс ожидания заявок в очереди могут не накладываться или накладываются определенные ограничения.

Если на процесс ожидания заявок в очереди не наложено никаких ограничений, то СМО называют «чистой системой с ожиданием». Если на процесс ожидания заявок в очереди наложено какое-то ограничение (одно или несколько), то СМО называют «системой смешанного типа». Это название объясняется следующим. С одной стороны, указанная система является СМО с ожиданием, но с другой стороны, из-за наличия ограничений на процесс ожидания заявок в очереди возможны случаи отказа в обслуживании заявок, т. е. такая система проявляет также признаки СМО с отказом (рис. 5.1).

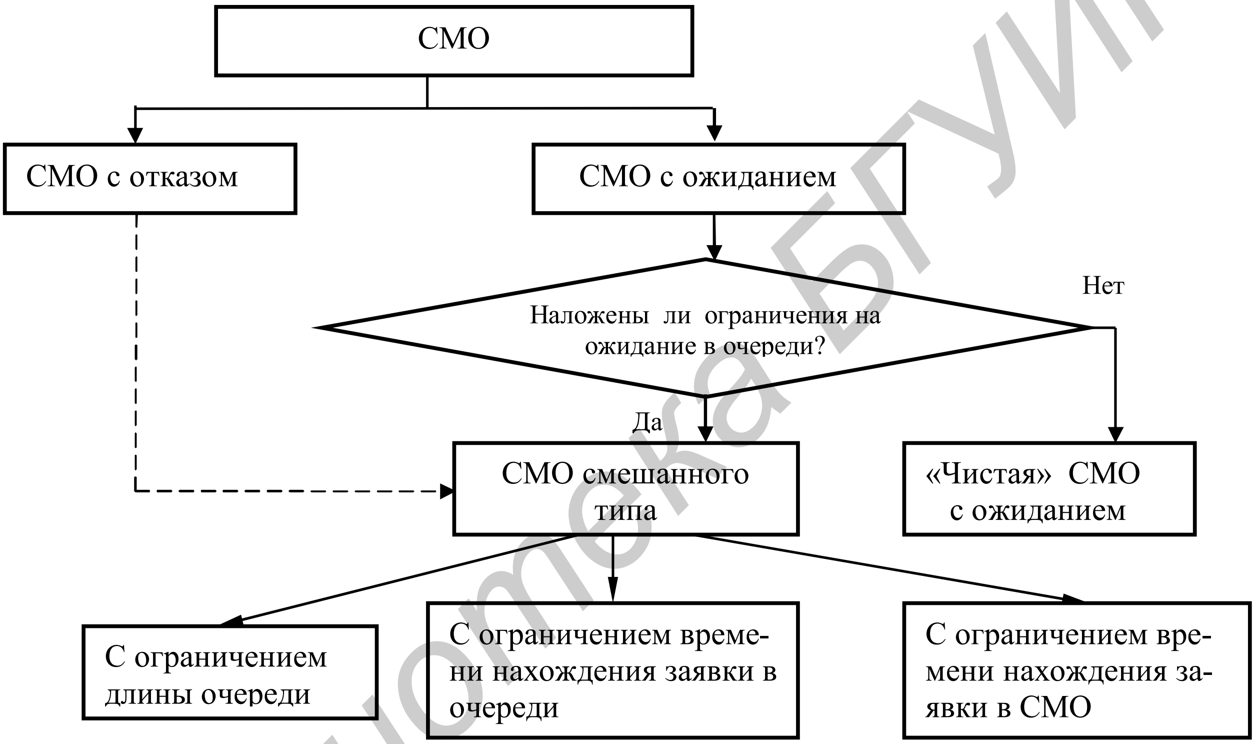


Рис. 5.1. Виды СМО в технологии РЭУ

В зависимости от характера ограничений основными видами СМО смешанного типа являются:

- СМО с ограничением длины очереди;
- СМО с ограничением времени ожидания заявки в очереди;
- СМО с ограничением времени пребывания заявки в системе.

Чтобы дать рекомендации по выбору числа каналов обслуживания, необходимо выяснить, как повлияет число каналов на основные характеристики СМО. Существенное влияние на функционирование и характеристики СМО оказывает характер **потока поступающих заявок.**

Под **потоком заявок** (событий) понимают последовательность заявок, следующих одна за другой в какие-то моменты времени.

В теории массового обслуживания особую роль играет **простейший** (пуассоновский) поток заявок. Для таких потоков число заявок, приходящихся на любой фиксированный интервал времени τ (рис. 5.2), распределено по закону Пуассона для дискретных случайных величин.

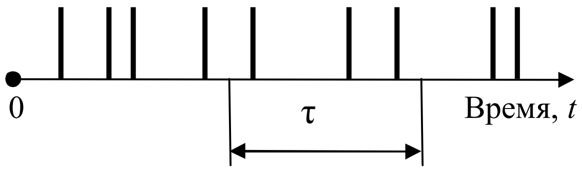


Рис. 5.2. Поток поступающих заявок

Вероятность того, что на интервале времени τ появится ровно m заявок, равна

$$P(m/\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}, \qquad (5.1)$$

где λ – плотность потока заявок, которая представляет собой среднее число заявок, приходящихся на единицу времени.

Важной характеристикой потока заявок является закон распределения промежутка времени t между приходом двух соседних заявок.

Простейший поток заявок обладает тремя следующими свойствами:

- стационарностью; это означает, что вероятностные характеристики потока не зависят от рассматриваемого временного участка; для стационарного потока характерна постоянная плотность – среднее число заявок в единицу времени;
- отсутствием последействия; это означает, что заявки в СМО поступают независимо друг от друга;
- ординарностью, что означает приход заявок в СМО поодиночке, а не парами, тройками и т.д.

В теории вероятностей доказывается, что для простейшего потока время t между поступлениями соседних заявок описывается экспоненциальным законом. Плотность распределения $w(t)$ в этом случае

$$w(t)=\lambda e^{-\lambda t}; \; t > 0, \qquad (5.2)$$

где λ – параметр распределения, численно равный плотности потока заявок.

Простейший поток заявок, описываемый выражением (5.2), играет в теории массового обслуживания особую роль. Во-первых, простейшие и близкие к нему потоки заявок часто встречаются на практике. Во-вторых, можно получить удовлетворительные по достоверности результаты, заменив любой поток заявок простейшим.

Математическое описание СМО смешанного типа с ограничением длины очереди

Пусть имеется n-канальная СМО с ожиданием, для которой число заявок, стоящих в очереди, ограничено значением m. Эта СМО имеет конечное число состояний. Обозначим буквой x состояния СМО и перечислим их (табл. 5.1).

Если число заявок в очереди достигнет значения m, то следующая заявка в очередь не ставится, а покидает систему необслуженной.

Будем предполагать, что поток заявок, поступающих в рассматриваемую систему, является простейшим с плотностью λ, а время обслуживания заявок распределено по экспоненциальному закону с параметром

$$\mu = \frac{1}{M\left(T_{\text{об}}\right)},$$

где $M(T_{\text{об}})$ – среднее значение (математическое ожидание) времени обслуживания заявки.

Таблица 5.1

Обозначение	Суть состояния СМО
x_0	Все каналы свободны, очереди нет
x_1	Занят один канал, очереди нет
…	…………………………..
x_k	Занято k каналов, очереди нет
…	…………………………..
x_n	Заняты все n каналов, очереди нет
x_{n+1}	Заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди
….	…………………………..
x_{n+m}	Заняты все n каналов, m заявок стоят в очереди

Если будут найдены вероятности состояний, то тем самым будут определены важнейшие характеристики СМО.

Для вероятностей состояний рассматриваемой СМО могут быть составлены дифференциальные уравнения Эрланга. Решение этих уравнений позволяет получить формулы для расчёта вероятностей состояний СМО для установившегося режима функционирования, который наступает всегда при времени функционирования $t \to \infty$ [1]:

$$p\left(x_k\right) = p_k = \frac{\dfrac{\alpha^k}{k!}}{\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\alpha^i}{i!} + \dfrac{\alpha^n}{n!} \sum\limits_{j=1}^{m} \left(\dfrac{\alpha}{\text{n}}\right)^j}; \; 0 \le k \le n; \tag{5.3}$$

$$p\left(x_{n+s}\right) = p_{n+s} = \frac{\dfrac{\alpha^n}{n!}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s}{\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\alpha^i}{i!} + \dfrac{\alpha^n}{n!} \sum\limits_{j=1}^{m} \left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^j}; \; 1 \le s \le m, \tag{5.4}$$

где α – приведённая плотность заявок, иначе – коэффициент загрузки канала.

Величина α определяется как

$$\alpha = \lambda \cdot M\left(T_{\text{об}}\right). \tag{5.5}$$

Формулы (5.3) и (5.4) называются формулами Эрланга.

Приняв в формуле (5.4) $s = m$, получим вероятность того, что заявка получит отказ в обслуживании:

$$P_{\text{необ}} = p_{n+m}. \tag{5.6}$$

Относительная пропускная способность определяется как

$$q = 1 - P_{\text{необ}}. \tag{5.7}$$

Принимая в формуле (5.3) $k = 0$, получим вероятность того, что СМО будет простаивать (p_0).

Формулы Эрланга получены для случая экспоненциального распределения времени обслуживания. Согласно [2] эти формулы остаются справедливыми при любом законе распределения времени обслуживания, лишь бы поток заявок был простейшим.

5.2. Описание исследуемых СМО

В лабораторной работе исследуются СМО смешанного типа с ограничением длины очереди. В качестве таких систем рассматриваются:

а) участок регулировки функциональных узлов РЭС (ФУ РЭС);

б) участок ремонта ФУ РЭС.

Для участка регулировки ФУ РЭС входным потоком (потоком заявок) являются функциональные узлы, поступающие со сборочного конвейера. В производственных условиях стремятся к ритмичности производства, поэтому интервал времени между поступлением соседних заявок является практически постоянным. В этом случае время между приходом двух соседних заявок практически является константой на любом рассматриваемом временном интервале функционирования СМО. При исследовании такой системы приходится заменять входной поток простейшим потоком.

Время регулировки ФУ РЭС является случайным. Законы его распределения могут быть разными. Наиболее характерен, вероятно, нормальный закон.

Для участка ремонта потоком заявок являются неисправные ФУ РЭС, поступающие с участка регулировки. Поток заявок образуется из ФУ, регулировка которых не выполнялась из-за наличия в ФУ неисправностей (дефектов), внесенных сборочными операциями. Поток поступающих заявок в этом случае близок к простейшему и может рассматриваться как простейший.

Ясно, что время ремонта ФУ случайно и во многом определяется опытом и квалификацией работника. Закон распределения времени ремонта может быть как близок к нормальному, так и заметно отличаться от него (экспоненциальный, равномерный).

Моделирование СМО на ЭВМ

Программа моделирования СМО написана таким образом, что на экране дисплея ЭВМ обеспечивается наглядность функционирования СМО. Достигается это путём графического отображения на экране дисплея рабочих мест (каналов обслуживания) рассматриваемого участка, линейки для постановки заявок в очередь. Сами заявки (ФУ) отображаются на экране светящимися цифрами. Эти цифры одновременно указывают номер ФУ, поступающего в СМО. По номеру заявки можно проследить путь прохождения ФУ в системе.

Моделирование процесса функционирования СМО основано на последовательном просмотре времени поступления заявки и времени её обслуживания. Численные значения времени определяют ритмичность поступления заявок и продолжительность их нахождения в СМО.

Значения времени поступления заявки и времени её обслуживания определяются с помощью генераторов случайных чисел (встроенных функций, под-программ) в соответствии с законом распределения времени. В табл. 5.2 указано, какие законы распределения реализованы в программе моделирования СМО и какие параметры являются исходными данными для указанных законов.

Таблица 5.2

Назначение СМО		Регулировка ФУ РЭС		Ремонт ФУ РЭС	
Вариант СМО		1	2	3	4
Время поступления заявок в СМО	Закон распределения	t = const	t = const	Экспоненциальный	Экспоненциальный
	Параметры	t = 9 мин	t = 5 мин	λ = 0,4 мин$^{-1}$	λ = 0,4 мин$^{-1}$
Время обслуживания заявок	Закон распределения	Экспоненциальный	Нормальный	Экспоненциальный	Нормальный
	Параметры	$\mu = 1/M(T_{об})$ = = 0,1 мин$^{-1}$	$M(T_{об})$ = 4 мин; $\sigma(T_{об})$ = 1 мин	$\mu = 1/M(T_{об})$ = = 0,2 мин$^{-1}$	$M(T_{об})$ = 4 мин; $\sigma(T_{об})$ = 1 мин

Пояснение параметров, приведённых в табл. 5.2:

λ – плотность поступления заявок;

t – время между приходом двух соседних заявок;

μ – плотность потока обслуженных заявок (аналог параметра λ, используемого при описании потока поступающих заявок);

$M(T_{об})$, $\sigma(T_{об})$ – среднее время обслуживания одной заявки и среднее квадратическое отклонение времени обслуживания заявок.

Моделирование процесса функционирования СМО смешанного типа с ограничением длины очереди можно осмыслить с помощью диаграммы поступления и обслуживания заявок при n = 2 (рис. 5.3).

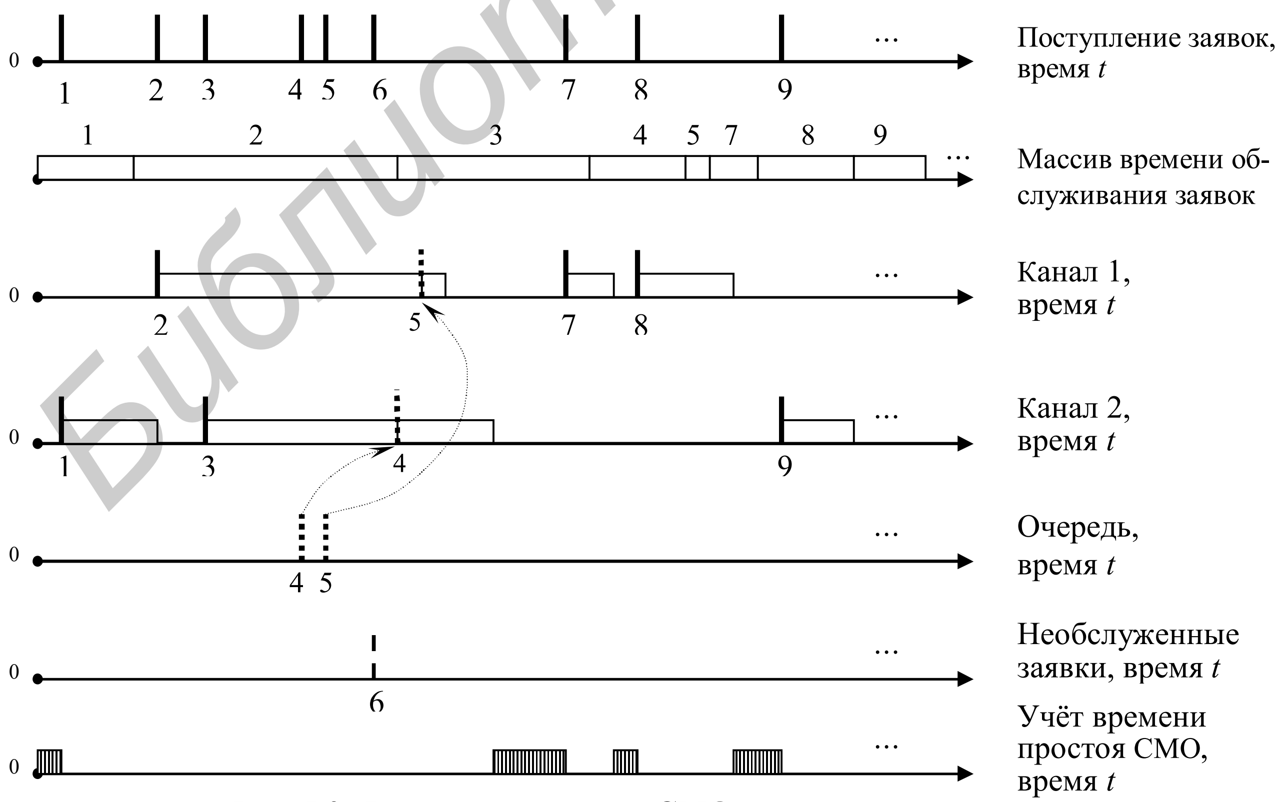


Рис. 5.3. Функционирование СМО смешанного типа с ограничением длины очереди числом m = 2 в случае двух каналов

Основные характеристики СМО определяют по результатам моделирования. Вероятность простоя СМО определяется как

$$p_0 = t_{\text{пр}} / t_{\text{смо}} , \tag{5.8}$$

где $t_{\text{пр}}$ – время простоя СМО;

$t_{\text{смо}}$ – рассматриваемый интервал времени функционирования СМО.

Вероятность того, что заявка не будет обслужена СМО, можно получить по выражению

$$P_{\text{необ}} = N_{\text{необ}} / N_{\text{смо}} , \tag{5.9}$$

где $N_{\text{необ}}$ – количество ФУ (заявок), получивших отказ в обслуживании;

$N_{\text{смо}}$ – общее количество ФУ (заявок), прошедших через СМО.

5.3. Задание на экспериментальную часть лабораторной работы

В экспериментальной части лабораторной работы необходимо:

1. Ознакомиться с вариантами исходных данных для моделирования исследуемых СМО (см. табл. 5.2). Значение длины очереди m уточнить у преподавателя.

2. Используя исходные данные варианта 1 (см. табл. 5.2), запустить на ЭВМ программу моделирования СМО, приняв число каналов (рабочих мест) n = 1. Имя программы ***lab5*** в папке **ММКТРЭС.** Наблюдая на дисплее ЭВМ процесс функционирования СМО, получить исходные данные, необходимые для определения, по формулам (5.8) и (5.9) характеристик исследуемой СМО. Используя выражения (5.8), (5.9) и (5.7), определить характеристики p_0, $P_{\text{необ}}$ и q.

3. Повторяя моделирование СМО на ЭВМ, получить данные, необходимые для определения характеристик СМО при числе каналов n = 2 и n = 3, и по выражениям (5.8), (5.9) и (5.7) определить характеристики p_0, $P_{\text{необ}}$ и q.

4. Повторить пп. 2, 3 для вариантов СМО 2–4 табл. 5.2.

5. Используя формулы Эрланга (5.3)–(5.4) и выражения (5.5)–(5.7), рассчитать характеристики p_0, $P_{\text{необ}}$ и q для каждого варианта СМО (см. табл. 5.2) при числе каналов n = 1, 2 и 3 (считая потоки заявок простейшими).

6. Написать отчёт по работе.

5.4. Содержание отчета

1. Формулировка цели работы.

2. Описание исходных данных, характеризующих исследуемые варианты СМО.

3. Значения характеристик исследуемых СМО, полученные с использованием результатов моделирования и рассчитанные по формулам Эрланга при числе каналов n = 1, 2, 3.

4. Расчётные формулы Эрланга (приводятся по указанию преподавателя).

5. Анализ эффективности функционирования исследуемых СМО при различном числе каналов обслуживания.

6. Выводы. Привести заключение о причинах расхождения теоретических и реальных (по результатам моделирования) характеристик исследуемых СМО, сформулировать рекомендации по выбору числа каналов для исследуемых СМО.

Примечание. Ответ на п. 3 дать в виде табл. 5.3.

Таблица 5.3

Вариант СМО по табл. 5.2	Характеристика СМО					
	p_0, полученная		$P_{необ}$, полученная		q, полученная	
	по результатам моделирования	с использованием формул Эрланга	по результатам моделирования	с использованием формул Эрланга	по результатам моделирования, %	с использованием формул Эрланга, %
1 … 4	…	…	…	…	…	…

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровиков, С. М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности : учеб. для студ. инж.-техн. спец. вузов / С. М. Боровиков. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.

2. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М. : Наука, 1973. – 576 с.

6. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ ВЫБОРА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Цель работы: применить метод наименьших квадратов (МНК) для выбора математической модели, используемой для прогнозирования функционального параметра элемента или РЭУ методом экстраполяции.

6.1. Теоретические сведения

Предположим, что изменялись значения аргумента x и контролировался уровень функционального параметра y. Нанесём экспериментальные точки на координатную сетку (рис. 6.1).

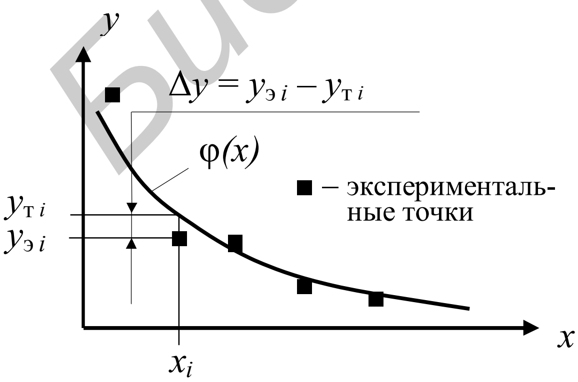


Рис. 6.1. Подбор линии методом наименьших квадратов

Совокупность точек на координатной плоскости можно рассматривать как корреляционное поле (диаграмму разброса) параметров x и y. Согласно методу наименьших квадратов (МНК) лучшей линией (функцией) в корреляционном поле является такая, для которой выполняется условие

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_{э\,i} - y_{т\,i})^2 = \sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2 = \min, \quad (6.1)$$

где $y_{эi}$ – экспериментальное значение y в i-й точке;

$y_{тi}$ – теоретическое значение y в i-й точке;

n – число экспериментальных точек.

Для получения $y_{т\,i}$ необходимо в функцию $\varphi(x)$, предположительно хорошо описывающую изменение y, подставить в качестве аргумента x значение x_i:

$$y_{тi} = \varphi(x = x_i). \tag{6.2}$$

Применение МНК сводится к определению коэффициентов функции $\varphi(x)$ по координатам экспериментальных точек. С получением приближающих математических моделей в виде двухпараметрических элементарных функций $y = \varphi(x, a, b)$, где a, b – коэффициенты, можно ознакомиться в [1, с. 61].

На практике при выборе лучшей функции $\varphi(x)$ обычно исследуют несколько функций из числа, предположительно хорошо описывающих изменение y. В качестве искомой модели берут ту функцию, которая отвечает критерию (6.1).

В задачах прогнозирования функциональных параметров методом экстраполяции в качестве x рассматривается время наблюдения параметра y. Исходной информацией является предыстория этого параметра, т. е. результаты наблюдения y в некоторые начальные моменты времени от t_1 до t_k (рис. 6.2).

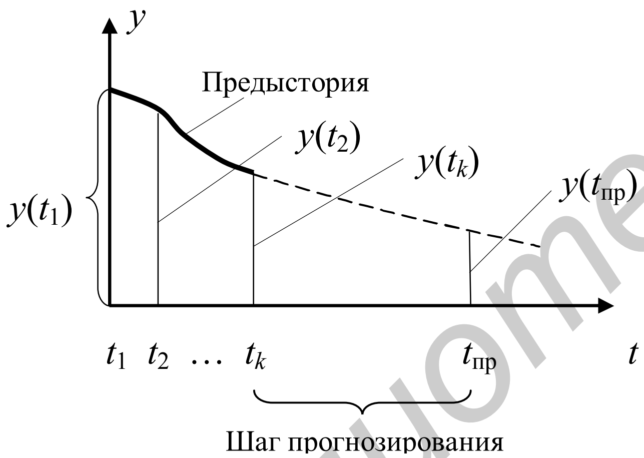


Рис. 6.2. К вопросу о прогнозировании методом экстраполяции

Обозначения на рис. 6.2:

$y(t_i)$ – наблюдаемое значение параметра y, соответствующее моменту времени t_i; $i = 1, 2, \ldots, k$;

k – число точек наблюдения y;

$t_{пр}$ – заданное время прогнозирования.

Цель прогнозирования состоит в том, чтобы по предыстории изменения y конкретного экземпляра РЭУ или элемента (см. рис. 6.2) указать значение y для будущего момента времени $t_{пр}$.

Решение задачи прогнозирования условно можно разбить на три этапа.

1. **Выбор математической модели прогнозирования**. В качестве такой модели $\varphi(t)$ используют математическое выражение, хорошо описывающее предысторию функционального параметра y. При этом необходимо, если представляется возможным, учесть физические закономерности изменения y.

2. **Экстраполяция функционального параметра** y. Состоит в предположении, что y за пределами предыстории будет изменяться по такому же закону, как и на участке предыстории. Заканчивается экстраполяция расчётом с использованием модели $\varphi(t)$ значения y, соответствующего времени $t_{пр}$:

$$y(t_{пр}) = \varphi(t = t_{пр}). \tag{6.3}$$

3. **Определение достоверности прогнозирования** [1]. О ней судят по доверительному интервалу для величины $y(t_{пр})$.

В ряде случаев интересуются не значением $y(t_{пр})$, а моментом времени $t_{пр} = t_{от}$, когда функциональный параметр рассматриваемого экземпляра достигнет нижнего или верхнего критического уровня $y_{кр}$. Тогда, не дожидаясь отказа, используя результаты прогнозирования, заблаговременно, ещё до момента времени отказа $t_{от}$ можно заменить изделие другим экземпляром. Такое **прогнозирование называют обратным.** Чтобы найти время $t_{от}$, нужно решить уравнение

$$\varphi(t = t_{от}) = y_{кр}. \tag{6.4}$$

6.2. Задание на экспериментальную часть лабораторной работы

В экспериментальной части лабораторной работы необходимо:

1. Используя режим «**Моделирование**» программы для ЭВМ ***lab6*** (папка **ММКТРЭС**), получить точки с координатами (x_i, y_i) на координатной сетке, воспроизводимой на экране дисплея (i = 1, 2,…, n); выбрать n = 5–7.

2. Анализируя расположение точек на координатной сетке, принять решение, какой элементарной функцией вида $y=\varphi$ (x, a, b), к которым имеется доступ в программе ***lab6***, может быть описано изменение параметра y.

3. Изменяя значения коэффициентов a и b функции, выбранной для описания y, попытаться получить линию (функцию), лучшую с точки зрения МНК.

4. Используя возможности программы ***lab6***, получить линию, которая является в действительности лучшей с точки зрения критерия (6.1) для функции рассматриваемого вида. Уточнить, насколько ваши действия были близки к получению лучшего решения.

5. Проверить, в какой степени хороши с точки зрения МНК другие виды функций из числа тех, к которым имеется доступ в программе для ЭВМ. Для этого нужно пп. 3–4 последовательно повторить для других функций.

6. Принять решение о том, какая функция, к которым имеется доступ в программе ***lab6***, является лучшей с точки зрения МНК. Для этого надо воспользоваться критерием (6.1).

В порядке приобретения опыта рекомендуется пп.1–6 выполнить несколько раз, получая всё новые и новые реализации экспериментальных точек. В отчёт по лабораторной работе следует включить результаты исследований лишь для одной из реализаций, но по всем функциям из числа, к которым имеется доступ в программе для ЭВМ ***lab6***.

7. Уточнить варианты предысторий, используемые для решения задач прогнозирования (табл. 6.1). Выбирается два варианта: нечётный – для определения прогнозного значения $y(t_{пр})$, чётный – для решения задачи обратного прогнозирования. Значение $t_{пр}$ принять равным 3000 ч, значения $y_{кр}$, необходимые для решения задачи обратного прогнозирования, указаны в табл. 6.1.

8. Используя режим **Ручное задание точек** программы для ЭВМ ***lab6***, ввести координаты точек предыстории функционального параметра y согласно варианту табл. 6.1.

---
[1] Вопросы оценки достоверности прогнозирования в данной лабораторной работе не рассматриваются.

9. Используя возможности программы ***lab6***, выбрать модель прогнозирования из числа элементарных функций, к которым имеется доступ. При выборе модели апробировать три функции из числа, предположительно неплохо описывающих предысторию.

Таблица 6.1

Время t, ч	Значение y (усл. ед.) для варианта							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	150	800	400	9,0	300	4,0	260	200
150	300	790	450	7,0	350	2,5	300	120
300	500	750	500	5,5	390	2,0	350	115
450	1000	730	1500	4,5	395	1,5	380	113
600	1200	710	2000	3,1	400	1,3	400	110
750	1250	708	2050	3,0	410	1,2	401	109
$y_{кр}$	–	650	–	2,0	–	0,7	–	80

Этот пункт задания выполняется отдельно для нечётного и чётного вариантов.

10. Используя полученные в п. 9 модели прогнозирования, получить прогнозные значения: $y(t_{пр})$ – для нечётного варианта, $t_{от}$ – для чётного варианта.

6.3. Содержание отчета

1. Формулировка цели работы.

2. Координатная сетка с нанесёнными на неё экспериментальными точками, полученными в режиме их автоматического задания, и график аппроксимирующей функции.

3. Результаты нахождения лучшей по МНК приближающей функции, систематизированные и сведённые в табл. 6.2.

4. Исходные данные (предысторию), используемые для получения прогнозного значения $y(t_{пр})$, согласно нечётному варианту табл. 6.1, координатная сетка с нанесёнными на неё точками предыстории и график модели прогнозирования, результаты в виде табл. 6.2 нахождения лучшей по МНК приближающей функции, используемой в качестве модели прогнозирования, и полученное прогнозное значение $y(t_{пр})$.

Таблица 6.2

Апробируемая функция	Коэффициенты		$S = \sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2$
	a	b	
1. $y = ax + b$ …	…	…	…

5. Исходные данные (предысторию) с указанием $y_{кр}$, используемые для решения задачи обратного прогнозирования, согласно чётному варианту табл. 6.1, координатная сетка с нанесёнными на неё точками предыстории и график модели прогнозирования, результаты в виде табл. 6.2 нахождения лучшей по МНК приближающей функции, используемой в качестве модели прогнозирования, и полученное прогнозное значение времени отказа $t_{от}$.

6. Выводы по работе.

ЛИТЕРАТУРА

Боровиков, С. М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности : учеб. для студ. инж.-техн. спец. вузов / С. М. Боровиков. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.

7. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
ТЕМА 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО ОПИСАНИЯ ПАРАМЕТРА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЕГО НАБЛЮДЕНИЯ

Цель занятия: изучить методы получения вероятностного описания параметра по результатам его экспериментального наблюдения; практически получить вероятностное описание параметра, выбрать и обосновать гипотезу о законе распределения параметра и проверить её справедливость с помощью статистического критерия согласия (Пирсона, Колмогорова).

7.1. Методические указания

С основными теоретическими сведениями по определению вероятностного описания параметра можно ознакомиться в лаб. работе №1.

Поясним, как находить интервальную оценку математического ожидания. Интервальной называют оценку, задаваемую диапазоном значений. Об этой оценке судят по доверительному интервалу, под которым понимают диапазон значений, в который с заданной вероятностью попадает истинное значение математического ожидания параметра. Указанную вероятность называют доверительной.

Если мы найдем доверительный интервал, то тем самым укажем интервальную оценку математического ожидания параметра.

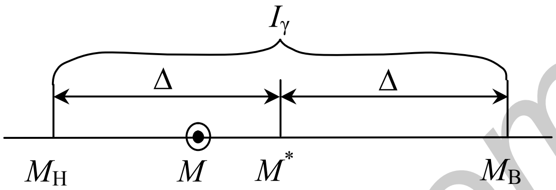


Рис. 7.1. К определению интервальной оценки

Пусть получена точечная оценка математического ожидания параметра x. Обозначим эту оценку как M_x^*.

Доверительный интервал строят обычно симметричным относительно точечной оценки M_x^*, как показано на рис. 7.1.

Здесь приняты следующие обозначения:

M^* – точечная оценка математического ожидания рассматриваемого параметра; для простоты записи знак x опущен;

M – истинное значение математического ожидания;

$M_{\text{н}}$ – нижняя граница доверительного интервала;

$M_{\text{в}}$ – верхняя граница доверительного интервала;

I_γ – доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности γ;

Δ – расстояние от точечной оценки M^* до границ доверительного интервала.

Доверительный интервал $I_{\text{г}}$ выражают как

$$I_\gamma = (M_{\text{н}}; M_{\text{в}}) = (M^* - \Delta; M^* + \Delta). \qquad (7.1)$$

Его нахождение даст интервальную оценку математического ожидания.

Для определения доверительного интервала I_γ надо знать значение Δ. Для приближённого её нахождения можно воспользоваться следующим приёмом. Из теории вероятностей известно, что даже при числе наблюдений n, стремящемся к 10–15, закон распределения оценки M^* оказывается близким к нормальному, поэтому примерно доверительный интервал можно определить как

$$I_\gamma = (M^* - \Delta;\ M^* + \Delta) = \left(M^* - t_\gamma \frac{\sigma^*(x)}{\sqrt{n}};\ M^* + t_\gamma \frac{\sigma^*(x)}{\sqrt{n}} \right), \tag{7.2}$$

где t_γ – коэффициент, зависящий от доверительной вероятности γ (табл. 7.1);
$\sigma^*(x)$ – оценка среднего квадратического отклонения параметра x.

Таблица 7.1

γ	0,8	0,85	0,9	0,95	0,99	0,9973	0,999
t_γ	1,282	1,439	1,643	1,960	2,576	3,000	3,290

Коэффициент t_γ показывает, какое количество средних квадратических отклонений величины M^* надо отложить влево и вправо от точечной оценки M^*, чтобы вероятность попадания истинного значения математического ожидания M в полученный диапазон была равна вероятности γ. В инженерных приложениях обычно используют $\gamma = 0{,}95$. В этом случае $t_\gamma = 1{,}96 \approx 2$.

Для точного определения доверительного интервала I_γ необходимо в выражении (7.2) заменить величину t_γ коэффициентом Стьюдента с $(n - 1)$ степенями свободы, где n – число наблюдений параметра.

Следует знать, что при большóм числе наблюдений для определения числовых характеристик $M^*(x)$ и $\sigma^*(x)$ в ряде случаев удобно пользоваться следующими приближёнными формулами:

$$M^*(x) = \sum_{i=1}^{k} x_{\text{ср}\,i}\, p_i^*; \tag{7.3}$$

$$\sigma^*(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_{\text{ср}\,i} - M_x^*)^2\, p_i^*}\ , \tag{7.4}$$

где k – число разрядов, на которые был разбит диапазон наблюдаемых значений параметра;
$x_{\text{ср}\,i}$ – среднее значение параметра, соответствующее i-му интервалу («представитель» i-го интервала);
p_i^* – частота попадания параметра в i-й интервал.

Кроме критерия Пирсона (χ^2), для оценки степени согласованности теоретического и статистического распределений на практике применяют и другие критерии. Вкратце поясним критерий А. Н. Колмогорова. Схема применения критерия следующая: строятся статистическая функция распределения $F^*(x)$ и предполагаемая теоретическая функция распределения $F(x)$, и определяется максимум модуля разности между ними:

$$D = \max \left| F^*(x) - F(x) \right|.$$

Далее определяется величина

$$\lambda = D\sqrt{n}$$

и по табл. 7.2 находится вероятность $P(\lambda)$ того, что за счёт чисто случайных причин максимальное расхождение между $F^*(x)$ и $F(x)$ будет не меньше, чем фактически наблюдаемое. При сравнительно больших $P(\lambda)$ гипотезу считают совместимой с опытными данными. Ограничение метода: возможность применения только в случаях, когда гипотетическое распределение $F(x)$ полностью известно заранее из каких-либо теоретических соображений.

Таблица 7.2

λ	P(λ)	λ	P(λ)	λ	P(λ)	λ	P(λ)	λ	P(λ)	λ	P(λ)
0,3	1,000	0,5	0,964	0,7	0,711	0,9	0,393	1,1	0,178	1,3	0,068
0,4	0,997	0,6	0,864	0,8	0,544	1,0	0,270	1,2	0,112	1,5	0,022

7.2. Задание

1. Используя приложение Microsoft Excel, сгенерировать результаты наблюдений параметра (обозначен как x), распределённого по нормальному закону (n = 100). Принять: среднее значение параметра = номер в списке группы ·10, стандартное отклонение (СКО) = 0,2 · среднее значение.
2. Обрабатывая результаты наблюдений, определить оценки M_x^* и σ_x^*.
3. Принять решение о числе интервалов, на которые будет разбит диапазон наблюдаемых значений параметра. Построить гистограмму распределения параметра при начальном, а при необходимости и при другом (сопоставимом) числе интервалов. Уточнить конечный вид гистограммы.
4. Построить статистическую функцию распределения (см. лаб. работу №1) для случая уточнённого числа интервалов.
5. Принять решение о выбранной гипотезе закона распределения параметра.
6. Проверить справедливость выбранной гипотезы с помощью статистических критериев согласия Пирсона и Колмогорова.

ЛИТЕРАТУРА

Боровиков, С. М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности : учеб. для студ. инж.-техн. спец. вузов / С. М. Боровиков. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.

8. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
ТЕМА 2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СЕТКИ, ИХ ПОСТРОЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ШАБЛОНОВ, ПРИМЕНЕНИЕ НА ПРАКТИКЕ

Цель задания: научиться строить вероятностные сетки с помощью шаблонов и применять их для проверки гипотез о законах распределения параметра.

8.1. Методические указания

С порядком применения вероятностных сеток для проверки гипотез о законе распределения параметра можно ознакомиться в лаб. работе №2.

На практике используют вероятностные сетки, тиражированные типографским способом, а при их отсутствии – построенные с применением шаблонов. С помощью шаблонов строят вероятностные сетки и в тех случаях, когда размер сетки должен отличаться от размеров промышленно выпускаемых сеток. В зависимости от закона распределения шаблоны используют для построения как оси ординат вероятностной сетки, на которой откладывают накопленные значения частот (значения статистической функции распределения $F^*(x)$), так и оси абсцисс, на которой откладывают значения параметра. Для получения шкалы функции $F^*(x)$ на узкой полоске бумаги отмечают точками вертикальный размер (нижнюю и верхнюю границы), который будет иметь вероятностная сетка. Затем полоску прикладывают к шаблону и, поддерживая параллельность его вертикальным линиям, перемещают её влево или вправо, до совпадения точек с крайними лучами. После чего на полоске делают отметки, совпадающие с промежуточными лучами, и проставляют цифровые значения. Полученная таким образом шкала используется для нанесения делений на вертикальную ось вероятностной сетки. Если вертикальный размер вероятностной сетки планируется бóльшим, нежели размер крайней левой вертикальной линии шаблона, то лучи продлеваются на нужное расстояние влево.

Ось значений параметра (ось абсцисс) для вероятностных сеток нормального и экспоненциального распределений принимается равномерной, а для логарифмически нормального распределения и распределения Вейбулла–логарифмической. Для построения логарифмической шкалы можно воспользоваться шаблоном, показанном на рис. 8.2.

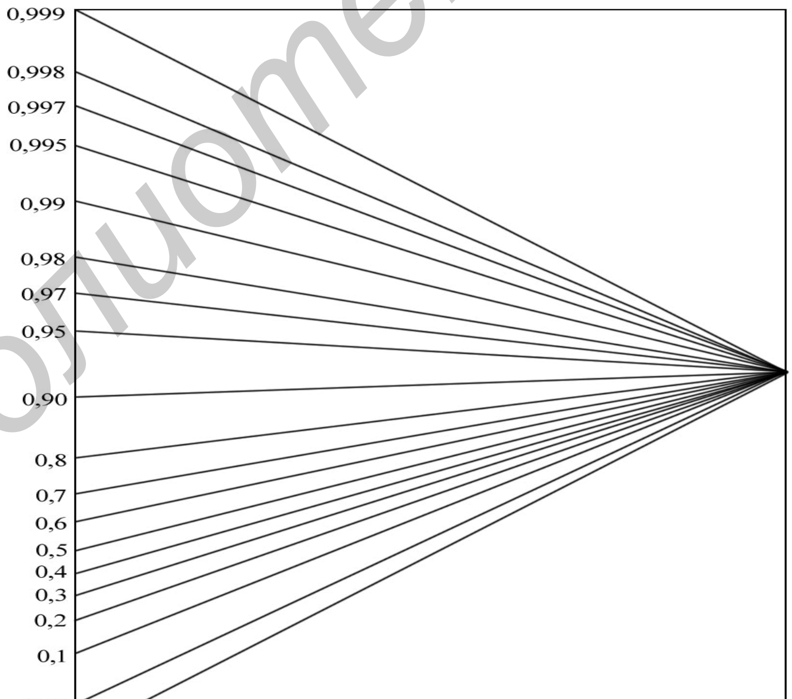


Рис. 8.1. Шаблон для построения шкалы накопленных частот вероятностной бумаги распределения Вейбулла (шкала параметра строится с помощью шаблона, приведенного на рис. 8.2)

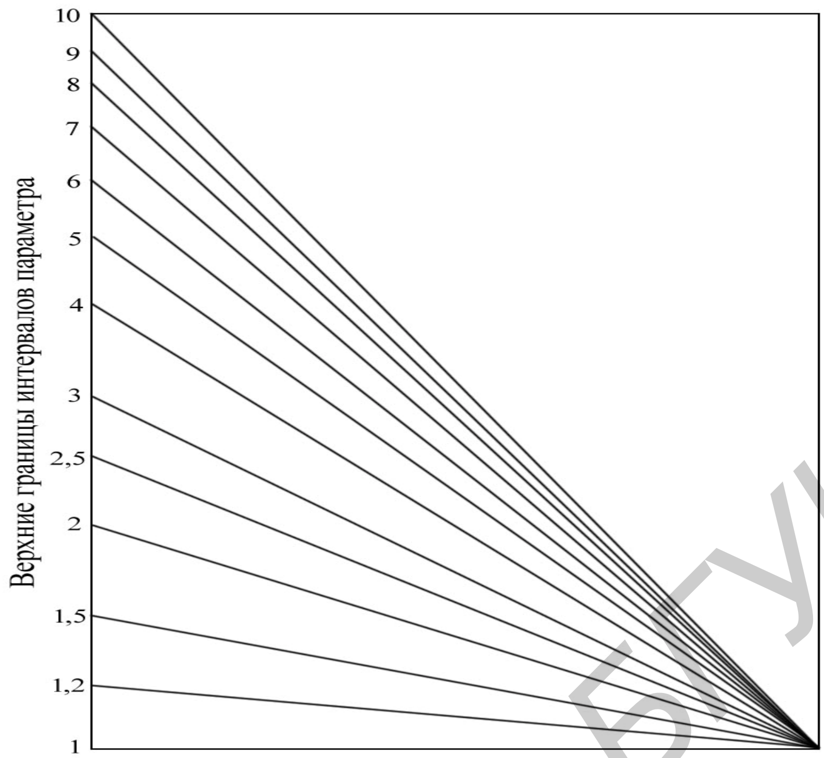


Рис. 8.2. Шаблон для построения шкалы параметра вероятностной бумаги логарифмически нормального распределения и распределения Вейбулла

8.2. Задание

1. Используя приложение Microsoft Excel, сгенерировать на ЭВМ 200…300 значений параметра, распределённого по нормальному закону. Принять: среднее значение = номер в списке группы · 10, стандартное отклонение = 0,2 · среднее значение.

2. С помощью шаблона построить вероятностную сетку нормального закона распределения.

3. Используя полученные значения параметра, определить координаты точек, наносимых на вероятностную сетку.

4. Нанести точки на вероятностную сетку и принять решение о правомерности нормального закона для сгенерированных экспериментальных данных.

5. Используя приложение Microsoft Excel, сгенерировать на ЭВМ 200…300 значений параметра, распределённого по экспоненциальному закону с параметром закона распределения, равным λ = 1/номер в списке группы. При моделировании воспользоваться формулой

$$x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - x_{R\,i});\ i = 1, 2, \ldots, (100\ldots500), \qquad (8.1)$$

где $x_{R\,i}$ – последовательность случайных равномерно распределённых чисел в диапазоне (0...1).

6. Получить координаты точек, наносимых на вероятностную сетку.

7. Нанести точки на вероятностную сетку нормального закона распределения и выяснить правомерность принятия гипотезы о нормальном законе распределения параметра.

8. С помощью шаблона построить вероятностную сетку экспоненциального закона распределения и проверить правомерность гипотезы об экспоненциальном распределении значений параметра, сгенерированных в п. 5.

9. Используя приложение Microsoft Excel, сгенерировать на ЭВМ 200…300 значений параметра, распределённого по закону Вейбулла с параметрами закона распределения: ρ= 1/номер в списке группы, β (коэффициент формы) = 0,3. Алгоритм генерирования случайных чисел:

$$x_i = -\frac{1}{\rho}\left[\ln(1 - x_{R\,i}\right]^{1/\beta},\ i = 1, 2, \ldots, (100\ldots500), \qquad (8.2)$$

где $x_{R\,i}$ – последовательность случайных равномерно распределённых чисел в диапазоне (0...1).

10. С помощью шаблонов построить вероятностную сетку закона Вейбулла.

11. По данным п. 9 получить координаты точек, наносимые на вероятностную сетку.

12. Нанести точки на вероятностные сетки экспоненциального распределения и закона Вейбулла, сделать вывод о правомерности гипотез о законе распределения параметра.

ЛИТЕРАТУРА

Боровиков, С. М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности : учеб. для студ. инж.-техн. спец. вузов / С. М. Боровиков. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.

9. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
ТЕМА 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ И ПРОВЕРКА ИХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЗНАЧИМОСТИ

Цель занятия: рассчитать коэффициент линейной корреляции с помощью прикладных программ для ЭВМ и проверить его статистическую значимость.

9.1. Методические указания

С понятием корреляции параметров, определением точечной оценки коэффициента корреляции и проверкой статистической значимости рассчитанной оценки можно ознакомиться в лаб. работе №1.

При $n < 50$, а также в случаях, когда $|r^*| \to 1$, для проверки статистической значимости r^* пользуются преобразованием Фишера, определяемым как

$$F = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r^*}{1-r^*} = \operatorname{arth}(r^*)\,. \qquad (9.1)$$

Для проверки значимости коэффициента корреляции вначале определяют доверительный интервал для F:

$$I_{\gamma}^{(F)} = \left(\underbrace{F - t_{\gamma}\sigma_F}_{F_{\text{н}}} ; \underbrace{F + t_{\gamma}\sigma_F}_{F_{\text{в}}} \right), \tag{9.2}$$

где σ_F – среднее квадратическое отклонение F;

t_{γ} – коэффициент, зависящий от доверительной вероятности γ (при $\gamma = 0{,}95$ значение $t_{\gamma} = 1{,}96$).

Фишер показал, что

$$\sigma_F = \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \tag{9.3}$$

Зная доверительный интервал F, с помощью обратного преобразования Фишера находят доверительный интервал для коэффициента корреляции:

$$r_{\text{н}} = \text{th}(F_{\text{н}})\,;\; r_{\text{в}} = \text{th}(F_{\text{в}})\,. \tag{9.4}$$

При решении практических задач можно пользоваться таблицей значений преобразования Фишера (табл. 9.1).

Таблица 9.1

r	F	r	F	r	F	r	F
0,02	0,020	0,37	0,388	0,58	0,662	0,79	1,7140
0,05	0,050	0,38	0,400	0,59	0,667	0,80	1,9860
0,10	0,100	0,39	0,411	0,60	0,693	0,81	1,1270
0,14	0,140	0,40	0,423	0,61	0,708	0,82	1,1881
0,16	0,161	0,41	0,435	0,62	0,725	0,83	1,1881
0,18	0,182	0,42	0,459	0,63	0,741	0,84	1,2212
0,20	0,202	0,43	0,459	0,64	0,758	0,85	1,2562
0,22	0,223	0,44	0,472	0,65	0,775	0,86	1,2933
0,24	0,244	0,45	0,484	0,66	0,792	0,87	1,3331
0,25	0,255	0,46	0,490	0,67	0,810	0,88	1,3758
0,26	0,266	0,47	0,510	0,68	0,8290	0,89	1,4219
0,27	0,276	0,48	0,523	0,69	0,8480	0,90	1,4722
0,28	0,287	0,49	0,536	0,70	0,8670	0,91	1,5275
0,29	0,298	0,50	0,549	0,71	0,8870	0,92	1,5890
0,30	0,309	0,51	0,562	0,72	0,9070	0,93	1,6584
0,31	0,320	0,52	0,576	0,73	0,9280	0,94	1,7380
0,32	0,331	0,53	0,590	0,74	0,9500	0,95	1,8318
0,33	0,342	0,54	0,604	0,75	0,9730	0,96	1,9433
0,34	0,354	0,55	0,618	0,76	0,9960	0,97	2,0923
0,35	0,365	0,56	0,632	0,77	1,2030	0,98	2,2976
0,36	0,376	0, 57	0,647	0,78	1,4540	0,99	2,6467
Свойство преобразования: arth($-r$) = – arth(r)							

9.2. Задание

1. С помощью приложения Microsoft Excel получить наблюдения 60-ти пар параметров.

Алгоритм получения наблюдений пар параметров (например x и z). Получить последовательность нормально распределённых случайных чисел x_i; i = 1, 2, …60. Принять: среднее значение параметра x = номер в списке группы · 10, стандартное отклонение (СКО) = 0,2 · среднее значение. Значения последовательности параметра z получить по формуле

$$z_i = \left(\sum_{k=1}^{12} x_{R\,k} \right) \sigma_z \sqrt{1 - r_{xz}^2} + M_z + r_{xz} \frac{\sigma_z}{\sigma_x} [x_i - M_x], \tag{9.5}$$

где M_x, M_z – математические ожидания (средние значения) параметров x и z;

σ_x, σ_z – стандартные отклонения (СКО) параметров x и z;

r_{xz} – коэффициент корреляции между x и z, принять r_{xz} = 0,5;

$x_{R\,k}$ – последовательность случайных равномерно распределённых чисел в диапазоне (0...1).

2. По данным наблюдений на прямоугольной координатной сетке построить диаграмму разброса параметров (корреляционное поле параметров).

3. С помощью функции **Корреляция** пакета **Анализ данных** приложения Microsoft Excel определить коэффициент корреляции между параметрами.

4. Проверить статистическую значимость полученного значения коэффициента корреляции и сделать выводы о возможности использовать это значение на практике.

5. Получить данные для построения графика зависимости критического значения коэффициента корреляции от числа наблюдений пар параметров при доверительных вероятностях 0,9; 0,95; 0,99. Число наблюдений пар параметров n принять равным 4, 6, 8, …, 40.

Примечание. Под критическим значением коэффициента корреляции понимают такое его значение, ниже которого рассчитанная точечная оценка коэффициента корреляции должна быть признана статистически незначимой (рис. 9.1).

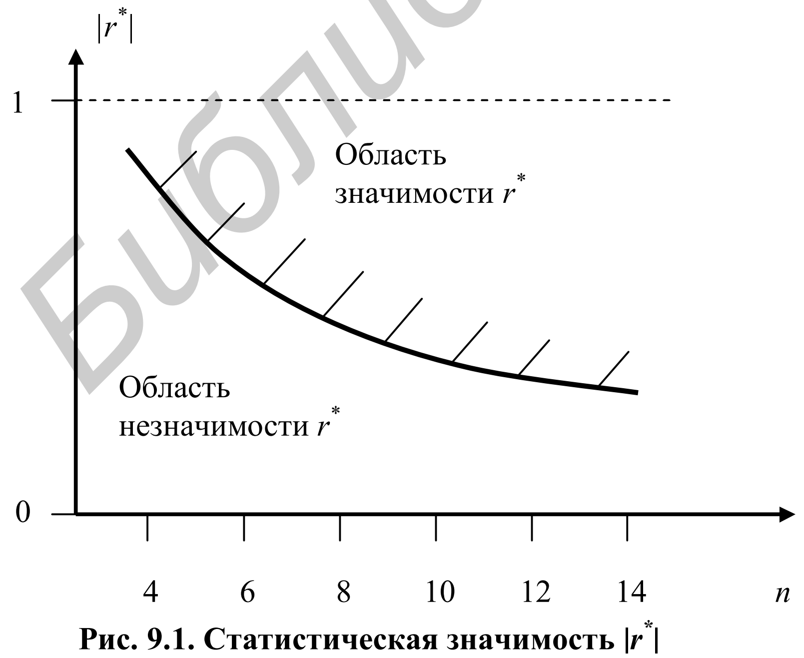


Рис. 9.1. Статистическая значимость $|r^*|$

ЛИТЕРАТУРА

Боровиков, С. М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности : учеб. для студ. инж.-техн. спец. вузов / С. М. Боровиков. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.

10. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
ТЕМА 4. ПОЛУЧЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЭУ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ АКТИВНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Цель занятия: научиться планировать дробный факторный эксперимент (ДФЭ), имеющий минимальное число опытов, необходимое для получения уравнения множественной линейной регрессии для функции отклика РЭУ (или технологического процесса); освоить методы статистической обработки результатов активных факторных экспериментов.

10.1. Методические указания

С планированием ДФЭ можно ознакомиться в теоретической части лаб. работы №4 или в учебной литературе [1, 2].

Перед выполнением обработки результатов активных факторных экспериментов рекомендуется осмыслить статистическую обработку результатов полного факторного эксперимента – ПФЭ, описанную в лаб. работе №3.

Следует помнить, что статистическая обработка результатов ДФЭ выполняется аналогично обработке результатов ПФЭ (см. лаб. работу №3) и отличается лишь числом и составом определяемых коэффициентов модели.

При построении математических моделей необходимо иметь в виду, что максимальное число коэффициентов, включаемых в модель, должно быть не более чем $N – 1$, где N – число опытов (строк) матрицы плана.

10.2. Задание

1. Ознакомиться с методом планирования дробного факторного эксперимента (см. лаб. работу №4, а при необходимости и лаб. работу №3).

2. Построить план ДФЭ, имеющий минимальное число опытов, достаточное для получения линейного описания функции отклика РЭУ (выходного параметра) в соответствии с данными лабораторной работы №4. При выборе исходных факторов учесть информацию о силе эффектов произведения факторов. Информацию получить путём анализа схемы РЭУ.

3. Сгенерировать на ЭВМ результаты полного факторного эксперимента (ПФЭ) типа «2^k» при $k = 3$. Число серий параллельных опытов выбрать равным $n = 4$.

Результаты каждого опыта с учётом серий опытов считать распределёнными по нормальному закону. При генерировании результата опыта, соответствующего разным сериям, принять: среднее значение опыта = (номер опыта матрицы планирования + номер студента в списке группы), стандартное отклонение (СКО) = 0, 02 · среднее значение опыта.

4. Выполнить статистическую обработку результатов опытов ПФЭ. Для функции отклика РЭУ получить неполный квадратичный полином.

5. Сгенерировать на ЭВМ результаты ДФЭ, спланированного в п. 2. Число серий параллельных опытов принять $n = 3$.

При генерировании результатов каждого опыта с учётом трёх серий использовать метод, описанный в п. 3.

6. Выполнить статистическую обработку результатов опытов. Для функции отклика РЭУ получить линейный полином. В случае неадекватности линейного полинома добавить в него нелинейные слагаемые и проверить адекватность новой модели.

Литература

1. Боровиков, С. М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности : учеб. для студ. инж.-техн. спец. вузов / С. М. Боровиков. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.

2. Боровиков, С. М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности. Сборник задач : учеб. пособие для вузов / С. М. Боровиков, А. В. Погребняков. – Минск : БГУИР, 2001. – 124 с.

11. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
ТЕМА 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ ИЗВЕСТНОМ ВИДЕ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Цель занятия: применить один из методов спуска (метод Хука–Дживса) для решения задачи безусловной оптимизации при известном виде целевой функции.

11.1. Методические указания

В методах нулевого порядка для определения оптимальных значений параметров не требуется использование производных целевой функции. Направление оптимизации определяется лишь значениями самой целевой функции.

При описании алгоритма метода Хука–Дживса приняты такие обозначения:

$X[\ldots]$ – вектор оптимизируемых параметров для итерации, указанной в скобках;

$x_i\,[\ldots]$ – значение i-го оптимизируемого параметра для итерации, указанной в скобках;

n – число оптимизируемых параметров;

$F(X[\ldots])$ – значение целевой функции, найденное для вектора оптимизируемых параметров для итерации, указанной в скобках.

Алгоритм метода Хука–Дживса как одного из методов нулевого порядка состоит в следующем.

1. Задаются значениями координат $x_i[0]$ начальной точки $X[0]$ движения (спуска) к оптимуму, приращениями координат Δx_i, наименьшими допустимыми значениями ε_i величин Δx_i, $i = 1, \ldots, n$.

2. Полагают, что $X[0]$ – базовая точка $X^{\text{Б}}$, и вычисляют значение $F(X^{\text{Б}})$.

3. Циклически изменяют каждую координату $x_i^{\text{Б}}$ базисной точки $X^{\text{Б}}$ на значение Δx_i, т. е. $x_i[k] = x_i^{\text{Б}} + \Delta x_i$; $x_i[k] = x_i^{\text{Б}} - \Delta x_i$, где $k = 1, 2, \ldots$ – номер итерации. При этом вычисляют значения $F(X[k])$ и сравнивают их со значениями $F(X^{\text{Б}})$. Если $F(X[k]) < F(X^{\text{Б}})$, то соответствующая координата x_i приобретает новое значение, вычисленное по одному из приведённых выражений. В противном случае значение этой координаты остаётся неизменным. Если после изменения последней n-й координаты $F(X[k]) < F(X^{\text{Б}})$, переходят к п. 4, в противном случае – к п. 7.

4. Полагают, что $X[k]$ является новой базисной точкой $X^{\text{Б}}$, и вычисляют значение $F(X^{\text{Б}})$.

5. Осуществляют спуск из точки $X[k]$ к точке $X[k+1]$ по выражению

$$x_i[k+1] = 2x_i[k] - x_i^{\text{Б}},$$

где $x_i^{\text{Б}}$ – координаты предыдущей базисной точки.

Вычисляют значение $F(X[k+1])$.

6. Аналогично п. 3 циклически изменяют каждую координату точки $X[k+1]$, осуществляя сравнение соответствующих значений функции $F(X)$ со значением $F(X[k+1])$, полученным в п. 5. После изменения последней координаты сравнивают соответствующее значение функции $F(X[k])$ со значением $F(X^{\text{Б}})$, полученным в п. 4. Если $F(X[k]) < F(X^{\text{Б}})$, то переходят к п. 4, в противном случае – к п. 3. При этом в качестве базисной используют последнюю из полученных базисных точек.

7. Сравнивают значения Δx_i и ε_i. Если $\Delta x_i \le \varepsilon_i$, то вычисления прекращают. В противном случае уменьшают значения Δx_i и переходят к п. 3.

11.2. Задание

1. Изучить численный метод безусловной оптимизации нулевого порядка – метод прямого поиска (метод Хука–Дживса).

2. В порядке приобретения опыта применить метод Хука–Дживса для нахождения оптимальных значений параметров x_1, x_2, x_3 в случае целевой функции $F = (x_1 - 3)^2 + (x_1 - 5)^2 + (x_1 - 7)^2 \rightarrow \min$, где оптимальные значения параметров x_1, x_2, x_3 равны $x_{1\text{опт}} = 3$; $x_{2\text{опт}} = 5$; $x_{3\text{опт}} = 7$.

3. Получить у преподавателя индивидуальное математическое выражение целевой функции $F = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ и с помощью метода Хука–Дживса найти оптимальные значения оптимизируемых параметров x_1, x_2, x_3, считая, что оптимум соответствует условию $F \rightarrow \min$.

Литература

1. Боровиков, С. М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности : учеб. для студ. инж.-техн. спец. вузов / С. М. Боровиков. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.

2. Фурунжиев, Р. И. Применение математических методов и ЭВМ. Практикум : учеб. пособие для вузов / Р. И. Фурунжиев, Ф.М. Бабушкин, В. В. Варавко. – Минск : Выш. шк., 1988. – 191 с.

12. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
ТЕМА 6. ПОЛУЧЕНИЕ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Цель занятия: получить целевую функцию и решить задачу условной оптимизации на примере силового трансформатора.

12.1. Методические указания

В качестве целевой функции F рассматривается либо масса М, либо стоимость Ц броневого трансформатора. В качестве оптимизируемых параметров рассматриваются ширина c и высота h окна магнитопровода из электротехнической стали для размещения катушки с обмотками (рис. 12.1).

В процессе решения задачи оптимизации требуется получить выражение для целевой функции $F(c, h)$ и найти такие значения размеров c и h, при которых масса М или цена Ц трансформатора минимальна, но площадь окна (произведение c на h) достаточна для размещения обмоток и размер c такой, что обеспечивается необходимый зазор между обмотками и магнитопроводом для обеспечения теплового режима.

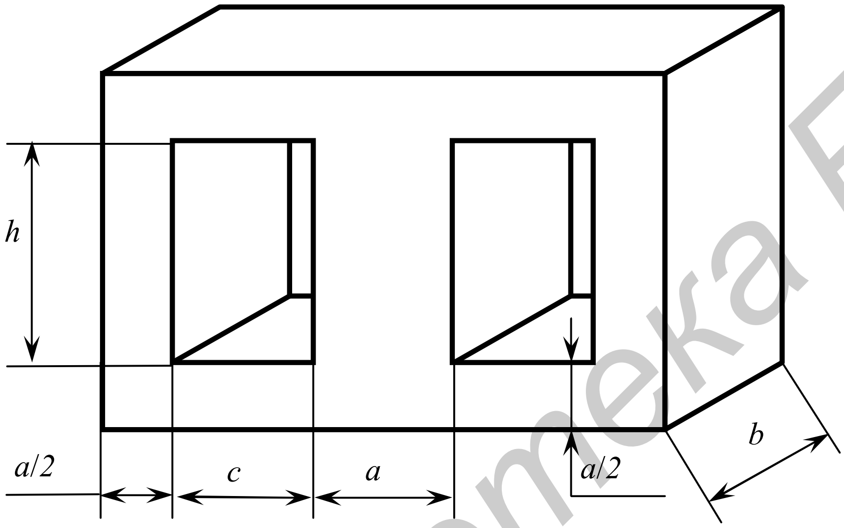


Рис. 12.1. Магнитопровод броневого трансформатора

Исходные данные для задачи оптимизации приведены в табл. 12.1.

Таблица 12.1

Вариант	Сечение сердечника		Мощность вторичной обмотки P_2, Вт	Напряжение вторичной обмотки U_2, В	Параметры, используемые в качестве целевой функции
	a, мм	b, мм			
1	20	20	30	5	M, Ц
2	20	25	35	12	M, Ц
3	20	32	40	5	M, Ц
4	20	40	50	5	M, Ц
5	25	25	63	12	M, Ц
6	25	32	90	24	M, Ц
7	25	40	100	24	M, Ц
8	32	32	100	27	M, Ц
9	32	40	120	12	M, Ц
10	32	50	160	24	M, Ц
11	32	63	190	36	M, Ц

При построении целевой функции и функций, задающих ограничения, рекомендуется пользоваться выражениями, приведёнными в табл. 12.2. Пояснение параметров формул дано в табл. 12.3.

Таблица 12.2

Формула	Номер	Формула	Номер
$P_2 = U_2 I_2$	(12.1)	$P_1 = 1{,}25 P_2$	(12.9)
$I_1 = \dfrac{P_1}{U_1}$	(12.2)	$I_2 = \dfrac{P_2}{U_2}$	(12.10)
$N_1 \approx \dfrac{45}{S_с}$; $[S_с] = см$	(12.3)	$N_2 \approx \dfrac{55}{S_с}$; $[S_с] = см$	(12.11)
$S_с = ab$	(12.4)	$w_1 = U_1 N_1$	(12.12)
$w_2 = U_2 N_2$	(12.5)	$d_{м\,i} = 1{,}13\sqrt{\dfrac{I_i}{j_i}}$	(12.13)
$h_{сл} = h - 2(t_к + t_з)$	(12.6)	$w_{сл\,i} = \dfrac{h_{сл} k_у}{d_{из\,i}}$	(12.14)
$n_{сл\,i} = \dfrac{w_i}{w_{сл\,i}}$	(12.7)	$t_i = \left[n_{сл\,i} d_{из\,i} + (n_{сл\,i} - 1) t_{из}\right] k_{раз\,i}$	(12.15)
$l_1 = 2(a+b) + 2\pi\left(\dfrac{t_1}{2} + t_з + t_к\right)$	(12.8)	$l_2 = 2(a+b) + 2\pi\left(\dfrac{t_2}{2} + t_1 + t_з + t_к\right)$	(12.16)
$k_{раз\,i} = \left[(d_{из\,i} - 0{,}8)^2 + 2{,}5\right]^{0{,}064} + 0{,}03\left(\dfrac{b}{a} - 1\right) + 0{,}05$; $[d_{из\,i}]$ = мм			(12.17)

Таблица 12.3

Параметр	Пояснение
P_1, P_2	Мощности первичной и вторичной обмоток
U_1, U_2	Напряжение первичной и вторичной обмоток
N_1, N_2	Число витков, приходящееся на один вольт для первичной и вторичной обмоток
I_1, I_2	Ток первичной и вторичной обмоток
$S_с$	Сечение магнитопровода
w_1, w_2	Число витков первичной и вторичной обмоток
$d_{м\,i}$	Диаметр провода по меди i-й обмотки
$d_{из\,i}$	Диаметр провода с изоляцией i-й обмотки
j_i	Допустимая плотность тока в i-й обмотке
$t_{из}$	Толщина межслоевой изоляции
$t_з$	Зазор между магнитопроводом и каркасом катушкой
$t_к$	Толщина элементов каркаса катушки
l_1, l_2	Средняя длина витка первичной и вторичной обмоток
$h_{сл}$	Высота обмоток

Окончание табл. 12.3

$w_{сл\ i}$	Число витков в одном слое i-й обмотки
$n_{сл\ i}$	Число слоёв в i-й обмотке
$k_у$	Коэффициент укладки провода обмоток
$k_{раз\ i}$	Коэффициент разбухания i-й обмотки

При получении выражений для ограничений необходимо иметь в виду, что ширина окна c должна быть такой, чтобы между обмотками и магнитопроводом оставался зазор Δ не менее 2…3 мм.

В табл. 12.4 приводятся типовые значения диаметров обмоточных проводов круглого сечения с учётом эмалевой изоляции (марка провода ПЭВ-2).

Таблица 12.4

$d_м$, мм	$d_{из}$, мм	$d_м$, мм	$d_{из}$, мм	$d_м$, мм	$d_{из}$, мм	$d_м$, мм	$d_{из}$, мм	$d_м$, мм	$d_{из}$, мм
0,21	0,25	0,41	0,47	0,62	0,69	0,86	0,95	1,74	1,85
0,23	0,28	0,44	0,50	0,64	0,72	0,90	0,99	1,81	1,93
0,25	0,30	0,47	0,53	0,67	0,75	0,93	1,02	1,88	2,00
0,27	0,32	0,49	0,55	0,59	0,77	0,96	1,05	1,95	2,07
0,29	0,34	0,51	0,58	0,72	0,80	1,00	1,11	2,02	2,14
0,31	0,36	0,53	0,60	0,74	0,83	1,50	1,61	2,10	2,23
0,33	0,38	0,55	0,62	0,77	0,86	1,56	1,67	2,26	2,39
0,35	0,41	0,57	0,64	0,80	0,89	1,61	1,73	2,44	2,57
0,38	0,44	0,59	0,66	0,83	0,92	1,68	1,79		

12.2. Задание

1. Получить вариант задания (см. табл. 12.1). Уточнить, какой показатель используется в качестве целевой функции, какие параметры рассматриваются как оптимизируемые, на какие параметры будут наложены ограничения и каков характер этих ограничений. Разобраться с ограничением, которое имеет место в задаче.

2. Осмыслить формулировку задачи оптимизации: найти такие значения параметров c и h, при которых масса (или стоимость) трансформатора окажется минимальной, но при этом размер окна (произведение параметров c и h) будет достаточен для размещения первичной и вторичной обмоток.

3. Используя примерные выражения, приведённые в табл. 12.2, выполнить электрический и конструктивный расчёт трансформатора. Для выбора допустимой плотности тока в обмотках использовать выражение

$$j_i = 0{,}44 \cdot \ln(P_i) + 4{,}8; \ \left[j_i\right] = \text{А/мм}^2, \ [P_i] = \text{Вт}.$$

При выполнении конструктивного расчёта принять:

$$k_у = 0{,}9; \ t_{из} = 0{,}05 \text{ мм}; \ t_з = 1{,}5 \text{ мм}; \ t_к = 1{,}5 \text{ мм}.$$

4. Пользуясь формулами табл. 12.2, получить выражение для целевой функции.

Значения плотностей электротехнической стали $\rho_с$ и меди обмоточных проводов $\rho_м$ принять равными

$$\rho_с = 7{,}7 \text{ г/см}^3,\ \rho_м = 8{,}93 \text{ г/см}^3.$$

Стоимость меди $ц_м$ и электротехнической стали $ц_с$ принять равными

$$ц_м = 80 \text{ у.е./кг},\ ц_с = 8 \text{ у.е./кг}.$$

5. Получить математическое выражение, описывающее ограничение:

$$c - (t_1 + t_2 + t_к + t_з) \le \Delta;\ \Delta = 2\ldots3 \text{ мм}.$$

6. Используя учебную программу для ЭВМ, методом случайного поиска найти оптимальные значения параметров *c* и *h*. Дать физическую трактовку результатам решения.

Примечание. По указанию преподавателя может быть использован и другой метод оптимизации [2].

Литература

1. Боровиков, С. М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности : учеб. для студ. инж.-техн. спец. вузов / С. М. Боровиков. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.

2. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учеб. пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – 3-е изд. – М. : Высш. шк., 2008.

13. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
ТЕМА 7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель занятия: изучить метод динамического программирования в применении к решению задач оптимизации и использовать этот метод для практического решения задачи оптимального резервирования.

13.1. Методические указания

С методом динамического программирования в применении к задачам оптимального резервирования можно ознакомиться в [1, 2]. При получении выражения для функции, задающей ограничение (надёжности), следует считать, что блоки видов 1,2 и 3 с точки зрения надёжности соединены последовательно (рис. 13.1).

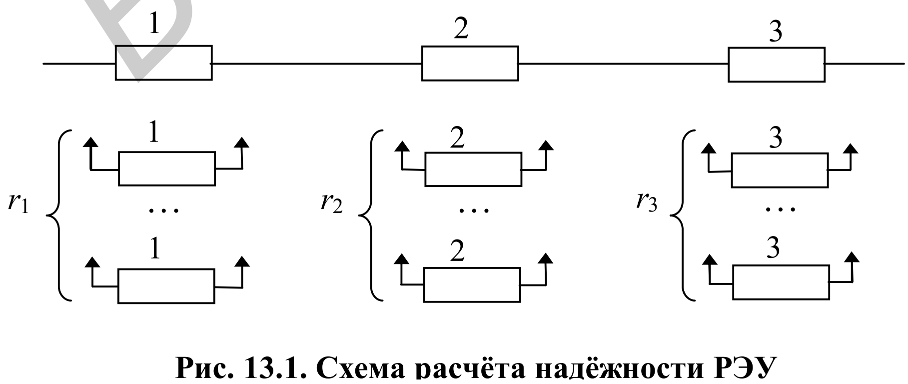


Рис. 13.1. Схема расчёта надёжности РЭУ

13.2. Задание

1. Осмыслить постановку следующей задачи. РЭУ включает три блока. Требуется методом динамического программирования определить количество резервных блоков каждого вида, обеспечивающих заданный уровень надёжности, а именно: для вероятности отказа РЭУ q в течение заданного времени $t_з$ должно выполняться условие $q \leq 0{,}05$, но суммарная стоимость (или масса, или объём) РЭУ с учётом резервирования должна быть минимальной. Вероятность отказа, стоимость, масса и объём, приходящиеся на один блок, приведены в табл. 13.1.

Таблица 13.1

Блок	Вероятность отказа элемента за время $t_з$ для варианта:				Стоимость блока C_i, у. е. для варианта:				Масса блока M_i, кг для варианта:				Объём блока V_i, дм^3 для варианта:			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	0,12	0,13	0,14	0,15	16	18	20	26	1,5	2,5	1,5	1,8	1,8	1,5	1,3	1,4
2	0,15	0,19	0,25	0,22	24	14	18	24	1,8	0,8	1,1	2,0	0,8	1,8	1,8	0,9
3	0,17	0,14	0,15	0,10	25	20	25	20	1,1	1,6	1,9	1,3	1,1	1,3	1,5	1,8

В процессе постановки задачи уточнить, какой технико-экономический показатель рассматривается в качестве целевой функции, какой характер оптимума, какие параметры являются оптимизируемыми, на какой технико-экономический показатель накладывается ограничение и каков характер этого ограничения.

2. Получить математическое выражение для целевой функции F.

3. Анализируя схему расчёта надёжности РЭУ (см. рис. 13.1), получить математическое выражение для функции, задающей ограничение.

4. Решить задачу оптимизации методом динамического программирования.

5. Дать физическую трактовку результатам решения.

Литература

1. Боровиков, С. М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности : учеб. для студ. инж.-техн. спец. вузов / С. М. Боровиков. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.

2. Боровиков, С. М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности. Сборник задач : учеб. пособие для вузов / С. М. Боровиков, А. В. Погребняков. – Минск : БГУИР, 2001. – 124 с.

14. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
ТЕМА 8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Цель занятия: определить основные характеристики для системы массового обслуживания (СМО) с отказом и СМО смешанного типа с ограничением длины очереди.

14.1. Методические указания

Важнейшими характеристиками систем массового обслуживания являются вероятность необлуживания заявки $P_{\text{необ}}$; относительная пропускная способность q; вероятность простоя СМО $P_{\text{пр}}$. Значение q обычно представляют в процентах. Справедливо выражение

$$q[\%] = (1 - P_{\text{необ}})\cdot 100\ \% = P_{\text{об}}\cdot 100\ \%,$$

где $P_{\text{об}}$ – вероятность обслуживания заявки.

Для определения указанных характеристик СМО в случае простейшего потока поступающих заявок с плотностью λ могут быть использованы формулы Эрланга, позволяющие найти расчётные значения вероятностей состояний СМО в случае установившегося режима функционирования СМО (табл. 14.1).

Таблица 14.1

Вид СМО	Расчётные формулы вероятностей состояний p_k, p_{n+s}	Определение интересующих характеристик СМО	
		$P_{\text{необ}}$	$P_{\text{пр}}$
СМО с отказом	$p(x_k) = p_k = \dfrac{\alpha^k / k!}{\sum_{i=0}^{n} \alpha^i / i!}$; $0 \le k \le n$	$P_{\text{необ}} = p_n$	$P_{\text{пр}} = p_0$
СМО смешанного типа с ограничением длины очереди	$p(x_k) = p_k = \dfrac{\dfrac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{n} \dfrac{\alpha^i}{i!} + \dfrac{\alpha^n}{n!} \sum_{j=1}^{m} \left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^j}$; $0 \le k \le n$ $p(x_{n+s}) = p_{n+s} = \dfrac{\dfrac{\alpha^n}{n!}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s}{\sum_{i=0}^{n} \dfrac{\alpha^i}{i!} + \dfrac{\alpha^n}{n!} \sum_{j=1}^{m} \left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^j}$; $0 \le s \le m$	$P_{\text{необ}} = p_{n+m}$	$P_{\text{пр}} = p_0$

Примечание. В таблице приняты следующие обозначения:
x_k, x_{n+s} – соответствующие состояния СМО;
α – приведённая плотность заявок (иначе – коэффициент загрузки канала);
n – число каналов СМО;
m – число, ограничивающее количество заявок, стоящих в очереди.

$$\alpha = \lambda M(T_{\text{об}}),$$

где $M(T_{\text{об}})$ – математическое ожидание (среднее значение) времени обслуживания заявки.

Установившийся режим функционирования СМО для указанных СМО наступает всегда: теоретически при $t \to \infty$, практически – при $t = (4–5)\tau$, где τ – постоянная функционирования СМО (рис. 14.1).

На рис. 14.1 приняты следующие обозначения:

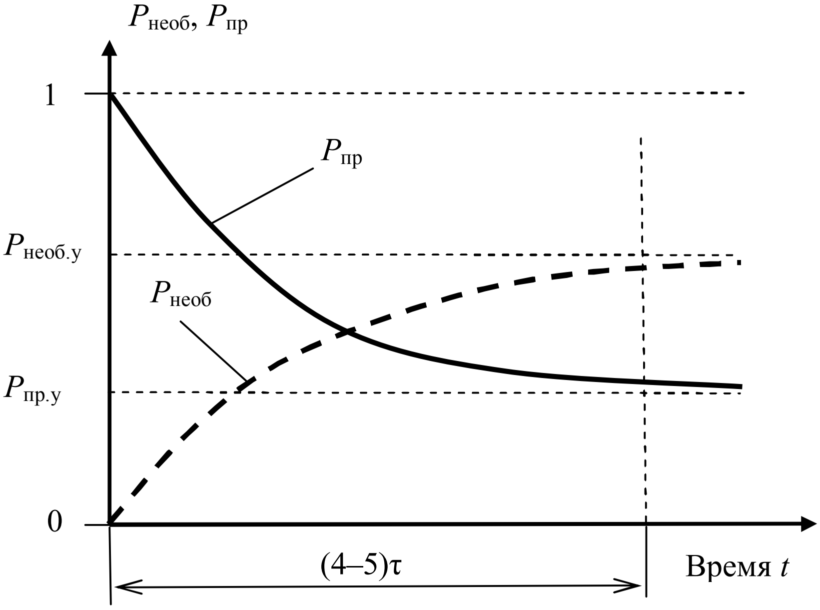


Рис. 14.1. К понятию установившегося режима функционирования СМО

$P_{необ.у}$, $P_{пр.у}$ – значения вероятности необслуживания заявки и вероятности простоя для установившегося режима функционирования СМО. При увеличении времени от нуля до ∞ вероятность необслуживания $P_{необ}$ возрастает экспоненциально от нуля до значения $P_{необ.у}$, а вероятность $P_{пр}$ убывает экспоненциально от единицы до $P_{пр.у}$. Для определения характеристик $P_{необ}(t)$ и $P_{пр}(t)$ для времени $t \le (4\ldots5)\tau$ рекомендуется воспользоваться выражениями

$$P_{необ}(t) = P_{необ.у}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \quad , \tag{14.1}$$

$$P_{пр}(t) = \left(1 - P_{пр.у}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + P_{пр.у} \quad . \tag{14.2}$$

Значение τ можно определить по формуле

$$\tau = \frac{1}{\lambda} + n \cdot M(T_{об}). \tag{14.3}$$

14.2. Задание

1. Осмыслить основные характеристики СМО: $P_{необ}$, $P_{пр}$, q [1, 2].
2. Определить основные характеристики для СМО с отказом и СМО смешанного типа с ограничением длины очереди для условий, указанных в табл. 14.2.

Таблица 14.2

Вариант	Вид СМО	Число каналов СМО n	Плотность потока поступающих заявок λ, заявок/ч	Число, ограничивающее длину очереди, m	Среднее время обслуживания одной заявки, мин	Время t, для которого интересуются характеристиками СМО
1	СОТК	2	0,5	3	90	1

2	ССТ	3	1,0	2	60	2

Окончание табл. 14.2

Вариант	Вид СМО	Число каналов СМО n	Плотность потока поступающих заявок λ, заявок/ч	Число, ограничивающее длину очереди, m	Среднее время обслуживания одной заявки, мин	Время t, для которого интересуются характеристиками СМО
3	СОТК	2	1,5	3	45	3
4	ССТ	3	2,0	2	30	1
5	СОТК	2	2,5	3	27	2
6	ССТ	3	3,0	2	25	3
7	СОТК	2	3,5	3	20	1
8	ССТ	3	4,0	2	18	2
9	СОТК	2	4,5	3	15	3
10	ССТ	3	5,0	2	12	1
11	СОТК	2	5,5	3	10	2
12	ССТ	3	6,0	2	9	3
13	СОТК	2	6,5	3	8	1
14	ССТ	3	7,0	2	6	2

Примечание. В табл. 14.2 приняты следующие сокращения: СОТК – СМО с отказом; ССТ – СМО смешанного типа с ограничением длины очереди.

3. Для вариантов, рассматриваемых в п. 2, определить число каналов каждой СМО, при котором вероятность необслуживания заявки составит $P_{\text{необ}} \leq 0{,}05$.

Литература

1. Боровиков, С. М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности : учеб. для студ. инж.-техн. спец. вузов / С. М. Боровиков. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.

2. Кофанов, Ю. Н. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности радиоэлектронных средств : учеб. для вузов / Ю. Н. Кофанов. – М. : Радио и связь, 1992. – 380 с.

15. РАСЧЁТНАЯ РАБОТА

ЗАДАНИЕ №1. ПОЛУЧЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ОДНОФАКТОРНОГО ПАССИВНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Цель задания: сгенерировать с помощью ЭВМ результаты опытов однофакторного пассивного эксперимента и, используя их, получить математическую модель объекта.

При генерировании результатов эксперимента приняты следующие обозначения:

x – параметр, влияющий на выходную характеристику объекта (РЭУ), рассматривается в качестве фактора;

y – выходная характеристика РЭУ, рассматриваемая в качестве функции отклика, называемой кратко – откликом;

n – число пар величин x и y, является числом экспериментальных точек; при выполнении расчётной работы принимается $n = 16$, если преподавателем не указано другое значение.

Математическая модель РЭУ представляет собой математическое выражение, описывающее в среднем изменение отклика y в зависимости от значения фактора x.

15.1. Теоретические сведения

Получение на основе экспериментальных данных уравнения, которое в среднем описывает изменение отклика y в зависимости от значений фактора x (одного или нескольких), называют регрессионным анализом. Последовательность проведения регрессионного анализа:

1. Формулировка задачи.
2. Уточнение выходного параметра y и определение параметра(ов), предположительно влияющих на y.
3. Сбор статистических данных (проведение эксперимента).
4. Выбор вида модели (уравнения регрессии).
5. Определение коэффициентов уравнения регрессии.
6. Оценка точности уравнения регрессии, включающая проверку статистической значимости уравнения регрессии в целом, т.е. оценку степени согласованности рассчитанных значений y результатам опытов эксперимента и проверку статистической значимости коэффициентов уравнения регрессии.
7. Уточнение и (или) улучшение модели.
8. Принятие решения об использовании построенной модели.

В случае наличия лишь одного фактора x полученную статистическую связь $y = \varphi(x)$ между x и y называют *простой регрессией*.

При выборе уравнения регрессии в виде выражения $y = \varphi(x, a, b)$ лучшей согласно методу наименьших квадратов является такая функция $\varphi(x, a, b)$, для которой выполняется условие

$$S = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b)]^2 = \sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2 = \min, \qquad (15.1)$$

где n – число экспериментальных точек (число пар величин x и y).

Запись $y = \varphi(x, a, b)$ подчёркивает то, что модель, описывающая изменение y в зависимости от x включает два неизвестных коэффициента (a и b), подлежащих определению.

В выражении (15.1) величину $\varphi(x_i, a, b)$ можно рассматривать как теоретическое значение y для i-й экспериментальной точки (опыта). Используя приёмы математического анализа функции S на минимум, путём решения с использованием формул Крамера системы двух уравнений с двумя неизвестными для определения коэффициентов a, b линейной модели

$$y = ax + b \tag{15.2}$$

могут быть получены формулы

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}; \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{15.3}$$

Имея формулы (15.3), задача специалиста сводится к тому, чтобы правильно подставить в них координаты экспериментальных точек. В данном случае коэффициенты a и b линейной функции вида (15.2) будут получены сразу.

Заключение о статистической значимости линейного уравнения регрессии экспериментальным данным в случае любого числа факторов k принимают по статистике F, имеющей распределение Фишера. В компьютерных программах Microsoft Excel и другие, используя наблюдаемые значения, её вычисляют как

$$F_{\text{расч}} = \frac{D_{\text{рег}}(y)}{D_{\text{ад}}(y)} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left[y_{i\,\text{расч}} - M^*(y)\right]^2}{k}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - y_{i\,\text{расч}}\right]^2}{n-(k+1)}}, \tag{15. 4}$$

где $D_{\text{рег}}(y)$ – объяснённая дисперсия – часть дисперсии зависимой отклика y, которая объяснена уравнением регрессии;

$D_{\text{ад}}(y)$ – остаточная дисперсия (иначе дисперсия адекватности) – часть дисперсии отклика y, которая не объяснена уравнением регрессии, её наличие является следствием действия неучтённых, в том числе и случайных факторов;

y_i – экспериментальное значение отклика в i-м опыте ($i = 1, 2, \ldots, n$);

$y_{i\,\text{расч}}$ – значение y, рассчитанное по построенной модели для i-го опыта;

n – число опытов эксперимента;

k – число факторов, используемых для получения уравнения регрессии (для простой линейной регрессии $k = 1$);

$M^*(y)$ – оценка математического ожидания отклика (среднее значение y), подсчитанная по результатам всех n опытов:

$$M^*(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}. \tag{15.5}$$

Гипотеза о наличии линейной регрессии между параметрами (факторами) и откликом y принимается, если выполняется условие

$$F_{\text{расч}} > F_{\text{кр}\,(\gamma;\, f1,\, f2)}, \tag{15.6}$$

где $F_{\text{кр}\,(\gamma;\, f1,\, f2)}$ – критическое (табличное) значение критерия Фишера, соответствующее доверительной вероятности γ и числу степеней свободы: для числителя выражения (15.4) – $f_1 = k$, для знаменателя – $f_2 = n - k - 1$. В случае простой линейной регрессии $k = 1$ и, следовательно, $f_1 = 1$ и $f_2 = n - 2$.

Если по F-критерию адекватными являются различные формы связи между x и y, то более удачной считают ту форму связи, которой соответствует максимальное значение расчётного критерия F.

Если условие (15.6) не выполняется, то гипотеза о наличии линейной регрессии отвергается и необходимо строить нелинейную регрессию.

После того как выполнена проверка статистической значимости регрессионного уравнения в целом, рекомендуется (особенно для многомерных зависимостей) осуществить проверку на статистическую значимость полученных коэффициентов уравнения регрессии.

Можно пользоваться любым из двух равноценных способов: построением доверительного интервала или проверкой по t-критерию Стьюдента. При использовании первого способа для рассматриваемого коэффициента (обобщенно обозначим как коэффициент c) необходимо получить интервальную оценку в виде доверительного интервала I_γ, соответствующего доверительной вероятности γ (в технике обычно γ = 0,95):

$$I_\gamma = (c^* - \Delta c;\; c^* + \Delta c), \tag{15.7}$$

где c^* – оценка коэффициента, найденная с использованием формул (15.3);

Δc – возможная ошибка, возникающая от замены истинного значения коэффициента его оценкой c^*.

Если в построенный доверительный интервал I_γ попадает точка со значением $c = 0$, то коэффициент c^* (его точечная оценка) признаётся статистически незначимым и, следовательно, слагаемое с этим коэффициентом из математической модели должно быть исключено.

При использовании второго способа вначале определяется расчётное значение t-критерия Стьюдента:

$$t_{\text{расч}} = \frac{|\,c|}{\sigma(c)}, \qquad 15.8)$$

где $\sigma(c)$ – среднее квадратическое отклонение коэффициента c.

Оценка c^* признаётся статистически значимой, если выполняется условие

$$t_{\text{расч}} > t_{\gamma\ \text{кр}}\ , \tag{15.9}$$

где $t_{\gamma\ \text{кр}}$ – критическое (табличное) значение критерия Стьюдента, соответствующее выбранной доверительной вероятности γ при числе степеней свободы f, с которым определялась оценка $\sigma(c)$.

Для модели (15.2) значения Δa и Δb (аналог величины Δc для коэффициентов a и b) могут быть найдены по выражениям [2]

$$\Delta a = t_{\gamma n-2}\sigma(a) = t_{\gamma,n-2}\sqrt{\frac{n\sigma_{\text{р}}^2}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}}\ ; \quad \Delta b = t_{\gamma n-2}\sigma(b) = t_{\gamma n-2}\sqrt{\frac{\sigma_{\text{р}}^2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}}, \tag{15.10}$$

где $\sigma(a)$, $\sigma(b)$ – средние квадратические ошибки (иначе – стандартные ошибки) соответственно коэффициентов a и b;

$\sigma_{\text{р}}$ – средняя квадратическая ошибка оценки уравнения регрессии; характеризует рассеивание экспериментальных точек относительно линии регрессии $y = ax + b$; в случае простой линейной регрессии $[\sigma_{\text{р}}]^2 = D_{\text{ад}}(y)$;

$t_{\gamma,n\text{-}2}$ – табличное значение критерия Стьюдента при доверительной вероятности γ и числе степеней свободы $f = n - 2$, с которым определялась величина $\sigma_{\text{р}}$.

Значение $\sigma_{\text{р}}$ рассчитывается по формуле

$$\sigma_{\text{р}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2}{n-2}}. \tag{15.11}$$

Об удачности линейного уравнения регрессии можно судить также по значению коэффициента детерминации R^2, определяемому по выражению

$$R^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[M^*(y) - y_{i\text{расч}}\right]^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[M^*(y) - y_i\right]^2}. \tag{15.12}$$

Справедливо неравенство $0 \le R^2 \le 1$. Коэффициент детерминации R^2 показывает, какая доля вариации отклика y объясняется изменениями фактора x. Чем ближе R^2 к единице, тем лучше функция y = ax+b описывает поведение отклика y. Если R^2 = 0,85, то модель объясняет наблюдаемые изменения y на

85%. Тем самым доля изменчивости y, определяемая выражением $1- R^2$, оказывается необъяснённой (влияние на y неучтенных в модели факторов). Считают, что модель удовлетворительно описывает y, если $R^2 \geq 0{,}8$.

Проверка адекватности построенной регрессионной модели исходным данным является обязательной. Если модель неадекватно отражает данные, модель считается неправильно выбранной и её выбор должен быть пересмотрен.

Для адекватной модели обычно рассчитывается характеристика точности, например, средняя относительная ошибка (в процентах):

$$\Delta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left|y_{i\,\text{расч}} - y_i\right|}{y_i}\cdot 100. \qquad (15.13)$$

Считают, что модель хорошо описывает поведение y, если $\Delta \leq 5$ %.

15.2. Методические указания по выполнению задания

При апробировании нелинейных элементарных функций $y = \varphi(x, a, b)$ их вначале путём преобразований приводят к линейному виду и, пользуясь формулами (15.3), находят коэффициенты полученной линейной функции. При этом в зависимости от вида исходной функции $\varphi(x, a, b)$ в формулы (15.3) в качестве x_i и y_i должны подставляться значения координат, полученные с учётом характера сделанных преобразований. Затем с учётом выполненных ранее преобразований осуществляют переход к коэффициентам a и b исходной нелинейной модели. Покажем описанную процедуру применительно к показательной функции.

Предположим, что лучшей с точки зрения метода наименьших квадратов является функция вида

$$y = be^{ax},\ b > 0. \qquad (15.14)$$

Прологарифмировав уравнение (15.14), получим

$$\ln y = ax + \ln b.$$

Введем обозначения $Y = \ln y$; $B = \ln b$. Тогда

$$Y = ax + B. \qquad (15.15)$$

Уравнение (15.15) есть уравнение прямой линии. Её коэффициенты a и B могут быть подсчитаны по формулам (15.3), используя в качестве значений y_i значения $\ln y_i$ ($i = 1, ..., n$). Совокупность x_i ($i = 1, ..., n$) используется без изменения.

В результате применения формул (15.3) коэффициент a определится сразу. Для определения коэффициента b необходимо воспользоваться преобразованием

$$b = e^{B}. \qquad (15.16)$$

С нахождением коэффициентов a и b других нелинейных элементарных функций можно ознакомиться в [1, с. 62–64].

Для выбора вида зависимости между x и y полезно построить и изучить диаграмму разброса (корреляционное поле) параметров x и y или (если это обеспечит наглядность) график, на котором изображены точки с координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n).

Проверку адекватности нелинейных моделей вида $y = \varphi(x, a, b)$ можно выполнить по аналогии с проверкой адекватности модели $y = ax + b$, принимая во внимание линейную модель, полученную после выравнивания нелинейной функции $y = \varphi(x, a, b)$ прямой линией.

В случае статистической незначимости одного из коэффициентов линейной или нелинейной моделей вида $y = \varphi(x, a, b)$ соответствующий коэффициент из модели удаляется, уточняется модель и выполняется проверка адекватности новой модели. Если статистически незначимыми окажутся оба коэффициента, а для некоторых функций – один из коэффициентов, то модель считается некорректной. В этом случае следует выбрать другой вид модели.

15.3. Задание

1. С помощью программы ***RZ*1.exe** в папке **ММКТРЭС** сгенерировать результаты однофакторного эксперимента – таблицу со значениями x и y.

2. На прямоугольную координатную сетку нанести точки с координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) и по виду диаграммы разброса (корреляционного поля) параметров x и y определиться с выбором трёх элементарных функций, с помощью которых можно описать зависимость между y и x. В число этих функций обязательно включить функцию вида $y = ax + b$ (линейную модель).

3. Используя инструмент **Регрессия**, включённый в надстройку **Анализ данных** программы **Microsoft Excel,** для линейной функции получить коэффициенты a и b. Свободный член линейного уравнения в итогах, выдаваемых программой **Microsoft Excel**, назван Y-пересечение.

4. С помощью F-статистики Фишера выяснить соответствие линейной модели экспериментальным данным (принять $\gamma = 0{,}95$).

Программа **Microsoft Excel** выводит не только расчётное значение F, но и информацию о значимости уравнения регрессии в предположении, что в него включены все коэффициенты. Число в соответствующей ячейке указывает максимальный уровень значимости (вероятность вида $\alpha = 1 - \gamma$**),** при котором по значению рассчитанной статистики F модель должна быть признана статистически значимой (адекватной) результатам эксперимента.

Уровень значимости α – это вероятность отвергнуть верную гипотезу (гипотезу о статистической значимости уравнения регрессии).

5. Выполнить проверку статистической значимости коэффициентов a и b линейной модели и с учётом этого при необходимости уточнить модель. Программа **Microsoft Excel** выводит расчётное значение t- критерия Стьюдента, а

также нижнюю и верхнюю доверительную границы для каждого из коэффициентов. По умолчанию инструмент **Регрессия** использует доверительную вероятность (уровень надежности) $\gamma = 0{,}95$.

Решение о статистической значимости коэффициентов может быть также принято по значению уровня значимости α (в интерпретации Excel это показатель *P*-значение). Коэффициент признается значимым (неслучайным) при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$, если для него *P*-значение не превышает числа 0,05. *P*-значения выводит программа **Microsoft Excel**.

6. В случае статистической значимости коэффициента a, независимо от принятого решения по коэффициенту b, по формуле (15.7) подсчитать коэффициент детерминации R^2 и дать трактовку его значения. Если статистически незначимым окажется коэффициент a, то сделать вывод о степени корректности модели и наметить дальнейшие действия по получению модели.

7. Для выбранной нелинейной функции применить метод выравнивания [1, с. 62–64], получить прямую линию и с помощью инструмента **Регрессия** пакета **Анализ данных** программы **Microsoft Excel** определить вначале коэффициенты прямой линии. Затем по F-статистике Фишера выяснить статистическую значимость этой линейной модели в целом и проверить статистическую значимость коэффициентов линейной модели. После чего с учётом преобразований, сделанных при выполнении выравнивания, найти коэффициенты a и b искомой нелинейной функции и сделать заключение о пригодности построенной нелинейной модели.

8. Повторить п. 7 для другой нелинейной модели, из числа выбранных при выполнении п. 2.

9. Для адекватных моделей рассчитать характеристику точности: среднюю относительную ошибку (в процентах) по формуле (15.13).

10. Написать отчёт по работе.

Примечания. 1. Табличное значение критерия Стьюдента, соответствующее доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ при числе степеней свободы $f = n - 2 = 16 - 2 = 14$, составляет $t_{\gamma,n-2} = 2{,}14$.

2. Табличное значение критерия Фишера, соответствующее доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ и числу степеней свободы $f_1 = 1$ и $f_2 = n - 2 = 28$, равно $F_{\text{кр}(\gamma;\,1,\,n-2)} = 4{,}20$.

15. 4. Содержание отчёта

1. Формулировка цели задания.

2. Результаты однофакторного эксперимента, сгенерированного на ЭВМ с указанием варианта (3 первых столбца табл. 15.1).

3. Диаграмма разброса (корреляционное поле) параметров x и y.

Таблица 15.1

Номер опыта	Значение x_i	Значение y		Разность Δy_i
		в эксперименте, y_i	подсчитанное по модели, $y_{\text{расч } i}$	
1 … n				

4. Информация об апробированных функциях, используемых в качестве математических моделей РЭУ. Эта информация должна обязательно включать запись математического вида моделей, значения коэффициентов моделей и указание об их статистической значимости. Представить в виде табл. 15.2.

Таблица 15.2

Модель	Коэффициент a		Коэффициент b		$S = \sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2$	Критерий Фишера		Решение о пригодности модели	Относительная ошибка Δ, %
	Значение	$t_{\text{расч}}$	Значение	$t_{\text{расч}}$		$F_{\text{расч}}$	$F_{\text{кр}}$		
1 … 2 … 3 …									

5. Значения $y_{\text{расч } i}$ и $\Delta y_i = y_i - y_{\text{расч } i}$, подсчитанные для i-го опыта по построенной математической модели, лучшей из числа апробированных (внести в табл. 15.1).

6. Значение коэффициента детерминации R^2 (для линейной модели).

7. Значение относительной ошибки уравнения регрессии, подсчитанной по формуле (15.13) для каждой модели (внести в табл. 15.1).

6. Выводы. Привести аргументированное заключение о модели, используемой на практике, или конкретные рекомендации по выбору модели в случае неадекватности апробированных функций с указанием дальнейших действий по получению новой модели.

Литература

1. Боровиков, С. М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности : учеб. для студ. инж.-техн. спец. вузов / С. М. Боровиков. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.
2. Герасимович, А. И. Математическая статистика / А. И. Герасимович. – Минск : Выш. шк., 1983. – 279 с.
3. Зажигаев, Л. С. Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента / Л. С. Зажигаев, А. А. Кишьян, Ю. И. Романиков. – М. : Атомиздат, 1978. – 232 с.

16. РАСЧЁТНАЯ РАБОТА
ЗАДАНИЕ №2. ПОЛУЧЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ МНОГОФАКТОРНОГО ПАССИВНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Цель задания: сгенерировать на ЭВМ результаты опытов многофакторного эксперимента и получить математическую модель РЭУ с помощью прикладных программ для ЭВМ.

16.1. Теоретические сведения

В инженерной практике при числе факторов $k \geq 2$ популярны регрессионные модели в виде полиномов. Особый интерес представляет полином первой степени, называемый линейным полиномом. Его математический вид

$$y = a_0 + a_1 x_1 + ... + a_k x_k = a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i , \qquad (16.1)$$

где y – выходной параметр РЭУ, рассматривается как функция отклика;

$x_1, ..., x_k$ – первичные параметры (параметры элементов и окружающей среды, питающие напряжения и т. д.), рассматриваются в качестве факторов;

k – число факторов, принятых во внимание;

$a_0, a_1, ..., a_k$ – коэффициенты модели, определяемые из эксперимента.

Модель вида (16.1) называют также уравнением множественной линейной регрессии.

При получении уравнения множественной линейной регрессии предпосылки регрессионного анализа и его проведения полностью совпадают с простой линейной регрессией. Особенностью множественной регрессии является наличие возможной сильной корреляции между факторами, её называют мультиколлинеарностью [3]. Явление мультиколлинеарности считают установленным, если модуль коэффициента парной корреляции между какими-то двумя факторами больше 0,8. В этом случае из двух коррелированных факторов в регрессионный анализ следует включить один из них.

Для инженерных приложений заслуживает внимания пошаговый регрессионный анализ, предполагающий исключение из модели (16.1) факторов (слагаемых), влияние которых на отклик y статистически незначимо. Исключение из модели факторов основано на проверке статистической значимости соответствующих коэффициентов a_i по t-критерию Стьюдента. Если незначимыми оказываются сразу два или несколько коэффициентов регрессии, то из модели удаляется тот фактор, которому соответствует минимальное значение t. Затем получают коэффициенты нового уравнения регрессии. Процедура проверки значимости и построения нового уравнения повторяется до тех пор, пока все коэффициенты регрессии не окажутся значимыми.

В настоящее время результаты многофакторных пассивных экспериментов, как правило, обрабатывают на ЭВМ с помощью библиотечных программ (пакетов прикладных программ).

16.2. Методические указания по выполнению задания

Исходными данными являются результаты пассивного многофакторного эксперимента в виде данных, приведённых в табл. 16.1.

Таблица 16.1

Номер опыта	Первичный параметр (фактор), x_j				Выходной параметр (отклик), y
	x_1	x_2	…	x_5	
1 … n					… … …

Число опытов принимается $n = 30$. Число факторов $k = 5$. Конкретные исходные данные, то есть значения факторов x_j ($j = 1, \ldots, 5$) и y, в каждом опыте студент получает с помощью учебной программы для ЭВМ (имя программы ***RZ2.exe*** в папке **ММКТРЭС**) путём ввода с клавиатуры календарного года, номера группы и порядкового номера студента в списке группы.

Коэффициенты a_0, a_1, …, a_k уравнения вида (16.1) получают с помощью приложения ***Microsoft Excel***. Это приложение выполняет расчёт t-критерия Стьюдента, используемого для проверки значимости коэффициентов, а также F-критерия Фишера, используемого для проверки согласованности математической модели (16.1) с экспериментальными данными. Приложение ***Microsoft Excel*** выполняет расчёт F-критерия Фишера в предположении, что в модели присутствуют все полученные коэффициенты линейного полинома.

Если незначимыми окажутся не более трёх коэффициентов, то рекомендуется из окончательного вида модели (полинома) слагаемые с этими коэффициентами удалить и проверить адекватность построенной модели. Проверка адекватности модели (конечного вида полинома) в этом случае может быть выполнена по критерию Фишера F, определяемому в виде отношения [4]

$$F_{\text{расч}} = \frac{D_{\text{ад}}(y)}{D(y)}, \tag{16.2}$$

где $D_{\text{ад}}(y)$ – дисперсия адекватности отклика y, характеризует расхождение между результатами опытов и расчётными значениями y, полученными по построенной модели (конечному виду полинома);

$D(y)$ – полная (общая) дисперсия отклика, характеризует разброс экспериментальных значений y относительно среднего значения отклика.

Дисперсии $D_{\text{ад}}(y)$ и $D(y)$ подсчитывают по формулам

$$D_{\text{ад}}(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\mathrm{y_i} - \mathrm{y_{i\,расч}}\right]^2}{n-d}, \tag{16.3}$$

$$D(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - M^*(y)\right]^2}{n-1}, \tag{16.4}$$

где y_i – экспериментальное значение отклика в i-м опыте;

$y_{i\text{ расч}}$ – расчётное (по построенной модели) значение отклика в i-м опыте;

n – число опытов эксперимента;

d – число значимых коэффициентов в построенной модели;

$M^*(y)$ – оценка математического ожидания отклика (среднее значение y), подсчитанная по результатам всех опытов:

$$M^*(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \quad . \tag{16.5}$$

Решение об адекватности или неадекватности модели принимают по условию

$$F_{\text{расч}} < F_{\text{кр}}, \tag{16.6}$$

где $F_{\text{кр}}$ – критическое (табличное) значение критерия Фишера, найденное для заданной доверительной вероятности γ (обычно 0,95) при числе степеней свободы для числителя f_1 и знаменателя f_2 выражения (16.2): $f_1 = N - d$, $f_2 = n - 1$.

В табл. 16.2 приведены значения $F_{\text{кр}}$ для доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$. Для получения $F_{\text{кр}}$, соответствующего значениям f_1 и f_2, не приведённым в табл. 16.2, можно воспользоваться линейной интерполяцией.

Таблица 16.2

$f_2 = n-1$	$f_1 = n - d$				
	5	10	20	30	40
5	5,050	4,735	4,558	4,496	4,464
10	3,326	2,978	2,774	2,700	2,661
20	2,711	2,348	2,124	2,039	1,994
30	2,534	2,165	1,932	1,841	1,792
40	2,446	2,077	1,839	1,744	1,693

Если условие (16.6) выполняется, то построенная модель адекватна результатам эксперимента. При невыполнении условия (16.6) модель считают неадекватной, пользоваться ею на практике нельзя. В этом случае для получения модели следует продолжить пошаговый регрессионный анализ, описанный выше.

16.3. Задание

1. С помощью программы ***RZ2*.exe** сгенерировать исходные данные – результаты пятифакторного эксперимента (см. табл. 16.1).

2. С помощью инструмента **Корреляция** пакета **Анализ данных** программы ***Microsoft Excel*** определить коэффициенты парной корреляции между факторами. Используя полученную корреляционную матрицу, уточнить, имеются ли пары параметров, определённые из факторов x_i (i = 1, 2, …, 5), для которых $|r| \geq 0{,}8$. При необходимости из каждой пары сильно коррелированных параметров для процедуры регрессионного анализа оставить по одному.

3. Используя результаты эксперимента, с помощью инструмента **Регрессия** пакета **Анализ данных** программы ***Microsoft Excel*** получить точечные оценки коэффициентов a_0, a_1, …, a_k уравнения множественной линейной регрессии вида (16.1). При этом фактор(ы), исключённый из регрессионного анализа в п. 2, не участвует в качестве исходных данных инструмента **Регрессия**.

4. Выбрав доверительную вероятность $\gamma = 0{,}95$, проверить статистическую значимость коэффициентов уравнения множественной линейной регрессии, полученного после выполнения первого шага регрессионного анализа. Для проверки значимости коэффициентов воспользоваться t-критерием Стьюдента или нижней и верхней доверительной границами. Сформировать уравнение регрессии, оставив в нём слагаемые только со статистически значимыми коэффициентами.

5. С помощью критерия Фишера, рассчитываемого с использованием выражений (16.2)–(16.5) выяснить пригодность построенной в п. 4 линейной модели для практики (принять $\gamma = 0{,}95$).

6. Независимо от результатов проверки адекватности, выполненной в п. 5, продолжить пошаговый регрессионный анализ до получения уравнения линейной регрессии, в котором все коэффициенты окажутся значимыми.

7. С помощью F-статистики, выводимой инструментом **Регрессия**, уточнить адекватность конечного вида уравнения регрессии (принять $\gamma = 0{,}95$).

8. Для моделей, полученных в п.п. 4 и 6, рассчитать среднюю относительную ошибку Δ (в процентах) по формуле (15.13). Ошибку Δ рассчитать независимо от адекватности моделей.

16.4. Содержание отчёта

1. Формулировка цели задания.

2. Таблица, содержащая результаты пятифакторного пассивного эксперимента (см. табл. 16.1).

3. Значения коэффициентов регрессии и результаты проверки их статистической значимости, полученные при реализации процедуры пошагового регрессионного анализа. Для описания результатов регрессионного анализа, полученных на каждом шаге, использовать табл. 16.3.

Таблица 16.3

Коэффициент модели	Точечная оценка коэффициента	Критерий Стьюдента		Решение о статистической значимости коэффициента
		расчётное значение, $\lvert t_{расч}\rvert$	критическое (табличное) значение, $t_{кр}$	
…	…	…	…	…

4. Математический вид уравнения регрессии, полученного после выполнения первого шага регрессионного анализа и содержащего только слагаемые со статистически значимыми коэффициентами (см. п. 4 подразд. **16.3. Задание**). Рассчитанное по выражению (16.2) и критическое значения критерия Фишера, используемые для проверки адекватности этого уравнения.

5. Конечный вид уравнения регрессии, полученного с помощью пошагового регрессионного анализа. Расчётное (с помощью инструмента **Регрессия**) и критическое значение критерия F, используемые для проверки адекватности этого уравнения регрессии.

6. Значения относительной ошибки (в процентах), подсчитанные по формуле (15.13) для уравнений регрессии, приведённых в пп. 4 и 5.

7. Выводы. Привести аргументированное заключение о математической модели, которой следует пользоваться на практике, или указать рекомендуемые действия инженера.

Примечание. Ответы на пп. 4–6 привести в табл. 16.4.

Таблица 16.4

Уравнение регрессии (модель)	Использование критерия Фишера				$S = \sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2$	Средняя относительная ошибка Δ, %	Коэффициент R^2
	$F_{расч}$	$F_{кр}$	Условие адекватности	Заключение об адекватности			
			$F_{расч} > F_{кр}$ или $F_{расч} < F_{кр}$				

Литература

1. Боровиков, С. М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности : учеб. для студ. инж.-техн. спец. вузов / С. М. Боровиков. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.

2. Герасимович, А. И. Математическая статистика / А. И. Герасимович. – Минск : Выш. шк., 1983. – 279 с.

3. Вайну, Я. Я. Корреляция рядов динамики / Я. Я. Вайну. – М. : Статистика, 1977. – 119 с.

4. Зажигаев, Л. С. Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента / Л. С. Зажигаев, А. А. Кишьян, Ю. И. Романиков. – М. : Атомиздат, 1978. – 232 с.

Св. план 2010, поз. 3

Учебное издание

Боровиков Сергей Максимович
Бересневич Андрей Игоревич
Шнейдеров Евгений Николаевич и др.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В КОНСТРУИРОВАНИИ И ТЕХНОЛОГИИ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ

Методическое пособие
к практическим занятиям
для студентов специальностей
«Моделирование и компьютерное проектирование РЭС»
и «Проектирование и производство РЭС»
всех форм обучения

Редактор Н. В. Гриневич
Корректор Е. Н. Батурчик
Компьютерная верстка М. В. Гуртатовская

Подписано в печать	Формат 60x84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».	Отпечатано на ризографе.	Усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 4,5.	Тираж 150 экз.	Заказ 345.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ № 02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП № 02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6